高中







数学奥林匹克竞赛编辑部编
数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

数学奥林匹克竞赛标准教材

周沛耕　王博程　编著

北京教育出版社
文津出版社

责任编辑：印志建　解重庆　洪　梅

图书在版编目（CIP）数据

数学奥林匹克竞赛标准教材．高中/数学奥林匹克竞赛编辑部编．—北京：文津出版社，2004

ISBN 7-80554-470-0

Ⅰ．数…　Ⅱ．数…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 062487 号

高中　数学奥林匹克竞赛标准教材

数学奥林匹克竞赛编辑部编

*

北京教育出版社　
文　津　出　版　社　出版

（北京北三环中路 6 号）

邮政编码：100011

网　址：www.hph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

北京奥林文化艺术中心经销

网　址：www.ao-lin.com.cn

北京乾沣印刷有限公司印刷

*

787×1092 毫米　16 开本　57 印张　1575 千字

2004 年 8 月第 1 版　　2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-80554-470-0/G·76

定价：69.00 元



数学奥林匹克竞赛编辑部编
数学奥林匹克竞赛专家委员会审定

高中
数学奥林匹克竞赛
标准教材

周沛耕　王博程　编著

北京教育出版社
文津出版社

作者简介

周沛耕

多届教育部理科实验班数学主讲教师、中国数学奥林匹克高级教练、“国务院特殊贡献专家”、“全国优秀教师”、北京市首届人民教师（十杰）奖章获得者、多届全国中学生数学奥林匹克竞赛北京队主教练、领队、“北京市数学特级教师”。直接辅导的学生不仅有北京市高考理科状元，更有在国际大赛中取得 6 枚金牌和 1 枚银牌的成绩。在 32 届国际数学奥林匹克竞赛中共有 3 名学生代表中国出战，占国家队的一半。

序　言

高中阶段的数学教育有普及和提高的双重功能，在我国高中数学教学大纲和高中数学新课程标准框架内的各种版本的高中数学教材，其主要功能是普及数学文化，为升学作准备，因而高中数学教学水平和对学生的能力要求不可避免地受制于高考命题水准。虽然高考命题不断改进、创新，但是由于高考目标和能力要求的局限性，就在一定程度上造成了为适应高考的高中课内数学教学的重复性、被动性、疲劳性，这是低水平的运行态势。无疑对青少年的智力开发和创新能力、研究能力的培养不利。

对那些学有余力或者不满足于应试教育模式的有才华或者有潜在聪慧条件的学生来说，应该给他们一些合适的资料，应该对他们进行适当的课外数学教育，帮助他们更深刻地认识数学本质，提高他们学数学的兴趣，增强他们的竞争力，开展数学竞赛并且编写竞赛教程就是必要且急需的事了。

炎黄子孙聪明。这从我国于1985年首次参加国际中学生数学竞赛（简称IMO）至今一直处于不败之地的事实足以证明。从一定意义上讲，中国是名符其实的数学超级大国。一方面，我国的青少年聪明。另一方面，我国广大中小学数学教师和普教战线上的数学工作者敬业和资深，如果再加上优质的研读资料，一定会最大限度地开发青少年的智力，提高中华民族的数学素质。虽然每年代表中国参加IMO的幸运儿只有一个队，6名选手，但是假设允许我国选派两个队，三个队，四个队，五个队……，这些队也一定是超一流的国际强队。

学习竞赛数学，要尽量充分地吮吸数学大树的营养，同时又必须扎实地磨练，多研究题目、多总结，要始终按奥林匹克精神和科学精神去研读，去奋斗，去攀登。

相信你通过研究本书一定会实现美好理想！

数学奥林匹克竞赛编辑部

2004年6月

编者的话

本书涵盖了近年国内、国际上数学竞赛培训工作的最新成果和研究资料。主要目标定位在帮助广大高中学生学好数学，增强素质，冲刺高考，提高他们的竞赛成绩和竞争力，不论读者是否有参加数学竞赛的兴趣，都能从本书中受益。

在题目的分析与解答中有一定创见，有独到的精彩之处，利于激发读者的数学兴趣和聪明才智。

笔者长期在竞赛数学第一线指导高考备考和各级数学集训队，并联系了全国范围内大量有才华的年轻有为的优秀教练员，汇集了他们的解题思想和解题经验，把中学数学日常教学与竞赛数学培训完美地结合在一起。

本书既能帮助读者迎战我国高中数学全国联赛一试，备战高考，又有指导学生参加全国联赛二试，参加国家数学奥林匹克竞赛（OM）和国际数学奥林匹克竞赛（IMO）的专项训练，既适用于在数学学习中有兴趣有余力的高中学生，又适用于他们的指导老师

为便于读者分阶段学习使用，本书分为基础篇和专题篇两部分。基础篇针对全国高中联赛一试，兼顾高中数学总复习，有助于准备高考；专题篇则是典型的数学集训队中为提高选手的竞争力而必备的竞赛数学知识、方法和技能。阅读本书时，应与高中教科书和近3年全国高中数学联赛题以及近3年全国数学高考题结合起来。

基础篇适用于在7～10月间阅读，专题篇适用于8月～下一年5月间阅读。

为充分地从本书中吸取有益营养，提倡多读几遍，如果高一、高二、高三读3轮，效果更好。

研读本书应当有毅力，有详实的计划，不能时断时续，以保证思维的连贯性和循序渐进性。最好能约上几位在数学方面有浓厚兴趣的志同道合的朋友结成研读小组，一起研读。

愿本书能成为影响你一生的良师益友。

参与本书编写及审校的还有：闫达伟、刘瑞、文静、黄辉、马艳、支颖梅、高云平、刘惠敏、关雪等，在此谨表谢意。

周沛耕

2004年6月于北京大学

第一部分 高中数学奥林匹克预备教材

第二部分 高中数学奥林匹克专题教材

第一部分
高中数学奥林匹克预备教材

第一章

集合与简易逻辑

§1.1　知识要点与基本方法

1. 集合中元素具有三条特性:确定性、互异性、无序性.

2. 若非空有限集 A 中有 n 个元素,则有如下结论:

(1)A 的子集的个数是 2^n;

(2)A 的"非空子集"和"真子集"的个数都是 2^n-1;

(3)A 的"非空真子集"的个数是 2^n-2.

3. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$,则 A 的所有子集中元素之总和为:

$S=2^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 其中 $a_i\in\mathbf{Z}^+$

4. 集合间的交集,并集,补集有以下性质:

(1)$A\cup A=A,A\cap A=A$(幂等律)

(2)$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$(交换律)

(3)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律)

(4)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$(分配律)

(5)$A\cap(B\cup A)=A,A\cup(A\cap B)=A$(吸收律)

(6)$\overline{\overline{A}}=A$　　其中 A 是全集 Ⅰ 的子集(对合律)

(7)设全集为 U,A、B 为 U 的子集,则

$C_{\mathrm{U}}(A\cup B)=(C_{\mathrm{U}}A)\cap(C_{\mathrm{U}}B)$

$C_{\mathrm{U}}(A\cap B)=(C_{\mathrm{U}}A)\cup(C_{\mathrm{U}}B)$

5. 深刻理解两个集合相等的概念,并能解决相关的问题. 一般的思路和方法如下:

(1)验证两集合的元素相同,即两集合中各元素对应相等;

(2)利用定义,证两集合互为子集;

(3)若是用描述法表示的集合,则两集合的属性能够互推(充要条件),即等价;

(4)对于两个有限集合,则元素个数相等,各元素之和相等,之积相等是两集合相等的必要条件.

6. 有限集合的元素个数,容斥原理.

记有限集合 M 的元素个数为 $n(M)$. 如下集合 A、B、C 等以及全集 U 都是有限集. 由图 Ⅰ－1－1 和图 Ⅰ－1－2 可知:

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$;

$n[C_{\mathrm{U}}(A\cup B)]=n(U)-n(A\cup B)$

$\qquad=n(U)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$;

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$

$\qquad-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$n[C_{\mathrm{U}}(A\cup B\cup C)]=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$$= n(U) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$$

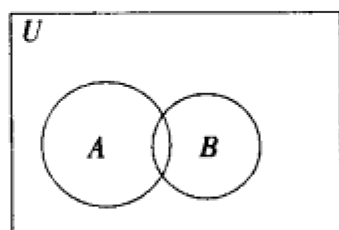


图 Ⅰ－1－1

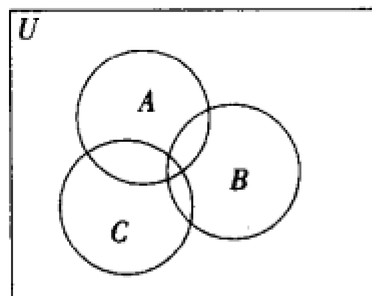


图 Ⅰ－1－2

一般地,有关于 n 个有限集合的并集合或并集的补集的元素个数的类似公式成立,称该结论为容斥原理.

7. 要掌握含绝对值的不等式和一元二次不等式的基本解法.

8. 掌握一元二次方程根的分布的如下六个充要条件.

设一元二次方程为 $ax^2 + bx + c = 0(a > 0)$

(1) 方程二根一个大于 x_0,另一个小于 x_0

$$\Longleftrightarrow ax_0^2 + bx_0 + c < 0$$

(2) 方程二根都大于 x_0

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0 \end{cases}$$

(3) 方程二根都小于 x_0

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < x_0 \end{cases}$$

(4) 方程二根都在两数 m、$n(m < n)$ 之内

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} am^2 + bm + c > 0 \\ an^2 + bn + c > 0 \\ b^2 - 4ac \geqslant 0 \\ m < -\dfrac{b}{2a} < n \end{cases}$$

(5) 只有一个根在 $m,n(m < n)$ 之间

$$\Longleftrightarrow (am^2 + bm + c)(an^2 + bn + c) < 0.$$

(6) 方程二根在二数 m、$n(m < n)$ 之外

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} am^2 + bm + c < 0 \\ an^2 + bn + c < 0 \end{cases}$$

9. 逻辑联结词.

理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义,把握它们与集合中的并集、交集、补集的对应关系.不含逻辑联结词的命题是简单命题,由简单命题与逻辑联结词构成的命题是复合命题,复合命题的构成形式是

p 或 q

p 且 q

非 p,即命题 p 的否定.

其中 $p,q,\cdots$ 表示命题.

判断一个复合命题的真假,一般分为如下三个步骤:

第一,确定复合命题的构成形式;

第二,判定其中各简单命题的真假;

第三,利用真值表判断复合命题的真假.

真值表如下:

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

10. 四种命题.

(1) 原命题为真,它的逆命题和否命题不一定为真,它的逆否命题一定为真.

(2) 由于互为逆否命题同真同假,所以四种命题为真(或假)的个数是偶数 0 或 2 或 4.

11. 反证法.

(1) 反证法的步骤:

反证法是一种间接证法.用反证法证明一个命题"$A \Rightarrow B$"可以分为 3 步:

1°) 反设:假设 B 不成立,则 $\neg B$ 成立.

2°) 归谬:从"A 且非 B"入手$\xrightarrow{\text{进行正确推理}}$推出矛盾.

3°) 结论:由矛盾知假设"B 不成立"是错误的,从而 B 成立.

【注】 第(2)步归谬是反证法的核心.

其一,归谬入手点是从"原命题的否定"入手,特别,有时只以"非 B"就够了.

其二,归谬到最后产生的矛盾有三种情况.

1°)"非 p 为真"与"原始题设 p"构成矛盾;

2°)"q 为真"与"假设""非 q 为真"矛盾;

3°)"恒假命题".

(2) 反证法适用的场合.

从最优选择的角度考虑,下面 8 种情况使用反证法是方便的:

1°) 命题的结论以否定形式出现时;

2°) 命题的结论以"至多"、"至少"的形式出现时;

3°) 命题的结论以"无限"的形式出现时;

4°) 命题的结论以"惟一"、"共点"、"共面"的形式出现时;

5°) 关于存在性命题;

6°) 逆命题;

7°) 从已知出发,能推出所知甚少的时候;

8°) 一个学科开始形成或建立的时候.

总之,正难则反,直接的东西较少,较抽象,较困难时,其反面常会较多,较具体,较容易.

(3) 掌握反证法的前提是"正确反设",否则推理论证得再好也劳而无功.现将一些常用的"结论的

否定形式”列表如下.

原结论词	反设词	原结论词	反设词
是	不是	至少有一个	没有一个
都是	不都是	至多有一个	至少有二个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $n-1$ 个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有 $n+1$ 个
对所有 x 成立	存在某 x 不成立	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对所给 x 不成立	存在某 x 成立	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

12. 充要条件.

(1) 定义:

如果已知“$p \Rightarrow q$”,则称 p 是 q 的充分条件;

如果已知“$q \Rightarrow p$”,则称 p 是 q 的必要条件.

如果既有“$p \Rightarrow q$”,又有“$q \Rightarrow p$”,就记作 $p \Longleftrightarrow q$,则称 p 是 q 的充要条件.

(2) 充分条件,必要条件的内涵.

充分条件内涵:“有了足够,换亦可能”.

必要条件内涵:“缺了不成,有了不够”.

§1.2 赛题精讲

例 1 (1996.全国高中数学联赛一试,第二大题第 1 小题)求集合 $A=\left\{x \mid -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, 1 < x \in N\right\}$ 的真子集的个数

【分析】 关键对集合元素满足的条件的不等式进行等价变形.

解: $\because A=\left\{x \left| -1 \leqslant \log_{\frac{1}{x}} 10 < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$

$$=\left\{x \left| -1 \leqslant \frac{1}{\lg \frac{1}{x}} < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$$

$$=\left\{x \left| -1 \leqslant \frac{1}{-\lg x} < -\frac{1}{2}, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$$

$$=\left\{x \left| \frac{1}{2} < \frac{1}{\lg x} \leqslant 1, 1 < x \in \mathbf{N}\right.\right\}$$

$$=\{x \mid 1 \leqslant \lg x < 2, 1 < x \in \mathbf{N}\}$$

$$=\{x \mid 10 \leqslant x < 100, 1 < x \in \mathbf{N}\}$$

$\therefore A$ 中元素的个数为 90 个

$\therefore A$ 的真子集的个数为 $2^{90}-1$ 个

例 2 (1983.上海市第一试第一题(7))在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中,注意取出一个子集,计算它的元素之和,则所有各个子集元素之和的总和是____________.

【提示】 依据竞赛知识,方法精要“3”.

解: A 的所有子集的元素之和

$$=2^{n-1}(1+2+3+\cdots+n)$$

$= 2^{n-1} \cdot \frac{(n+1)n}{2}$

$= n(n+1) \cdot 2^{n-2}$

例 3 (1992.北京市高一数学竞赛初试一题(3))若集合 $M = \{1992,4,5\}$.集合 $N = \{x \mid x \in M\}$,则集合 M 与 N 的关系是:

A. $M = N$　　B. $M \subset N$　　C. $M \supset N$　　D. $M \cap N = \Phi$

解法一:

$\because N = \{x \mid x \in M\}$

$\therefore N$ 是集合 M 的所有元素组成的集合

因此　$M = N$　$\therefore$ 选 A

解法二:

$\because N = \{x \mid x \in M\}$

$\therefore x \in N \Rightarrow x \in M$,即 $N \subseteq M$

又若 $x \in M \Rightarrow x \in N$

$\therefore M \subseteq N$

因此 $M = N$　$\therefore$ 选 A

例 4 (1994.北京市高一数学教学竞赛初试第二题第 1 小题)已知 $I = R$,集合 A、B 都是实数集 R 的子集,$A \cap (C_I B) = \{x \mid x^2 \leqslant 4\}$.

$(C_I A) \cap B = \{x \mid (x-4)(8-x) \geqslant 0\}$

$(C_I A) \cap (C_I B) = \{x \mid x^2 - 6x - 16 > 0\}$

求　$A \cap B$

解:　$A \cap (C_I B) = \{x \mid x^2 \leqslant 4\}$

$= [-2,2]$

$(C_I A) \cap B$

$= \{x \mid (x-4)(8-x) \geqslant 0\}$

$= [4,8]$

$(C_I A) \cap (C_I B) = \{x \mid x^2 - 6x - 16 > 0\}$

$= (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$

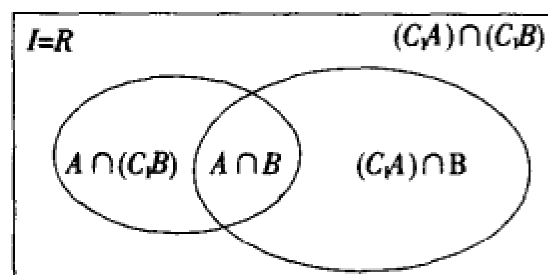


图 Ⅰ-1-3

由韦恩图(图 Ⅰ-1-3)观察 $A \cap (C_I B)$,$(C_I A) \cap B$,$(C_I A) \cap (C_I B)$,$A \cap B$ 的关系,知:

$A \cap B = (2,4)$

例 5 (1994.北京市高一数学竞赛初试一.4)已知 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^+$,集合 $A = \{x^2 + x + 1, -x, -x-1\}$,$B = \{-y, -\frac{y}{2}, y+1\}$.若 $A = B$,则 $x^2 + y^2$ 的值是

A. 5　　B. 4　　C. 25　　D. 10

【分析】　充分利用竞赛知识,方法精要 5 做即可.

解:$\because (x+1)^2 \geqslant 0$

$\therefore x^2 + x + 1 \geqslant -x$

又　$x^2 + x + 1 > 0$

根据集合元素的互异性,知

$x^2 + x + 1 \neq -x$

即　　$x \neq 1$　此时有 $x^2 + x + 1 > -x > -x - 1$

又　$y \in R^+$,在集 B 中,$y + 1 > -\frac{y}{2} > -y$

由 $A = B$,只能

$$\begin{cases} x^2+x+1=y+1 & ① \\ -x=-\dfrac{y}{2} & ② \\ -x-1=-y & ③ \end{cases}$$

由②、③解得 $x=1,y=2$,代入①式知,

$x=1,y=2$ 满足①式

所以 $x^2+y^2=1^2+2^2=5$ 选 A

例 6 由1,2,3,组成的 n 位数,要求 n 位数中1、2和3每一个至少出现一次,求所有这种 n 位数的个数.

【分析】 设所有由1,2,3组成的 n 位数的集合记作全集 ζ,ζ 中不含 $i(i=1,2,3)$ 的 n 位数的集合记作 A_i,则满足题设条件的所有 n 位数的个数为

$$|(C_\zeta A_1)\cap(C_\zeta A_2)\cap(C_\zeta A_3)|$$

注意到

$$\begin{aligned}&|(C_\zeta A_1)\cap(C_\zeta A_2)\cap(C_\zeta A_3)|\\ =&|C_\zeta(A_1\cup A_2\cup A_3)|\\ =&|\zeta|-|(A_1\cap A_2\cap A_3)|\end{aligned}$$

利用容斥原理即可求得.

解:设所有由1,2,3组成的 n 位数的集合记作全集 ζ,则 $|\zeta|=3^n$.ζ 中不含 $i(i=1,2,3)$ 的 n 位数的集合记作 A_i,则

$|A_i|=2^n$, $n|A_i\cap A_j|=1$,

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$, $i\neq j$, $i,j=1,2,3$.

$(C_\zeta A_1)\cap(C_\zeta A_2)\cap(C_\zeta A_3)$ 为 ζ 中同时含有数字1,2,3的 n 位数全体的集合,由容斥原理知

$$\begin{aligned}&|(C_\zeta A_1)\cap(C_\zeta A_2)\cap(C_\zeta A_3)|=|\zeta|-|A_1\cup A_2\cup A_3|\\ =&|\zeta|-[|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|]\end{aligned}$$

故

$$|(C_S A_1)\cap(C_S A_2)\cap(C_S A_3)|=3^n-3\cdot 2^n+3$$

例 7 对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,求证,必存在 $x=\pm M\neq 0$,使 $f(\pm M)$ 均与 a 同号.

【分析】 这是一道证明题,但本质上是说明二次不等式

$$af(x)=a^2x^2+abx+ac>0 \qquad (*)$$

有解,且解集合包括 $x=M$,与 $x=-M$,只须讨论($*$)所对应的二次方程的判别式

证明:首先指出一个重要性等式

$$4af(x)=(2ax+b)^2-(b^2-4ac)$$

(1) 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,$4af(x)>0$ 的解为$(-\infty,+\infty)$

(2) 当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时,不等式 $4af(x)>0$ 的解为

$$(-\infty,-\frac{b}{2a})\cup(-\frac{b}{2a},+\infty)$$

(3) 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时,方程 $4af(x)=0$ 有两个不等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,相应不等式 $4af(x)>0$ 的解为

$$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$$

因为三种情况下的解集均为无穷区间,都存在 M 与 $-M$ 属于解集合,使 $4af(\pm M)>0$,从而,$a\neq f(\pm M)$ 同号.

例 8 若不等式 $8x^4+8(m-2)x^2-m+5>0$ 对任意实数 x 均成立,求实数 m 的取值范围.

【分析】 注意换元降次和应用根的分布理论.

解:令 $x^2=t(t\geqslant 0)$,则原问题等价于

$f(t) = 8t^2 + 8(m-2)t - m + 5$　在 $t \geqslant 0$ 时恒大于零，故得

$$(\text{I})\Delta < 0 \quad 或 \quad (\text{II})\begin{cases}\Delta < 0 \\ f(\Delta < 0) > 0 \\ -\dfrac{m-2}{2} < 0\end{cases}$$

解(I)得　　$\frac{1}{2} < m < 3$

解(II)得　　$3 \leqslant m < 5$

综上得，满足题设的 m 的取值范围是 $\frac{1}{2} < m < 5$

例9　(第二届国际数学奥林匹克试题) x 取什么值时，不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

成立?

【分析】　由已知易得 $x \geqslant -\frac{1}{2}$，且 $x \neq 0$，从而把原不等式化简求解.

解: 显然 $x \geqslant -\frac{1}{2}$，且 $x \neq 0$

将原不等式化简得

$x^2(8x-45) < 0$

$\therefore x < \frac{45}{8}$

故原不等式的解集为

$$\left\{x \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < 0 或 0 < x < \frac{45}{8}\right\}$$

【注】　本题的关键一步在于化简整理. 请注意，其他过程如下：

不等式左端

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = \left(\frac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 = \left[\frac{2x \times (1+\sqrt{1+2x})}{1-(1+2x)}\right]^2 = (1+\sqrt{1+2x})^2$$

$\therefore$ 原不等式同解于

$2 + 2x + 2\sqrt{1+2x} < 2x + 9$，即

$\sqrt{1+2x} < \frac{7}{2}$

从而得到 $x < \frac{45}{8}$，然后与 $x \geqslant -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$ 取交得原不等式的解.

对于不等式两边平方时，要注意不等号的方向是否改变.

例10　不等式 $\left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leqslant 0$ 的解集分别记为 A、B，其中 $a \in R$. 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围.

【分析】　首先确定集合 A 和 B，然后由 $A \subseteq B$ 借助数轴解之.

解: 由 $\left|x - \frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$，得

$$-\frac{(a-1)^2}{2} \leqslant x - \frac{(a+1)^2}{2} \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$$

即

$2a \leqslant x \leqslant a^2 + 1$

$\therefore A=\{x \mid 2a \leqslant x \leqslant a^2+1\}$

由 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1) \leqslant 0$ 即

$(x-2)(x-3a-1) \leqslant 0$

当 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3a+1\}$

当 $a < \frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 3a+1 \leqslant x \leqslant 2\}$

于是，当 $a \geqslant \frac{1}{3}$ 时，由 $A \subseteq B$，得

$\begin{cases} 2 \leqslant 2a \\ a^2+1 \leqslant 3a+1 \end{cases}$

$\therefore 1 \leqslant a \leqslant 3$

当 $a < \frac{1}{3}$ 时，由 $A \subseteq B$，得

$\begin{cases} 3a+1 \leqslant 2a \\ a^2+1 \leqslant 2 \end{cases}$

$\therefore a=-1$

综上，使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围是

$$\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 3 \quad \text{或 } a=-1\}$$

【评估】 求解中要充分利用数形结合的思想.

例 11 （1984.全国联赛试题）下列命题是否正确?若正确，给予证明.否则，举出反例.

(1) 若 P、Q 是直线 l 同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过 P、Q 且和直线 l 相切；

(2) 当 $a>0, b>0$ 且 $a \neq 1, b \neq 1$ 时，$\log_a b+\log_b a \geqslant 2$；

(3) 设 A、B 是坐标平面上的两个点集. $C_r=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant r^2\}$. 若对任何 $r \geqslant 0$ 都有 $C^r \cup A \subsetneqq C^r \cup B$，则必有 $A \subsetneqq B$.

【分析】 本题是判断所给命题是否正确，若正确，给予证明.否则，举出反例.

解:(1) 命题不正确.当 $PQ \parallel l$ 时，只能作一个过 P、Q 且与 l 相切的圆；

(2) 命题不正确.如取 $a=2, b=\frac{1}{2}$ 时，$\log_a b+\log_b a=-2<2$；

(3) 命题不正确.取 A 是任一包含点 $(0,0)$ 的集合，$B=A-\{(0,0)\}$，显然有 $C^r \cup A \subsetneqq C^r \cup B$，但是 $A \subsetneqq B$ 不成立.

例 12 （1994.日本数学奥林匹克预选赛试题改编）已知集合 $\zeta=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$\zeta$ 的子集 A 预满足下列条件：

①A 的元素有 5 个；

②A 中任何两个元素和的个位数字恰好是 0 到 9 这十个整数.

求证：这样的子集 A 不存在.

【说明】 这是 1994 年日本数学奥林匹克预选赛试题的改编题，原设问是“这样的子集 A 有多少个?”，难度就比较大，不容易让人联想用反证法解答.改变设问方式后，一方面问题的难度降低了，另一方面也提示我们可用反证法.

证明:假设这样的子集 A 存在，不妨设

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

由于 A 中两个不同元素的和恰有 10 个，每个元素出现 4 次，故由条件②，知 $4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ 的个位数字应与 $0+1+2+\cdots+9=45$ 的末位数字相同，即为 5.

但 $4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)$ 的末位数字是偶数，不可能是 5.

所以,不存在同时满足条件 ①、② 的子集 A

例 13 (1981.北京市高一数学竞赛试题) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$,已知 $f(1),f(2),f(3),f(4)$,$f(5)$ 都是质数.(注 $f(1)$ 表示 $x = 1$ 时,代数式 $f(x)$ 的值,余同).

求证:$f(x)$ 不能分解成两个整系数一次式的积.

证明:(反证法) 设 $f(x)$ 能分解成两个整系数一次式 $q(x)$ 与 $h(x)$ 之积,则有

$$f(1) = g(1) \cdot h(1) \qquad f(2) = g(2) \cdot h(2)$$
$$f(3) = g(3) \cdot h(3) \qquad f(4) = g(4) \cdot h(4)$$
$$f(5) = g(5) \cdot h(5)$$

一方面,在上面五个式子中,由已知其左边 $f(1),f(2),f(3),f(4),f(5)$ 都是原数;由于 $g(x)$,$h(x)$ 都是整系数的一次式,右端都是两个整数的积,因此这两个整数中至少有一个是 ± 1,即在 $g(1)$,$g(2),g(3),g(4),g(5),h(1),h(2),h(3),h(4),h(5)$ 中,至少有五个数是 ± 1.

另一方面,由于 $g(x)$ 是一次式,故知 $g(1),g(2),g(3),g(4),g(5)$,是不同的数,其中至多有一个是 1,另一个是 -1;同理,$h(1),h(2),h(3),h(4),h(5)$ 中,也至多有一个是 1,另一个是 -1,总计这十个数至多有四个是 ± 1.

这是两个相互矛盾的结论,故假设不真,原命题正确.

例 14 设命题 p:关于 x 的不等式$a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$与 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集相同;命题 q:$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.则命题 q 是 ( )

A.命题 p 的充分必要条件

B.命题 p 的充分条件但不是必要条件

C.命题 p 的必要条件但不是充分条件

D.既不是命题 p 的充分条件,也不是命 p 的必要条件

【分析与解】 对于 x 的不等式$x^2 - 3x + 2 > 0$与 $-x^2 + 3x - 2 > 0$,它们对应项的系数之比相等,但是显然它们的解集不同,从而排除 A、B.

又如 $x^2 + x + 1 > 0$ 与 $x^2 + x + 2 > 0$ 的解集相同,但是它们对应项的系数之比不相等,从而排除 C.

故选 D

例 15 (1985.全国高中数学联赛试题) 假如有两个命题

甲:a 是大于零的实数;

乙:$a > b$ 且$a^{-1} > b^{-1}$.那么 ( )

A.甲是乙的充分而不必要条件

B.甲是乙的必要而不充分条件

C.甲是乙的充分必要条件

D.甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【分析与解】 利用排除法.

取 $a = 3,b = 2$,此时甲成立,但是乙不成立,"甲" 不是"乙" 的充分条件,排除 A、C.

对于"乙",很明显,当且仅当 $a > 0$ 且 $b < 0$ 时,"乙" 才能成立,由此可知,"甲" 是"乙" 成立的必要条件.

综上知,"甲" 是"乙" 的必要而不充分条件,故选 B.

【评估】 上述求解中利用了特殊值法,同时,涉及不等式的一些性质.

§1.3 巩固练习

1. (2001.北京,高一) 集合$\{0,1,2,2001\}$ 的子集的个数是 ( )

A. 16　　　　B. 15　　　　C. 8　　　　D. 7

2. (1994. 北京,高一) $I = \{x \mid x = 4^n, n \in N, n \leqslant 100\}$

$A = \{x \mid x \in I$　且 x 的最高位数字不小于 $4\}$

$B = \{x \mid x \in I$　且 x 的最高位数字小于 $4\}$

$C = \{x \mid x \in I$　且 x 的个位数字为 $4\}$

集合 A, B, C 中元素的个数分别记作 a, b, c. ($\lg 2 = 0.3010$) 则　　　　(　　)

A. $c < b < a$　　B. $a < c < b$　　C. $b < c < a$　　D. $a < b < c$

3. (1993. 北京,高一) 集 $M = \{x \mid x = 2^n - 2^k$, 其中 $n, k \in N$, 且 $n > k\}$, 集 $P = \{x \mid 1901 \leqslant x \leqslant 2000$, 且 $x \in N\}$. 则集合 $M \cap P$ 中所有元素的和等于__________

4. (1992. 北京,高一) 若集合 $M = \{1992, 4, 5\}$, 集合 $N = \{x \mid x \in M\}$, 则集合 M 与 N 的关系是　　　　(　　)

A. $M = N$　　B. $M \subset N$　　C. $M \supset N$　　D. $M \cap N = \phi$

5. (1992. 北京,高一)

命题甲:一条直线有两个点到另一直线的距离相等,则这两条直线平行.

命题乙:一条直线上有两个点到一平面的距离相等,则这条直线与该平面平行.

命题丙:一张平面上有不共线的三点与另一张平面的距离相等,则这两张平面互相平行.

以上三个命题中,真命题的个数是:

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

6. (1991. 北京,高一) 已知集合 $M = \{x \mid x = 2^n, n \in E, 0 \leqslant n \leqslant 1000\}$ 把 M 中最高位数字是 1 的数全部抽取出来,组成一个新的集合 N, 则 N 中元素的个数共有__________个(取 $\lg 2 = 0.30103$).

7. (1991. 北京,高一) M、N 是两个集合,则 $M \subset N$ 是指

A. M 不包含任一个元素

B. M 和 N 有相同的元素

C. 所有 M 的元素都是 N 的元素

D. 所有 N 的元素都是 M 的元素

8. (1989. 北京,高一) 某中学教师中,会英语及俄语的人总计 100 人,据统计,会英语的有 70 人,会俄语的 45 人,求该校教师中会英语但不会俄语的人数.

9. (1985. 上海,高中) 从 $A \cup B = A \cup C$ 能够推出　　　　(　　)

A. $B = C$　　　　B. $A \cap B = A \cap C$

C. $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$　　　　D. $\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$

10. (1986. 上海,高中) 已知 A、B、M、N 为非空集, $A \cap B = \phi$, $M = \{A$ 的真子集$\}$, $N = \{B$ 的真子集$\}$, 那么 $M \cap N =$ __________

11. (1987. 上海,高中) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 1987\}$, 则它的非空真子集个数是

A. $2^{1987} - 2$　　B. $2^{1987} - 1$　　C. 2^{1987}　　D. $2^{1987} + 1$

12. (1989. 上海,高中) 若 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 且 $A \cap B \neq \phi$, 则实数 a 的值等于________

13. (1990. 上海,高中) 已知 $A = \{a \mid 1 \leqslant a \leqslant 10, a \in N\}$; $B = \{b \mid b = 3a - 1, a \in A\}$, 用列举法表示 $A \cap B =$ ______________

14. (1992. 上海,高中) 设集合 $M = \{x \mid |x - 20| < \frac{41}{2}, x \in Z\}$, $P = \{x \mid x < 40, x \in Z\}$, 则集合 $M \cap P$ 中元素的总和是________

15. (1992. 上海,高中) 已知集合 $A = \{(x, y) \mid y = ax + 2\}$, $B = \{(x, y) \mid y = |x + 1|\}$, 若 $A \cap B$ 为单元素集合,则实数 a 的取值范围是__________

16. (1981. 全国,高中)

条件甲:两个三角形的面积和二条边对应相等,条件乙:两个三角形全等.

A. 甲是乙的充分必要条件

B. 甲是乙的必要条件

C. 甲是乙的充分条件

D. 甲不是乙的必要条件,也不是充分条件

答(　　)

17. (1983. 全国,高中)

设 p,q 是自然数,条件甲:p^3-q^3 是偶数;条件乙:$p+q$ 是偶数,那么

A. 甲是乙的充分而非必要条件

B. 甲是乙的必要而非充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答(　　)

18. (1985. 全国,高中)

假如有两个命题.

甲:a 是大于零的实数;乙:$a>b$ 且 $a^{-1}>b^{-1}$. 那么

A. 甲是乙的充分而不必要条件

B. 甲是乙的必要而不充分条件

C. 甲是乙的充分必要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答(　　)

19. (1987. 全国,高中)

已知集合 $M=\{x,xy,\lg(x.y)\}$ 及 $N=\{0,|x|,y\}$,并且 $M=N$,那么

$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$的值等于__________

20. (1987. 全国,高中)

已知集合

$A=\{(x,y)\mid |x|+|y|=a,a>0\}$

$B=\{(x,y)\mid |xy|+1=|x|+|y|\}$

若 $A\cap B$ 是平面上正八边形的顶点所构成的集合,则 a 的值为__________

21. (1989. 全国,高中)

集合:$M=\{u\mid u=12m+8n+4l$,其中 $m,n,l\in Z\}$,$N=\{U\mid U=20p+16q+12r$,其中 $p,q,r\in Z\}$ 的关系为.

A. $M=N$　　B. $M\not\subseteq N,N\not\subseteq M$

C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\supsetneqq N$

答(　　)

22. (1990. 全国,高中)

点集$\{(x,y)\mid \lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\}$ 中元素的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 多于 2

答(　　)

23. (1991. 全国,高中)

将正奇数集合$\{1,3,5,\cdots\}$ 由小到大按第 n 组有$(2n-1)$ 个奇数进行分组:

$\{1\}$,　　$\{3,5,7\}$,　　$\{9,11,13,15,17\}$

(第一组)　(第二组)　(第三组)

则 1991 位于第__________组中.

24. (1993.全国,高中)

若$M = \{(x,y) \mid l\tan\pi y \mid + \sin^2\pi x = 0\}$,

$N = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$,

则 $M \cap N$ 的元素个数是

A. 4　　B. 5　　C. 8　　D. 9

25. (1993.全国,高中)

集合 A、B 的并集$A \cup B = \{a_1, a_2, a_3\}$,当 $A \neq B$ 时,(A,B) 与(B,A) 视为不同的对,则这样的(A,B) 对的个数有

A. 8　　B. 9　　C. 26　　D. 27

答(　　)

26. (1994.全国,高中)

设 a,b,c 是实数,那么对任何实数 x,不等式

$$a\sin x + b\cos x + c > 0$$

都成立的充分必要条件是

A. a、b 同时为0,且 $c > 0$　　B. $\sqrt{a^2 + b^2} = c$

C. $\sqrt{a^2 + b^2} < c$　　D. $\sqrt{a^2 + b^2} > c$

答(　　)

27. (1998.全国,高中)

若非空集合 $A = \{x \mid 2a + 1 \leqslant x \leqslant 3a - 5\}$,$B = \{x \mid 3 \leqslant x \leqslant 22\}$,则能使 $A \subseteq A \cap B$ 成立的所有 a 的集合是

A. $\{a \mid 1 \leqslant a \leqslant q\}$　　B. $\{a \mid b \leqslant a \leqslant q\}$

C. $\{a \mid a \leqslant q\}$　　D. ϕ

答:(　　)

28. (1999.全国,高中)

给定下列两个关于异面直线的命题:

命题Ⅰ　若平面 α 上的直线a 与平面β 上的直线b 为异面直线,直线 c 是α 与β 的交线,那么,c 至多与 a,b 中的一条相交;

命题Ⅱ　不存在这样的无穷多条直线,它们中的任意两条都是异面直线,那么

A. 命题Ⅰ正确,命题Ⅱ不正确　　B. 命题Ⅱ正确,命题Ⅰ不正确

C. 两个命题都正确　　D. 两个命题都不正确

29. (2000.全国,高中)

设全集是实数集.若 $A = \{x \mid \sqrt{x-2} \leqslant 0\}$,$B = \{x \mid 10^{x^2-2} = 10^x\}$,则 $A \cap (C_R B)$ 是

A. $\{2\}$　　B. $\{-1\}$　　C. $\{x \mid x \leqslant 2\}$　　D. ϕ

答:(　　)

30. (2001.全国,高中)

已知 a 为给定的实数,那么集合 $M = \{x \mid x^2 - 3x - a^2 + 2 = 0, x \in R\}$ 的子集的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 不确定

第二章

映射与函数

§2.1 知识要点与基本方法

1. 映射与函数

(1) 定义：设 A 和 B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，使得集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，则称这样的对应(包括集合 A 到 B 的对应法则 f) 为集合 A 到集合 B 的映射，记作 $f: A \to B$.

如果有 A 到 B 的映射 f，(即 $f: A \to B$) 使得 $a \in A$ 和 $b \in B$ 对应，则称 b 为 a 在 f 下的像，a 将为 b 的原象，可记作 $b = f(a)$

显然集合 A 是原象集，象集 $C \subseteq B$.

(2) 定义：若映射 $f: A \to B$ 满足

1°) B 中的任何一个元素 y 都有 A 中的元素 x，使得 $f(x) = y$

2°) A 中的任意元素 x_1 和 x_2，当 $x_1 \neq x_2$ 时，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 成立

则称 f 是 A 到 B 的一一映射

其中满足条件 1°) 的映射 f 称为 A 到 B 的满射；

满足条件 2°) 的映射 f 称为 A 到 B 的单射.

(3) 定义：如果 A、B 都是非空数集，那么 A 到 B 的映射“$f: A \to B$”就叫做 A 到 B 的函数，记作 $y = f(x)$

其中，$x \in A, y \in B$，原象的集合 A 叫函数的定义域，象的集合($C \subseteq B$) 叫做函数 $y = f(x)$ 的值域

(4) 定义：如果 y 是 u 的函数，而 u 是 x 的函数，即 $y = f(u), u = g(x)$；那么 y 经过中间变量 u 而成为 x 的函数，记为 $y = f(g(x))$，称它为函数 $f(u)$ 与 $g(x)$ 的复合函数

【注】 函数 $u = g(x)$(内层函数) 的值域必须被限制不超出函数 $y = f(u)$(外层函数) 的定义域.

2. 函数图象

坐标为 $(x, f(x))$ 的点的集合 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图象，其中 D 是函数 $y = f(x)$ 的定义域.

(1) 函数 $y = f(x + k)(k \neq 0)$ 的图象是函数 $y = f(x)$ 的图象沿 x 轴方向向左($k > 0$) 或向右($k < 0$) 平移 $|k|$ 个单位得到的.

(2) 函数 $y = f(x) + h(h \neq 0)$ 的图象是函数 $y = f(x)$ 的图象沿 y 轴方向向上($h > 0$) 或向下($h < 0$) 平移 $|k|$ 个单位得到的.

(3) 函数 $y = f(x + k) + h$ 是经过两次平移得到的. 可以先沿 x 轴平移 $|k|$ 个单位，再沿 y 轴平移 $|h|$ 个单位，也可以先沿 y 轴平移 $|h|$ 个单位，再沿 x 轴平移 $|k|$ 个单位.

(4) 函数 $y = -f(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于 x 轴对称.

(5) 函数 $y = f(-x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

(6) 函数 $y = -f(-x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 关于原点成中心对称.

(7) 函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$.

(8) 函数 $y = |f(x)|$ 的图象是函数 $y = f(x)$ 的图象保留 x 轴上方的部分不变，将 x 轴下方的部

分沿 x 轴对称翻折上来得到的.

3．函数的性质

(1) 函数单调性. 设函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上满足:对任意 $x_1, x_2 \in$ Ⅰ,并且 $x_1 < x_2$ 时,总有 $f(x_1) < f(x_2)$($f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上是增函数(减函数),并将函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上具有单调性,区间 Ⅰ 称为 $f(x)$ 的一个单调区间.

(2) 函数奇偶性、设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,且 D 是关于原点对称的数集. 若对任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 是奇函数;若对任意的 $x \in D$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数.

(3) 函数周期性. 对函数 $f(x)$,如果存在一个不为零的正数 T,使得当 x 取定义域中的每一个数时,$f(x+T) = f(x)$ 总成立,那么称 $f(x)$ 是周期函数,T 称做这个周期函数的周期. 如果函数 $f(x)$ 的所有周期中存在最小值 T_0,称 T_0 为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期.

(4) 函数对称性

引理 1　函数图象对称性的判定

1°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b-x)$,则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

2°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(b-x)$,则 $f(x)$ 图象关于点 $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ 对称.

引理 2　(与引理 1 中 1°) 容易混淆的两个命题)

1°) 函数 $y = f(a-x)$ 与函数 $y = f(x-b)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

2°) 函数 $y = f(a-x)$ 与函数 $y = f(b+x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a-b}{2}$ 对称.

【注】 ① 引理 1 中的 1°) 是对一个函数而言的,引理 2 中的两个命题是对两个函数而言的.

② 证明的思路是一样的,即

任取一点 ⟶ 求其对称点 ⟶ 验证对称点是否在函数图象上 ⟶ 最后由点的任意性得证.

这里给引理 2 中 1° 的证明.

证明:在 $y = f(a-x)$ 的图象上任取一点 $P(x_0, y_0)$,则 $y_0 = f(a-x_0)$,点 $P(x_0, y_0)$ 关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 的对称点为 $P'((a+b)-x_0, y_0)$.

当 $x = (a+b)-x_0$ 时,$y = f((a+b)-x_0-b) = f(a-x_0) = y_0$,∴ 对称点 $P'((a+b)-x_0, y_0)$ 在 $y = f(x-b)$ 的图象上,又因为点 P 是任意一点,所以函数 $y = f(a-x)$ 与函数 $y = f(x-b)$ 的图象关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 对称.

(5) 函数周期性的判定:

1°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = f(b+x)$,$a \neq b$,则 $f(x)$ 是周期函数,且周期为 $|b-a|$.

2°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a) = -f(b+x)$,$a \neq b$,则 $f(x)$ 是周期函数,且周期是 $2|b-a|$.

(6) 函数的对称与周期的关系:

1°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 既关于直线 $x = a$ 对称,又关于直线 $x = b$ 对称,且 $a \neq b$,则 $f(x)$ 是周期函数,且 $2|b-a|$ 是周期.

2°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 既关于直线 $x = a$ 对称,又关于点 $(b, 0)$ 对称,且 $a \neq b$,则 $f(x)$ 是周期函数,且 $4|b-a|$ 是周期.

3°) 若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 既关于直线 $x = a$ 对称,又关于点 $(b, 0)$ 对称,且 $a \neq b$,则 $f(x)$ 是周期函数,且 $2|b-a|$ 是周期.

4．反函数

(1) 定义:如果函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A,值域为 C,而且构成该函数的映射是一一映射,那么对

于 C 中的任何一个 y 值，A 中有它惟一的象与之对应.此时 y 是自变量，而 x 是 y 的函数，我们把这一函数叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数，记作 $x = f^{-1}(y)$，通常把 x、y 对调写成 $y = f^{-1}(x)$，就是函数 $y = f(x)$ 的反函数.

(2) 反函数与其原函数具有六种重要关系：

1°) 定义域与值域互换；2°) 对应法则互逆；3°) 元素一一对应；4°) 图象关于直线 $y = x$ 对称；5°) 奇偶相同；6°) 单调性相同.

注：① 有反函数的函数不一定单调函数.例如 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不单调，但它有反函数.

② 偶函数与其单调区间上的反函数与原函数在各自相应的单调区间上具有相同的单调性.

③ 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的反函数是 $y = g^{-1}[f^{-1}(x)]$.

5. 二次函数

二次函数是高中数学的重要内容之一，图象直观特点常被数学竞赛命题者青睐.有以下性质应引起参赛学生的注意.

设 $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$

性质 1　当 $a > 0$ 时，$f(x)$ 的图象特点是下凸的，则有：

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

当 $a < 0$ 时，$f(x)$ 的图象特点是上凸的，则有：

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$$

性质 2　若 $f(x) \geqslant 0$ 时，$x \in R$ 恒成立，则 $f(x)$ 的图像开口向上，且图象会在 x 轴上方(含 x 轴上)，这等价

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$$

若 $f(x) \leqslant 0$ 时，$x \in R$ 恒成立，类似有

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$$

性质 3　当 $a > 0$ 时，若存在一个 $x_0 \in R$ 使得 $f(x_0) < 0$，则 $f(x)$ 的图象必 x 轴相交，因而 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

当 $a < 0$ 时，若存在一个 $x_0 \in R$ 使得 $f(x_0) > 0$，则 $f(x)$ 的图象必与 x 轴相交，因而 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

性质 4　当 $a > 0$ 时，存在 x_0，使得 $f(x_0) \leqslant 0$，则方程 $f(x) = 0$ 有一根不小于 x_0

6. 指数与指数函数

$$y = a^x(a > 0, 且\ a \neq 1)$$

(1) 值域 $(0, +\infty)$，没有最大值也没有最小值，有下界 $y > 0$，无上界；

(2) 对应关系为一一映射，从而存在反函数 —— 对数函数；

(3) 有单调性，当 $a > 1$ 时，为增函数；当 $0 < a < 1$ 时，为减函数；

(4) 无奇偶性，但要注意到：$y = a^x$ 与 $y = a^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称，$y = a^x$ 与 $y = -a^x$ 的图象关于 x 轴对称；$y = a^x$ 与 $y = \log_a^x$ 的图象关于 $y = x$ 对称；

(5) 有 2 个特殊点：零点 $(0,1)$. 不变点 $(1,a)$；

(6) 与对数的关系：$x = a^{\log_a x}$，$m^{\log_a n} = n^{\log_a m}$.

7. 对数与对数函数

$$y = \log_a x(a > 0\ 且\ a \neq 1)$$

(1) 对照指数函数可得到对数函数的“值域”,“反函数”,“单调性”,“无奇偶性”等.

(2) 特殊值:$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$

(3) 恒等式:$a^{\log_a N} = N$

(4) 换底公式:$\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

推论 1 $\log_{a^m} N^n = \dfrac{n \cdot \log_b N}{m \cdot \log_b a} = \log_{a^n} N^m$

推论 2 $\log_{\sqrt[m]{a}} \sqrt[n]{N} = \dfrac{m \cdot \log_b N}{n \cdot \log_b a} = \log_{a^n} N^m$

(5) 恒等式:$M^{\log_a N} = N^{\log_a M}$

(6) 关于指数与对数有如下两个性质:

性质 1 若 $a^x = b^y = c^z = d^t$,且 $abc = d$,则

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{t}$.(其中 a,b,c,d 为不等于 1 的正数,且 $xyzt \neq 0$)

性质 2 设 a,b,c,d 为不等于 1 的正数,若 $a^x = b^y = c^z = d^t$,且 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{t}$,则 $abc = d$.

性质 1 证明从略,性质 2 的证明如下.

证明:令 $a^x = b^y = c^z = d^t = k$,由题设知 $x,y,z,t \neq 0$,且 a、b、c、d 皆不等于 1,故 $k \neq 1$,且 $k > 0$,于是 $a = k^{\frac{1}{x}}, b = k^{\frac{1}{y}}, c = k^{\frac{1}{z}}, d = k^{\frac{1}{t}}$

$\therefore k^{\frac{1}{x}} \cdot k^{\frac{1}{y}} \cdot k^{\frac{1}{z}} = k^{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})} = k^{\frac{1}{t}}$

$\therefore abc = d$

8. 求函数的最大值和最小值的常用方法

(1) 配方法:把函数分成若干个非负代数式及一个常数的和,从而估计出 $f(x)$ 的下界,进而求出最小值.

(2) 判别式法:把所求最值的函数放到某个一元二次方程的系数上,利用判别式求出这个函数的上界或下界,进而求得最值.

(3) 单调性法:利用函数的单调性求最值.

(4) 不等式法:利用基本不等式来求最值.

(5) 换元法:利用换元法将不易求的函数解析式化为易求最值的解析式.

§2.2 赛 题 精 讲

1. 关于映射与函数

例 1 设 $A = \{x \mid l \leqslant x \leqslant 9, x \in Z\}$,$B = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$,定义 B 到 Z 的映射 $f:(a,b) \longrightarrow ab + a - b$,试求

(1)(1,3) 在映射 f 下的象;

(2) 满足 $(a,b) \xrightarrow{f} 16$ 的原象 (a,b).

解:(1) 由 B 到 Z 的映射 $f:(a,b) \longrightarrow ab + a - b$,可知

$f(a,b) = ab + a - b$

$\therefore f(1,3) = 1 \times 3 + 1 - 3 = 1$

即(1,3) 在映射 f 下的象为 1.

(2)$\because (a,b) \xrightarrow{f} 16$

即 $f:(a,b)\longrightarrow 16$

又 $\because f:(a,b)\longrightarrow ab+a-b$

$\therefore ab+a-b=16$

(【注】 利用 $a,b\in A$,即 a,b 是1到9之间整数的条件变形).

$$\therefore a=\frac{b+16}{b+1}=1+\frac{15}{b+1} \quad ①$$

$\because a,b\in A$,即 a,b 是整数,且

$$1\leqslant a,b\leqslant 9$$

$$\therefore 2\leqslant b+1\leqslant 10 \quad ②$$

又要求16的原象,即要求①的在1到9之间的整数解,而若①有整数解,则15必能被 $b+1$ 整除.

$\therefore$ 由②可知,$b+1=3$ 或 $b+1=5$

即

$$b=2 \text{ 或 } b=4$$

将 $b=2$ 和 $b=4$ 分别代入①得

$a=6$ 和 $a=4$

$\therefore$①的在1到9之间的整数解为

$$\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=4\\b=4\end{cases}$$

$\therefore$ 满足 $(a,b)\xrightarrow{f}16$ 的原象为 $(6,2)$ 或 $(4,4)$

例2 (1987.上海,高中二试)设 $A=(0,1)$.若 f 是从 A 到 R 的一个映射,且满足

(1) $f(x)>0$,对任何 $x\in(0,1)$;

(2) $\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(1-x)}{f(1-y)}\leqslant 2$,对任何 $x,y\in(0,1)$.

证明:存在一个实数 b_0,使得,对任何 $x\in(0,1)$ 均有 $f(x)\equiv b_0$

【分析】 要证此问题,因 f 是从 A 到 R 的映射,所以只要证明对任意 $x,y\in(0,1)$ 均有 $f(x)=f(y)$ 即可.

证明:由(1),(2)得

$$f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)\leqslant 2f(y)f(1-y)$$

令 $x=s,y=1-s$,任意 $s\in(0,1)$.

则 $f^2(s)+f^2(1-s)\leqslant 2f(s)f(1-s)$

即 $[f(s)-f(1-s)]^2\leqslant 0$

又 $\because [f(s)-f(1-s)]^2\geqslant 0$

$\therefore f(s)-f(1-s)=0$.即 $f(s)=f(1-s)$

$\therefore f(x)$ 关于 $x=\dfrac{1}{2}$ 对称.

由 $f(x)$ 的对称性可知

$f(x)=f(1-x),f(y)=f(1-y)$ 任意 $x,y\in(0,1)$

$\therefore$(2)式变成 $\dfrac{f(x)}{f(y)}+\dfrac{f(x)}{f(y)}\leqslant 2$

即

$$f(x)\leqslant f(y)$$

再由 x,y 的任意性可知,又有 $f(y)\leqslant f(x)$,于是 $f(x)=f(y)$

$\therefore$ 存在一个实数 b_0 使得,对任意 $x\in(0,1)$ 均有 $f(x)=b_0$

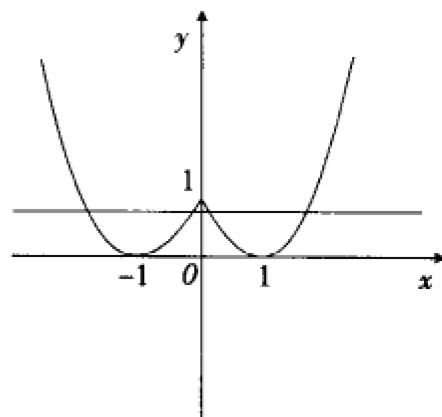
2. 关于函数图象

例3 (北京海淀区16届数学竞赛题)k 为什么实数时,方程 $x^2-2|x|+3=k$ 有四个互不相等的实数根?

解:将原方程变形为

$$x^2-2|x|+1=k-2$$

设 $y=f(x)=x^2-2|x|+1$,作出 $y=f(x)$ 的图象,如图Ⅰ-2-1所示.而 $y=k-2$ 是一条与 x 轴平行的直线,原方程有四个互不相等的实根,即直线 $y=k-2$ 应与曲线有四个不同的交点.由图象可知,当 $2<k<3$ 时,直线与曲线有四个不同的交点.所以,当 $2<k<3$ 时,方程 $x^2-2|x|+3=k$ 有四个互不相等的实数根.



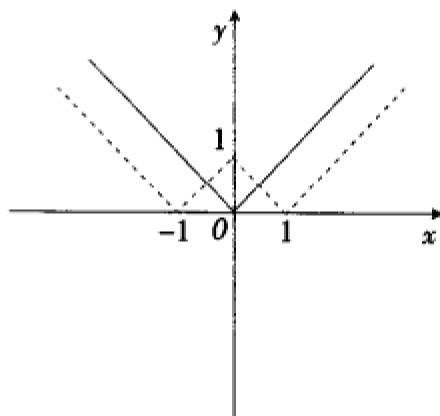
图Ⅰ-2-1

【说明】 在本题中,我们用图形来研究方程的根,这是一种非常重要的方法——数形结合法.见图Ⅰ-2-1

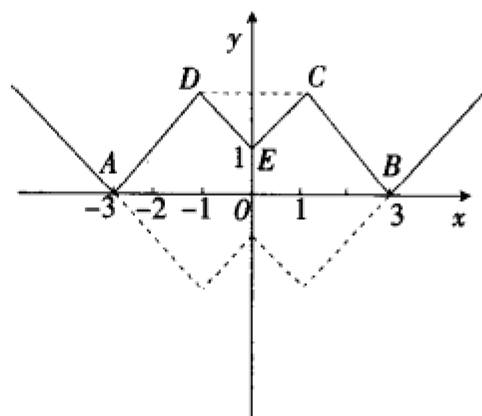
例4 设函数 $f_0(x)=|x|$,$f_1(x)=|f_0(x)-1|$,$f_2(x)=|f_1(x)-2|$,求函数 $y=f_2(x)$ 的图象与 x 轴所围成图形中的封闭部分的面积

解:先把函数 $f_2(x)$ 的图象画出来

如图Ⅰ-2-2所示,函数 $f_0(x)=|x|$ 的图象是两条射线(图中的实线),而函数 $f_1(x)=|f_0(x)-1|$ 的图象是把函数 $f_0(x)$ 的图象先沿 y 轴方向向下平移1个单位,然后再保留 x 轴上方的部分,把 x 轴下方的部分对称地翻折到 x 轴上方得到的,如图Ⅰ-2-2所示的虚线部分



图Ⅰ-2-2



图Ⅰ-2-3

函数 $f_2(x)=|f_1(x)-2|$ 的图象是把函数 $f_1(x)$ 的图象先沿 y 轴方向向下平移2个单位,再保留 x 轴上方的部分,把 x 轴下方的部分对称地翻折到 x 轴上方得到的,如图Ⅰ-2-3中实线部分所示.

所求的封闭部分的面积为

$$S_{梯形ABCD}-S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}(2+6)\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 1=7$$

3. 关于函数性质

例5 (1996.全国高中数学联赛)如果在区间[1,2]上,函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$ 在同一点取相同的最小值,那么,$f(x)$ 在该区间上的最大值是( )

A. $4+\frac{11}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　B. $4-\frac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

C. $1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$　　D. 以上答案都不对

解:$\because 1\leqslant x\leqslant 2$

$$g(x)=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

当且仅当 $\frac{x}{2}=\frac{1}{x^2}$,即 $x=\sqrt[3]{2}$ 时,$g(x)$ 有最小值是 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

∴ 由题设有

$$\begin{cases}-\dfrac{p}{2}=\sqrt[3]{2}\\ q-\dfrac{p^2}{4}=\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{2}\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}p=-2\sqrt[3]{2}\\ q=\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\end{cases}$

故 $f(x)=x^2-2\sqrt[3]{2}x+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

$=(x-\sqrt[3]{2})^2+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

又 $\because 2-\sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{2}-1$

$\therefore f(x)$ 在 $x\in[1,\sqrt[3]{2}]$ 上为减函数，在 $x\in[\sqrt[3]{2},2]$ 上为增函数.

则 $f(x)$ 有最大值 $f(2)=4-\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

故应选 B.

例 6 (1998.全国高中数学联赛)

若 $f(x)(x\in R)$ 是以 2 为周期的偶函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$，则 $f(\frac{98}{19})$，$f(\frac{101}{17})$，$f(\frac{104}{15})$ 由小到大的排列是____________________

解:由题设，$x\in R,k\in Z$ 时，

$\because f(2k+x)=f(x)=f(-x)$

$\therefore f\left(\frac{98}{19}\right)=f\left(6-\frac{16}{19}\right)=f\left(-\frac{16}{19}\right)=f\left(\frac{16}{19}\right)$

$\therefore f\left(\frac{101}{17}\right)=f\left(6-\frac{1}{17}\right)=f\left(-\frac{1}{17}\right)=f\left(\frac{1}{17}\right)$

$f(\frac{104}{15})=f(6+\frac{14}{15})=f(\frac{14}{15})$

而当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{1998}}$ 为增函数.

故 $f\left(\frac{1}{17}\right)<f\left(\frac{16}{19}\right)<f\left(\frac{14}{15}\right)$

即

$$f\left(\frac{101}{17}\right)<f\left(\frac{98}{19}\right)<f\left(\frac{104}{15}\right)$$

例 7 (1992.全国高中数学联赛)设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数，且满足下列关系：

$f(10+x)=f(10-x),f(20+x)=-f(20-x)$

则 $f(x)$ 是(　　)

A. 偶函数，又是周期函数

B. 偶函数，但不是周期函数

C. 奇函数，又是周期函数

D. 奇函数，但不是周期函数

解:由 $f(10+x)=f(10-x)$，知 $f(x)$ 图象关于直线 $x=10$ 对称，又由 $f(20+x)=-f(20-x)$ 知 $f(x)$ 图象关于点(20,0)对称，故 $f(x)$ 是周期函数，且 40 是周期，再由 $f(20+x)=-f(20-x)$，又 $f(x)$ 是周期函数，且 40 是周期，得

$$f(x-20)=f(20+x-40)=f(20+x)=-f(20-x)$$

即

$$f(-x)=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.故选 C.

例 8 （第 8 届“希望杯”）设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数. $f(x+3)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=x$，则 $f(1997)$ 等于（　　）

A. 1　　　　B. 0　　　　C. -1　　　　D. 1997

解：因为 $f(x+3)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期函数且周期为 6，即 $f(x+6)=f(x)$，所以 $f(1997)=f(6\cdot 333-1)=f(-1)$. 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且当 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=x$，所以 $f(1997)=f(-1)=-f(1)=-1$. $\therefore$ 选 C.

例 9 （1996. 河北省高中竞赛）设函数 $f(x)$ 满足

(1) $f(1)=0$，且在 $[0,1]$ 上递增；

(2) 对整常数 m 及任意 x 有 $f(m-x)=f(m+x)$，$f(m-x+1)=f(m+x+1)$，令 $a=f\left(-\frac{1995}{7}\right)$，$b=f\left(-\frac{1996}{7}\right)$，$c=f\left(-\frac{1997}{7}\right)$，则 a,b,c 由小到大的顺序是________.

解：由 $f(m-x)=f(m+x)$，知 $f(x)$ 关于直线 $x=m$ 对称，又 $f(m-x+1)=f(m+x+1)$，故 $f(x)$ 关于直线 $x=m+1$ 对称，所以 $f(x)$ 是周期函数，且 2 是周期，即 $f(x+2)=f(x)$，$a=f\left(-\frac{1995}{7}\right)=f(-287)=f(1)$，$b=f\left(-\frac{1996}{7}\right)=f(-287\frac{1}{7})=f\left(\frac{6}{7}\right)$，$c=f\left(-\frac{1997}{7}\right)=f\left(-287\frac{2}{7}\right)=f\left(\frac{5}{7}\right)$

又因为 $f(1)=0$，且在 $[0,1]$ 上递增，所以 a、b、c 由小到大的顺序是 $c<b<a$.

例 10 （第 10 届“希望杯”高二 1 试）设 $f(x)=x^3-3x^2+6x-6$，若 $f(a)=1$，$f(b)=-5$，则 $a+b=$（　　）

A. -2　　　　B. 0　　　　C. 1　　　　D. 2

解：注意到此题的等价形式，即 a,b 满足

$$\begin{cases}(a-1)^3+3(a-1)=3\\(1-b)^3+3(1-b)=3\end{cases}\quad \text{求 } a+b \text{ 的值.}$$

构造函数 $g(x)=x^3+3x$，显然 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调递增.

$\therefore g(a-1)=g(1-b)$.

$\therefore a-1=1-b$.

$\therefore a+b=2$ 选 D

例 11 （1986. 上海，高中数学竞赛）函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上，对定义域中任意数 x，在定义域中存在 x_1,x_2，使 $x=x_1-x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，且满足以下三个条件：

① 若 $x_1,x_2\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(x_1)\neq f(x_2)$ 或 $0<|x_1-x_2|<a$，则 $f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$；

② $f(a)=1$（a 是正常数）；

③ 当 $0<x<2a$ 时，$f(x)>0$.

试证：(1) $f(x)$ 是奇函数；

(2) $f(x)$ 是周期函数，并求出其周期；

(3) $f(x)$ 在 $(0,4a)$ 内是减函数.

证明：(1) 对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由条件①知，在定义域内存在 x_1,x_2，使 $x=x_1-x_2$，且 $f(x_1)\neq f(x_2)$，有

$$f(x)=f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$$= -f(x_2-x_1)$$
$$= -f(-x)$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 因 $f(x)$ 是奇函数, $f(a)=1$, 故 $f(-a)=-1$, 于是 $f(-2a)=f(-a-a)=\dfrac{f(-a)f(a)+1}{f(a)-f(-a)}=0$

(ⅰ) 若 $f(x)\neq 0$

则 $f(x+2a)=f[x-(-2a)]$
$$=\frac{f(x)\cdot f(-2a)+1}{f(-2a)-f(x)}=-\frac{1}{f(x)}$$

则 $f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\dfrac{1}{f(x+2a)}$
$$=\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}=f(x)$$

(ⅱ) 若 $f(x)=0$

则 $f(x+a)=f[x-(-a)]=\dfrac{f(x)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(x)}$
$$=\frac{1}{-1}=1$$

$$f(x+3a)=f[(x+a)+2a]=\frac{1}{f(x+a)}=1$$
$$f(x+4a)=f[(x+3a)-(-a)]$$
$$=\frac{f(x+3a)f(-a)+1}{f(-a)-f(x+3a)}$$
$$=0$$

可见,仍有 $f(x+4a)=f(x)$

综上所述, $f(x)$ 为周期函数, $4a$ 是一个周期.

(3) 先证 $f(x)$ 在区间 $(0,2a]$ 上是减函数.

事实上, 任取 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2\leqslant 2a$, 则 $0<x_2-x_1<2a$, 又有 $f(2a)=f[4a+(-2a)]=f(-2a)=0$

根据题设条件 ①,③ 有 $f(x_1)>0, f(x_2)\geqslant 0$, 且 $\dfrac{f(x_2)\cdot f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=f(x_2-x_1)>0$, 故 $f(x_1)>f(x_2)$, 知 $f(x)$ 在区间 $(0,2a]$ 上是减函数.

当 $x\in(2a,4a)$ 时, 又任取 x_3,x_4, 满足 $2a<x_3<x_4<4a$, 则 $0<x_3-2a<x_4-2a<2a$, 有
$$f(x_3-2a)>f(x_4-2a)>0$$
$$f(x)=f[(x-2a)+2a]=-\frac{1}{f(x-2a)}$$
$$\therefore f(x_3)-f(x_4)=\frac{1}{f(x_3-2a)}-\left(-\frac{1}{f(x_4-2a)}\right)$$
$$=\frac{1}{f(x_4-2a)}-\frac{1}{f(x_3-2a)}$$
$$>0$$

所以, $f(x)$ 在 $(2a,4a)$ 内也是减函数.

虽然,由上述推导过程知,对于任意的 $0<x_1<x_2<4a$, 总有 $f(x_1)>f(x_2)$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0,4a)$ 内是减函数.

【说明】 (2) 的证明易错证为 $f(x+2a)=-\dfrac{1}{f(x)}$, 所以 $f(x+4a)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 $4a$ 为周期的周期函数. 事实上, $f(x+2a)=-\dfrac{1}{f(x)}$ 成立的条件为 $f(x)\neq 0$, 所以要分两种情况讨论.

(3) 证 $f(x)$ 在 $(0,4a)$ 上也是减函数，还不能说 $f(x)$ 在 $(0,4a)$ 上是减函数. 还必须证明在 $(0,2a)$ 上，$f(x)>0$，$f(2a)=0$，在 $(2a,4a)$ 上 $f(x)<0$，才能说明 $f(x)$ 在 $(0,4a)$ 上为减函数.

4. 关于反函数.

例 12 设函数 $f(x)=\sqrt[4]{\frac{4x+1}{3x+1}}$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，解方程 $f(x)=f^{-1}(x)$.

【分析】 可以求出 $f^{-1}(x)=\frac{2x^4-1}{4-3x^4}(x>0,\text{且 } x\neq\frac{4}{3})$ 若直接解方程 $f(x)=f^{-1}(x)$，比较困难，我们分析 $f^{-1}(x)$ 的单调性，找出 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象交点与 $y=x$ 之间的关系，可得如下解答.

解: 设 $y=\sqrt[4]{\frac{4x+1}{3x+2}}$，则 $x=\frac{2y^4-1}{4-3y^4}$，故

$$f^{-1}(x)=\frac{2x^4-1}{4-3x^4}(x>0,\text{且 } x\neq\frac{4}{3})$$

由 $\frac{4x+1}{3x+2}=\frac{4}{3}-\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3x+2}$ 知，函数 $y=f(x)$ 在其定义域的每一段上皆为增函数，由于函数与其反函数有相同的单调性，所以 $f(x)=f^{-1}(x)$ 的实根为两函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在直线 $y=x$ 上的交点的横坐标；又由 $f(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 与 $f^{-1}(x)$ 的交点横坐标是非负数.

设此交点的横坐标为 x，则 $x=\frac{2x^4-1}{4-3x^4}$，整理得. $3x^5+2x^4-4x-1=0$，即 $(x-1)(3x^4+5x^3+5x^2+5x+1)=0$. 因 $3x^4+5x^3+5x^2+5x+1=0$ 无实根. 所以 $x=1$ 为原方程的惟一实数根.

【注】 本题用了如下结论：若 $f(x)$ 为增函数，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 图象交点在直线 $y=x$ 上，所以 $f(x)=f^{-1}(x)$ 等价于 $f(x)=x$(或 $f^{-1}(x)=x$)

例 13 已知函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-2})(a>0,a\neq 1)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，设 $g(n)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot f^{-1}(n+\log_2\sqrt{2})$ 若 $g(n)<\frac{3^n+3^{-n}}{2}(n\in N)$，求 a 的取值范围.

【分析】 先求 $f^{-1}(x)$，再设法求 a 的范围

解: 由 $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2}>0\\x^2-2\geqslant 0\end{cases}$ 得函数定义域为 $[\sqrt{2},+\infty)$.

$\therefore x+\sqrt{x^2-2}\geqslant\sqrt{2}$.

所以当 $a>1$ 时，$f^{-1}(x)$ 的定义域为 $[\log_a\sqrt{2},+\infty)$ 当 $0<a<1$ 时，$f^{-1}(x)$ 的定义域为 $(-\infty,\log_a\sqrt{2})$.

由 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-2})$，得 $x+\sqrt{x^2-2}=a^y$. ①，将式 ① 左边分子有理化，得 $x-\sqrt{x^2-2}=2a^{-y}$②

由 ① + ②，得 $x=\frac{a^y+2a^{-y}}{2}$.

因为 $n+\log_a\sqrt{2}\in[\log_a\sqrt{2},+\infty)$

所以，只有 $a>1$，这时 $f^{-1}(x)=\frac{a^x+2a^{-x}}{2}$.

其中 $x\geqslant\log_a\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\text{所以 } g(n)&=\frac{\sqrt{2}}{2}f^{-1}(n+\log_a\sqrt{2})\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^{n+\log_a\sqrt{2}}+2a^{-n-\log_a\sqrt{2}}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^n\cdot\sqrt{2}+2a^{-n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{a^n+a^{-n}}{2}.\end{aligned}$$

由 $g(n) < \frac{3^n + 3^{-n}}{2}$，得 $a^n + a^{-n} < 3^n + 3^{-n}$

即

$$(a^n - 3^n)\left[1 - \frac{1}{(3a)^n}\right] < 0$$

$\because a > 1, (3a)^n > 1$

所以 $$a^n - 3^n < 0, 即\ a^n < 3^n$$

所以 $$1 < a < 3$$

【注】 在求反函数解析式时，通过分子有理化得到式子 ① 的对偶式，避免了复杂的运算.

5. 关于二次函数

例 14 （1988. 四川省高中联赛试题）已知：实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a(a > 0)$ 且 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{a^2}{n-1}(n \geqslant 2, n \in N)$.

求证：$0 \leqslant x_i \leqslant \frac{2a}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

证： 设 $f(x) = (n-1)x^2 + 2(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)x + (x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$

则 $$f(x) = (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 + \cdots + (x - x_n)^2 \geqslant 0$$

由性质 2，$\Delta = 4(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 - 4(n-1)(x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2)$

$$= 4(a - x_1)^2 - 4(n-1)\left(\frac{a^2}{n-1} - x_1^2\right) \leqslant 0.$$

解此不等式得 $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{2a}{n}$

同理 $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{2a}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$

例 15 （首届前苏联农村数学奥林匹克十一年级第二轮试题）证明：若 $a^2 + ab + ac < 0, (a, b, c \in R)$，则 $b^2 > 4ac$.

证： 由所给条件可得

$a(a + b + c) < 0$

即 a 与 $a + b + c$ 异号

设 $f(x) = ax^2 + bx + c$

则 $f(1) = a + b + c$

$\therefore a$ 与 $f(1)$ 异号

$\therefore a > 0$ 时，$f(1) < 0$，

由性质 3，得 $f(x)$ 的图象与 x 轴必相交，从而 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

当 $a < 0$ 时，同理可得 $b^2 - 4ac > 0$

例 16 （1998. 北京，高一数学竞赛复试试题）若 $a < b < c < d$，求证：对任意的实数 $t \neq -1$，关于 x 的方程：$(x-a)(x-c) + t(x-b)(x-d) = 0$ 都有两个不等的实数根.

证： 设 $f(x) = (x-a)(x-c) + t(x-b)(x-d)$

则 $f(x) = (t+1)x^2 - (bt + dt + a + c) \cdot x + ac + bdt = 0$

当 $t > -1$ 时，即 $t + 1 > 0$，函数图象开口向上，而 $f(b) = (b-a)(b-c) < 0$

由性质 3 知，$f(x)$ 的图象与 x 轴必有两个相异公共点，亦即方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实根，当 $t < -1$，即 $t + 1 < 0$ 时，函数图象的开口向下，而 $f(c) = t(c-b)(c-d) < 0$，由已知可得 $f(c) > 0$，故 $f(x)$ 的图象与 x 轴必有两公共点，亦即方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实根.

综上所述，对于任意的 $t \neq 1$，关于 x 轴的方程 $(x-a)(x-c) + t(x-b)(x-d) = 0$ 总有两个不等实根.

例 17 （1998. 全国高中数学联赛试题）设函数 $f(x) = ax^2 + 8x + 3(a < 0)$ 对于给定的负数 a，有

一个最大的数 $L(a)$,使得在整个区间$[0,L(a)]$上,不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立.问 a 为何值时,$L(a)$ 最大?求出这个最大的 $L(a)$,证明你的结论.

【注】 这个题目如果用纯粹代数方法去解,则很难说清楚.对于一个负数 a,有一个关于 a 的函数 $L(a)>0$,使在$[0,L(a)]$上 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立,而对于任何正数 ϵ,在$(0,L(a)+\epsilon)$上都至少存在一个 x_1 使 $|f(x_1)|>5$.这样的文字叙述,学生本身理解有困难,况且要从中抽象出数学模型,谈何容易.下面我们用数形结合的思想,建构一个新的解题意境.

解: $f(x)=ax^2+8x+3=a(x+\frac{4}{a})^2+3-\frac{16}{a}$,所以 $f(x)_{max}=3-\frac{16}{a}, x\in R$

$\because -\frac{4}{a}>0, 3-\frac{16}{a}>0$,所以顶点在第一象限

又 $\because \Delta=64-12a>0$

$\therefore$ 方程 $ax^2+8x+3=0$ 有一正根和一负根,即 $f(x)=ax^2+8x+3$ 的图象与 x 轴的两个交点应在 y 轴两侧.如图 Ⅰ-2-4:

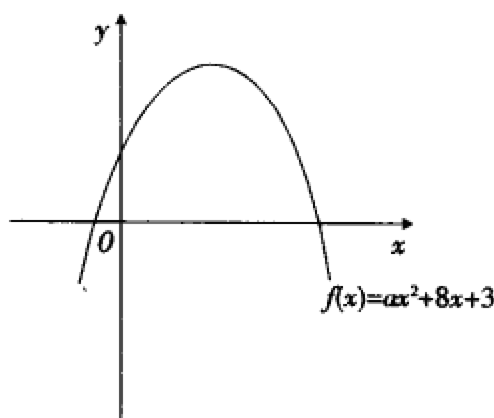


图 Ⅰ-2-4

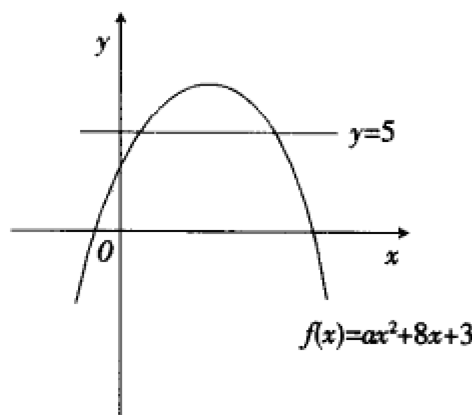


图 Ⅰ-2-5

(1) 当 $3-\frac{16}{a}>5$,即 $-8<a<0$ 时,由图 Ⅰ-2-5,此时应有 $0<L(a)<-4/a$,要使 $x\in[0,L(a)]$ 时,$|f(x)|\leqslant 5$ 成立,$f(x)=ax^2+8x+3$,$L(a)$ 应是方程 $ax^2+8x+3=5$ 的较小根.

$L(a)=\frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a}=\frac{2}{\sqrt{16+2a}+4}$,则当 $x\in[0,L(a)]$ 时,$f(x)\leqslant 5$ 成立.而对于任何 $\epsilon>0$ $[0,L(a)+\epsilon]$ 中总存在 x_1,使 $|f(x_1)|>5$.

$\because \sqrt{16+2a}>0$

$\therefore$ 这里的 $L(a)$ 值小于$\frac{2}{4}$ 即$\frac{1}{2}$.

(2) 当 $3-\frac{16}{a}\leqslant 5$,即 $a\leqslant -8$ 时,此时有 $L(a)>-\frac{4}{a}$ 故 $L(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=-5$ 的较大根,

$$L(a)=\frac{-8-\sqrt{64-32a}}{2a}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}$$

$$\leqslant\frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

当且仅当 $a=-8$ 时等式成立.

由于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}>\frac{1}{2}$,因此,当且仅当 $a=-8$ 时,$L(a)_{max}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

例 18 (2000.全国高中数学联赛)若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在区间$[a,b]$上的最小值为 $2a$,最大值为 $2b$,求$[a,b]$.

分析与略解: 由条件知函数 $f(x)$ 是顶点为$(0,\frac{3}{2})$,对称轴为 $x=0$,开口向下的抛物线,在区间$[a,b]$上的最小值为 $2a$,最大值为 $2b$,对区间$[a,b]$的位置分别讨论如下:

若 $0 \leqslant a < b$,则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递减,故满足

$$\begin{cases} f(a) = 2b, \\ f(b) = 2a \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{13}{2} = 2b, \\ -\dfrac{1}{2}b^2 + \dfrac{13}{2} = 2a \end{cases}$$

解得 $a = 1, b = 3$, ∴ 区间 $[a,b] = [1,3]$

(2) 若 $a < 0 < b$,则 $f(x)$ 在 $[a,0]$ 上单调递增,在 $[0,b]$ 上单调递减,故 $f(0) = 2b = \dfrac{13}{2}$. 即 $b = \dfrac{13}{4}$,由 $a < 0$,故 $2a < 0$,而 $f(b) = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{13}{4}\right)^2 + \dfrac{13}{2} = \dfrac{39}{12} > 0$,所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 时取最小值 $2a$,即 $2a = -\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{13}{2}$,解得 $a = -2 - \sqrt{17}$. 所以 $[a,b] = \left[-2-\sqrt{7}, \dfrac{13}{4}\right]$.

(3) 若 $a < b \leqslant 0$,则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增,即 $\begin{cases} f(a) = 2a \\ f(b) = 2b, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{13}{2} = 2a \\ -\dfrac{1}{2}b^2 + \dfrac{13}{2} = 2b. \end{cases}$

由于方程 $\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{13}{2} = 0$ 两根相异,故满足 $a < b < 0$ 的区间不存在.

故所求区间 $[a,b]$ 为 $[1,3]$ 或 $\left[-2-\sqrt{7}, \dfrac{13}{4}\right]$.

【注】 解本题的关键是对区间 $[a,b]$ 的位置在对称轴 $x = 0$ 的左侧,右侧,两侧逐一分类,结合二次函数的单调性使问题完整解决.

6. 关于指数函数

例 19 对于正整数 $a,b,c(a \leqslant b \leqslant c)$ 和实数 x,y,z,w,若 $a^x = b^y = c^z = 70^w$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{w}$,求证: $a + b = c$

证明:由 $a^x = b^y = c^z = 70^w$ 可得

$$a^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{x}}, b^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{y}}, c^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{z}}$$

将上述各式相乘,即得

$$(abc)^{\frac{1}{w}} = 70^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$$

$\therefore abc = 70$

因 x,y,z,w 均为不等于实零的实数,故 $a^x = b^y = c^z = 70^w \neq 1$,从而 a,b,c 均不为 1. 注意到因式分解:

$$70 = 2 \times 5 \times 7$$

依题设,有 $a \leqslant b \leqslant c$,故有且仅有 $a = 2, b = 5, c = 7$. 显见 $a + b = c$

例 20 (第一届美国数学邀请试题)设 x、y、$z > 1$, $\omega > 0$,若 $\log_x\omega = 24$, $\log_y\omega = 40$, $\log_{(xyz)}\omega = 12$,求 $\log_z\omega$.

【分析】 由指数与对数的两条性质可获如下解法.

解: 设 $\log_z\omega = k$,则 $z^k = \omega$

由题设得 $x^{24} = \omega, y^{40} = \omega, (xyz)^{12} = \omega$

$\therefore x^{24} = y^{40} = z^k = (x \cdot y \cdot z)^{12}$

据性质一有 $\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{12}$

$\therefore k = 60$,故 $\log_z\omega = 60$

例 21 (1988. 江省数学竞赛试题)设 a、b、c、d 均为不等于 1 的正数, $u,v,x,y \neq 0$,若 $a^u = b^v = c^x = d^y$,且 $uvx + uvy + uxy + vxy = 0$,求 $abcd$ 的值.

解: ∵ $u,v,x,y \neq 0$,且 $abcd \neq 0$,故由已知条件,等式可化为:

$a^u = b^v = c^x = \left(\frac{1}{d}\right)^{-y}$ 及 $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$.

由性质 2 得

$abc = \frac{1}{d}$, 故 $abcd = 1$

例 22 (1986. 全国高中数学联赛) 设 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 那么, $\sum_{k=1}^{1000} f\left(\frac{k}{1001}\right)$ 的值等于________.

【分析与解】 由自变量的取值特点, 可试探出 $f(x)$ 满足下列对称式结果.

若 $x + y = 1$, 则 $f(x) + f(y) = 1$, 于是

$$f\left(\frac{k}{1001}\right) + f\left(\frac{1001 - k}{1001}\right) = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots, 1000)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{1000} f\left(\frac{k}{1001}\right) = 500$$

例 23 设 $f(x) = \frac{a^x}{1 + a^x}$, $(a > 0, a \neq 1)$, $[m]$ 表示不超过实数 m 的最大整数, 则函数

$$\left[f(x) - \frac{1}{2}\right] + \left[f(-x) - \frac{1}{2}\right]$$

的值域为________

解: 令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{a^{-x}}{a^{-x} + 1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{(1 + a^x) - a^x}{1 + a^x} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{a^x}{1 + a^x} = -g(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] + \left[f(-x) - \frac{1}{2}\right] = [g(x)] + [-g(x)]$$

$$\because a^x > 0, \therefore 0 < f(x) = \frac{a^x}{1 + a^x} < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < g(x) = f(x) - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$$

当 $-\frac{1}{2} < g(x) < 0$ 时, $[g(x)] + [-g(x)] = -1 + 0 = -1$

当 $g(x) = 0$ 时, $[g(x)] + [-g(x)] = 0$

当 $0 < g(x) < \frac{1}{2}$ 时, $[g(x)] + [-g(x)] = 0 + (-1) = -1$

综上所述, 函数 $\left[f(x) - \frac{1}{2}\right] + \left[f(-x) - \frac{1}{2}\right]$ 的值域为 $\{-1, 0\}$.

7. 关于对数函数.

例 24 已知 $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$, 求值

$$N = a^{\log_2 \frac{b}{c}} \cdot b^{\log_2 \frac{c}{a}} \cdot c^{\log_2 \frac{a}{b}}$$

解: 由上例中的恒等式, 有

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_2 a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_2 b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\log_2 c} \\ &= a^{\log_2 c - \log_2 b} \cdot b^{\log_2 a - \log_2 c} \cdot c^{\log_2 b - \log_2 a} \\ &= N^{-1} \end{aligned}$$

$\therefore N^2 = 1$

$\because N > 0 \qquad \therefore N = 1$

例 25 （1995.全国高中数学联赛）用$[x]$表示不大于实数 x 的最大整数.方程 $\lg^2 x-[\lg x]-2=0$ 的实根个数是________.

【分析】 本题难点在于$[\lg x]$的不确定性.

用$[\lg x]\leqslant \lg x$.故原问题首先转化为求满足不等式 $\lg^2 x-\lg x-2\leqslant 0$ 的 x 值.

解得　$-1\leqslant \lg x\leqslant 2$

故方程的根的个数只要对$[\lg x]$取 $-1,0,1,2$,分别求解,得其三个根为 $x_1=\frac{1}{10},x_2=10^{\sqrt{3}},x_3=100$.

例 26 （1999.全国高中联赛）若$(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$,则(　　)

A. $x-y\geqslant 0$,　B. $x+y\geqslant 0$,　C. $x-y\leqslant 0$　D. $x+y\leqslant 0$

【分析】 $\because 0<\log_5 3<1<\log_2 3$

$\therefore y_1=(\log_2 3)^x$ 为增函数

又 $\because(\log_5 3)^x$ 为减函数

$\therefore y_2=-(\log_5 3)^x$ 为增函数

故 $y=y_1+y_2=(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x$ 为增函数.

由已知$(\log_2 3)^x-(\log_5 3)^x\geqslant(\log_2 3)^{-y}-(\log_5 3)^{-y}$,得　$x\geqslant -y$,即　$x+y\geqslant 0$　$\therefore$ 选(B)

8. 关于函数最大值和最小值.

例 27 （1993.全国高中联赛）实数 x,y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$,设 $\zeta=x^2+y^2$ 则$\frac{1}{\zeta_{max}}+\frac{1}{\zeta_{min}}=$________

解法一:利用不等式 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$

由 $4x^2-5xy+4y^2=5$.　$\zeta=x^2+y^2$,得

$$xy=\frac{4}{5}\zeta-1 \quad ①$$

由

$$|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{1}{2}\zeta \text{ 得}$$

$$-\frac{\zeta}{2}\leqslant xy\leqslant\frac{\zeta}{2} \quad ②$$

由①,②得 $-\frac{\zeta}{2}\leqslant\frac{4}{5}\zeta-1\leqslant\frac{\zeta}{2}$ 即

$$\frac{10}{13}\leqslant\zeta\leqslant\frac{10}{3}$$

当且仅当 $x=y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$ 时,$\zeta=\frac{10}{13}$

当 $x=y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$ 时,$\zeta=\frac{10}{13}$

$\therefore\zeta_{max}=\frac{10}{3}$　　$\zeta_{min}=\frac{10}{13}$

$\frac{1}{\zeta_{max}}+\frac{1}{\zeta_{min}}=\frac{8}{5}$

解法二:三角换元法.

由 $4x^2-5xy+4y^2=5$,得 x,y 不同时为 0,$\zeta=x^2+y^2>0,\left(\frac{x}{\sqrt{\zeta}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{\zeta}}\right)^2=1$

令$\frac{x}{\sqrt{\zeta}}=\sin\theta,\frac{y}{\sqrt{\zeta}}=\cos\alpha$,则

$x=\sqrt{\zeta}\sin\theta,y=\sqrt{\zeta}\cos\alpha$

代入 $4x^2-5xy+4y^2=5$ 中,整理得

$$\zeta = \frac{5}{4 - \frac{5}{2}\sin 2\theta}$$

又 $\sin 2\theta \in [-1,1]$,

$4 - \frac{5}{2}\sin 2\theta \in [\frac{3}{2}, \frac{13}{2}]$

所以 $$\zeta \in [\frac{10}{13}, \frac{10}{3}], \zeta_{max} = \frac{10}{3}, \zeta_{min} = \frac{10}{13}$$

故 $$\frac{1}{\zeta_{max}} + \frac{1}{\zeta_{min}} = \frac{8}{5}$$

解法三:代数换元法.

令 $x = u + v, y = u - v$

代人 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$ 中整理得

$$3u^2 + 13v^2 = 5 \quad ①$$

所以 $$\zeta = 2u^2 + 2v^2 \quad ②$$

由 ① 得 $$u^2 = \frac{5}{3} - \frac{13}{3}v^2 \quad ③$$

由 ③ 代人 ② 得

$$\zeta = -\frac{20}{3}v^2 + \frac{10}{3} \leqslant \frac{10}{3} \quad (v = 0\text{ 时取等号}) \quad ④$$

由 ① 得 $$v^2 = \frac{5}{13} - \frac{3}{13}u^2 \quad ⑤$$

将 ⑤ 代人 ② 得

$$\zeta = \frac{20}{13}u^2 + \frac{10}{13} \geqslant \frac{10}{13} \quad (u = 0\text{ 时取等号})$$

所以 $$\zeta_{max} = \frac{10}{3}, \zeta_{min} = \frac{10}{13}$$

故 $$\frac{1}{\zeta_{max}} + \frac{1}{\zeta_{min}} = \frac{8}{5}$$

§2.3 巩固练习

(一) 选择题

1. 下面列举的四个函数中,满足性质 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$ 的函数 f 是(　　).

A. $\lg x$　　B. $\frac{1}{x}$　　C. $3x$　　D. 3^x

2. 已知 $f(x) = a\sin x + b\sqrt[3]{x} + 4$($a,b$ 为实数).且 $f(\lg\log_3 10) = 5$,则 $f(\lg\lg 3)$ 的值是(　　).

A. -5　　B. -3　　C. 3　　D. 随 a,b 的值而定

3. 设 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的函数,且满足:(1)$f(10 + x) = f(10 - x)$;(2)$f(20 - x) = -f(20 + x)$.则 $f(x)$ 是(　　).

A. 偶函数,又是周期函数　　B. 偶函数,但不是周期函数

C. 奇函数,又是周期函数　　D. 奇函数,但不是周期函数

4. 对于一对实数 x、y,函数 f 满足方程 $f(x + y) - f(x) - f(y) = 1 + xy$,且 $f(1) = 1$,那么,$f(n) = n(n \neq 1)$ 的整数 n 的个数共有(　　)个.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 点集 $\{(x,y) \mid \lg\left(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9}\right) = \lg x + \lg y\}$ 中元素的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 多于 2

6. 已知函数 $f(x)=ax^2-c$ 满足：$-4\leqslant f(1)\leqslant -1$，$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，那么，$f(3)$ 应满足(　　)

A. $7\leqslant f(3)\leqslant 26$　　B. $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$

C. $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$　　D. $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant \frac{35}{3}$

7. 设 $f(x)$ 是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数，且是偶函数，已知当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)$ 的解析式是(　　).

A. $f(x)=x+4$　　B. $f(x)=2-x$

C. $f(x)=3-|x+1|$　　D. $f(x)=2+|x+1|$

(二) 填空题

1. 已知集合 $M=\{x,xy,\lg(xy)\}$ 及 $N=\{0,|x|,y\}$，并且 $M=N$，那么 $\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$ 的值等于________.

2. 已知 $f(x)=|1-2x|$，$x\in[0,1]$，那么方程 $f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$ 的解的个数是________.

3. $f(n)$ 为定义在所有正整数上并取正整数值的一个函数，且对所有正整数 m,n，有 $f(f(m)+f(n))=m+n$，则 $f(1995)$ 的所有可能值是________.

4. 设任意实数 $x_0>x_1>x_2>x_3>0$，要使 $\log_{\frac{x_0}{x_1}}1993+\log_{\frac{x_1}{x_2}}1993+\log_{\frac{x_2}{x_3}}1993>K\log_{\frac{x_0}{x_3}}1993$ 恒成立，则 K 的最大值是________.

5. 方程 $H(n+1)=2\sqrt{H(n)}$，其中 $n\in N$，$H(1)=10$，则 $H(n)$ 的解析式是________.

(三) 解答题

1. 已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证：

$$\log_a(a^x+a^y)\leqslant \log_a 2+\frac{1}{8}$$

2. 函数 $f(x)=ax^4-x^2+bx+c$ 的图像如图示，试确定系数 a,b,c 的符号.(图 Ⅰ-2-6)

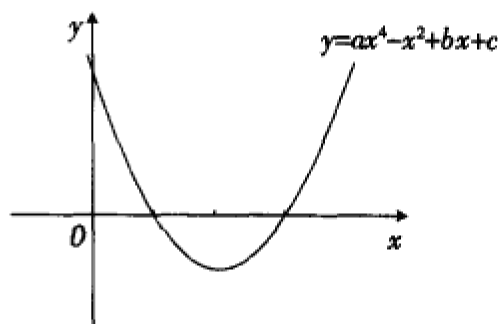


图 Ⅰ-2-6

3. 定义在整个实数集上的函数 $f(x)$，满足以下条件：当且仅当 $x^2 = px + q$ 有解时，方程 $f(x) = px + q$ 有解，证明：$f(x) = x^2$

4. 设 a，b 是不同的正数，证明：

$$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$$

5. $f(n)$ 是定义在非负整数集上的函数，$f(0) = 5$，且 $f(n) = \frac{1}{f(n-1)} + f(n-1)$，求证：$45 < f(1000) < 45.1$

第三章

数　列

§3.1　知识要点与基本方法

1. 等差数列$\{a_n\}$

(1) 项与项之间的关系.

对任意正整数 n,都有

①$a_{n+1}-a_n=a_2-a_1$

②$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots\cdots$

③ 若 $m+n=p+q$,则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

④ 若 $a_p=q,a_q=p$,则 $a_{p+q}=0$

⑤ 对 $m,p,n\in N$

若 $m+n=2p$,则 $a_m+a_n=2a_p$

⑥ 任 $p,q\in N$ 恒有

$a_p-a_q=(p-q)(a_2-a_1)$

(2) 通项公式

①$a_n=a_1+(n-1)d$

②$a_n=a_m+(n-m)d$

③$a_n=(a_2-a_1)n+(2a_1-a_2)$

④$a_n=nd+(a_1-d)$

⑤ 递推关系:$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$

⑥ 递推关系中常用

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

(3) 部分和

①$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

②$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

③$S_n=\dfrac{n(a_k+a_{n+1-k})}{2}$

④$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$ 或 $S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$

⑤$S_{2n}=n(a_n+a_{n+1})$

⑥$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\dfrac{2a_1-d}{2}n$

(4) 设公差为 d,则

①$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 是等差数列,公差为 m^2d,即

$$2(S_{2m}-S_m)=S_m+(S_{3m}-S_{2m})$$

② 若 $S_m=S_n(m\neq n)$,则 $S_{m+n}=0$

③若 $S_p = q, S_q = p \quad p \neq q$

则 $\quad S_{p+q} = -(p+q)$

2. 等比数列$\{a_n\}$

(1) 项与项之间的关系.

对任意正整数 n,都有

① $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_2}{a_1}$

②$a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = \cdots\cdots$

③若 $m+n=p+q$,则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

(2) 通项公式

①$a_n = a_1 q^{n-1}$

②$a_n = a_m q^{n-m} (\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m})$

③$a_n = a_1 (\frac{a_2}{a_1})^{n-1}; a_{n+1} = a_n \cdot q$

④${a_n}^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

⑤$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$

(3) 部分和

①$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} (q \neq 1)$

当 $q=1$ 时,$S_n = na_1$

②$S_{m+n} = S_n + q^n S_m$

(4) $\{a_n\}$ 为等比数列,公比为 q,且 $q \neq -1$,则 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等比数列,公比为 $r = q^m$.

§3.2 赛题精讲

1. 关于数项的通项

例 1 (第 12 届"希望杯"高二培训题)数列$\{a_n\}$满足:对于任意 $n \in N, a_{n+1} = 6n - a_n$,且 $a_1 = 1$,则通项公式 $a_n =$ ________

(1) 一题多解,串点成线.

解法一:基本数列法

因为 $\quad a_{n+1} + a_n = 6n$

所以 $\quad a_{n+2} + a_{n+1} = 6(n+1)$

可得 $\quad a_{n+2} - a_n = 6$

所以,数列$\{a_{2k-1}\}$是以 1 为首项,6 为公差的等差数列,所以 $a_{2k-1} = 1 + 6(k-1) = 6k-5 = 3(2k-1) - 2$

$a_{2k} = 6(2k-1) - a_{2k-1} = 6k - 1 = 3 \cdot 2k - 1$

所以 $\quad a_n = \begin{cases} 3n-2(n \text{ 为奇数}) \\ 3n-1(n \text{ 为偶数}) \end{cases}$

解法二:待定系数法

由 $a_{n+1} = 6n - a_n$ 得

$$a_{n+1}+A(n+1)+B=-(a_n+An+B)$$

即
$$a_{n+1}=-2An-a_n-(A+2B)$$

令 $\begin{cases}-2A=6\\A+2B=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-3\\B=1.5\end{cases}$

即
$$a_{n+1}-3(n+1)+1.5=-(a_n-3n+1.5)$$

所以数列 $\left\{a_n-3n+\dfrac{3}{2}\right\}$ 是以 $-\dfrac{1}{2}$ 为首项，-1 为公比的等比数列

所以
$$a_n-3n+\frac{3}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)^{n-1}$$

所以
$$a_n=3n-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-1)^n$$

解法三:特征根法

因为 $a_{n+1}+a_n=6n$,所以 $a_{n+2}+a_{n+1}=6(n+1)$,即
$$a_{n+2}-a_n=6,\text{所以 } a_{n+3}-a_{n+1}=6$$

所以
$$a_{n+3}-a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0$$

所以,数列 $\{a_n\}$ 的特征方程为
$$x^3-x^2-x-1=0$$

解得
$$x_1=x_2=1,x_3=-1$$

所以,数列 $\{a_n\}$ 通解为
$$a_n=An+B+C\cdot(-1)^n$$

由 $a_1=1$,得 $a_2=5,a_3=7$

所以

$\begin{cases}A+B-C=1\\2A+B+C=5\\3A+B-C=7\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=3\\B=-\dfrac{3}{2}\\C=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$a_n=3n-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^n$

(2) 一题多变,连线成面.

变式 1 数列 $\{a_n\}$ 满足:对于任意 $n\in N,a_{n+1}=a_n+6n$,且 $a_1=1$,则通项 $a_n=$ ________.

解:因为 $a_{n+1}-a_n=6n$,所以

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1\\&=6(n-1)+6(n-2)+\cdots+6+1\\&=3n(n-1)+1\end{aligned}$$

所以
$$a_n=3n^2-3n+1$$

变式 2 数列 $\{a_n\}$ 满足,对于任意 $n\in N,a_{n+1}=6n\cdot 2^n-a_n$,且 $a_1=1$,则通项 $a_n=$ ________.

解:由 $a_{n+1}=6n\cdot 2^n-a_n$,得

$a_{n+1}+[A(n+1)+B]\cdot 2^{n+1}=-[a_n+(An+B)\cdot 2^n]$

即
$$a_{n+1}=-a_n+(-3An-2\cdot A-3B)\cdot 2^n$$

令 $\begin{cases}-3A=6\\-2A-3B=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-2\\B=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

即
$$a_{n+1}+\left[\frac{4}{3}-2(n+1)\right]\cdot 2^{n+1}=-\left[a_n+\left(\frac{4}{3}-2n\right)\cdot 2^n\right]$$

所以,数列 $\left\{a_n+\left(\dfrac{4}{3}-2n\right)\cdot 2^n\right\}$ 是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为首项,-1 为公比的等比数列,所以

$$a_n + (\frac{4}{3} - 2n) \cdot 2^n = -\frac{1}{3}(-1)^{n-1}$$

即
$$a_n = (2n - \frac{4}{3}) \cdot 2^n + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n$$

(3) 推广结论,展面成体.

推广 递推数列$\{a_n\}$满足:$a_{n+1} = pa_n + (a_n + b)q^n(p, q \neq 0)$,则数列$\{a_n\}$的通项.

① 当 $p \neq q$ 时,$a_n = Ap^n + (Bn + c)q^n$;

② 当 $p = q$ 时,$a_n = (An^2 + Bn + c)q^n$.

其中 A、B、C 是由 a_1 确定的常数.证明略.

例 2 (第 13 届"希望杯" 高一第 1 试第 5 题)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$,则 a_{2001} 等于(　　)

A. $-\frac{3}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{3}$　　　　C. 1　　　　D. 2

【分析】 由题设条件

$a_1 = 2, a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$　知

$a_2 = -\frac{1}{a_1 + 1} = -\frac{1}{3}$

$a_3 = -\frac{1}{a_2 + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3} + 1} = -\frac{3}{2}$

$a_4 = -\frac{1}{a_3 + 1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2} + 1} = 2$

$a_5 = -\frac{1}{a_4 + 1} = -\frac{1}{2 + 1} = -\frac{1}{3}$

$a_6 = -\frac{1}{a_5 + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3} + 1} = -\frac{3}{2}$

… … … … … … … … …

发现 $a_4 = a_1 = 2, a_5 = a_2 = -\frac{1}{3}, a_6 = a_3 = -\frac{3}{2}, \cdots$

故推想有:$a_{n+3} = a_n$

证明:$\because a_1 = 2$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$$

所以
$$a_{n+2} = -\frac{1}{a_{n+1} + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{a_n + 1} + 1}$$

$$= -\frac{a_n + 1}{a_n} = -1 - \frac{1}{a_n}$$

进而
$$a_{n+3} = -\frac{1}{a_{n+2} + 1} = -\frac{1}{-1 - \frac{1}{a_n} + 3}$$

所以
$$a_{n+3} = a_n \text{ 成立}$$

故 $a_{2001} = a_{666 \cdot 3 + 3} = a_3 = -\frac{3}{2}$ 选 A

例 3 (1991.全国高中数学联赛试题)将正奇数集合$\{1,3,5,\cdots\}$从小到大按第 n 组有$(2n - 1)$个奇数进行分组:

$\{1\}$,　　　$\{3,5,7\}$,　　　$\{9,11,13,15,17\}$,$\cdots$

(第 1 组)　　(第 2 组)　　(第 3 组)

问 1991 位于第几组中?

【分析】 思路需要写出第 n 组的第 1 个数和最后一个数,1991 介于其中,而第 n 组中最后一个数是第$(1+3+\cdots+2n-1)=n^2$ 个奇数为 $2n^2-1$.

解:$\because 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

所以前 n 组共含有奇数 n^2 个,第 n 组最后一个数即第 n^2 个奇数为 $2n^2-1$,第 n 组第一个数即第 $n-1$ 组最后一个数后面的奇数为$[2(n-1)^2-1]+2=2(n-1)^2+1$,由题意有不等式 $2(n-1)^2+1\leqslant 1991\leqslant 2n^2-1$.

解得$(n-1)^2\leqslant 995$ 且 $n^2\geqslant 996$.从而 $n\leqslant 32$,且 $n\geqslant 32$.

故 $n=32$,即 1992 位于第 32 组中.

【评述】 应用待定的方法,假定位于第 n 组中然后确定 n 即可.

例 4 (1999.全国高中联赛)给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列$\{a_n\}$,设 $b_1=a_1+a_2+a_3, b_2=a_4+a_5+a_6,\cdots,b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$,则数列$\{b_n\}$(　　)　　答案.取 C

A. 是等比数列　　B. 是公比 q' 的等比数列

C. 是公比为 q^3 的等比数列　　D. 既非等差数列又非等比数列

本题实际上给出了等比数列的一个性质.

性质 1　给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列$\{a_n\}$,设 $b_1=a_1+a_2+a_3, b_2=a_4+a_5+a_6,\cdots,b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}$,则数列$\{b_n\}$ 是公比为 q^3 的等比数列.

证明:根据题设,$a_n=a_1q^{n-1}$,则

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n}&=\frac{a_{3n+1}+a_{3n+2}+a_{3n+3}}{a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}}\\&=\frac{a_1q^{3n}+a_1q^{3n+1}+a_1q^{3n+2}}{a_1q^{3n-3}+a_1q^{3n-2}+a_1q^{3n-1}}\\&=\frac{a_1q^{3n}(1+q+q^2)}{a_1q^{3n-3}(1+q+q^2)}\\&=q^3\end{aligned}$$

因此,数列$\{b_n\}$ 是公比为 q^3 的等比数列.

从性质 1 的证明可以得到.

推广 1　给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列$\{a_n\}$,设 $b_1=a_1+a_2+\cdots+a_k, b_2=a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k},\cdots,b_n=a_{(n-1)k+1}+a_{(n-1)+2}+\cdots+a_{nk}$,则数列$\{b_n\}$ 是公比为 q^k 的等比数列.

对性质 1 作指数加权推广,可得

推广 2　给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列$\{a_n\}$,设 $b_1=a_1^2+a_2^2+a_3^2, b_2=a_4^2+a_5^2+a_6^2,\cdots,b_n=a_{3n-2}^2+a_{3n-1}^2+a_{3n}^2$.则数列$\{b_n\}$ 是公比为 q^6 的等比数列.

证明:根据题设,$a_n=a_1q^{n-1}$,则

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}}{b_n}&=\frac{a_{3n+1}^2+a_{3n+2}^2+a_{3n+3}^2}{a_{3n-2}^2+a_{3n-1}^2+a_{3n}^2}\\&=\frac{a_1^2q^{6n}+a_1^2q^{6n+2}+a_1^2q^{6n+4}}{a_1^2q^{6n-6}+a_1^2q^{6n-4}+a_1^2q^{6n-2}}\\&=\frac{a_1^2q^{6n}(1+q^2+q^4)}{a_1^2q^{6n-6}(1+q^2+q^4)}\\&=q^6.\end{aligned}$$

因此,数列$\{b_n\}$ 是公比为 q^6 的等比数列.

从推广 2 的证明中又可得到

推广 3　给定公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列$\{a_n\}$,$m,k\in N$,设 $b_1=a_1^m+a_2^m+\cdots+a_k^m, b_2=a_{k+1}^m$

$+ a_{k+2}^m + \cdots + a_{2k}^m, \cdots, b_n = a_{(n-1)k+1}^m + a_{(n-1)k+2}^m + \cdots + a_{nk}^m$,则数列$\{b_n\}$是公比为$q^{mk}$的等比数列.

易证,若$a_1 > 0, q > 0$且$q \neq 1$,等比数列有:

性质2 给定公比为$q(q \neq 1)$的等比数列,$k \in N, \alpha \in R, \alpha \neq 0$,设$b_1 = a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_k^\alpha, b_2 = a_{k+1}^\alpha + a_{k+2}^\alpha + \cdots + a_{2k}^\alpha, \cdots, b_n = a_{(n-1)k+1}^\alpha + a_{(n-1)k+2}^\alpha + \cdots + a_{nk}^\alpha$,则数列$\{b_n\}$是公比为$q^{\alpha k}$的等比数列.

2. 关于数列求和

例1 (1999.河南高中数学竞赛题),设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前几项和.$S_9 = 18, a_{n-4} = 30, (n > 9), S_n = 336$,则$n$的值为( ).

A. 16　　B. 21　　C. 9　　D. 8

解:$S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_5 + a_5)}{2} = 18, \therefore a_5 = 2.$

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_5 + a_{n-4})}{2} = \frac{n(2 + 30)}{2} = 336. \therefore n = 21$

故选B.

例2 (2000.北京高考题),已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{101} = 0$,则有( ).

A. $a_1 + a_{101} > 0$　　B. $a_2 + a_{100} < 0$

C. $a_3 + a_{99} = 0$　　D. $a_{51} = 51$

解:$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{101}$

$= \frac{101(a_1 + a_{101})}{2} = \frac{101(a_3 + a_{99})}{2} = 0$

$\therefore a_3 + a_{99} = 0$　故选C

例3 (1997.全国高考题)设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和,已知$\frac{1}{3}S_3$与$\frac{1}{4}S_4$的等比中项为$\frac{1}{5}S_5$,$\frac{1}{3}S_3$与$\frac{1}{4}S_4$的等差中项为1,求等差数列$\{a_n\}$的通项a_n.

解:由$\frac{1}{3}S_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = \frac{a_2 + a_2}{2} = a_2$

同理,$S_4/4 = (a_2 + a_3)/2, S_5/5 = a_3$

由题意$\begin{cases} a_2 + (a_2 + a_3)/2 = 2, \\ a_2 \cdot (a_2 + a_3)/2 = a_3^2 \end{cases}$

解得　$a_2 = 1, a_3 = 1$或$a_2 = 8/5, a_3 = -4/5$

即　$a_n = 1$或$a_n = -\frac{12}{5}n + \frac{32}{5}$

例4 (2000.上海高考题)已知$\{a_n\}$是等差数列,$a_1 = -393, a_2 + a_3 = -768$,$\{b_n\}$是公比为$q(0 < q < 1)$的无穷等比数列,$b_1 = 2$且$\{b_n\}$的各项和为20.

(1) 写出$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

(2) 试求满足不等式$\frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}}{m+1} \leqslant -160b_2$的正整数$m$.

解:(1) 由$a_2 + a_3 = a_1 + a_4$

$\therefore a_4 = -768 - (-393) = -375$

$d = \frac{a_4 - a_1}{3} = \frac{-375 + 393}{3} = 6$

$\therefore a_n = 6n - 399$.又$20 = \frac{b_1}{1-q} = \frac{2}{1-q}$

$\therefore q = 0.9, b_n = 2 \times (0.9)^{n-1}$

(2) 由$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m} = \frac{m}{2}(a_{m+1} + a_{2m}) = \frac{m}{2}(a_1 + a_{3m}) = \frac{m}{2}[a_1 + a_1 + (3m-1)d]$

$$= m(18m - 792)/2.$$

又 $b_2 = 2 \times 0.9 = 1.8$

代入 $\frac{a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{2m}}{m+1} \leqslant -160b_2$，得 $\frac{m(18m-792)/2}{m+1} \leqslant -160 \times 1.8$. 即

$m^2 - 12m + 32 \leqslant 0$ $\quad\therefore 4 \leqslant m \leqslant 8$ $\quad$ 又 $m \in N^*$ $\quad\therefore m = 4、5、6、7、8$.

面对情境陌生的数学问题，首先考虑的是思维方法，学会利用几何图形，函数图象或统计图表的直观性，激发形象思维，寻找简捷的解题途径. 请看如下两例.

例 5 (1989. 苏州市高中数学竞赛)

已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$，则和

$f(\frac{1}{1}) + f(\frac{2}{1}) + \cdots + f(\frac{100}{1}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{2}) + \cdots f(\frac{100}{2}) + \cdots + f(\frac{1}{100}) + f(\frac{2}{100}) + \cdots + f(\frac{100}{100})$ 的值等于(　　)

A. 10000 　　B. 5000 　　C. 1000 　　D. 100

解：列出如图的正方形数表，绕主对角线旋转 180° 后两个数表叠加.

$$\begin{array}{ccccc}
f(\frac{1}{1}) & f(\frac{2}{1}) & f(\frac{3}{1}) & \cdots & f(\frac{100}{1}) \\
f(\frac{1}{2}) & f(\frac{2}{2}) & f(\frac{3}{2}) & \cdots & f(\frac{100}{2}) \\
f(\frac{1}{3}) & f(\frac{2}{3}) & f(\frac{3}{3}) & \cdots & f(\frac{100}{3}) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f(\frac{1}{100}) & f(\frac{2}{100}) & f(\frac{3}{100}) & \cdots & f(\frac{100}{100})
\end{array}$$

则每个数的位置上两数和为

$$f(\frac{j}{i}) + f(\frac{i}{j}) = 1 \quad (i,j = 1,2,\cdots,100)(*)$$

故 $2S = 100^2$ 　　即和 $S = 5000$ 　应选 B

【评注】 (1) 结论($*$)是至关重要的；

(2) 本题通过正方形数表，使求和的各项及项数直观明了，便于准确迅速计算结果.

例 6 (1997. 上海市高中数学竞赛) 已知数列 $a_k = 2^k (1 \leqslant k \leqslant n)$，则所有可能的乘积 $a_i a_j (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ 的和为__________.

解：由 $a_i a_j = 2^{i+j} (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$，列表如下：

$$\begin{array}{ccccc}
2^{1+1} & 2^{1+2} & 2^{1+3} & \cdots & 2^{1+n} \\
 & 2^{2+2} & 2^{2+3} & \cdots & 2^{2+n} \\
 & & 2^{3+3} & \cdots & 2^{3+n} \\
 & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & 2^{n+n}
\end{array}$$

将这个上三角形数表绕主对角线对称地填在下三角形中，便得正方形数表：

$$\begin{array}{ccccc}
2^{1+1} & 2^{1+2} & 2^{1+3} & \cdots & 2^{1+n} \\
2^{2+1} & 2^{2+2} & 2^{2+3} & \cdots & 2^{2+n} \\
2^{3+1} & 2^{3+2} & 2^{3+3} & \cdots & 2^{3+n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2^{n+1} & 2^{n+2} & 2^{n+3} & \cdots & 2^{n+n}
\end{array}$$

设所求和为 S，第一行和记为 S_1，则有

$$2S = S_1(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + (2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n})$$

$$= 2^2(2^n-1)^2 + \frac{2}{3}^2(2^{2n}-1)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot(2^n-1)(2^{n+2}-2)$$

故 $S = \frac{4}{3}(2^n-1)(2^{n+1}-1)$ 为所求

【评注】 本题巧妙地把三角形数表整体对称变换成正方形数表，然后利用各行等比数列内在联系简洁地完成了计算.

例 7 等差数列的前 p 项之和为 q，(p,q 为不相等的正整数)，前 q 项之和为 p，则这数列的前 $p+q$ 项之和为(　　)

A. $p+q$　　B. $p-q$　　C. $-p+q$　　D. $-p-q$

解法一: $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1-d}{2}\cdot n$

由已知有

$$\begin{cases} q = \frac{d}{2}p^2 + \frac{2a_1-d}{2}p & ① \\ p = \frac{d}{2}q^2 + \frac{2a_1-d}{2}q & ② \end{cases}$$

由 ①×q－②×p 得

$$q^2 - p^2 = \frac{d}{2}pq(p-q)$$

$\because p-q \neq 0$

$\therefore \frac{d}{2} = -\frac{p+q}{pq}$

又由 ①×q^2－②×p^2 得

$$q^3 - p^3 = \frac{2a_1-d}{2}pq(q-p)$$

$\because p-q \neq 0$

$\therefore \frac{2a_1-d}{2} = \frac{p^2+pq+q^2}{pq}$

所以

$$\begin{aligned} S_{p+q} &= \frac{d}{2}(p+q)^2 + \frac{2a_1-d}{2}(p+q) \\ &= -\frac{p+q}{pq}(p+q)^2 + \frac{p^2+pq+q^2}{pq}(p+q) \\ &= \frac{p+q}{pq}[(p^2+pq+q^2)-(p+q)^2] \\ &= -(p+q) \end{aligned}$$

$\therefore$ 答案取 D

解法二: 由“前”①－② 得

$$q - p = \frac{d}{2}(p^2-q^2) + \frac{2a_1-d}{2}(p-q)$$

$\because p-q \neq 0$

$\therefore -1 = \frac{d}{2}(p+q) + \frac{2a_1-d}{2}$

两边乘以 $p+q$ 即有

$$\begin{aligned} -(p+q) &= \frac{d}{2}(p+q)^2 + \frac{2a_1-d}{2}(p+q) \\ &= S_{p+q} \end{aligned}$$

即　$S_{p+q} = -(p+q)$

【评注】

(1) 解法 2 的“背景”或“根据”是什么呢?

对二次函数:$S(x) = ax^2 + bx$(指 $a < 0$ 时,$\because$ 前$\frac{d}{2} = -\frac{p+q}{pq}$ $\therefore \frac{d}{2} < 0$) 有等式

$$\frac{S(x_1) - S(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{S(x_1 + x_2) - S(v)}{(x_1 + x_2) - 0} \quad (*)$$

把 $S(x_1) = x_2$ $\quad S(x_2) = x_1$ 代入($*$)即有

$S(x_1 + x_2) = -(x_1 + x_2)$(如图 Ⅰ-3-1 所示)

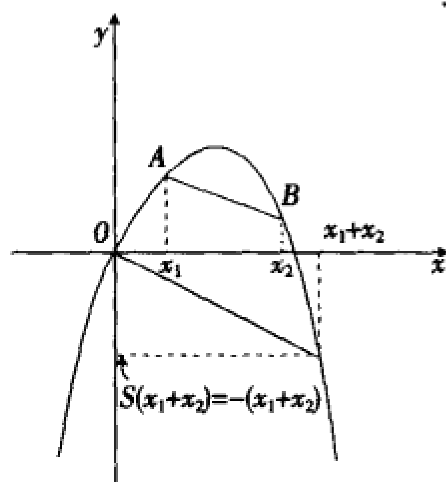


图 Ⅰ-3-1

(2)“解法 2”可改写成

$$-1 = \frac{S_p - S_q}{p - q}$$

$$= \frac{\frac{d}{2}(p^2 - q^2) + \frac{2a_1 - d}{2}(p - q)}{p - q}$$

$$= \frac{d}{2}(p + q) + \frac{2a_1 - d}{2}$$

$$= \frac{S(p + q)}{p + q}$$

$\therefore S(p + q) = -(p + q)$.

例 8 各项为实数的等差数列的公差为4,其首项的平方与其余各项之和不超过 100,这样的数列至多有多少项?

解:设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是公差为 4 的等差数列,则

$$a_1^2 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant 100$$

即

$$a_1^2 + \frac{(a_1 + 4) + [a_1 + (n - 1)4]}{2}(n - 1) \leqslant 100$$

$$a_1^2 + \frac{2a_1 + n \cdot 4}{2}(n - 1) \leqslant 100$$

$$a_1^2 + (a_1 + 2n)(n - 1) \leqslant 100$$

即

$$a_1^2 + (n - 1)a_1 + (2n^2 - 2n - 100) \leqslant 0 \quad ①$$

因此,当且仅当 $\Delta = (n - 1)^2 - 4(2n^2 - 2n - 100) \geqslant 0$ 时,至少存在一个实数 a_1 满足 ① 式. 即 $a_1^2 + a_2 + \cdots + a_n$ 不超过 100 的这样数列至少有一项,从 $\Delta \geqslant 0$ 可找到最大的项数 n. 即

$$7n^2 - 6n - 401 \leqslant 0$$

$$\therefore n_1 \leqslant n \leqslant n_2 \quad ②$$

其中 $n_1 = \frac{1}{7}(3 - \sqrt{2816}) < 0$

$$8 < n_2 = \frac{3 + \sqrt{2816}}{7} < 9$$

所以满足 ② 的自然数 n 的最大值为 8.

$\therefore$ 这样的数列至多有 8 项.

例 9 (1995. 全国高考理科试题)

设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,ζ_n 是其前 n 项和.

(Ⅰ) 证明 $\frac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}$;

(Ⅱ) 是否存在常数 $c > 0$,使得

$$\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$$

成立?并证明你的结论.

【分析】 为了证明(Ⅰ)可利用对数函数性质去掉对数符号,化为等价的不等式 $S_nS_{n+2} < S_{n+1}^2$ 的证明.这时,差值法,比值法,分析法或综合法都能有效证明该不等式,关键在于采用 S_n 的适当的计算公式,路径很多,计算灵活者可快捷得证(参看下列证法,并加以比较可知).关于(Ⅱ)的解答是:关于 C 的方程式(含对数)解的存在性问题,作为条件 C 的条件,必须满足三点:其一是正数;其二是常数(与 n 无关);其三是满足(Ⅱ)中的等式,即对任意自然数 n,c 都使该等式成立.因此,也有多种解答途径,比如,将等式视为 C 的对数方程,解之,再检验其解是否满足前述,其二的条件;又如,先设满足题意的 C 存在,然后看有什么结果,导出其可能的条件组,通过分析各条件的相容性,来判断 C 是否存在.

证明(Ⅰ): 依题意,可知对任意自然数 n,都有 $S_n > 0$,因此原不等式等价于

$$S_nS_{n+2} < S_{n+1}^2; \qquad (*)$$

为使(Ⅰ)得证,只须证明(*)式成立,其证法有多种,列举数例供参考

证法一: 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q,依设 $a_1 > 0, q > 0$

(1) 当 $q = 1$ 时,$S_n = na_1 (n \in N^+)$,从而

$$S_nS_{n+2} - S_{n+1}^2 = a_1^2[n(n+2) - (n+1)^2]$$
$$= -a_1^2 < 0$$

(2) 当 $q \neq 1$ 时,$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (n \in N^+)$

从而 $S_nS_{n+2} - S_{n+1}^2$

$$= (\frac{a_1}{1-q})^2[(1-q^n)(1-q^{n+2}) - (1-q^{n+1})^2]$$
$$= -a_1^2q^n < 0.$$

综合(1),(2),不等式(*)成立.

证法二: 依题意,$\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 0$,公比 $q > 0$,故

$$0 < S_n < S_{n+1} < S_{n+2}$$

$$\begin{aligned}\therefore qS_nS_{n+2} &= qS_n(a_1 + qS_{n+1}) \\ &= a_1qS_n + q^2S_nS_{n+1} \\ &< a_1qS_{n+1} + q^2S_nS_{n+1} \\ &= qS_{n+1}(a_1 + qS_n) \\ &= qS_{n+1}^2\end{aligned}$$

$\because q > 0, \therefore S_nS_{n+2} < S_{n+1}^2$

证法三: 依设知首项 $a_1 > 0$,公比 $q > 0$

$\because S_{n+1} = a_1 + qS_n, S_{n+2} = a_1 + qS_{n+1}$

又 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$

$\therefore S_nS_{n+2} - S_{n+1}^2$

$= S_n(a_1 + qS_{n+1}) - S_{n+1}(a_1 + qS_n)$

$= a_1(S_n - S_{n+1}) < 0$

即得 $$S_nS_{n+2} < S_{n+1}^2$$

证法四: 依设,$a_n > 0, \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q > 0, (n \in N^+)$

$\because S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$

$\quad S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$

$\therefore \dfrac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q = \dfrac{S_{n+1} - a_1}{S_n} < \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$

即 $$S_n(S_{n+2} - S_{n+1}) < S_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$$

$\therefore S_nS_{n+2} < S_{n+1}^2$

解(Ⅱ):不存在合乎题意的常数 C.

具体的证法有多种,列举三种方法供参考.

证法一:

为使$\dfrac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$成立,必须有

$$\begin{cases}(S_n - c)(S_{n+2} - c) = (S_{n+1} - c)^2 & ① \\ S_n - c > 0 & ②\end{cases}$$

依设知公比 $q > 0$,分两种情况讨论:

(1) 当 $q = 1$ 时,

$$(S_n - c)(S_{n+2} - c) - (S_{n+1} - c)^2$$
$$= (na_1 - c)[(n+2)a_1 - 2] - [(n+1)a_1 - c]^2$$
$$= - a_1^2 < 0$$

即任何实数 c 都不满足等式 ①,故合乎题意的常数 c 不存在.

(2) 当 $q \neq 1$ 时,① 式即为

$$\left[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} - c\right]\left[\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q} - c\right]$$
$$= \left[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q} - c\right]^2$$

$\because a_1q^n \neq 0, \therefore a_1 = c(1-q)$

得 $\qquad c = \dfrac{a_1}{1-q} \qquad ③$

代入 ② 得

$$\frac{a_1}{1-q} < S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$\because a_1 > 0 \quad \therefore -\dfrac{q^n}{1-q} > 0$

$\because q > 0 \quad \therefore q > 1$

代入 ③ 式,得 $c < 0$,故不存在合乎题意的常数 $c > 0$.

证法二:用反证法.假设存在常数 $c > 0$,使

$$\frac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$$

则有 $\begin{cases}S_n - c > 0, \\ S_{n+1} - c > 0, \\ S_{n+2} - c > 0, \\ (S_n - c)(S_{n+2} - c) = (S_{n+1} - c)^2\end{cases}$

$\therefore S_nS_{n+2} - S_{n+1}^2 = c(S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1})$

$\because c > 0, S_nS_{n+2} - S_{n+1}^2 < 0$

$\therefore S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1} < 0$

而另一方面有

$$0 < S_{n+1} - c = \sqrt{(S_n - c)(S_{n+2} - c)}$$
$$\leqslant \frac{1}{2}[(S_n - c) + (S_{n+2} - c)]$$
$$= \frac{1}{2}(S_n + S_{n+2}) - c$$

$\therefore S_n + S_{n+2} - 2S_{n+1} \geqslant 0$

与前式矛盾.故不存在合乎题意的常数 $c > 0$.

证法三:用反证法.若存在常数 $c > 0$,使

$\dfrac{\lg(S_n - c) + \lg(S_{n+2} - c)}{2} = \lg(S_{n+1} - c)$

即 $\lg(S_{n+1} - c) - \lg(S_n - c) = \lg(S_{n+2} - c) - \lg(S_{n+1} - c)$

$\therefore \dfrac{S_{n+1} - c}{S_n - c} = \dfrac{S_{n+2} - c}{S_{n+1} - c} = k > 0$

$S_{n+1} - c = k(S_n - c) > 0$

$S_{n+2} - c = k(S_{n+1} - c) > 0$

$\therefore \dfrac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n} > \dfrac{S_{n+1}}{S_n}$

$\because S_n > 0$

$\therefore S_n(S_{n+2} - S_{n+1}) > S_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$

得 $S_nS_{n+2} > S_{n+1}^2$

与(Ⅰ)的结论矛盾.所以不存在合乎题意的常数 C.

3. 关于数列中的最大值和最小值问题

例 10 设等差数列$\{a_n\}$的前几项和为 S_n,已知 $a_1 > 0, d < 0, S_{2k} > 0, S_{2k+1} < 0$,求 $S_1, S_2, \cdots, S_{2k}$ 中的最大值.

解:注意到两个重要公式

$$\begin{cases} S_{2k+1} = (2k+1)a_{k+1} < 0 \\ S_{2k} = k(a_k + a_{k+1}) > 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 有 $\begin{cases} a_{k+1} < 0 \\ a_k > -a_{k+1} > 0 \end{cases}$

$\therefore a_k > 0 > a_{k+1}$

又由 $a_1 > 0, d < 0$,知

$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_k > 0 > a_{k+1} > a_{k+2} > \cdots$

进而 $\begin{cases} S_1 < S_2 < \cdots < S_k \\ S_k > S_{k+1} > S_{k+2} > \cdots \end{cases}$

$\therefore S_k$ 为最大值

例 11 (1999.全国高中数学联赛试题)给定正整数 n 和正数 M.对于满足条件 $a_1^2 + a_{n+1}^2 \leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$,试求 $S = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}$ 的最大值.

【思路分析】 将 M 与 S 建立关系,因为 $a_1^2 + a_{n+1}^2 \leqslant M$,是不等关系,在建立 S 与 M 之间的关系时,可以适当进行放缩,但需保证等号可以取到,这样才能达到最大值.

解法一:设其公差为 $d, a_{n+1} = \alpha$,则

$$S = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1} = (n+1)\alpha + \frac{n(n+1)}{2}d$$

故 $\alpha + \dfrac{nd}{2} = \dfrac{S}{n+1}$

则 $M \geqslant a_1^2 + a_{n+1}^2$

$= (\alpha - nd)^2 + \alpha^2$

$= \dfrac{4}{10}\left(\alpha + \dfrac{nd}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{10}(4\alpha - 3nd)^2 \quad (*)$

$\geqslant \dfrac{4}{10}\left(\alpha + \dfrac{nd}{2}\right)^2$

$= \frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2$

因此，$|S| \leqslant \frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$

且当 $\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}, d = \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{n}\sqrt{M}$ 时，

$S = (n+1)\left[\frac{3}{10}\sqrt{M} + \frac{n}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{n}\sqrt{M}\right]$

$= (n+1)\frac{5}{\sqrt{10}}\sqrt{M} = \frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$

且由于此时 $4\alpha = 3nd$，故 $a_1^2 + a_{n+1}^2 = \frac{4}{10}(\frac{S}{n+1})^2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{10}{4}M = M$

所以 S 的最大值为$\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$

【评述】 将$(\alpha - nd)^2 + \alpha^2$表成$\left(\alpha + \frac{nd}{2}\right)^2 + \frac{1}{10}(4\alpha - 3nd)^2$的形式，关键总想到配方成这种形式，其次是一个涩的拼凑过程. 法一是命题组给出的解法，为此我们给出几种解法自然的方法.

解法二：(利用三角函数有量性)

令 $a_1 = r \cdot \cos\theta, a_{n+1} = a_1 + nd = r \cdot \sin\theta$($d$ 为等差数列的公差，$r^2 \leqslant M$)

则 $a_1 = r \cdot \cos\theta$ ①

$d = \frac{r}{n}(\sin\theta - \cos\theta)$ ②

$\because S = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n-1}$

$= \frac{(n+2)(2a_1 + 3nd)}{2}$ ③

$\therefore$ 将 ①，② 代入 ③ 得

$S = \frac{r(n+1) \cdot (3\sin\theta - \cos\theta)}{2}$

$= \sqrt{10}r(n+1) \cdot \sin(\theta - \alpha)$

$\leqslant \frac{\sqrt{10M} \cdot (n+1)}{2}$

其中 $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$，且当 $r = \sqrt{M}, \sin\theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

即 $a_1 = -\frac{\sqrt{10M}}{10}, d = \frac{4\sqrt{10M}}{10n}$ 时，

$$S = \frac{\sqrt{10M} \cdot (n+1)}{2}$$

所以 S 的最大值是$\frac{\sqrt{10M} \cdot (n+1)}{2}$

解法三：(二次不等式的判别式)

设首项为 a，公差为 d.

则 $S = \frac{(n+1)(a_{n+1} + a_{2n+1})}{2} = \frac{(n+1)[(a+nd)+(a+2nd)]}{2} = \frac{(n+1)(2a+3nd)}{2}$

$\therefore nd = \frac{2S}{3(n+1)} - \frac{2}{3}a$ ①

$\because a_1^2 + a_{n+1}^2 \leqslant M$

$\therefore a^2 + (a+nd)^2 \leqslant M$ ②

将 ① 代入 ② 得

$$10a^2 + \frac{4S}{n+1}a + \frac{4S^2}{(n+1)^2} - 9M \leqslant 0 \quad ③$$

$\because$ 不等式 ③ 有解

$$\therefore \Delta = \left(\frac{4S}{n+1}\right)^2 - 4\times 10\left[\frac{4S^2}{(n+1)^2} - 9M\right] \geqslant 0$$

解得 $-\frac{\sqrt{10M}(n+1)}{2} \leqslant S \leqslant \frac{\sqrt{10M}(n+1)}{2}$

且当 $a = -\frac{\sqrt{10M}}{10}, d = \frac{4\sqrt{10M}}{10n}$ 时,

$$S = \frac{\sqrt{10M}(n+1)}{2}$$

$\therefore S$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{10M}(n+1)}{2}$

解法四:(柯西不等式法)

$$\because \quad S = \frac{(n+1)(a_{n+1} + a_{2n+1})}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2}(a_{n+1} + 2a_{n+1} - a_1)$$

$$= \frac{n+1}{2}(3a_{n+1} - a_1)$$

由柯西不等式有

$\because (3a_{n+1} - a_1)^2 \leqslant (3^2 + 1^2)(a_1^2 + a_{n+1}^2) \leqslant 10M$

$\therefore 3a_{n+1} - a_1 \leqslant \sqrt{10M}$ 等号当且仅当 $\frac{3}{a_{n+1}} = \frac{-1}{a_1}, a_1^2 + a_{n+1}^2 = M$ 时取到

即 $a_1 = -\sqrt{\frac{M}{10}}, a_{n+1} = 3\sqrt{\frac{M}{10}}$ 时, S 取最大值 $\frac{(n+1)}{2}\sqrt{10M}$

解法五:(解析几何法)

由条件 $a_1^2 + a_{n+1}^2 \leqslant M$ ①

它表示平面直角坐标系 a_1Oa_{n+1} 中以原点 O 为圆心,半径为 $\sqrt{M}$ 的定圆面(包括圆周),记为 C.设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则

$$a_{n+1} = a_1 + nd$$

即

$$d = \frac{1}{n}(a_{n+1} - a_1)$$

代入 $S = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n+1}$

$$= (n+1)a_{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}d$$

中并化简得到

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{S}{n+1} \quad ②$$

它表示 a_1Oa_{n+1} 中斜率 $K = \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}$,在纵轴($a_{n+1}$ 轴)上截距为 $\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{n+1}$ 的动直线,记为 l.要求 S 的最大值,即要求直线截距的最大值.

由数形结合的思想,显然当直线 l 与圆 C 相切时截距最大.(如图 Ⅰ-3-2)

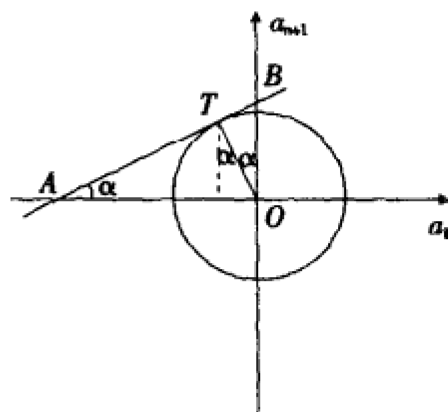


图 Ⅰ-3-2

此时,圆心 O 到直线 l 的距离为

$$\sqrt{M} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{n+1}}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{3})^2}}$$

$$\therefore S_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot(n+1)\cdot\sqrt{M}$$

并且切点 T 的坐标(a_1, a_{n+1})满足

$$\begin{cases} a_1 = -\sqrt{M}\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{M}}{\sqrt{10}} \\ a_{n+1} = \sqrt{M}\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{M}}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

其中 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \quad (0 < \alpha < \pi)$

4. 等差等比数列的应用

某些数学问题,根据其结构,可以巧设公差或公比,使解答过程十分简捷.

例 12 (1993.四川省高中数学联赛)

已知 $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$.且 $0 \leqslant x < \pi$,则 $\tan x$ 的值等于________

解:$\because \sin x + \cos x = 2 \cdot \dfrac{1}{10}$

则 $\sin x, \dfrac{1}{10}, \cos x$ 成等差数列.故设

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{10} - d & ① \\ \cos x = \dfrac{1}{10} + d & ② \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{7}{10} \leqslant d \leqslant \dfrac{1}{10}$

把①,②代入 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,得

$$\left(\frac{1}{10} - d\right)^2 + \left(\frac{1}{10} + d\right)^2 = 1$$

解得 $d = -\dfrac{7}{10}$

代入①,②得

$$\sin x = \frac{4}{5}, \cos x = -\frac{3}{5}$$

因此 $\tan x = -\dfrac{4}{3}$

例 13 (1992.友谊杯国际数学竞赛)

求三个实数 x, y, z,使得它们同时满足下列方程

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 13 & ① \\ 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 2x + 15y + 3z = 82 & ② \end{cases}$$

解:由①得 $2x + 3y = 2 \cdot \dfrac{13 - z}{2}$.则 $2x, \dfrac{13 - z}{2}, 3y$ 成等差数列,故设

$$2x = \frac{13 - z}{2} + d, 3y = \frac{13 - z}{2} - d$$

代入②,并化简,配方,得

$$3(z - 4)^2 + 4\left(d - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$\therefore z = 4, d = \dfrac{3}{2}$

代入 $2x = \dfrac{13 - z}{2} + d$ 和 $3y = \dfrac{13 - z}{2} - d$ 中解得 $x = 3, y = 1$

因此,所求三个实数 $x = 3, y = 1, z = 4$

例 14 (1984.南京市数学竞赛)

解方程组 $\begin{cases} 2xy - 5\sqrt{xy+1} = 10 & ① \\ x^2 + y^2 = 34 & ② \end{cases}$

解:由 ①,得

$$2(xy+1) - 5\sqrt{xy+1} - 12 = 0$$

设 $\sqrt{xy+1} = t(\geqslant 0)$,则

$$2t^2 - 5t - 12 = 0$$

解得　$t_1 = 4, t_2 = -\frac{3}{2}$(舍)

由 $t_1 = 4$,得 $xy = 15 = (\sqrt{15})^2$,则 $x, \sqrt{15}, y$ 成等比数列.故设 $x = \sqrt{15}q, y = \frac{\sqrt{15}}{q}$,代入②,整理得

$$15q^4 - 34q^2 + 15 = 0$$

解得　$q^2 = \frac{5}{3}, q^2 = \frac{3}{5}$

即　　$q = \pm\frac{1}{3}\sqrt{15}$ 或 $q = \pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$,故

$\begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -5 \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -5, \\ y_4 = -3 \end{cases}$

例 15　(1957.北京市数学竞赛)

假设 $x、y、z$ 都是实数,$a \geqslant 0$,又知道它们满足

$$\begin{cases} x + y + z = a & ① \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}a^2 & ② \end{cases}$$

试证 $x、y、z$ 都不是负数,也都不能大于 $\frac{2}{3}a$.

证明:由 ①,得 $x + y = 2 \cdot \frac{a-z}{2}$,则 $x, \frac{a-z}{2}, y$ 成等差数列.故设

$$x = \frac{a-z}{2} - d, \quad y = \frac{a-z}{2} + d$$

代入 ②,化简得

$$3z^2 - 2az = -4d^2$$

$\therefore 3z^2 - 2az \leqslant 0$　　　　即　$0 \leqslant z \leqslant \frac{2}{3}a$

由 $x、y、z$ 在条件等式中的对称性,知

$0 \leqslant y \leqslant \frac{2}{3}a, 0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}a$

§3.3　巩固练习

(一) 选择题

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30,前 $2m$ 项和为 100,则它的前 $3m$ 项和为(　　)

A. 130　　B. 170　　C. 210　　D. 260

2. 等比数列 $\{a_n\}$,首项 $a_1 = 1536$,公比 $q = -\frac{1}{2}$,用 Π_n 表示它的前 n 项之积,则 $\Pi_n (n \in N)$ 最大的是(　　).

A. Π_9　　B. Π_{11}　　C. Π_{12}　　D. Π_{13}

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 4(n \geqslant 1)$.且 $a_1 = 9$,其前 n 项之和为 S_n,则满足$(S_n - n - 6)$

$<\dfrac{1}{125}$ 的最小整数 n 是(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. 一个等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2^{-5}$,它的前 11 项的几何平均数为 2^5,若在前 11 项中抽出一项后的几何平均数为 2^4,则抽去的项是(　　)

A. a_8　　B. a_9　　C. a_{10}　　D. a_{11}

5. 设等差数列的首项及公差均有非负整数,项数不小于 3,且各项和为 97^2,则这样的数列共有(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{14}=169$,则该数列的前 15 项的和 $S_{15}=$(　　)

A. 146　　B. 182　　C. 195　　D. 208

(二) 填空题

1. $\{a_n\}$ 是等差数列,$a_1=1$,公差为 d,$\{b_n\}$ 是等比数列,公比为 q,数列 $\{a_n+b_n\}$ 的前三项为 3,12,23,则 $d+q=$ ________.

2. 设数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$ 能分出一个子数列,且该子数列是一个和为 $\dfrac{1}{7}$ 的无穷数列,则这个子数列的首项是________,公比是________.

3. 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是 n 个正数,满足 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$,则 $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant$ ________.

4. 设 $x\neq y$,且两个数列 x,a_1,a_2,a_3,y 和 b_1,x,b_2,b_3,y,b_4 均为等差数列,那么 $\dfrac{b_4-b_3}{a_2-a_1}=$ ________.

5. 设正整数列 a_1,a_2,a_3,a_4 是等比数列,其公比 r 不是整数而且 $r>1$,这样的数列中 a_4 可取到的最小值是________.

(三) 解答题

1. 设正数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 满足

$$\sqrt{a_na_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}\ (n\geqslant 2)$$

且 $a_0=a_1=1$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

2. $n^2(n\geqslant 4)$ 个正数排成 n 行 n 列,

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中每行的数成等差数列,每一列的数列成等比数列,并且所有公比相等,已知 $a_{24}=1$,$a_{42}=\dfrac{1}{8}$,$a_{43}=\dfrac{3}{16}$,求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}+\cdots+a_{nn}$

3. 已知对任意的 $n\in N$,有 $a_n>0$,且 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^3=(\sum\limits_{j=1}^{n}a_j)^2$. 求证:$a_n=n$

4. 数列$\{a_n\}$的首项为2,前n项和为S_n,且$\{S_n\}$是公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2) 令$b_n = a_n \cdot S_n$,求$\{b_n\}$数列的各项和.

5. 设$S = \{1,2,3,\cdots,n\}$,A为至少含有两项的、公差为正的等差数列,其项都在S中,且添加S的其它元素于A后,均不能构成与A有相同公差的等差数列,求这种A的个数.(这里只有两项的数列,也看成等差数列).

第四章 三角函数

§4.1 知识要点与基本方法

(一) 三角函数的图象与性质

1. 三角函数图象的几种变换

(1) 振幅变换：$y = \sin x \xrightarrow[\text{纵变为}A\text{倍}]{\text{横不变}} y = A\sin x$

(2) 周期变换：$y = \sin x \xrightarrow[\text{横变为}\frac{1}{w}\text{倍}]{\text{纵不变}} y = \sin \omega x$

(3) 相位变换：$y = \sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左或向右}} y = \sin(x + \varphi)$

当 $\varphi > 0$ 时向左移，$\varphi < 0$ 时向右移.(上述 A、φ 均为正数)

2. 六种复合形式与二类划分

(1)A、ω、φ 的次序不同，从 $y = \sin x$ 图象到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象的变换可分为 P_3^3 种形式，即 $A—\omega—\varphi$、$A—\varphi—\omega$、$\omega—A—\varphi$、$\omega—\varphi—A$、$\varphi—A—\omega$、$\varphi—\omega—A$

(2) 以上六种变换，ω 与 φ 是相互影响的，但 A 相对于 ω、φ 的变化保持不变，所以这六种变换可化为两大类，即

"$\varphi—\omega—A$" 和 "$\omega—\varphi—A$"

3. 三角函数性质

(1) 正、余弦函数有界性

对任意角 α，有 $|\sin\alpha| \leqslant 1$，$|\cos\alpha| \leqslant 1$，此外还常用到：$1 \pm \sin\alpha \geqslant 0$，$|A\sin\alpha + B\cos\alpha| \leqslant \sqrt{A^2 + B^2}$.

(2) 奇偶性与图象对称性

正弦函数、正切函数、余切函数都是奇函数，图象关于原点对称，且 $y = \sin x$ 图象还关于直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ 对称；

余弦函数是偶函数，从而 $y = \cos x$ 的图象关于 y 轴对称，且图象还关于 $x = k\pi, k \in Z$ 对称.

(3) 单调性

$y = \sin x$ 在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减($k \in \mathbf{Z}$)；

$y = \cos x$ 在 $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ 上单调递减，在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ 上单调递增($k \in \mathbf{Z}$)；

$y = \tan x$ 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$($k \in \mathbf{Z}$) 上递增；

$y = \cot x$ 在 $(k\pi, (k + 1)\pi)$($k \in \mathbf{Z}$) 上递减.

(4) 三角函数周期性

$y = \sin x, y = \cos x$ 的最小正周期为 2π；

$y = \tan x, y = \cot x$ 的最小正周期为 π.

关于周期函数，常用如下结论：

① 若 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的函数，则 $y=f(x+a)$，$y=f(ax+b)$（$a\neq 0$，a，b 为常数）也是周期函数，且周期分别为 T，$\frac{T}{|a|}$；

② 设函数 $y=F(u)$ 是定义在 R 上的单调函数，$u=g(x)$ 是定义在 R 上的周期函数，则 $y=F[g(x)]$ 也是周期函数，且与 $y=g(x)$ 有相同的周期.

4. 常用结论

(1) $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是上凸函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内是下凸函数；

(2) 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\sin x<x<\tan x$；

(3) $y=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是减函数，$y=\frac{\tan}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是增函数.

(二) 三角变换

1. 三角恒等变换

三角恒等变换是应用同角公式，诱导公式，和、差、倍、半角公式；和差化积，积化和差等公式，对三角式作各种有目的的恒等变形，常见题型有计算求值和推理证明两种.

三角恒等变换最基本的思路是“化异为同”，即从角、函数名称和运算公式三个方面入手，消除差异，寻求统一，关键是角的变换.

三角恒等变换常见技巧有：化异为同，降高为低，引入辅助角，1 的变换，万能变换，和差配凑等. 竞赛中常用构造法（包括：构造图形、构造对偶式、构造方程、构造函数等）来解决有关三角问题.

三角变换的公式较多，这里补充（高中教材中没有的公式）以下公式：

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$；

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$；

(3) $\cos 3\theta=4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$；

(4) $\sin 3\theta=4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$；

(5) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=0$；

(6) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$；

(7) $\sin^3\alpha+\sin^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin^3\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha$；

(8) $\cos^3\alpha+\cos^3\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos^3\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\cos 3\alpha$；

(9) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$；

(10) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$；

(11) $\cos x+\cos(x+d)+\cos(x+2d)+\cdots+\cos(x+nd)=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}d\cos\left(x+\frac{nd}{2}\right)}{\sin\frac{d}{2}}$；

(12) $\sin x+\sin(x+d)+\sin(x+2d)+\cdots+\sin(x+nd)=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}d\sin\left(x+\frac{nd}{2}\right)}{\sin\frac{d}{2}}$.

2. 三角形中的三角变换

设 $\triangle ABC$ 的三角 A、B、C 的对应边为 a、b、c，且 R，r 分别表示 $\triangle ABC$ 外接圆和内切圆的半径，则有

(1)$A+B+C=\pi$;

(2)$a+b>c, a+c>b, b+c>a$;

(3) 正弦定理:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(4) 余弦定理:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

(5) 面积公式:$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times$底$\times$高

$=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B$

$=\sqrt{p(p-c)(p-b)(p-c)}$

$=\frac{abc}{4R}$

$=r\cdot p$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(6)$A>B\Leftrightarrow a>b\Leftrightarrow\sin A>\sin B$;

(7)$\tan nA+\tan nB+\tan nC=\tan nA\cdot\tan nB\cdot\tan nC$(其中 n 为正整数);

(8) $\sin nA+\sin nB+\sin nC=4\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{nA}{2}\cdot\cos\frac{nB}{2}\cdot\cos\frac{nC}{2}$(其中 n 为奇数);

$\sin nA+\sin nB+\sin nC=-4\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$(其中 n 为偶数);

$\cos nA+\cos nB+\cos nC=1+4\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{nA}{2}\sin\frac{nB}{2}\sin\frac{nC}{2}$(其中 n 为奇数);

$\cos nA+\cos nB+\cos nC=-1+4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$(其中 n 为偶数);

(9) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$

(10)$\cot\frac{nA}{2}+\cot\frac{nB}{2}+\cot\frac{nC}{2}=\cot\frac{nA}{2}\cdot\cot\frac{nB}{2}\cdot\cot\frac{nC}{2}$(其中 n 为奇数).

3. 三角不等式的变换及三角最值

(1) 不等式的有关性质和方法在三角不等式中都适用.

(2) 三角函数的单调性,有界性,图象特征等都是处理三角不等式的有利武器.

(3) 利用三角形中的边角关系.

(4) 利用换元法(特别是万能代换) 可进行三角不等式与代数不等式的互化.

(三) 反三角函数

反三角函数恒等变换是中学数学竞赛的一个重要内容.变换的主要依据是反三角函数的性质以及与之相关的三角函数的性质.

1. 恒等变换定理

设函数 f 是从定义域 A 到值域 $f(A)$ 的一一映射,则有

(1)$f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A$.

(2)$f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A)$.

由此可得反三角函数恒等变换式:

$\arcsin(\sin x)=x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

$\sin(\arcsin x)=x,\quad x\in[-1,1]$;

$\arccos(\cos x)=x,\quad x\in[0,\pi]$;

$\cos(\arccos x)=x,\quad x\in[-1,1]$;

$\arctan(\tan x)=x,\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;

$\tan(\arctan x)=x,\quad x\in R$;

$\text{arccot}(\cot x)=x,\quad x\in[0,\pi)$;

$\text{ctg}(\text{arccot}x)=x,\quad x\in R$.

2. 反三角函数的几何意义

对于每一种反三角函数值，均可表示一个角 α 的大小. 由三角函数的定义知，这个角 α 的顶点在直角坐标系的原点，角的始边与 x 轴的正半轴重合，因此，只需找出其终边上一点 p 的坐标，就可以确定这个角 α，如图 Ⅰ－4－1.

视 xOy 平面为复平面，则复数 p 的一个辐角即 α，因此，由反三角函数的几何意义以及三角函数的(坐标比)定义，可得反三角函数的复数形式：

$\arcsin x=\text{Arg}(\sqrt{1-x^2}+xi)$;

$\arccos x=\text{Arg}(x+\sqrt{1-x^2}i)$;

$\text{arctg}x=\text{Arg}(1+xi)$;

$\text{arcctg}x=\text{Arg}(x+i)$.

因为 n 个复数辐角之和等于这几个复数积的一个辐角，所以反三角函数的复数形式为反三角函数的和式变换提供了理论依据.

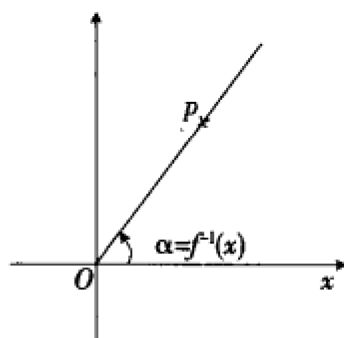


图 Ⅰ－4－1

3. 几个重要导出恒等式.

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$;

(2) $\arctan x+\text{arccot}x=\frac{\pi}{2}$;

(3) $\arccos x+\arccos(-x)=\pi$;

(4) $\text{arccot}x+\text{arccot}(-x)=\pi$.

§4.2 赛题精讲

(一) 关于三角函数图象与性质

例 1 (1) 若函数 $y=3\sin(\omega x)(\omega>0)$ 在 $[0,1]$ 内至少有 50 个最大值，则 ω 的最小值是________.

(2) 若函数 $y=3\sin(\omega x)(\omega>0)$ 在 $[a,a+1](a\in R)$ 内至少有 50 个最大值，则 ω 的最小值是________.

解：(1) 由 $y=3\sin(\omega x)(\omega>0)$ 的图象知：

$49\frac{1}{4}T\leqslant1$，即 $\frac{197}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leqslant1$

$\therefore\omega\geqslant98.5\pi$

$\therefore\omega$ 的最小值是 98.5π

(2) 由图知，$50T\leqslant1$，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore\omega\geqslant100\pi$

故 ω 最小值为 100π

【说明】 要体会本例两小题之间的差别，若把条件 $\omega>0$ 改为 $\omega<0$ 呢？若把第(1)小题改为"$y=3\sin(\omega+\varphi)(\omega>0)$，对任意的 φ 值，在 $[0,1]$ 内至少总有 50 个最大值，求 ω 的最小值"又有什么变化呢？抓住这一点，利用图象分析.

例 2 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 对任意实数 x，均有 $-\frac{\pi}{2}<f(x)+g(x)<\frac{\pi}{2}$，并且 $-\frac{\pi}{2}<f(x)-$

$g(x) < \frac{\pi}{2}$,证明:对任意实数 x,均有

$$\cos f(x) > \sin g(x)$$

并由此证明,对任意实数 x,均有 $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$

证明:由条件,可知对任意实数 x,均有

$$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2}$$

如果 $0 \leqslant f(x) < \frac{\pi}{2}$,则由条件

$$-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} - f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

结合 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上为单调递增函数,可知

$$\sin g(x) < \sin(\frac{\pi}{2} - f(x)) = \cos f(x)$$

如果 $-\frac{\pi}{2} < f(x) < 0$,则由条件

$$-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} + f(x) < \frac{\pi}{2}$$

与前类似,可知 $\sin g(x) < \sin(\frac{\pi}{2} + f(x)) = \cos f(x)$

综上可知,命题成立.

进一步注意到,对任意实数 x,均有

$$|\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2}\,|\sin(\frac{\pi}{4} \pm x)| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

结合已证的不等式,就有 $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$

【注】 利用正、余弦函数的单调性,结合正、余弦函数的有界性以及上述结论,我们还有如下的一些结论:

$\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$,$\sin(\sin(\sin x)) < \sin(\cos(\cos x)) < \cos(\cos(\cos x))$ 等

例 3 已知 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$,其中 A, B, C 均为锐角,求证:$\frac{\pi}{2} < A + B + C \leqslant 3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$

证明:
$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \sin^2 B - \sin^2 C \\ &= \cos^2 B - \sin^2 C \\ &= \cos(B + C) \cdot \cos(B - C)\end{aligned}$$

$\because B$、C 均为锐角,$B - C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,则 $\cos(B - C) > 0$,而 $\cos(B + C)\cos(B - C) = \sin^2 A > 0$

$\therefore \cos(B + C) > 0$

即 $0 < B + C < \frac{\pi}{2}$,$A + B + C < \pi$

$\because 0 \leqslant |B - C| < B + C < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos(|B - C|) > \cos(B + C)$,即 $\cos(B - C) > \cos(B + C)$

故
$$\begin{aligned}\sin^2 A &= \cos(B + C)\cos(B - C) > \cos^2(B + C) \\ &= \sin^2[\frac{\pi}{2} - (B + C)]\end{aligned}$$

而 $y = \sin^2 x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上是增函数

$\therefore A > \frac{\pi}{2} - (B + C)$ 即 $A + B + C > \frac{\pi}{2}$

又由于 $y = \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 是上凸函数,由上述方法可知,$A + B$,$B + C$,$C + A$ 均为锐角.

所以 $\cos\dfrac{(A+B)+(B+C)+(C+A)}{3} \geqslant \dfrac{\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)}{3}$

即 $3\cos2\cdot\dfrac{A+B+C}{3} \geqslant \cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A) \geqslant \cos(A+B)\cos(A-B)+\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(C+A)\cos(C-A)=\cos2A+\cos2B+\cos2C$

亦即 $3\cdot\dfrac{1-\sin^2\dfrac{A+B+C}{3}}{2} \geqslant \dfrac{1-\sin^2 A}{2}+\dfrac{1-\sin^2 B}{2}+\dfrac{1-\sin^2 C}{2}$

$\sin\dfrac{A+B+C}{3} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore A+B+C \leqslant 3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

综上所述，$\dfrac{\pi}{2} < A+B+C \leqslant 3\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【说明】 (1) 若 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的上凸函数，$x_1,x_2,\cdots,x_n \in (a,b)$，则

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时上式等号成立.

(2) 若 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的下凸函数，$x_1,x_2,\cdots,x_n \in (a,b)$，则

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时上式等号成立.

(二) 关于三角变换

例 4 (1995.全国高中数学联赛二试第一题) 给定曲线族

$$2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin x+\cos\theta+1)y=0, \theta \text{ 为参数}$$

求该曲线族在直线 $y=2x$ 上所截得的弦长的最大值.

解法一: 显然，该曲线族恒过原点，而直线 $y=2x$ 也过原点，所以曲线族长 $y=2x$ 上所截得的弦长仅取决于曲线族与 $y=2x$ 的另一交点的坐标.

把 $y=2x$ 代入曲线族方程得

$(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)x=0$

又 $2\sin\theta-\cos\theta+3=\sqrt{5}\sin(\theta-\arctan\dfrac{1}{2})+3 \neq 0$

当 $x \neq 0$ 时，就有

$x=\dfrac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}$

令 $\sin\theta=\dfrac{2u}{1+u^2}, \cos\theta=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$

则 $x=\dfrac{8u+1}{2u^2+2u+1}$

得 $2xu^2+2(x-4)u+(x-1)=0$

由 $u \in R$ 知，当 $x \neq 0$ 时

$\Delta=[2(x-4)]^2-8x(x-1)$

$=4(-x^2-6x+16) \geqslant 0$

即 $x^2+6x-16 \leqslant 0$ 且 $x \neq 0$

$(x+8)(x-2) \leqslant 0$，且 $x \neq 0$

$-8 \leqslant x \leqslant 2$ 且 $x \neq 0$

$\therefore |x|_{max}=8$

由 $y=2x$ 得 $|y|_{max}=16$

$\therefore$ 所求弦长的最大值为$\sqrt{8^2+16^2}=8\sqrt{5}$

【注】 以上方法主要是引用万能变换公式,将三角问题转化成代数问题求解.不过其过程显得冗长复杂,下面我们引用变换公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$,其中 φ 由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ 所确定,并引用三角函数有界性即可巧妙得解.

解法二: 曲线族与直线 $y=2x$ 相交于原点 $O(0,0)$ 以及另一点 $P_0(x_0,y_0)$,且 x_0 满足

$$(2x_0-8)\sin\theta-(x_0+1)\cos\theta=1-3x_0$$

故存在 φ 角使

$$\sqrt{(2x_0-8)^2+(x_0+1)^2}\sin(\theta-\varphi)=1-3x_0$$

由三角函数有界性可知

$$\sqrt{(2x_0-8)^2+(x_0+1)^2}\geqslant|1-3x_0|$$

解得 $-8\leqslant x_0\leqslant 2$

$\therefore$ 弦长 $|OP_0|=\sqrt{5}|x_0|\leqslant 8\sqrt{5}$,当 $x_0=-8$ 时取到最大值 $|OP_0|_{\max}=8\sqrt{5}$

例5 (1999.全国高中数学联赛第一试第三题)已知,当 $x\in[0,1]$ 时,不等式

$$x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0 \qquad ①$$

恒成立,试求 θ 的取值范围.

【分析】 标准答案是先找出不等式①恒成立的充要条件,即

$$\begin{cases}x=0,x=1\Leftrightarrow\sin\theta>0,\cos\theta>0 & ②\\ 0<x<1\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0 & ③\end{cases}$$

验证其充要性后解不等式②、③求出 θ 的范围.这一解法的关键步骤是推导③式,当 $0<x<1$ 时,构造 $x_0=\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}$,对 $f(x)$ 进行配方,将 x_0 代入求得 $-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\cos\theta\sin\theta}>0$,从其思路看,$x_0$ 的构造显得不自然,配方的方向目的不够明确,因此这一解法留给我们较多的思考空间.我们在保留原题的配方法,确立"去 x 留 θ"的方向,进行改进,则有如下解法

解法一: 当 $x=0,x=1$ 时,由①式有 $\cos\theta>0,\sin\theta>0$

当 $0<x<1$ 时,①式两边同除以 $x(1-x)>0$,得 $\dfrac{x}{1-x}\cos\theta+\dfrac{1-x}{x}\sin\theta-1>0 \qquad ④$

配方

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}\cos\theta}-\sqrt{\frac{1-x}{x}\sin\theta}\right)^2+2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-1>0$$

令 $\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}\cos\theta}-\sqrt{\dfrac{1-x}{x}\sin\theta}\right)^2=0$

即 $\quad\dfrac{x}{1-x}\cos\theta=\dfrac{1-x}{x}\sin\theta$

得 $\quad x_o=\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta}}$

由 $\sin\theta>0,\cos\theta>0$,知 $x_o\in(0,1)$

则有 $2\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-1>0$

即 $\quad\sin2\theta>\dfrac{1}{2} \qquad ⑤$

解不等式②,⑤,得

$2k\pi+\dfrac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\dfrac{5\pi}{12},\quad k\in z$

【注】 此法与标准答案比较,配方将含 x 项完全归入平方式,解释了原解法中所构造的 x_0 的由来,

符合认知规律,较易理解与接受.但考虑到配方若针对二次式更为方便,于是对解法一进行改进.

解法二: 当 $0 < x < 1$ 时,将 ① 式两边同时同除以 $(1-x)^2 > 0$,得

$$\cos\theta\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 - \frac{x}{1-x} + \sin\theta > 0 \quad ⑥$$

下略

解法三: $0 < x < 1$ 时,将 ① 式两边同除以 $x^2\sin\theta > 0$,得

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\left(\frac{1-x}{x}\right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} > 0 \quad ⑦$$

下略

【注】 解法二,三的具体步骤可参考解法一完成.

纵览前三种解法,考虑到配方与判别式实质上是等价关系,而判别式更简便迅速,于是继续改进如下.

解法四: 当 $0 < x < 1$ 时,令

$$f(x) = x^2\cos\theta - x(1-x) + (1-x)^2\sin\theta$$

即 $\quad f(x) = (1+\cos\theta+\sin\theta)x^2 - (2\sin\theta+1)x + \sin\theta \quad ⑧$

$f(x)$ 是关于 x 的二次函数,由 $1+\cos\theta+\sin\theta > 0$,知其图象开口向上,对称轴为

$$x = \frac{2\sin\theta+1}{2(1+\cos\theta+\sin\theta)} = \frac{2\sin\theta+1}{(2\sin\theta+1)+(2\cos\theta+1)} \in (0,1)$$

而 $x \in (0,1)$, $f(x) > 0$ 恒成立,则只有 $\Delta < 0$,否则可取 $x_0 \in (0,1)$,使 $f(x_0) \leqslant 0$,即

$$\Delta = (2\sin\theta+1)^2 - 4(1+\cos\theta+\sin\theta)\sin\theta < 0$$

得 $1 - 4\sin\theta\cos\theta < 0$,即 $\sin 2\theta > \frac{1}{2}$

下略

【注】 解法三的优越之处是 ⑦ 式二次项系数为 1,解法四的优越之处是采用判别式,对这两个优势予以组合,于是有

解法五: 当 $x = 1$ 时,须且只须 $\cos\theta > 0$,就可使 ① 式成立;当 $0 < x < 1$ 时,由解法三 ⑦ 式,令

$$f(t) = t^2 - \frac{1}{\cos\theta}\quad t + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad ⑨$$

其中 $t = \frac{x}{1-x} \in (0, +\infty)$

$f(t)$ 的图象开口向上,对称轴为

$$t = \frac{1}{2\cos\theta} \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

要 $f(t) > 0$,则 $\Delta < 0$,否则可取 $t_0 \in (0,1)$,使 $f(t_0) \leqslant 0$,而 $\Delta < 0$,即

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 - 4\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} < 0$$

得 $\quad \sin 2\theta > \frac{1}{2}$,下略

下面我们将高中代数课本上的一个习题引申得到一个有价值的结论.

高中代数上册第 297 页给出了三角方程

$a\sin x + b\cos x + c = 0$($a$、$b$ 不同时为零)有解的条件是 $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leqslant 1$,即 $a^2+b^2-c^2 \geqslant 0$

若记 $\Delta = a^2+b^2-c^2$,并称其为"三角判别式",可进一步得到

定理 $\quad$ 对于三角方程 $a\sin x + b\cos x + c = 0$($0 \leqslant x < 2\pi$, a, b 不同时为零),则

① 方程有两个不同解 $\Leftrightarrow \Delta > 0$;

② 方程有唯一解 $\Leftrightarrow \Delta = 0$;

③ 方程无解 $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

证明极其简单，只要将原方程化为 $\sin(x+\varphi)=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$，其中 φ 由 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi$ $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 确定，再据正弦函数有界性即可得证.

例 6 （1994.全国高中数学联赛）

设 a、b、c 是实数，那么对任何实数 x，不等式

$$a\sin x+b\cos x+c>0$$

都成立的充分必要条件是

A. a、b 同时为 0，且 $c>0$　　　B. $\sqrt{a^2+b^2}=c$

C. $\sqrt{a^2+b^2}<c$　　　D. $\sqrt{a^2+b^2}>c$

答（　　）

解：由上述定理可知，显然答案为 C

【注】 三角判别式在数学解题中有着广泛应用，它与一元二次方程根的判别式的作用极其类似. 凡是在解题中直接或间接的与三角方程 $a\sin x+b\cos x+c=0$ 有关问题，均可使用“三角判别式”解之.

例 7 （1999.全国高中数学联赛一试第五大题）给定正整数 n 和正数 M，对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$，求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值

前边我们已经对此题给出了多种方法，现在我们再来看看“三角判别式”的功效.

解：设 $a_1=\sqrt{M}r\cos\theta,a_{n+1}=\sqrt{M}r\sin\theta,(0<r\leqslant 1,0\leqslant\theta<2\pi)$，则

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+a_{2n+1})\\&=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+2a_{n+1}-a_1)\\&=\frac{n+1}{2}(3\sqrt{M}r\sin\theta-\sqrt{M}r\cos\theta)\end{aligned}$$

即有

$$\frac{n+1}{2}\cdot 3\sqrt{M}r\sin\theta-\frac{n+1}{2}\sqrt{M}r\cos\theta-S_n=0$$

又关于 θ 的方程有解，则

$$\Delta=(\frac{n+1}{2}\cdot 3\sqrt{M}r)^2+(-\frac{n+1}{2}\sqrt{M}r)^2-(-S_n)^2\geqslant 0$$

即

$$S_n\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}r\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$

所以 S 的最大值是 $\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$

【注】 上述解法显然自然流畅.

例 8 （1999.全国高考题）设复数 $z=3\cos\theta+i\cdot 2\sin\theta$，求函数 $y=\theta-\arg z(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的最大值以及对应的 θ 值.

解：由 $0<\theta<\pi/2$，得 $\tan\theta>0$

由 $z=3\cos\theta+i\cdot 2\sin\theta$，得 $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$ 及 $\tan(\arg z)=\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta}=\frac{2}{3}\tan\theta$

故 $\tan y=\tan(\theta-\arg z)=\frac{\tan\theta}{3+2\tan^2\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta+5}$

得 $\sin 2\theta-\tan y\cdot\cos 2\theta-5\tan y=0$，又方程有解，

则 $\Delta=1^2+(-\tan y)^2-(-5\tan y)^2\geqslant 0$ 解得

$\tan y\leqslant\frac{\sqrt{6}}{12}$

当等号成立时，可解得 $\theta = \arctan\frac{\sqrt{6}}{2}$

由 $y = \theta - \arg z$ 得 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，又在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内正切函数是递增函数，函数 y 也取得最大值 $\arctan\frac{\sqrt{6}}{12}$

例 9 （1997.全国高考题）设圆满足：① 截 y 轴所得弦长为 2；② 被 x 轴分成两段圆弧，其弧长之比为 3 : 1. 在满足条件 ①、② 的所有圆中，求圆心到直线 $l: x - 2y = 0$ 的距离最小的圆的方程.

解：设所求圆的方程为 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

由 ① 得 $r^2 = a^2 + 1$，由 ② 得 $r^2 = 2b^2$

消去 r 得 $2b^2 - a^2 = 1$，故可令

$\sqrt{2}b = \sec\theta, a = \tan\theta$

又设圆心 $(a、b)$ 到直线 l 的距离为 d，则 $d = \frac{|a-2b|}{\sqrt{5}} = \left|\frac{\tan\theta - \sqrt{2}\sec\theta}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\sin\theta - \sqrt{2}}{\sqrt{5}\cos\theta}\right|$

令 $t = \frac{\sin\theta - \sqrt{2}}{\sqrt{5}\cos\theta}$，有 $\sin\theta - \sqrt{5}t\cos\theta - \sqrt{2} = 0$

由方程有解，有 $\triangle = 1^2 + (-\sqrt{5})^2 - (-\sqrt{2})^2 \geqslant 0$

解得 $|t| \geqslant \sqrt{5}/5$，故 $d_{\min} = \sqrt{5}/5$

此时 $|a - 2b| = 1$. 由 $\begin{cases} 2b^2 - a^2 = 1 \\ |a - 2b| = 1 \end{cases}$

解得 $a = b = 1$，或 $a = b = -1$，从而 $r^2 = 2$，故所求圆的方程为

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ 或 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 2$

例 10 （1993.全国高中联赛一试 5 小题）在 $\triangle ABC$ 中，角 $A、B、C$ 的对边边长分别是 $a、b、c$，若 $c - a$ 等于 AC 边上的高 h，则 $\sin\frac{C-A}{2} + \cos\frac{C+A}{2}$ 的值是

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. -1

解法一：满足题意的图有两种情形，$\angle c$ 为锐角或钝角，下述推导，对它们同时满足.

$\because c > a, \therefore \angle c > \angle A$

$h = c - a = \frac{h}{\sin A} - \frac{h}{\sin C}$

即

$$\sin C - \sin A = \sin A \cdot \sin C$$

$$2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2} = \frac{1}{2}[\cos(A-C) - \cos(A+C)]$$

可化为 $\sin^2\frac{B}{2} + 2\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C-A}{2} = 0$

解得 $\sin\frac{B}{2} = 1 - \sin\frac{C-A}{2}$

$\therefore \cos\frac{C+A}{2} + \sin\frac{C-A}{2} = 1$

故应选 A

解法二：用构造法. 作直角 $\triangle ABC$，使 $\angle C = 90°, \angle A = 30°, AB = 2$. 这时，$c - a = 2 - 1 = 1 = h$，而 $\sin\frac{C-A}{2} + \cos\frac{C+A}{2} = \sin 30° + \cos 60° = 1$　可选 A

【注】 (1) 本题所涉及到的知识点：

直角三角形的边角关系，三角式的和差化积与积化和差，三角函数基本关系，诱导公式，一元二次方程.

(2) 解法一是直接法，解法二是构造法，两法均佳.

例 11 （1999.全国高中数学联赛题）在 $\triangle ABC$ 中，记 $BC=a, CA=b, AB=c$，若 $9a^2+9b^2-19c^2=0$，则 $\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=$ ______ .

解法一：由已知得 $a^2+b^2=\frac{19}{9}c^2$ ①

又由余弦定理，得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \quad ②$$

① 代入 ② 得

$\cos C=\frac{5}{9}\cdot\frac{c^2}{ab}=\frac{5}{9}\cdot\frac{\sin^2 c}{\sin A\sin B}$

$\therefore \cot C=\frac{5}{9}\cdot\frac{\sin C}{\sin A\sin B}$

$=\frac{5}{9}\cdot\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}$

$=\frac{5}{9}\cdot\frac{\sin A\cos B+\cos A\cdot\sin B}{\sin A\sin B}$

$=\frac{5}{9}(\cot A+\cot B)$

故 $\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=\frac{5}{9}$

解法二：$\frac{\cot C}{\cot A+\cot B}=\frac{\frac{\cos C}{\sin C}}{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}}=\frac{\cos C}{\sin C}\cdot\frac{\sin A\cdot\sin B}{\sin(A+B)}$

$=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{\sin^2 C}$

$=\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=(\frac{19}{9}c^2-c^2)\cdot\frac{1}{2c^2}$

$=\frac{5}{9}$

【注】 解法一联合运用正、余弦定理，边角关系互相转化，显示了思维的灵活性；解法二从所求式入手，再妙用正弦、余弦定理，有简捷明快之感.

（三）关于反三角函数

例 12 （1997.全国高中联赛一试第一题第 5 小题）设 $f(x)=x^2-\pi x$，$\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$，$\beta=\operatorname{arccot}\frac{5}{4}$，$\gamma=\arccos(-\frac{1}{3})$，$\delta=\operatorname{arccot}(-\frac{5}{4})$. 则

A. $f(\alpha)>f(\beta)>f(\delta)>f(\gamma)$

B. $f(\alpha)>f(\delta)>f(\beta)>f(\gamma)$

C. $f(\delta)>f(\alpha)>f(\beta)>f(\gamma)$

D. $f(\delta)>f(\alpha)>f(\gamma)>f(\beta)$

解法一：由题意 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，且在 $\left(-\infty,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调减少，在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 单调增加，所以，当 $\left|x_1-\frac{\pi}{2}\right|>\left|x_2-\frac{\pi}{2}\right|$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，又易知 $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{3\pi}{4}<\delta<\frac{5\pi}{6}$，所以

$0<|\gamma-\frac{\pi}{2}|<\frac{\pi}{6}<|\beta-\frac{\pi}{2}|<\frac{\pi}{4}<|\delta-\frac{\pi}{2}|<\frac{\pi}{3}<|\alpha-\frac{\pi}{2}|<\frac{\pi}{2}$，故有

$f(\alpha) > f(\delta) > f(\beta) > f(\gamma)$,取 B

解法二:(用复数方法解)

α、β、γ、δ 的复数形式依次为

$\alpha = \mathrm{Arg}(2\sqrt{2} + i), \beta = \mathrm{Arg}(4 + 5i)$

$\gamma = \mathrm{Arg}(-1 + 2\sqrt{2}i), \delta = \mathrm{Arg}(-5 + 4i)$

$\therefore \alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \beta = \mathrm{arctg}\dfrac{5}{4}$

$\gamma = \pi + \mathrm{arctg}(-2\sqrt{2}) = \pi - \mathrm{arctg}2\sqrt{2}$

$\delta = \pi + \mathrm{arctg}\left(-\dfrac{4}{5}\right) = \pi - \mathrm{arctg}\dfrac{4}{5}$

又 $\because f(x)$ 的对称轴为$\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore f(x)$ 在$\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$上递减,且 $f(x) = f(\pi - x)$,于是有

$f(\alpha) = f\left(\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right), f(\beta) = f\left(\mathrm{arctg}\dfrac{5}{4}\right)$

$f(\gamma) = f(\pi - \mathrm{arctg}2\sqrt{2}) = f(\mathrm{arctg}2\sqrt{2})$

$f(\delta) = f\left(\pi - \mathrm{arctg}\dfrac{4}{5}\right) = f\left(\mathrm{arctg}\dfrac{2}{5}\right)$

又 $\because \dfrac{\sqrt{2}}{4} < \dfrac{4}{5} < \dfrac{5}{4} < 2\sqrt{2}$

$\therefore 0 < \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{4} < \mathrm{arctg}\dfrac{4}{5} < \mathrm{arctg}\dfrac{5}{4} < \mathrm{arctg}2\sqrt{2}$

$\therefore f(\alpha) > f(\delta) > f(\beta) > f(\gamma)$ $\therefore$ 取 B

【注】 也可以利用几何意义在复平面上作出 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$,以及 $\pi-\gamma,\pi-\delta$,再利用 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上递减得出 $f(\alpha) > f(\delta) > f(\beta) > f(\gamma)$.

例 13 解不等式组

$$\begin{cases} \arctan\dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} + 3\arcsin\sqrt{1-x^2} + \arccos|x| \geqslant \dfrac{3\pi}{4} \\ \arctan\dfrac{1+|x|-\sqrt{1-x^2}}{1+|x|+\sqrt{1-x^2}} \geqslant 2\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+|x|} \end{cases}$$

解: 易知 $0 \leqslant |x| < 1$,故可设 $|x| = \sin\theta, \theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,易求得

$\arctan\dfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} = \theta, \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos|x| = \dfrac{\pi}{2} - \theta$

又$\dfrac{1+|x|-\sqrt{1-x^2}}{1+|x|+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\dfrac{\theta}{2}$,且$\dfrac{\theta}{2} \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+|x|} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right)$,且$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$

$\therefore \arctan\dfrac{1+|x|-\sqrt{1-x^2}}{1+|x|+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\theta}{2}$

$\arctan\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+|x|} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$

故原不等式组等价于

$$\begin{cases} \theta + 3(\dfrac{\pi}{2} - \theta) + \dfrac{\pi}{2} - \theta \geqslant \dfrac{3\pi}{4} \\ \dfrac{\theta}{2} \geqslant 2(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}) \end{cases}$$

解之得$\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{12}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{3} \leqslant \sin\theta \leqslant \sin\frac{5\pi}{12}$,即

$\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

∴ 原不等式解集为

$\left[-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right]$

§4.3 巩固练习

(一) 选择题

1. 条件甲:$\sqrt{1+\sin\theta} = a$,条件乙:$\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} = a$,(   )

A. 甲是乙的充要条件　　B. 甲是乙的必要条件

C. 甲是乙的充分条件　　D. 甲即不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

2. 函数 $f(x) = \arctan x + \frac{1}{2}\arcsin x$ 的值域是(   ).

A. $(-\pi, \pi)$　　B. $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

C. $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$　　D. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

3. 在$\triangle ABC$中,A、B、C的对边记为a, b, c,其中$b \neq 1$,$\frac{C}{A}$,$\frac{\sin B}{\sin A}$都是方程$\log\sqrt{b}x = \log b(4x-4)$的根,则$\triangle ABC$(   ).

A. 是等腰三角形,但不是直角三角形

B. 是直角三角形,但不是等腰三角形

C. 是等腰直角三角形

D. 不是等腰三角形,也不是直角三角形

4. 设 $a = \log_{\sin 1}\cos 1, b = \log_{\sin 1}\tan 1, c = \log_{\cos 1}\sin 1, d = \log_{\cos 1}\tan 1$,则 a, b, c, d 的大小关系是(   ).

A. $a < c < b < d$　　B. $c < d < a < b$

C. $b < d < c < a$　　D. $d < b < a < c$

5. 设 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$,则$(\cos\alpha)^{\cos\alpha}$,$(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$,$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}$ 的大小顺序是(   )

A. $(\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\sin\alpha}$

B. $(\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

C. $(\sin\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\cos\alpha)^{\sin\alpha}$

D. $(\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

(二) 填空题

1. 设$0 < \theta < \pi$,则 $\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 的最大值是________.

2. 常数 C 的值为________时,函数 $f(x) = \arctan\frac{2-2x}{1+4x} + c$ 在区间$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$内是奇函数.

3. 已知 $x, y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$,$a \in R$,且

$\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y \cdot \cos y + a = 0, \end{cases}$ 则 $\cos(x + 2y) =$ ________.

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知三个角 A、B、C 成等差数列,假设它们所对的边分别是 a、b、c,并且 $c - a$ 等于 AC 边上的高 h,则 $\sin\dfrac{C-A}{2} =$ ________.

5. 已知 $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{3}{5}$, $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + \beta\right) = \dfrac{5}{13}$, 则 $\sin(\alpha + \beta) =$ ________.

(三)解答题

1. x, y, z 中的每个数恰好等于其余两数和的余弦. 证明: $x = y = z$

2. 证明: $\dfrac{1}{3} < \sin 20^\circ < \dfrac{7}{20}$

3. 设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, 证明: $\dfrac{3x}{\sin x} > 4 - \cos x$

4. 函数 $F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x + Ax + B|$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关,问: A、B 取什么值时 M 为最小?证明你的结论

5. 已知 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\theta < x$, 且 $2\sin^2 x + \sin^2 y = 3\sin^2\theta = 1$, 求证: $2x + y < 3\theta$

第五章

向　量

§5.1　知识要点与基本方法

1. 向量

要掌握向量，单位向量，零向量等基础概念；

要掌握向量加法的平行四边形法则，三角形法则，要掌握减法的三角形法则.

2. 向量的数乘要满足的运算律如下(其中 λ、μ 为任意实数)

(1) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$；

(2) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

(3) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$

3. 两个向量的数量积(内积)

设 $\vec{a},\vec{b}$ 是任意两个非零向量，它们之间正方向的夹角为 $\angle(\vec{a},\vec{b})$　$(0\leqslant\angle(\vec{a},\vec{b})\leqslant\pi)$，那么数量

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

叫做向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

当 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 当中至少有一个为零时，规定 $\vec{a}.\vec{b}=0$，当 $\vec{a},\vec{b}$ 相等时，记 $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$

由数量积的定义可知

(1) 两个非零向量的夹角公式为

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

(2) 两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共线的充要条件是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$$

(3) 两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 垂直的充要条件是

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

(4) 运算性质

① 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

② 关于数乘法的结合律：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

③ 对加法的分配律：

$$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

④ 平方公式：

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

⑤ 平方差公式：

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$$

4. 向量的坐标表示

在空间中取定一点 O，过点 O 作两两互相垂直的3条直线，并各在其上取定正方向和相同的长度单位，这样的3条直线 Ox、Oy、Oz 称为坐标轴，点 O 称为坐标原点，平面 xOy、yOz、zOx 称为坐标面，由此构成一个空间直角坐标系，如图 Ⅰ－5－1.

在空间直角坐标系中，分别把 Ox、Oy、Oz 三轴上的单位向量称为坐标向量，记作 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$，设 p 是空间任一点，过点 p 的与三个坐标面平行的平面与三个坐标轴分别交于 A、B、C. 这三个平面和三坐标面围成一长方体，如果点 A、B、C 在坐标轴上对应的3实数分别是 x、y、z，则

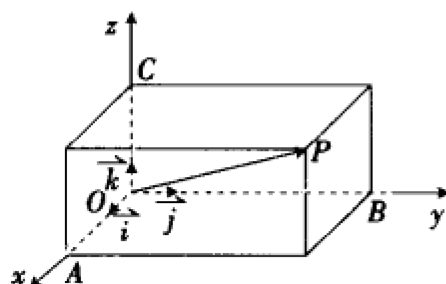


图 Ⅰ－5－1

$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \overrightarrow{OB} = y\vec{j}, \overrightarrow{OC} = z\vec{k}.$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x、y、z)$

$|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

向量 $\vec{\gamma}$ 与坐标向量 $\vec{i}, \vec{z}, \vec{k}$ 间的夹角 α, β, γ 的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{\gamma}$ 的方向余弦，对于方向余弦有

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{\gamma}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{\gamma}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{\gamma}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

向量的加、减法、数乘，数量积可用坐标来表示，记

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

则 $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$

$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

当 $\vec{a}, \vec{b}$ 为共面向量时，可用两个坐标 $(x、y)$ 来表示，上列各式中取 $z = 0$ 即可.

§5.2 赛题精讲

1. 利用向量方法解决立体几何问题

(1) 求空间两点间的距离

例1 在平行六面体 AC_1 中，$\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$，$\angle BAD = 90°$，$|AD| = |AA_1| = 4$，$|AB| = 2$，若 P、Q 分别是 BB_1、CD 的中点，求 $|PQ|$

此题若通过三角形求解，过程复杂，利用向量方法可轻松求得.

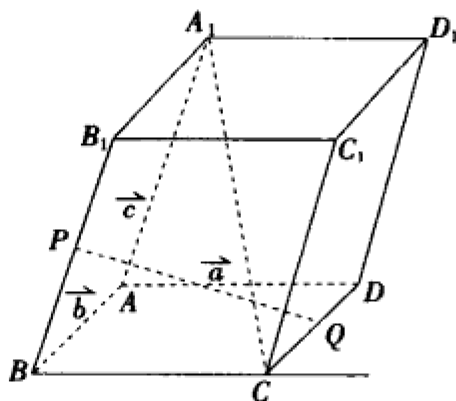


图 Ⅰ－5－2

解: 如图 Ⅰ－5－2 记 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$，

$\because \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle = \langle\vec{b}, \vec{c}\rangle = 60°, \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = 90°, |\vec{a}| = |\vec{c}| = 4, |\vec{b}| = 2$

根据向量内积公式得

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

$=4\times2\cos90^\circ$

$=0$

同理求得$\vec{a}\cdot\vec{c}=8,\vec{b}\cdot\vec{c}=4$

$\because\ \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

$\therefore\ |PQ|^2=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ}$

$=(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c})\cdot(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c})$

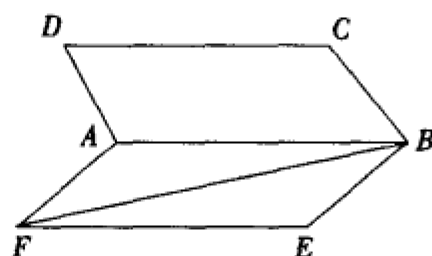
$=|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}$

将有关数据代人得

$|\overrightarrow{PQ}|^2=15$,故$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{15}$.

(2) 求两条异面直线夹角

例 2 (1996.高考题)如图Ⅰ－5－3,正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形$ABEF$ 所在平面成 60° 的二面角,求 AD 与 BF 夹角的余弦.



图Ⅰ－5－3

解:把线段 AD、BF 视为向量$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BF}$,设其夹角为 θ,则由向量的夹角公式有

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}$$

又设二正方形的边长为 1,而有

$|AD|=1,|BF|=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}$

$=0+|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AF}|\cdot\cos60^\circ$

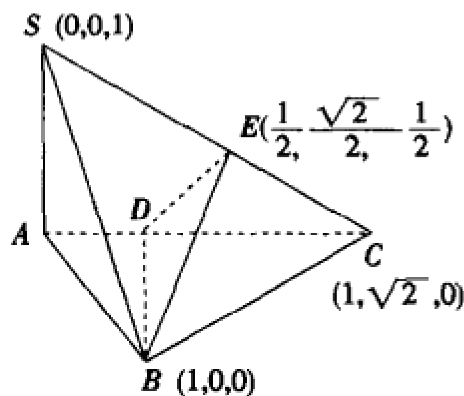
$=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

从而 $\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(3) 二平面夹角

方法 1:假设求平面 α 和β 的夹角,可以改求 α 和β 法线的夹角 θ.这又归结为前段所述的方法.如果注意到平面的交角,是指 $0^\circ\sim90^\circ$ 的角,那么只要求得 $\cos\theta$ 的正值即可,如果求指定的二面角,则要注意:此时它与二平面法线夹角 θ 互补.

当二平面的法线可以直接看出线求得时,可直接求此二法线的交角.



图Ⅰ－5－4

例 3 (1990.高考理科第 24 题)如图Ⅰ－5－4,在三棱锥 $S-ABC$ 中,$SA\perp$ 底面 ABC,$AB\perp BC$.DE 垂直平分 SC,且分别交 AC,SC 于D、E,又 $SA=AB$,$SB=BC$,求以 BDE 与BDC 为面的二面角的度数.

分析与求解:显然$\overrightarrow{SA}$ 是底面 BDC 的法线,只需求平面 BDE 的法线即可,因为$\overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{DE}$,所以又只

需证明$\overrightarrow{SC} \perp \overrightarrow{BE}$即可.

现以 A 点为原点,以$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{AS}$为 x、y、z 轴正向,以 $AB=1$ 为单位长,建立空间直角坐标系,则有$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{SA}|=1$,$|\overrightarrow{SB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$,各点坐标如图所示.于是有

$$\overrightarrow{SC}=(1,\sqrt{2},-1),\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{BE}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=0$$

从而$\overrightarrow{SC}\perp\overrightarrow{BE}$,因此$\overrightarrow{SC}$是平面 BDE 的法线.所以平面 BDE 与平面 BDE 的交角 θ 的余弦等于

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{SA}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}$$

其中$\overrightarrow{SA}=(0,0,-1)$,$|\overrightarrow{SA}|=1$,$|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=2$,$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=1$,代入(*)式,得 $\cos\theta=\frac{1}{2}$,$\theta=60°$

例 4 (1994.理科 23 题),如图 Ⅰ-5-5,已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三棱柱,D 是 AC 中点.

(1) 证明 AB_1 // 平面 DBC_1;

(2) 若 $AB_1\perp BC_1$,求以 BC_1 为棱,DBC_1 与 CBC_1 为面的二面角 α 的度数.

图 Ⅰ-5-5

分析与解:我们只解第二小题,过 A_1A 作底面的垂直平面,设分别交 BC_1、B_1C_1 于 O_1、O,以 O 为原点,分别以$\overrightarrow{O_1B_1}$、$\overrightarrow{O_1O}$、$\overrightarrow{O_1A_1}$为 x、y、z,以 O_1B_1 为单位长,建立直角坐标系设 $AA_1=a$,则各点坐标如图所示.

由$\overrightarrow{C_1B}=(2,a,0)$,$\overrightarrow{B_1A}=(-1,a,\sqrt{3})$及$\overrightarrow{C_1B}\cdot\overrightarrow{B_1A}=-2+a^2=0$,得 $a=\sqrt{2}$

显然,平面 CBC_1 的法向量为$\overrightarrow{O_1A_1}$.

下求平面 BDC_1 的法向量$\vec{n}$

由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1B}=0$,$\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A}=0$,及$\overrightarrow{BD}=(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$得

$$n=\left[\begin{vmatrix}a&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{3}{2}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}2&a\\-\frac{3}{2}&0\end{vmatrix}\right]$$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\sqrt{a},\frac{3a}{2})=(\frac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{2}}{2})$$

$|\vec{n}|=3$,$O_1A_1=(0,0,\sqrt{3})$,$|O_1A_1|=\sqrt{3}$,从而

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OA_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OA_1}||\vec{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2},\alpha=45°$$

图 Ⅰ-5-6

例 5 (2000.高考题),如图 Ⅰ-5-6,在底面为直角梯形的四棱柱 $S-ABCD$ 中,$\angle ABC=90°$,$SA\perp$平面 $ABCD$,$SA=AB=BC=1$,$AD=\frac{1}{2}$,求平面 SCD 与平面 SAB 所成二面角 α 的正切值.

分析与求解:以 AD、AB、AS 为 x、y、z 轴,以 AB 为单位,建立直角坐标系.则各点坐标如图所示.

显然，$\overrightarrow{AS}=(0,0,1)$ 是平面 $ABCD$ 的法向量. 求平面 SCD 的法向量 n.

由 $DC \stackrel{\varepsilon}{=} (\frac{1}{2},1,0)$，$SD=(\frac{1}{2},0,-1)$，得

$$\vec{n}=\left[\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\\frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\\frac{1}{2} & 0\end{vmatrix}\right]$$

$=(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，$|\vec{n}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$

方法 2：在两个平面上分别作交线的垂向量，再利用向量的线性组合和向量垂直条件来确定他们，这两个垂向量的夹角，就是这两个平面的二面角.

例 6　四面体 $C-ABD$ 中，平面 ABC 垂直平面 ABD，$AB=AC=AD$，$\angle BAC=\angle BAD=120°$，求二面角 $C-AD-B$ 的正切值.

解：以 A 为原点，以 AB 为 OY 坐标轴，以 AB 为单位长度，建立直角坐标系. 则各点坐标如图 Ⅰ－5－7 所示，且有

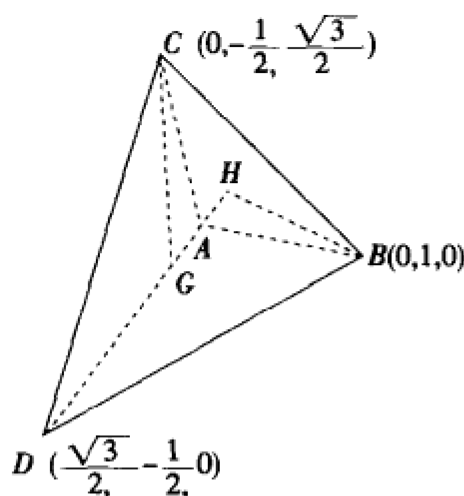


图 Ⅰ－5－7

$\overrightarrow{CA}=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{AD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$

$\overrightarrow{CD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{BA}=(0,-1,0)$

$\overrightarrow{BD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0)$

过 C 作向量 $\overrightarrow{CG}\perp\overrightarrow{AD}$，则应有

$\overrightarrow{CG}=t\overrightarrow{CA}+(1-t)\overrightarrow{CD}$ 且 $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AD}=0'$

代入向量 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AD}$，应有 $\overrightarrow{BH}=t\overrightarrow{BA}+(1-t)\overrightarrow{BD}$，且 $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，类似地算得.

$$t=\frac{3}{2},BH=(-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},0)$$

设 CG 与 BH 的夹角为 θ，θ 就是所求的二面角 $C-AD-B$ 的平面角，而有

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{CG}|\cdot|\overrightarrow{BH}|}=-\frac{\sqrt{5}}{5},\therefore\tan\theta=-\frac{1}{2}$$

(4) 直线与平面的夹角

直线 l 与平面 α 的夹角为 θ，是直线 l 的方向向量 l 与平面 α 法向量 n 夹角 β 的余弦，故有

$$\sin\theta=\sin(90°-\beta)=\cos\beta=\frac{\vec{c}\cdot\vec{n}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{n}|}$$

例 7　在图 Ⅰ－5－6 中，求直线 SC 与底面 $ABCD$ 的夹角 θ 的余弦.

解：显然 AS 是底面的法向量，它与已知向量 $\overrightarrow{CS}=(-1,-1,1)$ 的夹角 $\beta=90°-\theta$，而有

$$\sin\theta=\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{CS}}{|\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{CS}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

2. 利用向量解决平面解析几何问题

例 8 (2001.高考理(19))设抛物线 $y^2=2px(p>o)$ 的焦点为 F,经过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点,点 C 在抛物线的准线上,且 $BC\ /\!/\ x$ 轴,证明直线 AC 经过原点 O.

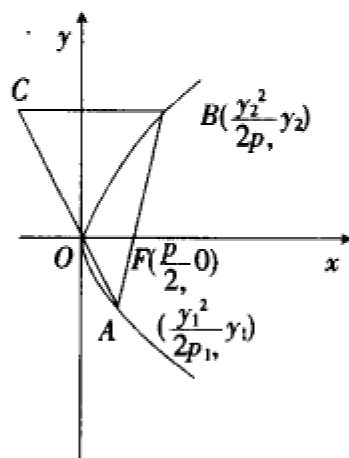


图 Ⅰ-5-8

证明:如图 Ⅰ-5-8,由于 A,B 在抛物线 $y^2=2px$ 上,可设

$A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$

由已知,有 $C\left(-\frac{p}{2},y_2\right)A,B,F$ 三点共线,从而有 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}$($\lambda$ 为实数)

即 $\left(\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p},-y_1\right)$

$=\lambda\left(\frac{p}{2}-\frac{y_2^2}{2p},-y_2\right)$

亦即 $\begin{cases}\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p}=\lambda(\frac{p}{2}-\frac{y_2^2}{2p})\\ y_1=\lambda y_2\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\frac{y_1^2}{2p}=\lambda(-\frac{p}{2})\\ y_1=\lambda y_2\end{cases}$

又 $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$

所以 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OC}$

故 A,O,C 三点共线,即直线 AC 过原点 O.

例 9 (2001.春季京蒙皖高考题(22)),已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$,过动点 $M(a,0)$ 且斜率为 1 的直线 l 该抛物线交于不同的两点 A、B、$|AB|\leqslant 2p$.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N,求 $\triangle NAB$ 的面积的最大值.

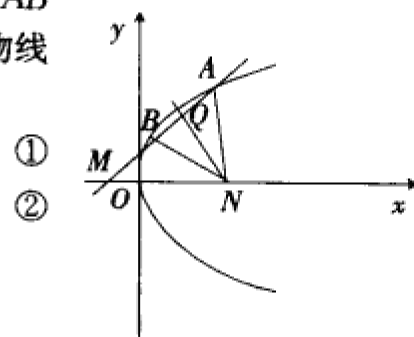


图 Ⅰ-5-9

解:如图 Ⅰ-5-9,设 $Q(x_0,y_0)$,由于 Q 为线段 AB 的中点,且直线 AB 的斜率为 1,故可设 $A(x_0+r,y_0+r),B(x_0-r,y_0-r)$ 由 A,B 在抛物线上,有

$$(y_0+r)^2=2p(x_0+r) \quad ①$$

$$(y_0+r)^2=2p(x_0-r) \quad ②$$

① - ② 得 $4y_0r=4pr$

即 $y_0=p$

故 $Q(x_0,p)$

又 $\overrightarrow{MQ}=(x_0-a,p),\overrightarrow{BA}=(2r,2r)$

且 $\overrightarrow{MQ}\ /\!/\ \overrightarrow{BA}$

故 $(x_0-a)\cdot 2r-2r\cdot p=0$

故 $x_0=a+p$

所以 $Q(a+p,p)$

(1) $Q(a+p,p)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 开口内,所以 $p^2<2P(a+p)$

所以 $a>-\frac{p}{2}$

①+② 得 $y_0^2+r^2=2px_0$

所以 $r^2=2px_0-y_0^2$

$=2p(a+p)-p^2$

即 $r^2=2pa+p^2$ ③

又 $2\sqrt{2}r=|AB|\leqslant 2p$

所以 $r^2\leqslant\frac{1}{2}p^2$ ④

由③、④得 $2pa+p^2\leqslant\frac{1}{2}p^2$

所以 $a\leqslant-\frac{p}{4}$

从而 a 的取值范围是 $(-\frac{p}{2},\frac{p}{4}]$

(2) $|QM|=\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}=\sqrt{p^2+p^2}=\sqrt{2}p$

因 $\triangle MNP$ 为等腰直角三角形

所以 $|QN|=|QM|=\sqrt{2}p$

因为 $S_{\triangle NAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|NQ|=\frac{\sqrt{2}}{2}p|AB|\leqslant\sqrt{2}p^2$

即 $\triangle NAB$ 面积最大值为 $\sqrt{2}p^2$.

3. 活用向量内积,巧解竞赛问题

空间向量的内积有着非常广泛的应用空间,在求解一些代数问题时,若有目的,有意识地运用它,则可收到满意的效果.

例 9 (第二届友谊杯竞赛题)设 $a,b,c\in R^+$,求证:$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$

证明:设向量 $\vec{m}=\{\sqrt{b+c},\sqrt{c+a},\sqrt{a+b}\}$,$\vec{n}=\left\{\frac{a}{\sqrt{b+c}},\frac{b}{\sqrt{c+a}},\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right\}$,它们的夹角为 φ,则

$$a+b+c=\sqrt{b+c}\cdot\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{c+a}\cdot\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\sqrt{a+b}\cdot\frac{c}{\sqrt{a+b}}$$

$$=\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\varphi$$

$\therefore(a+b+c)^2=2(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\cdot\cos^2\varphi\leqslant 2(a+b+c)\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)$

$\therefore\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$

例 10 (第三届国际数学奥林匹克试题)设 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c,面积为 S,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$

证明:设 $\vec{m}=\{a,b,c\}$,$\vec{n}=\{1,1,1\}$,它们夹角为 φ,则

$$a+b+c=\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cos\varphi$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\cos\varphi$$

$$\therefore(a+b+c)^2=3(a^2+b^2+c^2)\cos^2\varphi\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$$

即 $$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \quad ①$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,① 的等号成立.

设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则 $a+b+c=2p$ 由均值不等式有 $(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant(\frac{p}{3})^3$

因此 $S\leqslant\sqrt{p(\frac{p}{3})^3}\Rightarrow P\geqslant(3\sqrt{3}S)^{\frac{1}{2}}$

即得 $a+b+c\geqslant 2(3\sqrt{3}S)^{\frac{1}{2}}$ ②

当且仅当 $a=b=c$ 时,② 的等号成立.

由 ①、② 得 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$

例 11 已知实数 x_1、x_2、x_3、x_4 满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=a(a>0)$,且 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{a^2}{3}$,求证:$0\leqslant x_i\leqslant\frac{a}{2}(i=1,2,3,4)$

解:$\because x_1+x_2+x_3+x_4=a$

$\therefore x_1+x_2+x_3=a-x_4$

又$\because x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\frac{a^2}{3}$

$\therefore x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{a^2}{3}-x_4^2$

设$\vec{m}=\{x_1,x_2,x_3\}$,$\vec{n}=\{1,1,1\}$,它们的夹角为 φ,则

$a-x_4=\vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|\cdot\cos\varphi$

$=\sqrt{3(\frac{a^2}{3}-x_4^2)}\cos\varphi$

$\therefore(a-x_4)^2=(a^2-3x_4^2)$

$\therefore(a-x_4)^2=(a^2-3x_4^2)\cdot\cos^2\varphi$

$\leqslant a^2-3x_4^2$

即 $2x_4^2-ax_4\leqslant 0$,解得 $0\leqslant x_4\leqslant\frac{a}{2}$,当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时,此不等式等号成立.

同理可证 $0\leqslant x_3\leqslant\frac{a}{2}$,$0\leqslant x_2\leqslant\frac{a}{2}$,$0\leqslant x_1\leqslant\frac{a}{2}$.

故有 $0\leqslant x_i\leqslant\frac{a}{2}$ $(i=1、2、3、4)$

§5.3 巩固练习

1. 在 $\triangle ABC$ 中,设 D 及 E 是 BC 的三条分点,D 在 BE 之间,F 是 AC 的中点,G 是 AB 的中点,又设 H 是线段 EG 和 DF 的交点,求比值 $EH:HG$

2. 在平面上给定 $\triangle ABC$,对于平面上的一点 P,建立如下的变换 f:AP 的中点为 Q,BQ 的中点为 R,CR 的中点为 P',$f(P)=P'$,求证:f 只有一个不动点(即 P 与 P' 重合的点).

3. 求证在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 上向形处作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$,则 BC 边上的高 AD 平分线段 FH.

4. 设 A、B、C、D 为空间四个点，其中 $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$，求证这四个点共面.

5. 设正数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 满足条件 $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$，c 是以 O 为圆心的单位圆，Q 是任意一点，若圆 C 上的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 满足条件 $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \overrightarrow{OP}_i = 0$，求证 $\sum_{i=1}^{n} k_i \mid \overrightarrow{P_iQ} \mid \geqslant n$

6. 设有公垂线 $AB = a$ 的两条互相垂直的异面直线，又设两端分别在这两条异面直线上定长为 $l(l > 0)$ 的线段 PQ 的中点是 M，求点 M 的轨迹.

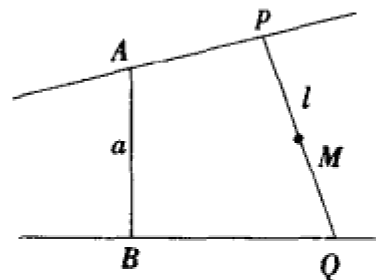


图 Ⅰ－5－10

7. 今有7个向量，其中任何3个向量之和的长度都与其余4个向量之和的长度相等，证明这7个向量的和是零向量.

8. 是否存在4个平面向量，两两不共线，其中任何两个向量之和均与其余二向量之和垂直?

第六章

不等式

§6.1 知识要点与基本方法

1. 有重要应用的若干小结论

(1) 如果 $a,b\in R^+$ 且 $a\neq b$,则

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2$$

(高中代数(必修)下册 P_{13} 上例题)

若去掉限制条件"$a\neq b$",可得

命题 1 设 $a,b\in R^+$,则

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2 \quad ①$$

等号成立当且仅当 $a=b$

推广有

命题 2 设 $a,b\in R^+$, $n\in N$, s,t 为非负整数,且 $s+t=n$,则

$$a^n+b^n\geqslant a^sb^t+a^tb^s \quad ②$$

等号成立当且仅当 $a=b$

命题 3 设 $a,b,c\in R^+$, $n\in N$, p,q,r 为非负整数,且 $p+q+r=n$,则

$$a^n+b^n+c^n\geqslant a^pb^qe^r+a^rb^pc^q+a^qb^rc^p \quad ③$$

命题 2,命题 3 能进一步推广为

命题 4 设 $a_i\in R^+$ $(i=1,2,\cdots,m)$ n 是自然数,p_k 是非负整数$(K=1,2,\cdots,s)$,且 $\sum\limits_{k=1}^{s}p_k=n$, $a_{m+i}=a_i(i=1,2,\cdots,m)$,则

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^n\geqslant\sum_{i=1}^{m}a^{p_1}_{i}a^{p_2}_{i+1}\cdots a^{p_s}_{i+s-1} \quad ④$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m$.

下面反证命题 4

证明: 由加反平均不等式,有

$$\frac{1}{n}(p_1a_i^n+p_2a_{i+1}^n+\cdots+p_sa_{i+s-1}^n)\geqslant a^{p_1}_{i}a^{p_2}_{i+1}\cdots a^{p_s}_{i+s-1}(*)$$

在$(*)$式中,令 $i=1,2,\cdots,m$,求和得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{p_1a_i^n+p_2a_{i+1}^n+\cdots+p_sa_{i+s-1}^n}{n}\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^{p_1}a_{i+1}^{p_2}\cdots a_{i+s-1}^{p_s}$$

$\because \sum\limits_{i=1}^{m}a_i^n=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i+1}^n=\cdots=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i+s-1}^n,\ \sum\limits_{k=1}^{s}p_k=n$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{m}a_i^n\geqslant\sum\limits_{i=1}^{m}a_i^{P_1}a_{i+1}^{P_2}\cdots a_{i+s-1}^{P_s}$

即不等 ④ 成立.

由不等式$(*)$知,不等式 ④ 等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m$.

(2) $\frac{x}{y} \geqslant 2 - \frac{y}{x}$ ⑤

其中 $x, y \in R^+$，当且仅当 $x = y$ 时等式成立(【注】 由高中代数(必修)下册 P_{12} 练习 2(1) 得)

(3) 对于任意非负实数 x, y，恒有

$$\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2(x+y)} \quad ⑥$$

当且仅当 $x = y$ 时，等式成立.

证明：$\because x$、y 为非负数

$\therefore x + y + 2\sqrt{xy} \geqslant x + y$

$\therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \geqslant (\sqrt{x+y})^2$

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{x+y}$

又 $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy}$

$\leqslant (x + y) + (x + y) = 2(x + y)$

$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2(x+y)}$

从而 $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2(x+y)}$

2. 几个重要的不等式

(1) 排序不等式

设有两个有序数组 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 及 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \text{(同序和)}$$
$$\geqslant a_1b_{j_1} + a_2b_{j_2} + \cdots + a_nb_{j_n} \text{(乱序和)}$$
$$\geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \text{(逆序和)}$$

其中 j_1、j_2，$\cdots j_n$ 是 1、2，$\cdots$，n 的任一排列，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时，等号(对任一排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$) 成立.

(2) 平均不等式

设有几个正数 $a_1, a_2, \cdots a_n$，于是分别有

算术平均数：$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

几何平均数：$G_n = \sqrt[n]{a_1a_2 \cdot a_3 \cdots \cdots a_n}$

调和平均数：$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

平方平均数：$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$

则这四个平均数有如下关系：

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$$

其中等号成立的条件是当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

(3) 柯西不等式

设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意两个实数组，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

等号成立当且仅当 $b_i = ka_i$(k 为常数且 $i = 1, 2, \cdots, n$)

(4) 切比雪夫不等式

若 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，则

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

(【注】 上述不等式由于篇幅所限，证明从略)

3. 证明不等式的几种方法

(1) 零点法:利用实数基本性质$(A-B)^{2n}\geqslant 0$($A=B$时等号成立).

(2) 基本法:利用不等式的基本性质.

(3) 同次转化法:在条件不等式中,常有条件$x_1+x_2+\cdots+x_n=c$(c为常数),巧妙地利用这个条件,使欲证不等式两边的字母次数配成同次,然后再实施变换,用这种方法证不等式会收到很好效果.

(4) 放缩法.

(5) 排序法.

(6) 各种代换法:如局部代换,整体代换,三角代换,增长代换,均值代换等.

4. 不等式中的参数

含参数的不等式问题,从某种意义上,较证明不等式更难,许多问题是"开放性"的,要求解题者自行摸索结论,并给出证明,就其证明过程而言,仍是采用不等式的一些常用方法.

§6.2 赛题精讲

1. 关于小结论的应用

例 1 (第26届美国奥林匹克试题)证明对所有正实数a,b,c,有

$$(a^3+b^3+abc)^{-1}+(b^3+c^3+abc)^{-1}+(c^3+a^3+abc)^{-1}\leqslant(abc)^{-1}$$

证明:由命题1知

$$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$$

$$\therefore \frac{abc}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{abc}{a^2b+ab^2+abc}=\frac{c}{a+b+c}$$

同理可得

$$\frac{abc}{b^2+c^3+abc}\leqslant\frac{a}{a+b+c},\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{b}{a+b+c}$$

将上面三式相加得

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\leqslant 1$$

即

$$(a^3+b^3+abc)^{-1}+(b^3+c^3+abc)^{-1}+(c^3+a^3+abc)^{-1}\leqslant(abc)^{-1}$$

例 2 (第37届IMO预选题)设a,b,c是正实数,且$abc=1$,求证:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1$$

并指出等号成立的条件.

证明:由命题已知

$$a^5+b^5\geqslant a^3b^2+a^2b^3$$

等号成立当且仅当$a=b$

$$\therefore \frac{ab}{a^5+b^5+ab}=\frac{a^2b^2c}{a^5+b^5+a^2b^2c}\leqslant\frac{a^2b^2c}{a^3b^2+a^2b^3+a^2b^2c}$$
$$=\frac{c}{a+b+c}$$

同理可得

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant\frac{a}{a+b+c},\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant\frac{b}{a+b+c}$$

将上面三式相加得

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$

例 3 （《数学通报》991 号问题）在 $\triangle ABC$ 中，S 是半周长，$\triangle$ 是面积，求证：

$$(S-a)^4+(S-b)^4+(S-c)^4\geqslant\triangle^2$$

证明：由命题 3 可得

$$a^4+b^4+c^4\geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$$

$\therefore (s-a)^4+(s-b)^4+(s-c)^4$

$\geqslant (s-a)^2(s-b)(s-c)+(s-a)(s-b)^2(s-c)+(s-a)(s-b)(s-c)^2$

$=(s-a)(s-b)(s-c)(3s-a-b-c)$

$=s(s-a)(s-b)(s-c)$

$=\triangle^2$

例 4 （华罗庚数学学校高二年级训练题）若 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$，$n\geqslant 9$，$n\in\mathbf{N}$，求证：

$$a^n+b^n+c^n+d^n\geqslant a^{n-9}b^4c^3d^2+b^{n-9}c^4d^3a^2+c^{n-9}d^4a^3b^2+d^{n-9}a^4b^3c^2$$

证明：在不等式(4)中，取 $n\geqslant 9, m=4, s=4, p_1=n-9, p_2=4, p_3=3, p_4=2$ 即知本题成立.

例 5 （"友谊 88"国际数学邀请赛试题）

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$$

证明：注意到 $a=b=c$，对 $\frac{a^2}{b+c}$ 取 $\frac{x}{y}=\frac{2a}{b+c}$，据结论(5)式有

$$\frac{a^2}{b+c}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{b+c}\geqslant\frac{a}{2}(2-\frac{b+c}{2a})$$
$$=a-(b+c)/4$$

同理有

$$\frac{b^2}{c+a}\geqslant b-\frac{c+a}{4},\frac{c^2}{a+b}\geqslant c-\frac{a+c}{4}$$

$\therefore$ 左边 $\geqslant (a+b+c)-\dfrac{b+c+c+a+a+c}{4}=(a+b+c)/2$

故原不等式成立.

例 6 （第 36 届 IMO 试题）设正数 a,b,c 满足 $abc=1$，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

证：注意到 $a=b=c=1$ 时等号成立，据结论(5)式有

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\frac{1}{2a}\cdot\frac{2}{a^2(b+c)}+\frac{1}{2b}\cdot\frac{2}{b^2(c+a)}+\frac{1}{2c}\cdot\frac{2}{c^2(a+b)}\\
&\geqslant\frac{1}{2a}\left(2-\frac{a^2(b+c)}{2}\right)+\frac{1}{2b}\left(2-\frac{b^2(c+a)}{2}\right)+\frac{1}{2c}\left(2-\frac{c^2(a+b)}{2}\right)\\
&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{ab+bc+ca}{2}\\
&=ab+bc+ca-\frac{ab+bc+ca}{2}\\
&=(ab+bc+ca)/2\\
&\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}/2=3/2
\end{aligned}$$

例 7 （1988. 加拿大数学竞赛试题）已知 $c>1$，求证：两个数 $\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$ 与 $\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$ 中的一个总比另一个大.

解：依结论(*)知：$\sqrt{c+1}+\sqrt{c-1}<\sqrt{2[(c+1)+(c-1)]}=\sqrt{2\cdot 2c}=2\sqrt{c}$

故$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$.

【注】 因 $c+1\neq c-1$,故不可能取等号

例 8 (1994.上海高三数学竞赛试题)函数

$y=\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993}$ 的值域是________.

解:不难知道 $y\in\mathbf{R}^{+}$,且定义域为

$1993\leqslant x\leqslant 1994$

依结论(6)式,知

$$y\leqslant\sqrt{2[(1994-x)+(x-1993)]}=\sqrt{2}$$

又因为当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时,$\sqrt{a}\geqslant a$

$\therefore\sqrt{1994-x}+\sqrt{x-1993}\geqslant(1994-x)+(x-1993)=1$,且当 $x=1993$ 时,$y=1$. $\therefore$ 值域为 $[1,\sqrt{2}]$

例 9 (山东省数学竞赛试题)设 $x^{2}+y^{2}=a^{2}$,$a^{2}<1$,求 $S=\sqrt{1-x^{2}}+\sqrt{1-y^{2}}$ 的最大值.

解:由结论(6)式有

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{1-x^{2}}+\sqrt{1-y^{2}}\\&\leqslant\sqrt{2(1-x^{2}+1-y^{2})}\\&=\sqrt{4-2a^{2}}\end{aligned}$$

$\therefore y_{max}=\sqrt{4-2a^{2}}$.

例 10 (中学数学教学 1999(1):25~26)若 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$,$a+b=1$,则

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant 2\sqrt{2}$$

证明:$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant\sqrt{2(2a+1+2b+1)}=\sqrt{4(a+b+1)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

例 11 (第 18 届全俄中学生数学竞赛试题)已知:正数 x,y,求证:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geqslant\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}$$

证明:依平均不等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$及不等式⑥式,知

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geqslant\frac{4}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{4}{\sqrt{\sqrt{x}}+\sqrt{\sqrt{y}}}\geqslant\frac{4}{\sqrt{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}}\geqslant\frac{2^{2}}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2(x+y)}}}=\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}$$

【注】 此处连用不等式⑥两次

例 12 设 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$,求证:$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

证明:依著名不等式

若 $x_{1}\geqslant x_{2}\geqslant\cdots\geqslant x_{n}>0$,且 $0<y_{1}\leqslant y_{2}\leqslant\cdots\leqslant y_{n}$,则

$$\frac{x_{1}}{y_{1}}+\frac{x_{2}}{y_{2}}+\cdots+\frac{x_{n}}{y_{n}}\geqslant\frac{n(x_{1}+x_{2}+\cdots+x_{n})}{y_{1}+y_{2}+\cdots+y_{n}}$$

即知,不妨设 $a\geqslant b>0$,则 $0<\sqrt{b}\leqslant\sqrt{a}$.于是$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\frac{2(a+b)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\geqslant\frac{2(a+b)}{\sqrt{2(a+b)}}=\sqrt{2(a+b)}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【注】 利用不等式(6)式,还可获得例 11、例 12 的加强式,即两个有趣的不等式链

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geqslant\frac{4}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\geqslant\frac{4}{\sqrt{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}}\geqslant\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\frac{2(a+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\geqslant\sqrt{2(a+b)}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

2. 关于不等式的证明方法介绍

(1) 零点法

例 13 (1991. 亚太地区数学竞赛) 设 $a_i, b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 都是正实数,且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i + b_i}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

证明: 当 $a_i = b_i$ 时,不等式取等号,且 $\frac{a_i}{\sqrt{a_i + b_i}} = \frac{\sqrt{a_i + b_i}}{2}$,构造不等式

$$\left[\frac{a_i}{\sqrt{a_i + b_i}} - \frac{\sqrt{a_i + b_i}}{2}\right]^2 \geqslant 0$$

即
$$\frac{a_i^2}{a_i + b_i} + \frac{b_i - 3a_i}{4} \geqslant 0$$

令 $i = 1,2,\cdots,n$,叠加,得 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i + b_i}\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - 3\sum_{i=1}^{n} a_i}{4} \geqslant 0$

因为 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$

所以 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i + b_i}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$

(2) 基本法 利用不等式的基本性质

例 14 (1997. 第 26 届美国数学奥林匹克) 证明:对于所有正实数 a、b、c,有

$$(a^3 + b^3 + abc)^{-1} + (b^3 + c^3 + abc)^{-1} + (c^3 + a^3 + abc)^{-1} \leqslant (abc)^{-1}$$

证明: 原式左边

$= [(a - b)(a^2 - b^2) + a^2b + ab^2 + abc]^{-1} + [(b - c)(b^2 - c^2) + b^2c + cb^2 + abc]^{-1} + [(c - a)(c^2 - a^2) + c^2a + ca^2 + abc]^{-1} \leqslant (a^2b + ab^2 + abc)^{-1} + (b^2c + cb^{2+} + abc)^{-1} + (ca^2 + c^2a + abc)^{-1}$

$= (abc)^{-1}\left[\frac{a + b + c}{c}\right]^{-1} + (abc)^{-1}\left[\frac{a + b + c}{a}\right]^{-1} + (abc)^{-1}\left[\frac{a + b + c}{b}\right]^{-1}$

$= (abc)^{-1}\left[\frac{c}{a + b + c} + \frac{a}{a + b + c} + \frac{b}{a + b + c}\right]$

$= (abc)^{-1}$

同样有

$(a^p - b^p)(a^q - b^q) \geqslant 0$

$\Rightarrow a^{p+q} + b^{p+q} \geqslant a^pb^q + a^qb^p (a、b、p、q \in \mathbf{R}^+)$

(3) 同次转化法

例 15 设 x、y、$z \in \mathbf{R}^+$,且 $x + y + z = 1$,则 $xy + yz + zx \leqslant \frac{1}{4} + \frac{9}{4}xyz$ ①

证明: 欲证 ① 式,只需证

$(x + y + z)(xy + yz + zx) \leqslant \frac{1}{4}(x + y + z)^3 + \frac{9}{4}xyz$ ②

② 式 $\Leftrightarrow 4(x + y + z)(xy + yz + zx) \leqslant (x + y + z)^3 + 9xyz$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geqslant xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \Leftrightarrow xyz \geqslant (x + z - y)(x + y - z)(y + z - x)$ ③

由 $x^2 \geqslant x^2 - (y - z)^2 = (x + y - z)(z + x - y)$

$y^2 \geqslant y^2 - (x - z)^2 = (y + z - x)(x + y - z)$

$z^2 \geqslant z^2 - (x - y)^2 = (z + x - y)(y + z - x)$

三式相乘并开方,即得 ③ 式,从而 ②、① 成立.

(4) 放缩法

例 16　设 a,b,c,d 为任意正数,求证:

$$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$$

证明:首先,分母缩小以证明右式

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=2$$

然后,分母放大以证明左式

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}=1$$

所以,原不等式成立.

(5) 排序法　对称不等式可用有序化排列证明

例 17　(1963.莫斯科数学竞赛)设 $a、b、c\in\mathbf{R}^{+}$,求证:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

证明:不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,则

$$\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{1}{c+b}$$

于是,由排序不等式,有

(顺序和) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$(乱序和) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$(乱序和)

以上二式相加,得

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geqslant 3$$

所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$

(6) 各种代换法

① 局部代换:将所证不等式中的某些局部代换为新变元.

例 18　即:例 17.

证明:设 $x=b+c,y=c+a,z=a+b$ 有

$a=\frac{1}{2}(-x+y+z),b=\frac{1}{2}(x-y+z),c=\frac{1}{2}(x+y-z)$

$\therefore\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{-x+y+z}{x}+\frac{x-y+z}{y}+\frac{x+y-z}{z}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)-\frac{3}{2}\geqslant 1+1-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

② 整体代换:将欲证不等式中的整个变量式代换为一个新变元.

例 19　(1979.山东省数学竞赛题)在 $\triangle ABC$ 中,求证:$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$

证明:令 $t=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\sin\frac{A}{2}$$

得关于 $\sin\frac{A}{2}$ 的一元二次方程.

$\sin^2\frac{A}{2}-\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2}+2t=0$

由判别式 $\triangle=\cos^2\frac{B-C}{2}-8t\geqslant 0$,得

$t\leqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{B-C}{2}\leqslant\frac{1}{8}$

$\therefore\cos A+\cos B+\cos C$

$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}$

③ 三角代换:利用题设中变量的取值范围,选择恰当的三角函数进行代换.

例 20 (1979.北京数学竞赛)已知 $x^2+y^2=1$,求证:$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$

证明:设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,其中 $0\leqslant r\leqslant 1$,有 $|x^2+2xy-y^2|$

$=|r^2\cos^2\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta-r^2\sin^2\theta|$

$=r^2|\cos 2\theta+\sin 2\theta|$

$=\sqrt{2}r^2\left|\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$

例 21 (1990.日本 IMO 代表队选拔赛)已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$ 且 $x+y+z=1$ 求证:$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geqslant 36$

证明:令 $x=\sin^2\alpha\cos^2\beta,y=\cos^2\alpha\cos^2\beta,z=\sin^2\beta$,其中 α,β 为锐角,有

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$$

$=(1+\cot^2\alpha)(1+\tan^2\beta)+4(1+\tan^2\alpha)\cdot(1+\tan^2\beta)+9(1+\cot^2\beta)=14+(4\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)+(4\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+5)\tan^2\beta+9\cot^2\beta$

$\geqslant 14+4+9\tan^2\beta+9\cot^2\beta$

$\geqslant 18+18=36$

④ 增量代换:由 $b\geqslant a$,令 $a=b+\alpha$,其中 $\alpha\geqslant 0$ 称为增量.

例 22 (第 36 届 IMO 试题)设 a、b、c 为正实数,且满足 $abc=1$,试证:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

证明:设 $2a^{-1}=b^{-1}+c^{-1}+\alpha,2b^{-1}=c^{-1}+a^{-1}+\beta,2c^{-1}=a^{-1}+b^{-1}+r$,有 $\alpha+\beta+\gamma=0$,于是

$\frac{4}{a^3(b+c)}+\frac{4}{b^3(c+a)}+\frac{4}{c^3(a+b)}$

$=\frac{4abc}{a^3(b+c)}+\frac{4abc}{b^3(c+a)}+\frac{4abc}{c^3(a+b)}$

$=\frac{(b^{-1}+c^{-1}+\alpha)^2}{b^{-1}+c^{-1}}+\frac{(c^{-1}+a^{-1}+\beta)^2}{c^{-1}+a^{-1}}+\frac{(a^{-1}+b^{-1}+\gamma)^2}{a^{-1}+b^{-1}}$

$=2(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})+2(\alpha+\beta+\gamma)+(b^{-1}+c^{-1})^{-1}\alpha^2+(c^{-1}+a^{-1})^{-1}\beta^2+(a^{-1}+b^{-1})^{-1}\gamma^2$

$\geqslant 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 2\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=6$

$\therefore$ 原不等式成立.

⑤ 均值代换:

若 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$,可设 $x_i=\frac{a}{n}+t_i(i=1,2,\cdots,n)$,有 $\sum_{i=1}^{n}t_i=0$.

例 23 已知 $a+b+c+d+e=8,a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$,求证:$0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$

证明:设 $a=2-\frac{e}{4}+t_1, b=2-\frac{e}{4}+t_2, c=2-\frac{e}{4}+t_3, d=2-\frac{e}{4}+t_4$,则 $\sum_{i=1}^{4} t_i=0$

从而,有

$$16=\sum_{i=1}^{4}[(2-\frac{e}{4})+t_i]^2+e^2$$

$$=4(2-\frac{e}{4})^2+2(2-\frac{e}{4})\sum_{i=1}^{4}t_i+\sum_{i=1}^{4}{t_i}^2+e^2$$

$$\geqslant(4-\frac{e}{2})^2+e^2$$

解得 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$

3. 不等式中的参数问题

(1) 含参数不等式成立的条件

例 24 设对一切 $x\in\mathbf{R}$,有

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0 \quad ①$$

试求参数 a 应满足的首要条件.

解:令 $t=\log_2\frac{2a}{a+1}$,则 ① 成为

$$f(x)=x^2(3-t)+2tx-2t>0 \quad ②$$

二次函数 $f(x)$ 的值恒为正的充要条件是

$$\begin{cases}3-t>0,\\4t^2-4(3-t)(-2t)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t<3\\t>6,t<0\end{cases}$$

$\therefore t<0$,即 $\log_2\frac{2a}{a+1}<0, 0<\frac{2a}{a+1}<1$

解得 $0<a<1$.

例 25 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是给定的不会为 0 的实数,且

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)$$
$$\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \quad ①$$

对一切 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$ 成立,试求 $r_1,r_2,\cdots,r_n$.

解:取 $x_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,① 成为

$$r_1a_1+\cdots+r_na_n\geqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

取 $x_i=2a_i$,① 成为

$$r_1a_1+\cdots+r_na_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

$$\therefore r_1a_1+\cdots+r_na_n=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \quad ②$$

再取 $x_i=r_i$,① 成为

$$r_1(r_1-a_1)+r_2(r_2-a_2)+\cdots+r_n(r_n-a_n)\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

由 ② 得 $r_1^2+\cdots+r_n^2\leqslant\sqrt{r_1^2+\cdots+r_n^2}$

$\therefore r_1^2+\cdots+r_n^2\leqslant 1$

由柯西不等式

$$a_1^2+\cdots+a_n^2\leqslant(r_1a_1+\cdots+r_na_n)^2\leqslant(r_1^2+\cdots+r_n^2)(a_1^2+\cdots+a_n^2) \quad ③$$

$\therefore r_1^2+\cdots+r_n^2\geqslant 1$

$$\therefore r_1^2+\cdots+r_n^2=1 \quad ④$$

这说明 ③ 中的不等式成立等号,于是由柯西不等式式成立等号的条件,知 $r_i=\lambda a_i(i=1,2,\cdots,$

n),代入④求得

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\qquad \therefore r_i=\frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$$

最后还应把 r_i 代入①左,证明①成立,这已不难了.

例 26 没有数列$\{a_n\}$:$a_1=1,a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\frac{1}{a_n}}(n=1,2,\cdots)$,证明存在 $p\in\mathbf{R}$,使对一切 n,有

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_n}{n^p}\leqslant 2 \qquad ①$$

【分析】 只要找出一个 p,使①对一切 $n\in\mathbf{N}$真,首先 $n=1$ 时,①成为

$\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_1}{1^r}=1\leqslant 2$(这时 p 取任何实数都可以).

设想 p 已找到,用归纳法证题时,关键是由① $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_n}{n^p}\leqslant 2$

$\longrightarrow\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_{n+1}}{(n+1)^p}\leqslant 2$ ②

或者说,由$\frac{1}{4}n^{2p}\leqslant a_n{}^2\leqslant 4n^{2p}$

$\longrightarrow\frac{1}{4}(n+1)^{2p}\leqslant a_{n+1}^2\leqslant 4(n+1)^{2p}$

$\because$ 由①有$\frac{1}{2n^p}\leqslant\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{2}{n^p}$

又 $\because a_{n+1}^2=a_n{}^2+\frac{1}{a_n}$

$\therefore\frac{n^{2p}}{4}+\frac{1}{2n^p}\leqslant a_n^2+\frac{1}{a_n}=a_n{}^{2+1}\leqslant 4n^{2p}+\frac{2}{n^p}$

于是,为保从①→②,p 的一个充分条件是:对一切 $n\in\mathbf{N}$,有

$$\begin{cases}4n^{2p}+\dfrac{2}{n^p}\leqslant 4(n+1)^2,\\ \dfrac{(n+1)^{2p}}{4}\leqslant\dfrac{n^{2p}}{4}+\dfrac{1}{2n^p}\end{cases}$$

即$\begin{cases}2n^{3p}+1\leqslant 2(n+1)^{2p}n^p & ③\\ (n+1)^{2p}n^p\leqslant n^{3p}+2 & ④\end{cases}$

由此可见,取 $p=\frac{1}{3}$,不难证明③、④成立

证:取 $p=\frac{1}{3}$,则当 $n=1$ 时①真,$p=\frac{1}{3}$ 时,③成为$2n+1\leqslant 2(n+1)^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}\Longleftrightarrow(2n+1)^3\leqslant 8(n+1)^2n\Longleftrightarrow 8n^3+12n^2+6n+1\leqslant 8n^3+16n^2+8n$

$\because n\geqslant 1\therefore$③真,④成为$(n+1)^{\frac{2}{3}}n^{\frac{1}{3}}\leqslant n+2\Longleftrightarrow(n+1)^2n\leqslant(n+2)^3$.$\therefore$④真

归设①真,由③、④真→②真,证毕.

(2) 参数的最值

例 27 求最小正数 λ,使对任何 $n\in\mathbf{N}$知 $a_i,b_i\in[1,2](i=1,2,\cdots,n)$,且$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2$,都有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i}\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2 \qquad ①$$

解:考虑 $n=2$ 的情形,令 $a_1=1,b_1=2.a_2=2,b_2=1$,则 $a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=5$

①成为$\frac{1}{2}+8\leqslant 5\lambda,\lambda\geqslant\frac{17}{10}$

下证$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i{}^3}{b_i}\leqslant\frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2$

先证一个预备不等式

设 $c_i,d_i \in [1,2] \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{c_i}{d_i} \leqslant 2 \Rightarrow \frac{1}{2}d_i \leqslant c_i \leqslant 2d_i \Rightarrow (\frac{1}{2}d_i - c_i)(2d_i - c_i) \leqslant 0$

即 $c_i^2 + d_i^2 \leqslant \frac{5}{2}c_i \cdot d_i$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}(c_i^2 + d_i^2) \leqslant \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{n}c_id_i \quad ②$$

设 $a_i,b_i \in [1,2]$,则 $\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}} / a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \frac{a_i}{b_i} \leqslant 2$

② 中令 $c_i = \frac{c_i^{\frac{3}{2}}}{b_i^{\frac{1}{2}}}, d_i = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

得 $\frac{5}{2}\sum a_i^2 \geqslant \sum \frac{a_i^3}{b_i} + \sum a_ib_i \geqslant \sum \frac{a_i^3}{b_i} + \frac{2}{5}\sum(a_i^2 + b_i^2) = \sum \frac{a_i^3}{b_i} + \frac{4}{5}\sum a_i^2$

$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n}a_i^2, \therefore \lambda_{\min} = \frac{7}{10}$.

例 28 试确定最小自然数 k,使对任何 $a \in [0,1]$ 及任何 $n \in \mathbf{N}$,有

$$a^k(1-a)^n < \frac{1}{(n+1)^3} \quad ①$$

解:先设法消去 ① 中的 a,由平均不等式

$$a^k[\frac{k}{n}(1-a)]^n \leqslant \left[\frac{ka + n[\frac{k}{n}(1-a)]}{n+k}.\right]^{n+k}$$

$= (\frac{k}{n+k})^{n+k}$,所以 $a^k(1-a)^n \leqslant \frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$,

当 $a = \frac{k(1-a)}{n}$(即 $a = \frac{k}{n+k} \in [0,1]$)时取等号,于是,问题转化为:求最小自然数 k,使对一切 n,有

$$\frac{k^Rn^n}{(n+k)^{n+k}} < \frac{1}{(n+1)^3} \quad ②$$

易验证 $(k,n) = (1,1),(2,1),(3,3)$ 时,② 不真,所以只解 $k \geqslant 4$

$(k,n) = (1,1)$,② 成 $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ 不真.

$(k,n) = (2,1)$,② 成 $\frac{4}{27} = \frac{4}{3^3} < \frac{1}{8}$ 不真.

$(k,n) = (3,3)$,② 成 $\frac{3^3 \times 3^3}{6^6} = \frac{1}{64} < \frac{1}{64}$ 不真.

下证 $k = 4$ 时,② 真.

$k = 4$ 时,② 成为 $4^4n^n(n+1)^3 < (n+4)^{n+4}$ ③

$n = 1,2,3$ 时,可直接验证,下设 $n \geqslant 4$,有

$\sqrt[n+4]{4^4n^n(n+1)^3} = \sqrt[n+4]{16(2n)(2n)(2n)(2n)n^{n-4}(n+1)^3} \leqslant \frac{16 + 8n + n(n-4) + 3(n+1)}{n+4} = \frac{n^3 + 7n + 19}{n+4} \leqslant \frac{n^2 + 8n + 16}{n+4} = n + 4$

$\therefore$ 最小自然数 $k = 4$.

§6.3 巩固练习

(一) 选择题

1. 设 a、b、c、d、m、n 都是正实数，且 $P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，则(　　).

A. $P\geqslant Q$　　B. $P\leqslant Q$

C. $P<Q$　　D. P、Q 间的大小关系不确定，而与 m，n 大小有关.

2. 记 $P=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^2}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^2}{d^2+a^2+b^2}$，其中 a,b,c,d 都为非零实数，则(　　).

A. $0<P\leqslant 1$　　B. $1<P<2$　　C. $2\leqslant P<3$　　D. $P\geqslant 3$

3. 当 a,b 是两个不相等的正数时，下列三个代数式：

甲：$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$，乙：$\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$，丙：$(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b})^2$ 中最大的一个(　　).

A. 必定是甲　　B. 必定是乙

C. 必定是丙　　D. 不确定，而与 a,b 的取值有关.

4. 已知 $a>b>c>0$，$l_1=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$，$l_2=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，$l_3=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$，则 $l_1l_2,l_1l_3,l_2l_3,l_2^2$ 中最小的一个是(　　)

A. l_1l_2　　B. l_1l_3　　C. l_2l_3　　D. l_2^2

5. 已知：$a_1>a_2>\cdots>a_n$，设 $m=\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}$，$n=\frac{(n-1)^2}{a_1-a_n}$，则有(　　)

A. $m<n$　　B. $m>n$　　C. $m\geqslant n$　　D. $m\leqslant n$

(二) 填空题

1. 如果 $a+b+c=1$，那么 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$ 的最大值是________.

2. 设 $a=\lg z+\lg[x(yz)^{-1}+1]$，$b=\lg x^{-1}+\lg(xyz+1)$，$c=\lg y+\lg[(xyz)^{-1}+1]$，设 a,b,c 中的最大数为 M，则 M 的最小值为________.

3. 设 a 为实数，n 为任意给定的自然数，且 $n\geqslant 2$，若不等式 $1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa>0$，对 $(-\infty,1]$ 上的一切 x 都成立，则 a 的取值范围为________.

4. 设 n 为自然数，a,b 为正实数且满足 $a+b=2$，则 $\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}$ 的最小值为________.

5. 不等式 $|x^2-\sqrt{x-3}|<|2-\sqrt{x-3}|+|x^2-2|$ 的解集为________

(三) 解答题

1. 已知：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，且满足 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=1$

求证：$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$

2. 已知：$x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$.

求证：$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$.

3. 求证:$16 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} < 17$

4. 设 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + \gamma$. 证明:对任意实数 p, q, γ, 函数 $|f(x)|$ 在 $[-1,1]$ 上最大值不可能小于 $\frac{1}{4}$.

5. 设 a, b, c 都为正实数,证明:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

第七章

直线与圆

§7.1 知识要点与基本方法

1. 坐标平面上的有理点与整点

在直角坐标平面上，横坐标和纵坐标均为有理数的点称为有理点，均为整数的点称为整点.关于有理点的问题常可以转化为整点问题加以解决.处理整点问题要用到一些简单的初等数论知识.

2. 定比分点

定理 1 设 $\triangle ABC$ 所在平面上与一点 P 分 $\triangle ABC$ 的有向面积之比为 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}:S_{\triangle PAB}=\alpha:\beta:\gamma$，则 P 点的坐标为

$$\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

推论 1. $\triangle ABC$ 的重心坐标

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

推论 2. $\triangle ABC$ 的内心坐标为

$\mathrm{I}\left(\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c},\dfrac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}\right)$其中 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 对应的边长.

定理 2 平行四边形 $ABCD$ 的顶点坐标满足

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

3. 三角形的有向面积

定理 3 $\triangle ABC$ 的有向面积可表为

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}$$

推论，当且仅当

$\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}=0$ 时，A,B,C 三点共线.

4. 直线的斜率与截距

直线方程是解析几何最基本的方程，由直线的方程可以确定直线的斜率，截距，倾角以及两直线的位置关系，这些直线方程的基本问题，在数学竞赛中常有体现.

5. 点到直线的距离

点 $P_0(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$（A,B 不同为零）的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

6. 圆的方程

(1) 标准方程:$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,它表示以点(a,b)为圆心,半径为$r(r>0)$的圆.

(2) 一般方程:$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,它表示以点$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$为圆心,半径为$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$的圆(其中$D^2+E^2-4F>0$)

7. 直线与圆的位置关系

定理 设直线$l:Ax+By+C=0$(A,B不同时为零),圆$O:(x-a)^2+(y-b)^2=\mathbf{R}^2$.

则(1)l与$\odot O$有两个不同交点的充要条件是$\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}<\mathbf{R}$

(2) 直线l与$\odot O$相切的充要条件为$\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\mathbf{R}$

§7.2 赛题精讲

例1 (1990.全国高中联赛试题)对于任意自然数n,连接原点O与点$A_n(n,n+3)$,用$f(n)$表示线段OA_n上除端点外的整点个数,求$f(1)+f(2)+\cdots+f(1990)$的值

【分析】 解析几何的整点问题常与一些数论知识挂钩,这是竞赛题的基本特征,有理点问题也可转化为数论问题加以探讨.

解:易见,n与$n+3$的最大公约数

$$(n,n+3)=\begin{cases}3,\text{当 } n\equiv0(\bmod 3)\text{ 时};\\1,\text{当 } n\not\equiv0(\bmod 3)\text{ 时}.\end{cases}$$

当$(n,n+3)=1$时,OA_n内无整点,否则,设(m,l)为OA_n内部的整点,$1\leqslant l<n+3$,则由$\frac{m}{l}=\frac{n}{n+3}$

即$m(n+3)=ln$,推知$n\mid m$,这与$m<n$矛盾.

当$(n_1,n+3)=3$时,设$n=3k$则OA_n有两个整点$(k,k+1)$、$(2k,2k+2)$,所以$\sum_{i=1}^{1990}f(i)=2\cdot[\frac{1990}{3}]=1326$

例2 (1986.全国高中联赛,二试三题)请设计一种方法将所有的整点染色,每一个整点染成白色,红色或黑色中的一种颜色,使得

(1) 每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上;

(2) 对任意白点A,红点B和黑点C,总可以找到一个红点D,使得$ABCD$为一平行四边形

证明:你设计的方法符合上述要求.

证明:我们将平面上的点分为三类:

$$P=\{(x,y)\mid(x,y)=(\text{奇},\text{奇})\}$$
$$Q=\{(x,y)\mid(x,y)=(\text{偶},\text{偶})\}$$
$$R=\{(x,y)\mid(x,y)=(\text{奇偶})\text{或}(\text{偶},\text{奇})\}$$

将P中点染白,Q中点染黑,R中点染红.

显然这种染法满足条件(1),且没有三色点共线,否则设白点$A(x_1,y_1)$,红点$B(x_2,y_2)$,黑点$C(x_3,y_3)$共线.

则 $(y_2-y_1)(x_3-x_1)=(y_3-y_1)(x_2-x_1)$

由于x_3-x_1与y_3-y_1都是奇数,y_2-y_1与x_2-x_1是一奇一偶,上式两边一奇一偶不能成立.

设 $D(x_4, y_4)$,由平行四边形的性质,得

$$\begin{cases} x_4 = x_1 + x_3 - x_2 \\ y_4 = y_1 + y_3 - y_2 \end{cases}$$

显然,x_4, x_1 为整数,因 $x_1 + x_3$ 与 $y_1 + y_3$ 都是奇数,而 x_2, y_2 为一奇一偶,故 x_4, y_4 为一奇一偶,即 D 为红点,从而条件(2) 也满足.

例3 (1988.全国联赛题) P、Q 在 $\triangle ABC$ 的 AB 边上,R 在 AC 边上,并且 P、Q、R 将 $\triangle ABC$ 的周长分为三等分,求证:

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} > \frac{2}{9}$$

证明:如图 Ⅰ-7-1,以 A 为原点,直线 AB 为 X 轴,建立直角坐标系,设 $AB = c, BC = a, CA = b, Q(q,0), P(p,0)$ 则

$q - p = \frac{1}{3}(a + b + c), AR = PQ - AP = q - 2p$ 从而 $\frac{y_R}{y_C} = \frac{AR}{AC} = \frac{q-2p}{b}$

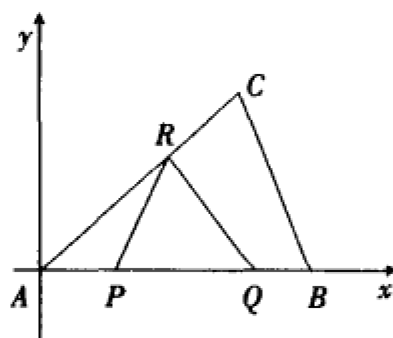


图 Ⅰ-7-1

由于 $2S_{\triangle PQR} = y_R(q - p)$

$2S_{\triangle ABC} = x_B y_C$,所以

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{y_R(q-p)}{y_C x_B} = \frac{(q-p)(q-2p)}{bc}$$

注意到 $p = q - \frac{1}{3}(a+b+c) < c - \frac{1}{3}(a+b+c)$

所以 $q - 2p > \frac{2}{3}(a+b+c) - c > \frac{2}{3}(a+b+c) - \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{6}(a+b+c)$

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{4bc} > \frac{2}{9} \cdot \frac{(b+c)^2}{4bc} > \frac{2}{9}$$

例4 (1988.全国高中联赛二试三题) 在坐标平面上,是否存在一个含有无穷多条直线 $l_1, l_2, \cdots$ 的直线簇,满足条件:

(1) 点$(1,1) \in l_n, n = 1,2,\cdots$;

(2) $k_{n+1} = a_n - b_n$,这里 k_{n+1} 为直线 l_{n+1} 的斜率,a_n, b_n 分别是 l_n 在 x 轴和 y 轴上的截距,$n = 1, 2, \cdots$;

(3) $k_n k_{n+1} \geqslant 0 (n = 1,2,\cdots)$

试证明你的结论.

解:满足所述条件的直线簇不存在,若不然,由(1) 可设 l_n 的方程为

$y - 1 = k_n(x - 1), n = 1,2,\cdots$

则 $a_n = 1 - \frac{1}{k_n}, b_n = 1 - k_n$

$a_n - b_n = k_n - \frac{1}{k_n} = k_{n+1}$ 都存在

故 $k_n \neq 0, n = 1,2,\cdots$,于是对于 $n \geqslant 1$ 有

$k_{n+1} - k_n = -\frac{1}{k_n}$

$k_n - k_{n-1} = -\frac{1}{k_{n-1}}$

… … …

$k_2 - k_1 = -\frac{1}{k_1}$

以上各式相加,得 $k_{n+1} = k_1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$

由 $k_n \neq 0$ 及 $k_n k_{n+1} \geqslant 0$ 可知,诸 k_n 的符号相同,不妨设 $k_n > 0, n = 1,2,\cdots,(k_n < 0, n = 1,2,\cdots,$ 情形类证)

由 $k_{n+1} = k_n - \frac{1}{k_n}$ 知,$k_{n+1} < k_n, \frac{1}{k_{n+1}} > \frac{1}{k_n}$,故 $\frac{1}{k_n} > \frac{1}{k_1}, n = 2,3,\cdots$,故

$$k_{n+1} = k_1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} < k_1 - \frac{n}{k_1}$$

但当 $n > k_1^2$ 时,$k_{n+1} < 0$,与所设 $k_n > 0(n = 1,2,\cdots)$ 矛盾.

综上所述,满足题设条件的直线簇不存在.

例5 (1997.全国高中数学联赛题)设双曲线 $xy = 1$ 的两支为 c_1、c_2(如图).正三角形 PQR 的三个顶点位于此曲线上.设 $P(-1,-1)$ 在 c_2 上,Q、R 在 c_1 上,求顶点 Q、R 的坐标.

【分析】 在正三角形 PQR 中,有 $|PQ| = |PR| = |QR|$ 上,则以 $P(-1,-1)$ 为圆心,$|PR|$ 为半径的圆与双曲线交于 R、Q 两点,根据两曲线方程可求出交点 P、Q 的坐标.

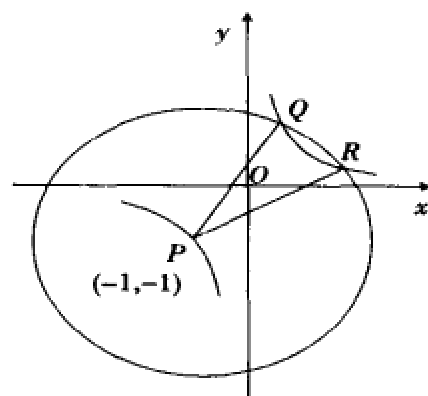


图 I -7-2

解:设以 P 为圆心,$|PR| = r(r > 0)$ 为半径的圆的方程为

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

由 $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = r^2 \\ xy = 1 \end{cases}$

可得 $x^2 + (1 - \sqrt{r^2+1})x + 1 = 0$,那么 P、Q 两点的坐标$(x_1、y_1)$、$(x_2、y_2)$ 满足

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{r^2+1} - 1 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

则有 $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$$= (\sqrt{r^2+1} - 1)^2 - 4$$

同理可得 $(y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2$

$$= (\sqrt{r^2+1} - 1)^2 - 4$$

且因 $\triangle PQR$ 是正三角形,则 $|PQ|^2 = |QR|^2 = r^2$,即 $r^2 = 2[(\sqrt{r^2+1} - 1)^2 - 4]$,则 $r^2 = 24$,把它代入上面的方程 $x^2 + (1 - \sqrt{r^2+1})x + 1 = 0$

得 $x^2 - 4x + 1 = 0$

由方程组 $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{3} \\ y_1 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 2 - \sqrt{3} \\ y_2 = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

所以 R、Q 的坐标是

$$(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) \text{ 与 } (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$$

【评注】 本题构造一个圆,把正三角形的三边转化为圆的半径和弦长之间的相等关系,利用圆的方程和双曲线方程求出交点的坐标.思路简单,解法灵巧,解答自然流畅,直观通俗易懂.

例6 (1993.全国高中数学联合竞赛题)实数 x、y 满足 $4x^2 - 5xy + 4y^2 = 5$,设 $S = x^2 + y^2$,则 $\frac{1}{S_{max}} + \frac{1}{S_{min}}$ 的值是________.

【分析】 把 $x^2 + y^2 = S$ 变形为 $x^2 + y^2 = (\sqrt{S})^2$,利用圆的参数方程易解.

解:设 $x = \sqrt{S}\cos\theta, y = \sqrt{S}\sin\theta(\theta \in R)$,根据题意可得:$4S - 5\sin\theta\cos\theta = 5$

那么 $S=\frac{10}{8-5\sin2\theta}$,且 $-1\leqslant\sin2\theta\leqslant1$

因此 $10/13\leqslant S\leqslant10/3$

所以 $\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}\leqslant\frac{3}{10}+\frac{13}{10}=\frac{8}{5}$

【评注】 本题利用圆的参数方程求最值,方法初等,变换简单,解法基础.

例 7 (1993.全国高中数学联合竞赛题)若直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 被曲线 C:

$(x-\arcsin\alpha)(x-\arccos\alpha)+(y-\arcsin\alpha)(y+\arccos\alpha)=0$ 所截得的弦长是 d,当 α 变化时 d 的最小值是(　　)

A. $\pi/4$　　B. $\pi/3$　　C. $\pi/2$　　D. π

【分析】 由高中必修课本《解析几何》中练习题现成的结论:"一个圆的直径端点是 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0\text{"}$$

可知曲线 C 是圆,圆心在直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 上,所以弦长 d 就是圆的直径.

解:可假设 $A(\arcsin\alpha,\arcsin\alpha)$,$B(\arccos\alpha,-\arccos\alpha)$,则曲线 C 是以 AB 为直径的圆,其圆心的坐标是$(\frac{\arcsin\alpha+\arccos\alpha}{2},\frac{\arcsin\alpha-\arccos\alpha}{2})$,且 $\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2}$,则直线 $x=\pi/4$ 经过圆心,所以弦长 d 就等于圆的直径 $|AB|$,即有

$$d=\sqrt{(\arcsin\alpha-\arccos\alpha)^2+(\arcsin\alpha+\arccos\alpha)^2}$$
$$=\sqrt{(\arcsin\alpha-\arccos\alpha)^2+(\frac{\pi}{2})^2}$$

故当且仅当 $\alpha=\sqrt{2}/2$,d 取得最小值$\frac{\pi}{2}$,选 C

【评注】 有人把"$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$"称为圆的"直径式方程",本题利用圆的"直径式方程",直接得出弦长 d 的目标函数,思维层次深刻、运算快捷,是此类选择填空题的首选解法.

例 8 (1995.全国高中数学联赛)如图 Ⅰ-7-3,设$\triangle ABC$ 的外接圆O 的半径为R,内心为 I,$\angle B=60°$,$\angle A<\angle C$,$\angle A$ 的外角平分线交圆 O 于E,证明:

(1)$IO=AE$;

(2)$2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

【分析】 如图 Ⅰ-7-3,延长 AI 交 $\odot O$ 于F,则 EF 是直径,于是

$$\angle AEF=\angle B+\frac{1}{2}\angle A$$
$$=60°+\frac{1}{2}\angle A$$

因此,可用 R 和 $\angle A$ 表示各边长.

证明:(1) 显然,$O(R\sin A,R\cos A)$,而 $\angle AEF=60°+\frac{1}{2}\angle A$

$\therefore AE=2R\cos(60°+\frac{A}{2})$

又 $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$\therefore IA=2R\sin\frac{C}{2}$

$IB=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$

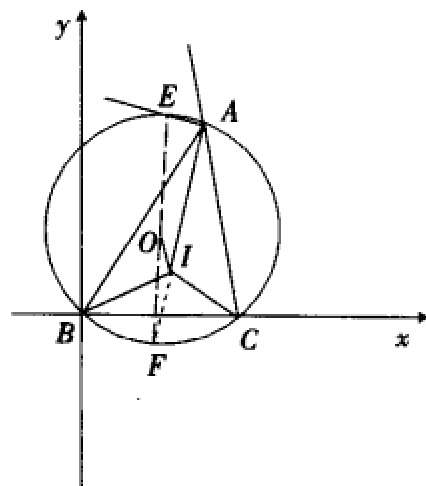


图 Ⅰ-7-3

$IC = 2R\sin\frac{A}{2}$

$\therefore I(2\sqrt{3}R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}, 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2})$

又$\frac{C}{2} = 60^\circ - \frac{\angle A}{2}$

因此 $IO = R\sqrt{\left[\sin A - 2\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\sin\left(60^\circ - \frac{A}{2}\right)\right]^2 + \left[\cos A - 2\sin\frac{A}{2}\sin\left(60^\circ - \frac{A}{2}\right)\right]^2}$

$$= R\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos A - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2}$$

$$= R\sqrt{\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(A + 60^\circ)\right]^2 + \left[\frac{1}{2} + \cos(A + 60^\circ)\right]^2}$$

$$= R\sqrt{2 + 2\cos(A + 120^\circ)}$$

$$= 2R\cos\left(60^\circ + \frac{A}{2}\right) = AE$$

(2) $\because \angle A < \angle C$,则 $0^\circ < \frac{A}{2} < 30^\circ$

$\therefore IO + IA + IC$

$= 2R\left[\cos\left(60^\circ + \frac{A}{2}\right) + \sin\left(60^\circ - \frac{A}{2}\right) + \sin\frac{A}{2}\right]$

$= 2\sqrt{2}R\sin\left(105^\circ + \frac{A}{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}R\sin\left(75^\circ - \frac{A}{2}\right)$

因此,有 $$2\sqrt{2}R\sin 45^\circ < IO + IA + IC < 2\sqrt{2}R\sin 75^\circ$$

即 $$2R < IO + IA + IC < (1 + \sqrt{3})R$$

例9 (1996.全国高中数学联赛)如图 Ⅰ-7-4,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在的三条直线都相切,E,F,G,H 为切点,且 EG,FH 的延长线交于 P 点,求证:直线 $PA \neq BC$ 垂直.

【分析】 如图,只需证明 OA,EG,FH 共点即 证明EG 和FH 交点 P 的横坐标为O,而 EG 和FH 的方程依赖于 $\triangle ABC$,故可引进 $\angle B$ 和 $\angle C$ 为参数.

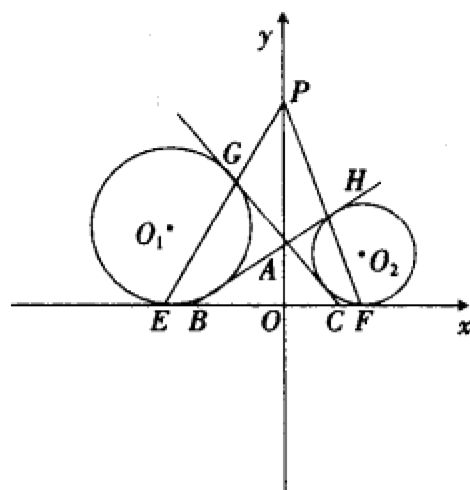


图 Ⅰ-7-4

证明:设 $\angle B = 2\alpha, \angle C = 2\beta, x_B = -b, x_C = C$,因 A 在y 轴上,故有

$b\tan 2\alpha = \cot 2\beta$

而 BO_2 的方程为 $y = \tan\alpha(x + b)$

CO_2 的方程为 $y = \cot\beta(x - c)$

于是,它们交点坐标

$O_2(\frac{b\tan\alpha + c\cot\beta}{\cot\beta - \tan\alpha}, \frac{b + c}{\cot\beta - \tan\alpha} \cdot \frac{\tan\alpha}{\tan\beta})$

$\therefore F(\frac{b\tan\alpha + c\cot\beta}{\cot\beta - \tan\alpha}, 0)$

又 $k_{HF} = -\frac{1}{k_{BO_2}} = -\cot\alpha$

因此,HF 的方程为

$y = -\cot\alpha(x - \frac{b\tan\alpha + c \cdot \cot\beta}{\cot\beta - \tan\alpha})$

同理,EG 的方程为

$y = \cot\beta\left(x - \frac{b\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\beta - \cot\alpha}\right)$

解 HF 和 EG 的方程得

$$x_p=\frac{b\tan\alpha\tan^2\beta+\cot\beta-b\tan\alpha-\cot^2\alpha\cdot\tan\beta}{(1+\tan\alpha\tan\beta)(\tan\alpha+\tan\beta)}$$

分子 $=2b\tan\alpha\tan\beta\cdot\frac{\tan^2\beta-1}{2\tan\beta}+2\cot\alpha\tan\beta\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$

$=-2b\tan\alpha\tan\beta\cot2\beta+2\cot\alpha\cdot\tan\beta\cdot\cot2\alpha$

$=0$(条件(*)),

$\therefore x_p=0$,即 p 在 y 轴上

因此 $PA\perp BC$

§7.3 巩固练习

(一)选择题

1. 方程 $x\cos\theta+y\sin\theta-2\cos\theta=0(\theta\in\mathbf{R})$ 表示的所有直线(　　)

A. 平行　　B. 重合　　C. 过同一点　　D. 有相同截距

2. 已知 $A(0,0)$、$B(36,15)$、C 点横坐标,纵坐标均为整数,则 $\triangle ABC$ 的面积最小值是(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{13}{2}$

3. 三条直线 $4x+y=4$, $mx+y=0$, $2x-3my=4$ 不能构成三角形的条件是(　　)

A. -1 或 $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{6}$　　C. $-\frac{1}{6}$ 或 4　　D. 以上结论都不对

4. 方程 $|x|+|y|=2$ 在直角坐标系中表示的图形是(　　)

A. 一个正方形　　B. 两条直线　　C. 四条直线　　D. 一个矩形

5. 设 $P(x,y)$ 为圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 上任一点,欲使不等式 $x+y+c\geqslant0$ 恒成立,则 C 的取值范围是(　　)

A. $c\geqslant0$　　B. $c\geqslant\sqrt{2}-1$　　C. $c\geqslant\sqrt{2}+1$　　D. $c\geqslant1-\sqrt{2}$

(二)填空题

1. $m\in\mathbf{R}$,则两条直线 $mx-y+1=0$, $x-my-1=0$ 的交点轨迹方程为________.

2. 当 $k=$ ________时,方程 $x^2+xy-6y^2-20x-20y+k=0$ 表示两条直线,且它们间夹角为________.

3. 设 $x+2y\leqslant5$, $2x+y\leqslant4$, $x\geqslant0$, $y\geqslant0$,当 $(x,y)=$ ________时,$3x+4y$ 的最大值是________.

4. 已知 $y=ax+\frac{1}{3}$,当 x 满足条件 $0\leqslant x\leqslant1$, y 满足 $0\leqslant y\leqslant1$,则 a 的取值范围是________.

5. 自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上被 x 轴反射,其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切,则光线 l 所在直线方程为________.

(三)解答题

1. 在坐标平面上是否存在一个有无穷多条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots$ 的直线族,它们满足条件:

(1) 点 $(1,1)\in l_n$, $n=1,2,\cdots$;

(2) $k_{n+1}=a_n-b_n$,其中 k_{n+1} 是 l_{n+1} 的斜率,a_n, b_n 是 l_n 在 x 轴和 y 轴上的截距,$n=1,2,3,\cdots$;

(3) $k_n\cdot k_{n+1}\geqslant0$, $n=1,2,3,\cdots$

2. S 是直线 $l_1:7x+5y+8=0$ 与 $l_2:3x+4y-13=0$ 的交点,过点 $P(3,7)$,$Q(11,13)$ 的直线上有两点 A,B,其中 P 在 A、Q 之间,B 在 P、Q 之间,并且 $\left|\frac{PA}{AQ}\right|=\left|\frac{PB}{BQ}\right|=\frac{2}{3}$,不求 S 的坐标,求直线 SA 和 SB 的方程.

3. 点 $A(3,0)$ 是圆 $x^2+y^2=9$ 上定点,在圆上另取两点 B、C,使 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,求 $\triangle ABC$ 的重心的轨迹方程.

4. 设一椭圆中心是坐标原点,长轴在 x 轴上,离心率为 e,若圆 $c:x^2+(y-\frac{3}{2})^2=1$ 上的点与这个椭圆上点的最大距离为 $1+\sqrt{7}$,试求这个椭圆方程.

5. 在直角坐标平面上,求满足不等式组

$$\begin{cases} y\leqslant 3x \\ y\geqslant \frac{1}{3}x \\ x+y\leqslant 100 \end{cases}$$

的整个点数.

6. 已知 $f(x)=x^2-6x+5$,问满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点$(x、y)$,在平面上的什么范围?并作图.

第八章

圆锥曲线与曲线系

§8.1 知识要点与基本方法

(一) 圆锥曲线

1. 椭圆

(1) 标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(或$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$)

(2) 参数方程：$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)

2. 双曲线

(1) 标准方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(或$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$)

(2) 参数方程：$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$ (θ 为参数)

3. 抛物线

(1) 标准方程：$y^2=2px$(或 $x^2=2py$)

(2) $y^2=2px$ 的参数方程：$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$ (t 为参数)

(二) 曲线系

1. 直线系

用 l_i 表示直线 $A_ix+B_iy+C_i=0(i=1,2,\cdots)$，用 $\lambda_1l_1+\lambda_2l_2=0$ 表示

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

(1) 若 l_1、l_2 是两条相交直线，则

$$\lambda_1l_1+\lambda_2l_2=0(\lambda_i\text{ 为参数})$$

是通过两直线交点的所有直线.

若 l_1、l_2 是两条平行直线，则上式是一组平行直线，或者是虚直线.

(2) 过定点(x_0,y_0)的直线系为

$$\lambda_1(y-y_0)+\lambda_2(x-x_0)=0$$

(3) 与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线系为

$$Ax+By+\lambda=0\quad(\lambda\neq C\text{ 为参数});$$

与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线系为

$$Bx-Ay+\lambda=0$$

(4) 在两坐标轴上截距和等于 a 的直线系为

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{a-\lambda}=1$$

(5) 与原点距离等于 $r>0$ 的直线系为

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

2. 直线合成二次曲线

(1) 已知三角形三边方程为

$$L_i: A_i x + B_i y + C_i = 0 (i = 1,2,3)$$

经过三角形三个顶点的二次曲线系方程为

$$L_1 L_2 + \lambda L_2 L_3 + u L_1 L_3 = 0$$

(2) 已知四边形 4 条边的方程为 L_1, L_2, L_3, L_4,过四边形 4 个顶点的二次曲线系为

$$L_1 L_3 + \lambda L_2 L_4 = 0,$$

其中 L_1 与 L_3,L_2 与 L_4 分别是四边形的对边.

(3) 切已知两条直线 L_1, L_2 于两已知点 M_1, M_2 的二次曲线系方程为

$$L_1 L_2 + \lambda L_3^2 = 0,$$

其中 L_3 是由 M_1, M_2 所确定的直线.

(4) 过两直线 L_1, L_2 与一条二次曲线 $F(x,y) = 0$ 的 4 个交点的二次曲线系方程为

$$F(x,y) + \lambda L_1 L_2 = 0$$

3. 圆系

圆系是求圆的方程的一个重要方法,同时也是证明四点共圆的简捷途径.

(1) 共轴圆系

对于不同心的两个圆

$C_1: x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0,$

$C_2: x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0.$

则 $C_1 + \lambda C_2 = 0$

表示共轴圆系,当 $\lambda \neq -1$ 时,表示一个圆;当 $\lambda = -1$ 时,为一条直线

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

叫做两圆 C_1、C_2 的根轴.

(2) 和已知直线相切于已知点的圆系

设 $f(x,y) = 0$ 表示直线或圆,$p(x_0, y_0)$ 是 $f(x,y) = 0$ 上的一点,那么 $g(x,y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda f(x,y) = 0 (\lambda \in \mathbf{R})$ 是和 $f(x,y) = 0$ 相切于 P 点的圆.(当 $f(x,y) = 0$ 是圆时,$g(x,y) = 0$ 有可能是直线)(证明从略)

运用此圆系,可以把“求与定直线或定圆相切于定点的圆”转化为求适合条件 λ 的解题过程,使问题简化.

4. 有心二次曲线系

对 $AB \neq 0$,且 A, B 不同时为负,有心二次曲线的标准方程可以统一写成

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$$

下面是一些重要的特例:

(1) 共焦点的有心二次曲线系为

$$\frac{x^2}{m^2 - \lambda} + \frac{y^2}{n^2 - \lambda} = 1$$

其中 m, n 及半焦距 $C = \sqrt{|m^2 - n^2|}$ 均为常数,λ 为参数.

(2) 共顶点二次曲线系

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$$

其中$(\pm a,0)$为定顶点，λ为参数.

(3) 共离心率椭圆系

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\lambda$$

其中a,b为常数，$\lambda>0$为参数.

其中a,b为常数，$\lambda\neq 0$为参数.

5. 过两曲线

$$\frac{x^2}{A_1}+\frac{y^2}{B_1}=1,\frac{x^2}{A_2}+\frac{y^2}{B_2}=1$$

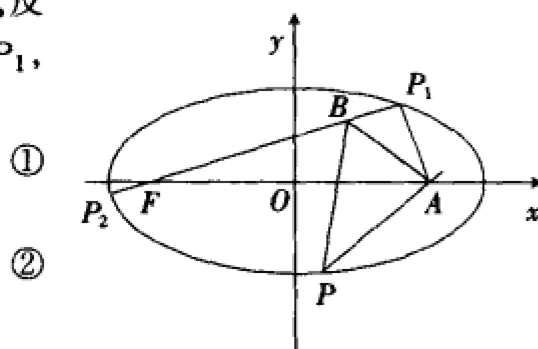
交点的二次曲线系为

$$\left(\frac{x^2}{A_1}+\frac{y^2}{B_1}-1\right)+\lambda\left(\frac{x^2}{A_2}+\frac{y^2}{B_2}-1\right)=0$$

§8.2 赛 题 精 讲

例 1 （1990.西安市高三数学竞赛试题）已知$A(4,0)$、$B(2,2)$是椭圆$M:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$所在平面上的两点，点$P$在椭圆上，求$|PA|+|PB|$的最大值与最小值.

解法一：如图Ⅰ-8-1，连接FB，并延长交椭圆M于点P_1，反向延长FB交椭圆于点P_2，P是M上任意一点（非点P_1,P_2），P_1，P_2是使$|PA|+|PB|$最小，最大的点



图Ⅰ-8-1

$|P_1A|+|P_1B|+|BF|=10$ ①

由$|PF|+|PB|>|PF|$

$\therefore |PA|+|PB|+|BF|>|PA|+|PF|=10$ ②

由①、②，有

$|PA|+|PB|>|P_1A|+|P_1B|$

$|P_2A|+|P_2B|$

$=|P_2F|+|P_2A|+|BF|$

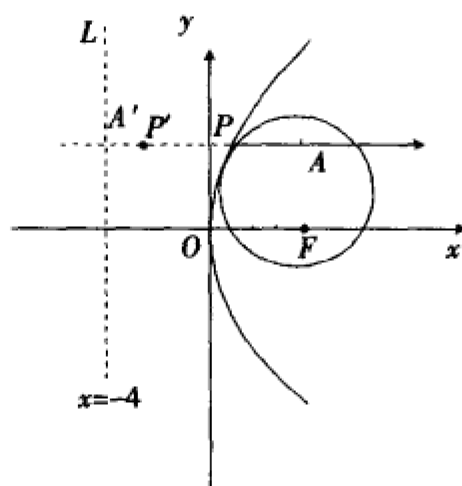
$=|PF|+|PA|+|BF|$

$>|PA|+|PB|$

$\therefore[|PA|+|PB|]_{min}=10-2\sqrt{10}$

$[|PA|+|PB|]_{max}=10+2\sqrt{10}$

例 2 （1993.上海高三数学竞赛题）设抛物线$y^2=16x$的焦点为F，以F与$A(4,4)$为焦点作椭圆，使其与已知抛物线有公共点，当长轴最短时，求椭圆的方程（如图Ⅰ-8-2）.



图Ⅰ-8-2

解法一：设以点$A(4,4)$及抛物线焦点$F(4,0)$为焦点的椭圆方程为

$\frac{(x-4)^2}{a^2-4}+\frac{(y-2)^2}{a^2}=1$ ①

（a为长半轴）

设P为抛物线与椭圆的公共点，由椭圆的定义

$|PA|+|PF|=2a$ ②

即长轴$2a$等于抛物线上一点P到两定点A、F距离之和，若$2a$最小，当且仅当椭圆与抛物线相切，此时，由圆锥曲线的光学性质可知，

光线 FP 的反射线 PA 平行 x 轴.

$\therefore P(1,4)$,由 ② 知,$a_{\min}=4$

所求为$\dfrac{(x-4)^2}{12}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

解法二:抛物线的准线 $l:x=-4$,如图 Ⅰ-8-2,作 $PP'\perp l$ 于点P',$AA'\perp l$ 于点A'.

由 ② 及抛物线定义

$2a=|PA|+|PP'|\geqslant|AA'|=8$,当且仅当 P,A,P'、A' 共线时,不等式取等号,$a_{\min}=4$.

$\therefore$ 所求椭圆方程为$\dfrac{(x-4)^2}{12}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$

例 3 (1995.全国高中数学联赛题)给定曲线族

$2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0$ (0 为参数),求该曲线族在直线 $y=2x$ 上所截得弦长的最大值.

【分析】 我们可以很容易地求出直线与曲线的交点,最后问题归结于讨论

$$x=\frac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3},\theta\in\mathbf{R} \quad ①$$

解法一:将 ① 式整理为

$(2x-8)\sin\theta-(x+1)\cos\theta=1-3x$

$\sqrt{(2x-8)^2+(x-1)^2}\sin(\theta-\alpha)=1-3x$

其中 $\sin\alpha=\dfrac{x+1}{\sqrt{(2x-8)^2+(x-1)^2}}$

$\cos\alpha=\dfrac{2x-8}{\sqrt{(2x-8)^2+(x-1)^2}}$

由三角函数有界性知

$\sqrt{(2x-8)^2+(x-1)^2}\geqslant|1-3x|$

即 $-8\leqslant x\leqslant 2$

弦长最大值为 $8\sqrt{5}$

解法二:将 ① 式变形为

$$x=4+\cfrac{1}{\cfrac{2}{5}\cdot\cfrac{\sin\theta+\cfrac{2}{5}}{\cos\theta-\cfrac{11}{5}}-\cfrac{1}{5}}$$

设 $x'=\cos\theta-\dfrac{11}{5}$,$y'=\sin\theta+\dfrac{2}{5}$,$k=\dfrac{\sin\theta+\frac{2}{5}}{\cos\theta-\frac{11}{5}}$,则有$(x'+\dfrac{11}{5})^2+(y'-\dfrac{2}{5})^2=1$

$y'=kx'$ 所求k 的范围就转化为求圆上任一点与原点连线的斜率的变化范围.设圆心$(-\dfrac{11}{5},\dfrac{2}{5})$到直线 $y'=kx'$ 的距离为d,则

$$d=\frac{\left|\frac{11}{5}k+\frac{2}{5}\right|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant 1$$

即 $-\dfrac{3}{4}\leqslant k\leqslant\dfrac{7}{24}$,$-8\leqslant x\leqslant 2$,弦长最大值为 $8\sqrt{5}$.

例 4 (1998.全国高中数学联赛试题)已知抛物线 $y^2=2px$ 及定点$A(a,b)$,$B(-a,0)$($ab\neq 0$,$b^2\neq 2pa$),M 是抛物线上的点,设直线 AM,BM 与抛物线的另一交点分别为 M_1,M_2,求证:当 M 点在抛物线上变动时(只要 M_1、M_2 存在且 $M_1\neq M_2$),直线 M_1M_2 恒过一个定点,并求出这个定点的坐标.

【分析】 由题设知,M,M_2,A 三点共线,M,M_2,B 三点共线,需推出 M_1,M_2,C(C 为未知定点)三点共线,这三直线有一个共同的特点,抛物线上两点与线外一点共线,因此这三直线的方程模式一样,

利用此特点，此题很易证明.

证法一：设 M,M_1,M_2 的坐标分别为 $\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0\right),\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right)$

由 A,M,M_1 共线，得 MM_1 的方程

$$\frac{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}{y_1-y_0}=\frac{\frac{y_0^2}{2p}-a}{y_0-b}$$

化简得 $y_1y_0=b(y_1+y_0)-2pa$ ①

同理，由 B,M,M_2 共线，得 MM_2 的方程为 $y_2y_0=2pa$ ②

由方程(1)，(2) 消去 y_0，得

$$y_1y_2=\frac{2pa}{b}(y_1+y_2)-2pa \qquad ③$$

而过 M_1,M_2 两点的直线方程为 $y_1y_2=(y_1+y_2)y-2px$，与 ③ 比较知，动直线 M_1M_2 恒过定点 $\left(a,\frac{2pa}{b}\right)$.

证法二：设 M,M_1,M_2 的坐标分别为

$$\left(\frac{y_0^2}{2p},y_0\right),\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),\left(\frac{y^2}{2p},y_2\right)$$

由 A,M,M_1 共线，得

$$\frac{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{y_0^2}{2p}}{y-y_0}=\frac{\frac{y_0^2}{2p}-a}{y_0-b}$$

化简得 $y_1y_0=b(y_1+y_0)-2pa$，所以 $y_1=\frac{by_0-2pa}{y_0-b}$ ①

同理，由 B,M,M_2 共线，得，$y_2=\frac{2pa}{y_0}$ ②

设 (x,y) 是直线 M_1M_2 上的点，则

$$y_1y_2=y(y_1+y_2)-2px. \qquad ③$$

由 ①，② 和 ③ 消去 y_1,y_2 得

$$\frac{(by_0-2pa)\cdot 2pa}{(y_0-b)y_0}=y\left(\frac{by_0-2pa}{y_0-b}+\frac{2pa}{y_0}\right)-2px$$

经整理得 $y_0^2(2px-by)+y_0\cdot 2pb(a-x)+2pa(by-2pa)=0$

由于方程组 $\begin{cases}2px-by=0,\\ a-x=0,\\ by-2pa=0\end{cases}$ 有解 $x=a,y=\frac{2pa}{b}$

所以动直线 M_1M_2 恒过定点 $\left(a,\frac{2pa}{b}\right)$

【评注】 两法相比，显然证法一简洁明快，其原因是寻求并观察得到一个规律性特点：AM、BM、M_1M_2 三条直线的方程模式一样，是求异思维的活用，证法是常规法.

例 5 有 $\triangle ABC$ 的顶点 A 引 BC 的垂线，垂足为 D，在 AD 上任取一点 H，直线 BH 交 AC 于 E，CH 交 AB 于 F，试证 AD 平分 ED 和 DF 所成的角.

证明：建立如图 Ⅰ－8－3 所示直角坐标系，设 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，$H(0,h)$，于是

$$BH:\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1 \qquad ①$$

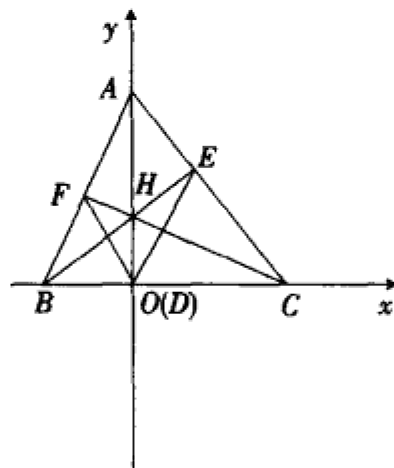


图 Ⅰ－8－3

$$AC:\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1 \qquad ②$$

过 BH、AC 交点 E 的直线系是

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{h}-1+\lambda(\frac{x}{c}+\frac{y}{a}-1)=0$$

令 $\lambda=-1$，得$(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})x+(\frac{1}{h}-\frac{1}{a})y=0$ ③

直线 ③ 过原点，因此 ③ 即为 $OE(DE)$ 的直线方程.

同理，DF 的直线方程为

$$(\frac{1}{c}-\frac{1}{b})x+(\frac{1}{h}-\frac{1}{a})y=0$$

显然，直线 DE 与直线 DF 的斜率互为相反数，故 AD 平分 ED 与 DF 所成角.

【评述】 利用直线系"凑"出所证或所求直线的方程，技巧性较高，看似偶然，实际上并不失为一种通法.

例 6 已知三个圆两两相交，证明：所得到的三条公共弦所在直线或者相交于一点，或者两两平行.

证明：设三个圆的方程为

$$x^2+y^2+D_ix+E_iy+F_i=0 \quad (i=1,2,3)$$

两两相减得公共弦所在直线方程为

$$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0 \qquad ①$$

$$(D_2-D_3)x+(E_2-E_3)y+(F_2-F_3)=0 \qquad ②$$

$$(D_3-D_1)x+(E_3-E_1)y+(F_3-F_1)=0 \qquad ③$$

如果直线 ① 和 ② 相交，因 ① + ② + ③ 得恒等式 $0=0$，可见直线 ③ 经过 ① 和 ② 的交点，于是三线共点.

如果直线 ① 和 ② 平行，则有实数 K，使得$(D_2-D_3)=K(D_1-D_2)$，$(E_2-E_3)=K(E_1-E_2)$，$(F_2-F_3)=K(F_1-F_2)$.

则 $D_3-D_1=D_3-D_2+D_2-D_1=-(K+1)(D_1-D_2)$

同理，$E_3-E_1=-(K+1)(E_1-E_2)$

$F_3-F_1=-(K+1)(F_1-F_2)$

即 ③ 和 ① 也平行，从而三直线两两平行.

例 7 求和圆 $x^2+y^2-2x+4y=0$ 相切于点 $P(2,0)$，且与直线 $2x-y-4=0$ 相交，所截得弦长为 $2\sqrt{5}$ 的圆的方程.

解：设所求圆的方程为

$$(x-2)^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-2x+4y)=0 \qquad ①$$

将 $y=2x-4$ 代入 ① 中，整理得$(1+\lambda)x^2-2(\lambda+2)x+4=0$

$\because$ 所求圆被直线 $2x-y-4=0$ 截得弦长为 $2\sqrt{5}$，

$\therefore \sqrt{1+2^2}\sqrt{[\frac{2(\lambda+2)}{1+\lambda}]^2-\frac{16}{1+\lambda}}=2\sqrt{5}$，解得 $\lambda=-\frac{1}{2}$，将 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 代入 ① 中得

$x^2+y^2-6x-4y+8=0$ 此即为所求圆的方程.

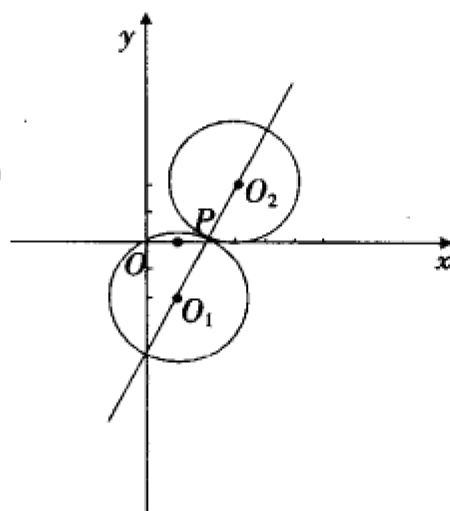


图 Ⅰ-8-4

例 8 给定椭圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，求与这个椭圆有公共焦点的双曲线，使得以它们的交点为顶点的四边形面积最大，并求相应的四边形的顶点坐标.

解：与已知椭圆有公共焦点的双曲线设为

$$\Gamma:\frac{x^2}{b^2-\lambda}+\frac{y^2}{a^2-\lambda}=1(b^2<\lambda<a^2) \qquad (\Gamma)$$

取两曲线的一个交点(x_0,y_0)，由对称性知$(-x_0,y_0)$，$(-x_0,-y_0)$，$(x_0,-y_0)$均为交点，且交点四边形为矩形，其面积为

$$S=4|x_0||y_0|=2ab[2|\frac{x_0}{b}|\cdot|\frac{y_0}{a}|]\leqslant 2ab(\frac{x_0^2}{b^2}+\frac{y_0^2}{a^2})$$
$$=2ab$$

当且仅当$|\frac{x_0}{b}|=|\frac{y_0}{a}|$时有最大值$S_{max}=2ab$，代入椭圆方程得4个交点为

$(\frac{\sqrt{2}}{2}b、\frac{\sqrt{2}}{2}a)$、$(-\frac{\sqrt{2}}{2}b、\frac{\sqrt{2}}{2}a)$、$(-\frac{\sqrt{2}}{2}b、-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$、$(\frac{\sqrt{2}}{2}b、\frac{-\sqrt{2}}{2}a)$把其中一个交点代入$\Gamma$，得

$2\lambda^2-(a^2+b^2)\lambda=0$

舍去$\lambda=0$，得$\lambda=\frac{a^2+b^2}{2}$，代入$\Gamma$得双曲线方程为

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}=1$$

有的曲线系不包括满足某一性质的全体曲线，不注意到这一点会在解题中引起失误.

例9 已知两个椭圆的方程分别是

$C_1:x^2+9y^2-45=0$

$C_2:x^2+9y^2-6x-27=0$

求经过这两个椭圆的交点且与直线$x-2y+11=0$相切的圆的方程.

解：设过C_1与C_2交点的曲线系方程为

$(x^2+9y^2-6x-27)+\lambda(x^2+9y^2-45)=0$

即$(1+\lambda)x^2+9(1+\lambda)y^2-6x-27-45\lambda=0$ ①

与直线$x-2y+11=0$联立，消去x，得

$13(1+\lambda)y^2-(56+44\lambda)y+160+76\lambda=0$

据相切条件，有判别式$=0$

$\triangle=(56+44\lambda)^2-4(13+13\lambda)(160+76\lambda)=0$

即$14\lambda^2+51\lambda+36=0$

$\lambda=\frac{-51\pm3\sqrt{65}}{28}$

代入得所求的圆为

$$(1+\frac{-51\pm3\sqrt{65}}{28})x^2+9(1+\frac{-5\pm3\sqrt{65}}{28})y^2-6x-27-45x\frac{-5\pm3\sqrt{65}}{28}=0 \quad ②$$

【评注】 所求的方程不是圆，而是椭圆，实际上，曲线系①中没有圆，因为$\lambda=-1$时为直线，$\lambda\neq-1$时为椭圆.

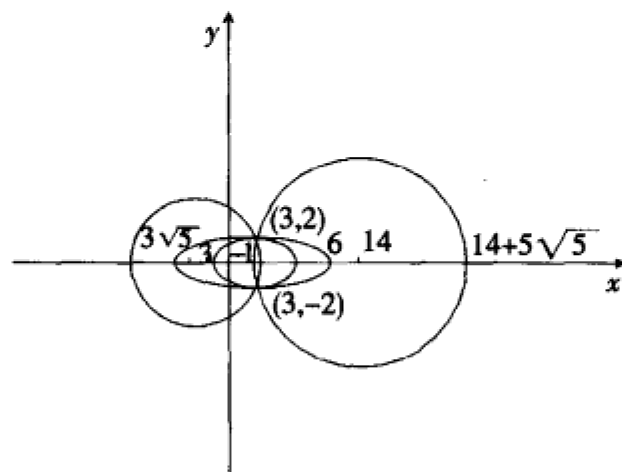
过已知两椭圆交$(3,2)$，$(3,-2)$的曲线很多，而①只表示了一部分，比如，过交点$(3,2)(3,-2)$的圆系

$$x^2+y^2+\lambda(x-3)-13=0 \quad ③$$

就没有包括在①中，由③与直线$x-2y+11=0$联立可求出$\lambda_1=2$，$\lambda_2=-28$，从而所求的圆为(圆8－5)

$x^2+y^2+2x-19=0$

$x^2+y^2-28x+71=0$



图Ⅰ－8－5

§8.3　巩固练习

(一) 选择题

1. 已知 $a \neq b$,且

$a^2\sin\theta + a\cos\theta - 1 = 0$,

$b^2\sin\theta + b\cos\theta - 1 = 0$.

则两点 (a, a^2),(b, b^2) 的连线与单位圆的位置关系适合(　　).

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

2. 过 $A(0,1)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 2x$ 恰有一个公共点,这样的直线可有(　　)条.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 抛物线 $x^2 = 2P(y + \frac{P}{2})(P > 0)$ 与直线 $x\cos\theta + y\sin\theta = P\sin\theta$ 的位置关系适合(　　).

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

4. 经过点 $(\frac{1}{2}, 2)$ 且与双曲线 $4x^2 - y^2 = 1$ 仅有一个公共点的直线有(　　)条.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 经过两圆 $x^2 + y^2 = 4$,$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ 公共点且过点 $P(4,2)$ 的圆有(　　)个.

A. 1　　B. 2

C. 多于 2 的有限个　　D. 无限个

(二) 填空题

1. 过椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心作两条互相垂直的弦 AB,CD,则 $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} =$ ________.

2. 已知直线 l 被椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 截得的弦长为 $\frac{2\sqrt{10}}{5}$,被双曲线 $5x^2 - 4y^2 = 1$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$,则 l 的一条方程为________.

3. 无论 m 取何值,曲线 $mx^2 + my^2 + 2x + 2y - (m+1) = 0$ 总过定点________.

4. 两焦点为 $(2,0)$,$(-2,0)$,且过点 $P(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ 的有心二次曲线为________.

三、解答题

1. 过坐标原点作两条互相垂直的射线交椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 于 A、B 两点,连结 AB 并在线段 AB 内取点 P,使满足 $PO^2 = PA \cdot PB$,求点 P 的轨迹.

2. 对任意自然数 $n \geqslant 3$,求证,平面上存在 n 个点,其任意两点间的距离是无理数,每 3 点不共线且构成的三角形面积均为有理数.

3. 已知直线系 $L_m: y - mx + \frac{1}{4}m^2 = 0$（$m$ 为参数）中有且只有一条直线通过平面上的一点 $P(x, y)$，求点 P 所在的曲线方程.

4. 求过直线 $2x + y + 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ 的交点，且有最小面积的圆的方程.

5. 双曲线的中心在坐标原点 O，焦点在 X 轴上，过双曲线右焦点且斜率为 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 的直线交双曲线于 P，Q 两点，若 $OP \perp OQ$，$|PQ| = 4$，求双曲线的方程.

第九章

立体几何

§9.1 知识要点与基本方法

(一)直线与平面的基本知识可概括为:

1. 平面的基本性质;
2. 空间点、线、面位置关系;
3. 直线与直线,直线与平面,平面与平面的平行与垂直的判定.

(二)空间中的角可概括为:

1. 异面直线所成的角;
2. 直线与平面所成的角;
3. 二面角.

(三)空间中的距离可概括为:

1. 两点间的距离;
2. 点到直线的距离;
3. 点到平面的距离;
4. 平行线间的距离;
5. 异面直线的距离;
6. 平行于平面的直线到平面的距离;
7. 平行平面间的距离;
8. 球面距离.

(四)截面与射影

1. $S_{原}$、$V_{原}$ 为原锥体底面积、体积,h 是锥体的高,$S_{截}$、$V_{截}$、$h_{截}$ 为截得的锥体底面积、体积、高,则

(1) $\dfrac{S_{原}}{S_{截}}=\dfrac{h^2}{h_{截}^2}$　　(2) $\dfrac{V_{原}}{V_{截}}=\dfrac{h^3}{h_{截}^3}$

2. 面积射影定理

在二面角的一个半平面上的任意多边形的面积 S 与这个二面角的度数 α 的余弦的乘积,等于这个多边形在二面角的另一个半平面上射影多边形的面积 S',即 $S'=S\cdot\cos\alpha$.

(五)折叠与展开的方法

要准确画出原来的图形和折叠或展开后的图形,对照平面图形与立体图形的对应元素的位置关系、大小、形状,确定哪些是不变量,哪些是变量,不变量是解题的基础.

(六)柱体

四棱柱 $\xrightarrow{\text{底面是平行四边形}}$ 平行六面体 $\xrightarrow{\text{侧棱与底面垂直}}$ 直平行六面体 $\xrightarrow{\text{底面是矩形}}$ 长方体 $\xrightarrow{\text{底面是正方形}}$ 正四棱柱 $\xrightarrow{\text{侧面是正方形}}$ 正方体

1. 长方体的性质

(1) 长方体一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.

(2) 长方体的一条对角线与一个顶点上的三条棱所成的角分别是 α、β、γ，则

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

(3) 长方体的一条对角线与过一个顶点的三个面所成的角分别是 θ_1、θ_2、θ_3，则

$$\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_3 = 1$$

2. 正方体的性质

(1) 正方体的对角线与不相交的面对角线垂直；

(2) 正方体过同一条对角线的三个对角面两两所成的小于 90° 的二面角都等于 60°

(七) 锥体 —— 主要研究四面体

1. 四面体的性质

(1) 连接四面体对棱中点的线段交于一点，且这点平分这些线段.

(2) 连接四面体对棱中点的线段交于一点 G，且这点将所在线段分成的比为 3 : 1，G 称为四面体重心.

(3) 四面体的二面角的平分面分对棱所成的比等于形成这个二面角的两个侧面的面积之比.

(4) 每个四面体都有内切球，球心 I 是四面体的各个二面角的平分面的交点，此点到各面的距离等于球半径.

设四面体四个面的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，V 表示它的体积，r 表示内切球的半径，h_1、h_2、h_3、h_4 分别表示各顶点到对面所作的高，有

$$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$

(5) 每个四面体都有外接球，球心 O 是各条棱的中垂面的交点，此点到各个顶点的距离等于球半径.

2. 直角四面体的性质

(1) 直角四面体中，不含直角的面是锐角三角形，其面积 $S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$，其中 a，b，c 为互相垂直的三条棱长.

(2) 直角四面体六条棱长的和 l 为定值时，直角四面体的体积的最大值为$\frac{5\sqrt{2} - 7}{162}l^3$.

(3) 直角四面体的内切球半径为

$$r = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - S_4}{a + b + c} = \frac{3V}{S}$$

其中 S_4 表示锐角三角形的面积，S_1、S_2、S_3 表示三个直角三角形的面积，S 表示表面积.

(4) 直角四面体的外接球半径为

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(5) 直角四面体的对棱中点连线长相等，且等于外接球半径.

(八) 台体

1. 正棱台的侧面积公式：$S = \frac{1}{2}(c + c')h'$ （c、c' 分别是上、下底面周长，h' 是斜高）

2. 圆台的侧面积公式：$S = \frac{1}{2}(c + c')l$ （c、c' 分别是上、下底面周长，l 是母线长）.

3. 台体的体积公式：$V = \frac{1}{3}(S + \sqrt{SS'} + S')h$ （S、S' 分别是上、下底面面积，h 是高）

(九) 球体

1. $S_{球} = 4\pi R^2$

2. $V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3$，其中 R 为球半径.

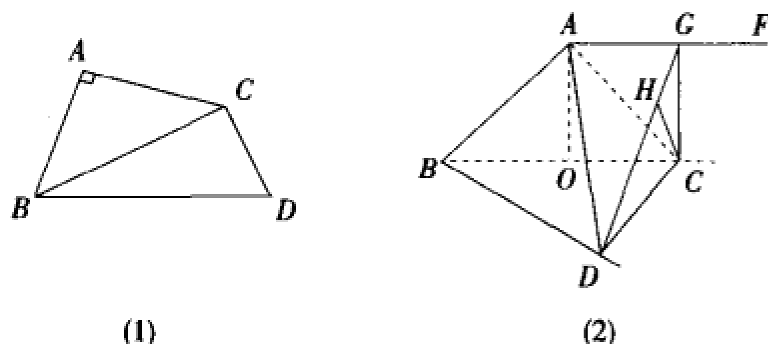
3.设半径为 R 的球上有两点 M、N，它们的纬度差为 α，经度差为 β，则 MN 的球面距离为 $l = 2R\arcsin(\cos\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2})$.

4.多面体的内切球

若多面体有内切球，则内切球的半径 r，表面积 S，体积 V 之间有关系式 $V=\frac{1}{3}Sr$.

§9.2 赛题精讲

例1 把一副三角板如图Ⅰ－9－1拼接后，再使三角板 ABC 沿 BC 折起，使两块三角板所在平面互相垂直，若 $BC=6$，$AB=AC$，$\angle A=\angle BCD=90°$，$\angle D=60°$，求异面直线 BC 和 AD 的距离.



图Ⅰ－9－1

【分析】 求异面直线距离方法很多，本题利用射影法线转化为线面间的距离求异面直线距离.

解:作 $AF /\!/ BC$，$DG\perp AF$ 交 AF 于 G，连接 CG、

$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，$DC\perp BC$

$\therefore DC\perp$ 平面 ABC，由三垂线定理的逆定理知 $CG\perp AG$

$\therefore AG\perp$ 平面 DCG

$\therefore$ 平面 $AGD\perp$ 平面 DCG

$\because AF /\!/ BC$

$\therefore BC /\!/$ 平面 AGD

$\therefore BC$ 与平面 AGD 间的距离即为 BC 与 AD 间的距离，作 $CH\perp DG$ 于 H.

$\because$ 平面 $DCG\perp$ 平面 AGD

$\therefore CH\perp$ 平面 AGD

$\therefore CH$ 是 BC、AD 间的距离

$$\therefore CH=\frac{CD\cdot CG}{DG}=\frac{CD\cdot CG}{\sqrt{CD^2+CG^2}}=\frac{6\cdot\tan30°\cdot3}{\sqrt{(6\tan30°)^2+3^2}}=\frac{6\sqrt{7}}{7}$$

因此异面直线 BC 和 AD 的距离为 $\frac{6\sqrt{7}}{7}$.

【评述】 C 是 BC 在面 DCG 上的射影，DG 是 AD 在面 DCG 上的射影，因而 C 到 DG 的距离就是异面直线 BC 和 AD 的距离.

例2 （1995.北京市高中数学竞赛题）三棱锥 $S—ABC$ 的底面三角形中，$\angle ABC$ 等于 $90°$，$\tan\angle CAB=\frac{\sqrt{6}}{3}$，侧棱 SA、SB，SC 对底面所成的角都是 $45°$，试求侧面 S_{AC} 与 S_{BC} 所成二面角 $A—SC—B$ 度数.

【分析】 由已知条件，易知顶点 S 在底面射影 O 是 $Rt\triangle ABC$ 外心，因而是 AC 中点，平面 $SAC\perp$ 平面 ABC.

思路一:过 O 点作 $OD \perp SC$,垂足为 D;过 D 作 $DE \perp SC$,交 SB 于 E,则 $\angle ODE = \theta$ 为所求二面角

思路二:过 S 在平面 SBC 上作 $SP \perp SC$,交 CB 延长线于 P,连 AP,$\angle ASP = \theta$ 即为所求二面角,通过计算,知 $\angle PAC = 90°$,从而算得 AP 之长.

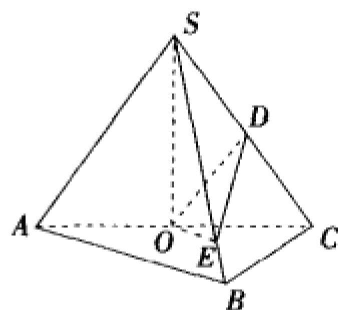


图 Ⅰ-9-2

【评注】 与常规解法相比,这两种二面角作法虽有一些简化,但计算量仍很大,简化得不够,"巧"也不甚明显.

因此,要在进一步简化上动脑筋,在"求简"中发掘出其中的巧趣来.

(1) 若将图 Ⅰ-9-2 中 DE 延长,交 CB 延长线于 P,连 OP,经过计算可以证明 $OP \perp OD$,因此 $OP \perp$ 平面(SAC),反之,如图 Ⅰ-9-3 所示,若过 O 作 $OD \perp SC$ 于 D 之后,再过 O 作 $OP \perp AC$,从而有 $OP \perp$ 平面(SAC),则由三垂线定理知,$PD \perp SC$,故 $\angle ODP = \theta$,即为所求角.

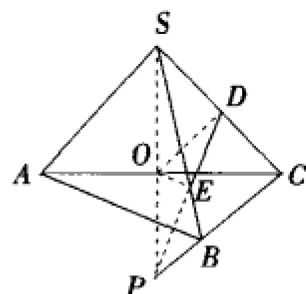


图 Ⅰ-9-3

这样做的好处是,容易算得 OP 之长,事实上,此时 $\angle CAB = \angle OPC$,若设 $SA = SC = 1$,则 $OD = \dfrac{1}{2}$,$AC = \sqrt{2}$,$OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$OC : OP = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 得 $OP = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\therefore \theta = 60°$.

(2) 在图 Ⅰ-9-4 中,考虑先作 $PS \perp SC$,虽然二面角 θ 容易计算,但计算 AP 颇不易,如果在平面 ABC 上作 $AP \perp AC$,连 SP,则 $AP \perp$ 平面 SAC,由三垂线定理即知 $PS \perp SC$,不仅如此,若设 $SA = SC = 1$,此时同样有

$\angle APC = \angle BAC$

$AP = AC \cdot \cot\angle BAC = \sqrt{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$

$\therefore \theta = 60°$

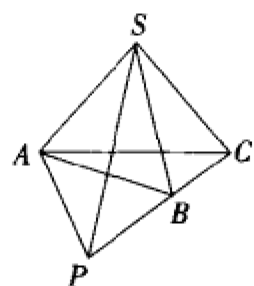


图 Ⅰ-9-4

上述两种解法的取巧之处,都在于运用三垂线定理;正如我们常说的立体几何中证明问题的一半是"三垂线定理",要在实际做的时候注意贯彻这种原则是很重要的.

例3 (1989.全国高中数学联赛试题)如图 Ⅰ-9-5 所示,已知正三棱锥 $S-ABC$ 的高 $SO = 3$,底面边长为 6,过点 A 向它所对的侧面 SBC 作垂线,垂足为 O',在 AO' 上取一点 P,使 $AP : PO' = 8 : 1$,求经过 P 点且平行于底面的截面的面积.

【分析】 根据棱锥平行于底面的截面性质,截面面积与底面面积之比等于它们的对应线段的平方比,设过点 P 平行底面的截面与 SD 的交点为 O'',则截面面积与底面面积之比等于 $SO''^2 : SD^2$

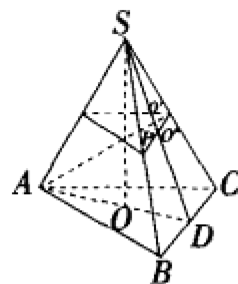


图 Ⅰ-9-5

解:$\because$ 三棱锥 $S—ABC$ 是正三棱锥,其高为 SO.

$\therefore O$ 是 $\triangle ABC$ 的中心,连接 AO 并延长交 BC 于 D,则 D 为 BC 的中点,$\therefore BC \perp$ 面 SAD

从而平面 $SAD \perp$ 面 SBC,$\therefore O'$ 必在 SD 上.

于是 $AD = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ $OD = \dfrac{1}{3}AD = \sqrt{3}$,且 $SO = 3$

$\therefore SD = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$,而 $O'D : AD = OD : SD$

$\therefore O'D = \dfrac{OD}{SD} \cdot AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times 3\sqrt{3} = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

设过点 P 平行于底面的截面与 SD 的交点为 O'',则 $PO'' \parallel AD$,于是

$\dfrac{O''D}{O'D} = \dfrac{AP}{O'A} = \dfrac{8}{9}$

$$O''D=\frac{8}{9}O'D=\frac{8}{9}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$SO''=SD-O''D=2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$SO''^2:SD^2=(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2:(2\sqrt{3})^2=1:9$$

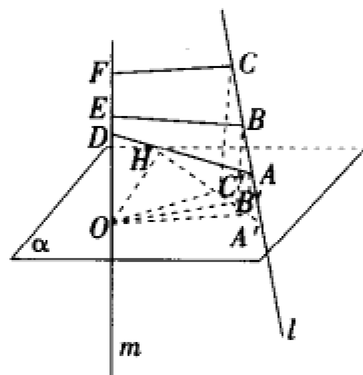
因此所求截面面积为$\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=\sqrt{3}$

【评述】 本题对应线段的比的选取是关键.

例 4 (1992.全国高中数学联赛试题)设 l,m 是两条异面直线,在 l 上有 A、B、C 三点,且 $AB=BC$,过 A、B、C 分别作 m 的垂线 AD、BE、CF,垂足依次为 D、E、F,已知 $AD=\sqrt{15}$,$BE=\frac{7}{2}$,$CF=\sqrt{10}$,求 l 与 m 的距离.

【分析】 利用射影的有关知识,将立体几何问题转化为平面几何问题,再求之.

解:如图Ⅰ-9-6,作平面 α 垂直于直线 m,则 m 在平面 α 上的投影为一点,记为 O,由 $AD\perp m$,$BE\perp m$,$CF\perp m$,知 $AD\parallel\alpha$,$BE\parallel\alpha$,$CF\parallel\alpha$,从而



图Ⅰ-9-6

AD 在 α 上的投影为 OA',且 $OA'=AD$

BE 在 α 上的投影为 OB',且 $OB'=BE$

CF 在 α 上的投影为 OC',且 $OC'=CF$

由于 $AB=BC$,得 $A'B'=B'C'$

$\because m\parallel$ 平面 AC',$\therefore m$ 到平面 AC' 的距离等于 m 与 l 的距离,过点 O 作 $OH\perp A'C'$,交 $A'C'$ 的延长线于 H,由平面 $AC'\perp\alpha$,知 OH 的长即为 l 与 m 的距离.

在 $\triangle OA'C'$ 中,由三角形的中线定理知

$$2(OB'^2+A'B'^2)=OA'^2+OC'^2$$

$$\therefore A'B'=\sqrt{\frac{OA'^2+OC'^2-2OB'^2}{2}}=\frac{1}{2}$$

从而 $A'C'=1$,由余弦定理,得

$$\cos\angle OAC'=\frac{OA'^2+A'C'^2-OC'^2}{2OA'\cdot A'C}=\frac{(\sqrt{15})^2+1^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot\sqrt{15}\cdot 1}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

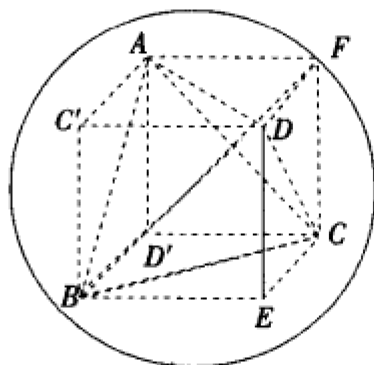
$$\therefore OH=OA'\cdot\sin\angle OA'C'=\sqrt{15}\cdot\sqrt{1-(\frac{\sqrt{15}}{5})^2}=\sqrt{6}$$

故 l 与 m 的距离为$\sqrt{6}$

【评述】 投影是将空间问题转化为平面问题的一个重要途径,此题是用射影法求得异面直线的距离.

例 5 (1997.城市邀请赛试题)正四面体 $ABCD$ 内接于球,CC'、DD' 分别为球的直径,求平面 ACD' 和平面 ADC' 的夹角.

分析与解:该题若依题设条件的图形直接求解非常困难,由题设联想正四面体 $ABCD$ 是由球内接正方体 $BECD'$—$C'DFA$ 截割而成,则题论直接呈现,一目了然,即平面 ACD' 和平面 ADC' 的夹角为 $90°$.



图Ⅰ-9-7

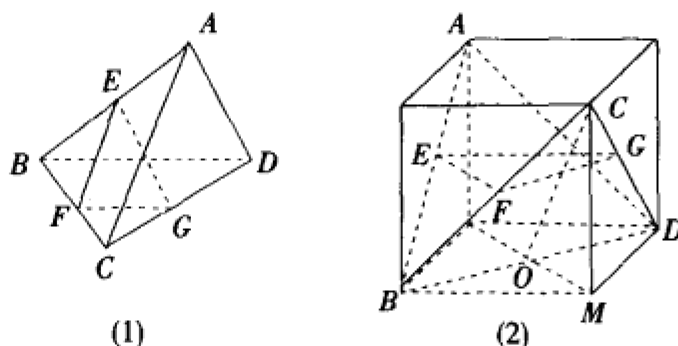
例 6 (1998.高中联赛试题)设 E、F、G 分别是正四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD 的中点,则二面角 C—FG—E 的大小是(　　).

(A)$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　(B)$\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{2}$ (D) $\pi - \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】 标准答案基于所给图形找出二面角的平面角再求解比较繁琐，这里由题意可知正四面体可由正方体截得，依托联想正方体，则较易求得结论.

简解：如图Ⅰ－9－8(2)，作正四面体的外接正方体，则 E、F、G 为所在侧面正方形的中心，从而有 $EF \parallel OM$，$FG \parallel BD$，故面 $EFG \parallel$ 面 BMD，设面 CBD 与面 MBD 的二面角为 α，则所求二面角的大小为 $\pi - \alpha$.



图Ⅰ－9－8

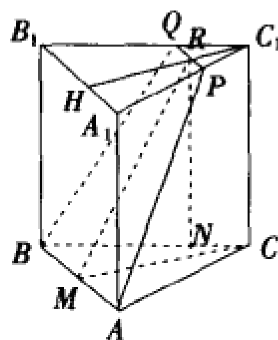
在 $\triangle CBD$ 中，知 $CO \perp BD$，又 $MO \perp BD$，故

$$\alpha = \angle COM = \operatorname{arccot}\frac{OM}{CM} = \operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

从而二面角 $C—FG—E$ 的大小为 $\pi—\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{2}}{2}$

故选 D.

例 7 （1995.第6届"希望杯"全国数学邀请赛题）正三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 底面的边长及高都是 $2cm$，过 AB 作一截面，截面与底面 ABC 成 $60°$ 角，则截面面积为______。



图Ⅰ－9－9

解法一：

先作出符合题意的截面 $ABQP$ 如图Ⅰ－9－9，取 PQ 中点 R，AB 中点 M，连 C_1R 延长交 A_1B_1 于 H，则 H 必为 A_1B_1 中点，连 CM，作 $RN \perp$ 平面 ABC 于 N，则 N 必在 CM 上，且有 $\angle RMN = 60°$。

$\therefore \sin 60° = \frac{RN}{RM}$

从而 $RM = \frac{2}{\sin 60°} = \frac{4}{3}\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

$MN = \frac{2}{\tan 60°} = \frac{2}{3}\sqrt{3}(\mathrm{cm}) = RH$

$\therefore C_1R = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}(\mathrm{cm})$

于是由 $PQ : A_1B_1 = C_1R : C_1H$，得

$$PQ = \frac{2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}(\mathrm{cm})$$

$\therefore S_{\text{截面}ABQP} = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{16}{9}\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

解法二：

如图Ⅰ－9－10 设平面 $ABQP$ 与侧棱 CC_1 交于 D，则

$S_{\triangle ABD} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3}(\mathrm{cm}^2)$

在 $Rt\triangle CDM$ 中，$\angle DMC = 60^\circ$

$$DC = \frac{CM}{\cot 60^\circ} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 3(\text{cm})$$

$$\therefore C_1D = 3 - 2 = 1(\text{cm})$$

又 $\frac{S_{\triangle DQP}}{S_{\triangle DAB}} = \left(\frac{DR}{DM}\right)^2 = \left(\frac{DC_1}{DC}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$$\therefore S_{\triangle DQP} = \frac{1}{9} \cdot S_{\triangle DAB} = \frac{2}{9}\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

故 $S_{截面ABQP} = S_{\triangle DAB} - S_{\triangle DQP}$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{9}\sqrt{3} = \frac{16}{9}\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

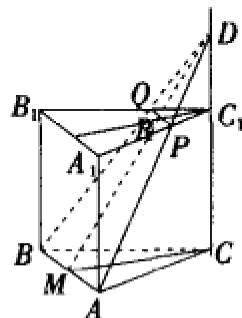


图 Ⅰ－9－10

【评注】 解法一运用锐角三角函数求解；解法二运用公式 $\cos\theta = \frac{S'}{S}$，即 $\cos 60^\circ = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}}$ 及面积组合(面积割补)求解，两法均佳。

例 8 (1994.四川省高中数学联赛填空题 3) 设 T 为四面体，h_1、h_2、h_3、h_4 分别为 T 的四个面上的高，r_1、r_2、r_3、r_4 分别为 T 内一点到这四个面的距离，则 $\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} + \frac{r_4}{h_4}$ 的值是 1.

解：设四个面的面积分别为 F_1、F_2、F_3、F_4，T 的体积为 V，则

$$r_1F_1 + r_2F_2 + r_3F_3 + r_4F_4 = 3V \quad ①$$

又 $h_1F_1 = h_2F_2 = h_3F_3 = h_4F_4 = 3V$

从而 $F_i = \frac{3V}{h_i}\quad (i = 1、2、3、4)\quad ②$

将②代入①，得，

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{r_i \cdot 3V}{h_i} = 3V$$

所以 $\sum_{i=1}^{4} \frac{r_i}{h_i} = 1$

例 9 (1995.全国联赛一试题 1(6))，设 O 是正三棱锥 $P—ABC$ 底面 $\triangle ABC$ 的中心，过 O 任作一平面分别交 PA、PB、PC 于 Q、R、S，证明

$$\frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR} + \frac{1}{PS}$$

为定值。

证：设 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \alpha$，$O$ 到各侧面距离为 d，则

$$V_{P-QRS} = V_{O-PQR} + V_{O-PRS} + V_{O-PSQ}$$

$$= \frac{1}{6}d \cdot \sin\alpha \cdot (PQ \cdot PR + PQ \cdot PS + PR \cdot PS) \quad ①$$

设 PQ 与平面 PRS 交角为 θ，则

$$V_{P-QRS} = \frac{1}{6}PR \cdot PS \cdot (PQ\sin\theta) \cdot \sin\alpha \quad ②$$

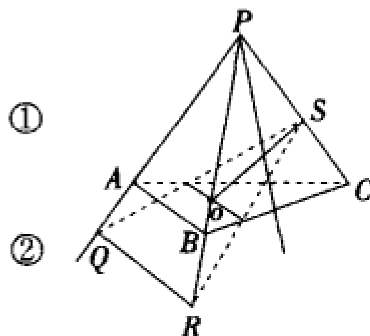


图 Ⅰ－9－11

由①、②得

$$(PQ \cdot PR + PQ \cdot PS + PR \cdot PS)d = PQ \cdot PR \cdot PS \cdot \sin\theta$$

故得

$\frac{1}{PQ} + \frac{1}{PR} + \frac{1}{PS} = \frac{\sin\theta}{d}$ 为定值。

显然，d 等于 A 到底面 PBC 的距离 h 的三分之一，而 $\frac{\sin\theta}{h} = \frac{1}{PA}$，所以上述定值为 $\frac{3}{PA}$。

例 10 过正四面体 $ABCD$ 的底面 BCD 的中心 O 作一个平行于 CD 的截面 $MNPQ$，如图 Ⅰ－9－12，

此截面将正四面体分成体积相等的两部分，试求 PQ 与 CD 的比值。

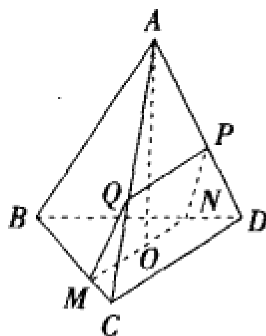


图 Ⅰ－9－12

【分析】 两部分均不是规则的几何体，因此只需研究一部分，将其分割成规则的几何体。

解： 设此正四面体的棱长为 1，即 $CD=1$，设 $PQ=x$

$\because CD \parallel$ 平面 $MNPQ$

$\therefore MN \parallel CD, PQ \parallel CD$

$\because$ 正四面体 $ABCD$ 中 O 是 $\triangle BCD$ 的中心。

$\therefore MN=\frac{2}{3}, MC=ND=\frac{1}{3}, AP=AQ=PQ=x$

设四面体 $ABCD$ 的体积是 V，则

$V_{O-ABC}=V_{O-ABD}=V_{O-ACD}=\frac{1}{3}V$

$\because AQ:AC=x, MC:BC=1:3,$

$\therefore S_{\triangle MCQ}:S_{\triangle ABC}=S_{\triangle MCQ}:(3S_{\triangle AMC})=(1-x):3$

$\therefore V_{O-MCQ}=\frac{1-x}{3}V_{O-ABC}=\frac{1-x}{9}V$

同理 $V_{O-NPD}=\frac{1-x}{9}V$

$\because S_{CDPQ}:S_{\triangle ACD}=1-x^2$

$\therefore V_{O-CDPQ}=(1-x^2)V_{O-ACD}=\frac{1-x^2}{3}V$

而 $V_{MNPQCD}=\frac{1}{2}V$ $\therefore 2\left(\frac{1-x}{9}V\right)+\frac{1-x^2}{3}V=\frac{1}{2}V$

解得 $x=\frac{\sqrt{10}-2}{6}$

故 PQ 与 CD 的比值为 $\frac{\sqrt{10}-2}{6}$

例 11 (1990.全国高中数学联赛)设棱锥 $M—ABCD$ 的底面是正方形，且 $MA=MD, MA\perp AB$，如果 $\triangle AMD$ 的面积为 1，试求放入这个棱锥的最大球的半径。

【分析】 由棱锥球的形体结构可知，应放入的球需与棱锥三侧面相切。

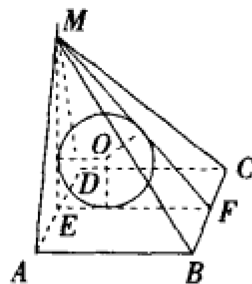


图 Ⅰ－9－13

解： 由 $AB\perp AD$，

$AB\perp AM$，知 $AB\perp$ 平面 MAD. 作截面 MEF 垂直于 AD，则 $\triangle MEF$ 为直角三角形，面积为 $\frac{1}{2}EF\cdot EM=\frac{1}{2}AD\cdot EM=1$

易知，当 $EF=EM$ 时，$\triangle MEF$ 有最大的内切圆，此时 $EF=EM=\sqrt{2}, MF=2$，内切圆半径为 $r=\frac{1}{2}(EF+EM-MF)=\sqrt{2}-1$

设圆心 O 到侧面 MAB、MDC 的距离为 d，则 $V_{M-ABCD}=\frac{1}{3}r(S_{\triangle MAD}+S_{\triangle ABCD}+S_{\triangle MBC})+\frac{2}{3}dS_{\triangle MAB}$

$=\frac{1}{3}S_{\triangle ABCD}\cdot EM$

即 $(\sqrt{2}-1)(1+2+\sqrt{2})+\sqrt{5}d=2\sqrt{2}$

解得 $d=\frac{1}{\sqrt{3}}>\sqrt{2}-1=r$

故以 O 为圆心，$\sqrt{2}-1$ 为半径的球是能放入此棱锥的最大的球。

§9.3 巩固练习

(一) 选择题

1. 设 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面外一点，且 $PA \perp$ 平面 ABC，则在以下结论中，正确的是(　　)。

(A) $\angle BPC < \angle BAC$

(B) $\angle BPC > \angle BAC$

(C) $\angle BPC = \angle BAC$

(D) $\angle BPC$ 与 $\angle BAC$ 大小关系不确定

2. 如右图，在长方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中，下列 12 条直线 AB'、BA'、CD'、DC'、AD'、DA'、BC'、CB'、AC'、BD'、$A'C'$、$B'D'$ 中有(　　)异面直线？

(A)30 对　　(B)60 对　　(C)24 对　　(D)48 对

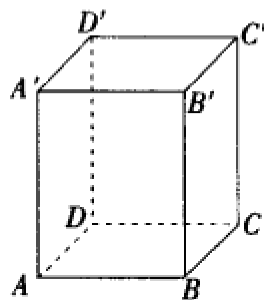


图 Ⅰ－9－14

3. 如果四面体的每一个面都不是等腰三角形，那么其长度不等的棱最少为(　　)条。

(A)3　　(B)4　　(C)5　　(D)6

4. 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则 $F(x)$ 在其定义域上(　　)。

(A) 是增函数但无最大值　　(B) 是增函数且有最大值

(C) 不是增函数且无最大值　　(D) 不是增函数但有最大值

5. 设四面体的四个面的面积分别为 S_1、S_2、S_3、S_4，它们的最大值为 S，记：$\lambda = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} S_i}{S}$，则(　　)。

(A) $2 < \lambda \leqslant 4$　　(B) $3 < \lambda < 4$

(C) $2.5 < \lambda \leqslant 4.5$　　(D) $3.5 < \lambda < 5.5$

6. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别为棱 C_1D_1、AB 的中点，A_1、M、C、N 四点在同一平面内，则 CD 和平面 A_1MCN 所成角的正弦值为(　　)。

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

7. 在正 n 棱锥中，相邻两侧面所成的二面角的取值范围是(　　)。

(A) $\left(\dfrac{n-2}{n}\pi, \pi\right)$　　(B) $\left(\dfrac{n-1}{n}\pi, \pi\right)$　　(C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$　　(D) $\left(\dfrac{n-2}{n}\pi, \dfrac{n-1}{n}\pi\right)$

8. 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为正方形 ADD_1A_1，$ABCD$ 的中点，G 为 CC_1 的中点，设 GF 与 AB 所成的角为 α，C_1E 与 AB 所成的角为 β，则 $\alpha + \beta =$ (　　)。

(A)30°　　(B)60°　　(C)90°　　(D)120°

9. 等腰直角三角形中，$AB = BC = 1$，M 为 AC 的中点，沿 BM 把它折为二面角，折后 A 与 C 的距离为 1，则二面角 $C—BM—A$ 的大小为(　　)。

(A)30°　　(B)60°　　(C)90°　　(D)120°

(二) 填空题

1. 正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，在正方体表面上与点 A 距离是 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 的点的集合形成一条曲线，这条曲线的长度是____。

2. 已知一个平面与一个正方体的 12 条棱的夹角都等于 α，则 $\sin\alpha =$ ____。

3. 已知将给定的两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，恰得到一个所有二面角都相等的六面体，并且该六面体的最短棱的长为 2，则最远的两顶点间的距离是____。

4. 过正三棱锥的一条侧棱及底面中心作一个截面，若截面是等腰三角形，记侧面与底面所成的角为 θ，则 $\cos\theta =$ ____。

5. 在底面半径为 6 的圆柱内，有两个半径也为 6 的球面，其球心距为 13，若作一平面与这两球面相切，且与圆柱面相交成一椭圆，则这个椭圆的长轴长与短轴长之和是____。

(三) 解答题

1. 已知四面体 $S—ABC$ 中，$\angle ASB = \frac{\pi}{2}$，$ASC = \alpha(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$，$\angle BSC = \beta(0 < \beta < \frac{\pi}{2})$，以 SC 为棱的二面角的平面角为 θ，求证：$\theta = \pi - \arccos(\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta)$。

2. 在棱长为 1 的正方体内部，能否放置两个不相交的棱长为 1 的正四面体？

3. 对一切底面为凸四边形的棱锥，可否用平面横截它，使得所得的截面边界为平行四边形？

4. 平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 垂直于 $\triangle B_1AC$ 所在平面，BD_1 等于 a，$\triangle B_1AC$ 的面积等于 S，求此平行六面体的体积。

5. 四面体 $ABCD$ 的体积为 V，分别在 CA、BC、AD、CD 的延长线上取点 K、L、M、N，使得 $AK = AC$，$BC = CL$，$AD = DM$，$CD = DN$，求四面体 $KLMN$ 的体积。

排列、组合、二项式定理

§10.1 知识要点与基本方法

1. 加法原理和乘法原理(内容略)

2. 排列与组合

(1) 排列数公式：$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} \quad (m \leqslant n)$$

(2) 组合数公式：$C_n^m = P_n^m / P_m^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}(m \leqslant n)$

3. 二项式定理

$(a+b)^n = c_n^o a^n b^o + c_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + c_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + c_n^n a^o b^n$ 右边的多项式叫做$(a+b)^n$的二项展开式，其中系数 $c_n^r(cr = 0,1,2,\cdots,n)$ 叫做二项式系数.

4. 有重复的排列

定义：从 n 个不同元素中允许重复地任取 r 个元素排成一列，称为 n 个不同元素的 r— 可重排列.

定理　n 个不同元素的 r— 可重排列数为 n^r.

证：在按顺序选取的 r 个元素中，每个元素都有 n 种不同的选法，故由乘法原理知，总有 n^r 种排列.

5. 不全相异元素的全排列

定义：设 n 个元素可分为 k 组，每一组中的元素是相同的，不同组间的元素是不同的，其中第 i 组的元素个数为 $n_i(i = 1,2,\cdots,k)$，$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$，则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列.

定理　n 个元素的不全相异元素的全排列个数为$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

证：先把每组中的元素看作是不相同的，则 n 个不同元素的全排数为 $n!$，然后分别将每个组的元素还其本来面目看成是相同的，则在这 $n!$个全排列中，每个排列都重复出现了 $n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_k!$次，所以不全相同元素的全排列数为$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\cdots\cdot n_k!}$.

6. 多组组合

定义：将 n 个不同的元素分成 k 组的组合称为 n 个不同元素的 k— 组合.

定理　对于一个 n 个不同元素的 k— 组合，若第 i 组有 n_i 个元素$(i = 1,2,\cdots,k)$，则不同的分组方法数为

$$C_n^{n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证：我们把分组的过程安排成相继的 k 个步骤，第一步，从 n 个不同元素中选 n_1 个，有 $C_n^{n_1}$ 种方法；第二步，从 $n-n_1$ 个元素中选 n_2 个有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法；…；第 k 步，从 $n-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})$ 个元素中选 n_k 个元素，有 $C_{n-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})}^{n_k}$ 种方法，再由乘法原理得证.

7. 重复组合

定义:从 n 个不同元素中任取 r 个允许元素重复出现的组合称为 n 个不同元素的 r— 可重组合.

定理 n 个不同元素的 r— 可重组合的个数为 C_{n+r-1}^{r}.

证:设 $(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 是取自 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的任一 r 可重复组合,并设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r$

令 $bi = a_i + i - 1 \quad (1\leqslant i\leqslant r)$

从而 $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 1, b_3 = a_3 + 2,\cdots, b_r = a_r + r - 1$

显然下面两组数是一对一的

$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_r$

$1\leqslant a_1 < a_{2+1} < a_{3+2} < \cdots < a_r + r - 1\leqslant n + r - 1$

设 $A = \{(a_1,a_2,\cdots,a_r)\mid a_i\in\{1,2,\cdots,n\}, a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r\}$

$B = \{(b_1,b_2,\cdots,b_r)\mid b_i\in\{1,2,\cdots,n+r-1\}, b_1 < b_2 < \cdots < b_r\}$

则由 A、B 之间存在一一对应,故 $|A| = |B| = C_{n+r-1}^{r}$ 证毕.

8. 圆排列

定义:从 n 个元素中任取 r 个不同元素仅按元素之间的相对位置而不分首尾排成一个圆圈,这种排列称为 n 个不同元素的 r— 圆排列. r— 圆排列数记为 K_n^r.

定理 n 个不同元素的 r— 圆排列数 $K_n^r = \dfrac{P_n^r}{r}$.

证:对 n 个不同元素取 r 个的任一圆排列,均有 r 种不同的方式展成 r 个不同的直线排列,且不同的圆排列展开的直线排列也彼此不同,故有 $r\cdot K_n^r = P_n^r$ 得证.

§10.2 赛 题 精 讲

1. 有关排列数和组合数的计算题

例 1 (据 1990 年全国高中联赛二、5 题改编)设 $n = 1999$,求下式的值.

$$\frac{1}{2^n}(1 - 3C_n^2 + 3^2C_n^4 - 3^3C_n^6 + \cdots - 3^{999}C_n^{1998})$$

【分析】 本题是求二项展开式的部分和,此类问题往往通过添项,补成完整的二项式即可解决.

解:原式$= \dfrac{1}{2^{n+1}}[(1+\sqrt{3}i)^n + (1-\sqrt{3}i)^n]$

$$= \frac{1}{2}[(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n + (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^n]$$

$$= \frac{1}{2}[(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n + (\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})^n]$$

$$= \cos\frac{n\pi}{3} = \cos\frac{1999\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

例 2 (1998. 全国高中联赛试题) 从 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数中取出 3 个数,使其和为不小于 10 的偶数,不同的取法有多少种?

解:从这 10 个数中取出 3 个不同的偶数的取法有 C_5^3 种;取出 1 个偶数和 2 个不同奇数的取法有 $C_5^1C_5^2$ 种.

从这 10 个数取出 3 个数,使其和为小于 10 的偶数,有如下 9 种不同取法:

(0,1,3)、(0,1,5)、(0,2,4)、(1,2,3)、(0,1,7)、(0,2,6)、(0,3,5)、(1,2,5)、(1,3,4)

因此,符合题设要求的不同取法有

$C_5^3 + C_5^1C_5^2 - 9 = 51$(种)

例 3 (1998. 全国联赛试题) 在正方体的 8 个顶点,12 条棱的中点,6 个面的中心及正方体的中心

共 27 个点中，共线的三点组的个数是多少？

解：分类来求，两端点皆为顶点的共线三点组共有$\frac{8\times 7}{2}=28$(个)；两端点皆为面的中心的共线三点组共有 3 个；两端皆为各棱中点的共线三点组有$\frac{12\times 3}{2}=18$(个)，且没有别的类型的共线三点组，所以共有 $28+3+18=49$(个).

【注】 这种计算题除灵活应用公式，更重要的是要恰当分类，认真枚举.

2. 有关排列组合应用题

解排列组合应用题的依据是加法原理，乘法原理以及排列组合的定义，关键是分清"排列" 与"组合". 常用的方法有直接法、间接法和模型法，解题要特别注意限制条件与隐含条件.

例 4 (1993. 全国高中数学联赛题) 三位数(100,101,…,999)共 900 个，在卡片上打印这些三位数，每张卡片打印 1 个三位数，有的卡片所得，倒过来看仍为三位数，如：198 倒过来看是 861(1 倒过看仍是为 1)；有的卡片则不然，如 531 倒过来是1ƐƧ，因此有些卡片可以一卡二用，于是至多可少打印________张卡片.

解法一：

把卡片倒过来仍为三位数，这些数的十位数字只可取 0,1,6,8,9，而百位数字与个位数字只可取 1,6,8,9，这种三位数共有

$C_5^1C_4^1C_4^1=5\times 4^2=80$(个)

但其中有卡片倒过来虽然仍为三位数，但与原数相同，如 619,808，等等，这种数的十位数字只能取 0,1,8，百位数字可取 1,6,8,9，这时个位数字就随之确定了，如 101,606,808,609,111,616,818,619,181,686,888,689，共有 $C_3^1C_4^1=3\times 4=12$(个)

$\therefore$ 可少打印的卡片数至多有$\frac{1}{2}(80-12)=34$ 张

解法二：

$\because$ 倒过来两用数字有 0,1,6,8,9

$\therefore$ 由这些数字可排出两用的三位数.

(1) 无重复数字的三位数有

$P_4^3-4+5=25$ 个

(其中含有 0 的三位数有 106,108,109,608,908；不含 0 的三位数中注意 619,689,916,986，倒过来仍是本身，故为 P_4^3-4 个)

(2) 含有两个重复数字的三位数有 606,119,191,911,166,616,661,881，共 8 个

(3) 含有三个重复数字的三位数有 666 一个.

故两用的三位数共有 $25+8+1=34$ 个

【注】 解法一是运用位置法和间接法相结合的方法；解法二是运用直接法，两法均为解决排列组合问题的通法.

例 5 (1997. 全国高中数学联赛题) 设 $ABCDEF$ 为六边形，一只青蛙开始在顶点 A 处，它每次可随意跳到相邻的两顶点之一，若在 5 次内跳到 D 点，则停止跳动；若 5 次内不能跳到 D 点，跳完 5 次也停止跳动. 问：这只青蛙从开始到停止，可能出现的不同跳法有几种？

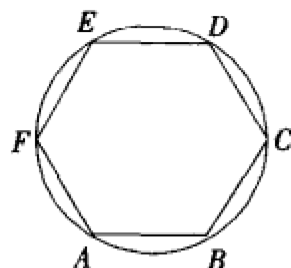


图 Ⅰ－10－1

【分析】 把握青蛙跳动的可能情形是解题的关键.

解：由条件，青蛙的跳动只可能出现两种情况

(1) 跳 3 次到达 D 点，有 2 种跳法；

(2) 跳 5 次停止(前 3 次不到 D 点). 注意到前 3 次的 2^3 种跳法中，有 2 种到达 D 点，故前 3 次有 $2^3-2=6$ 种跳法，而后 2 次有 2^2 种跳法，因此有 $6\times 2^2=24$ 种跳法.

由(1)、(2) 可知，共有 $2+24=26$ 种跳法.

例 6 （1990. 全国高中数学联赛题） 8个女孩与25个男孩围成一圈，任意两个女孩间至少站两个男孩．有多少种不同的排法？

解法一：

假定女孩中有一个是 A，对任何一个满足要求的圆排列，令从 A 打头按顺时针方向走成一个直线排列(图 Ⅰ－10－2)，在这个直排中以 G 代表女孩所站位置，B 代表男孩所站位置，这样我们得到由8个 G 和25个 B 所作成的这样的排列：排列中头一个字母必须是 G，排列中每个 G 后面紧邻的两个必须都是 B

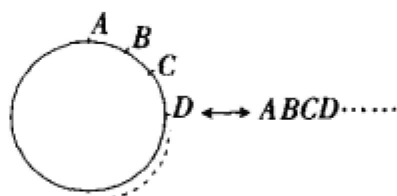


图 Ⅰ－10－2

$$\underbrace{G\ B\ B}_{G'}\quad \underbrace{G\ B\ B}_{G'}\quad \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\quad \underbrace{G\ B\ B}_{G'}\ \cdots\cdots$$

让每个 G“吸收了”它紧后的两个 B 而写成 G'，这样我们得到由8个 G' 和 $25-2\times8=9$ 个 B 所组成的排列，由于打头的必须是 G'，所以排列就 C_{16}^{7}.

以上表明男、女孩的位置排列共有 C_{16}^{7} 种，对每种位置排列，女孩站上去有7!种方法.（A 固定站首位）男孩站上去有25!种方法，故总的排列方法数为

$C_{16}^{7}7!25!=\dfrac{16!25!}{9!}$

解法二：

将8个女孩给予编号记为 $G_1,G_2,\cdots,G_8$，从25个男孩中任意取一个16元排列，设为 $\delta=\{x_1,x_2,\cdots,x_{16}\}$，然后记为 $y_1=x_1G_1x_2,y_2=x_3G_2x_4,\cdots,y_8=x_{15}G_8x_{16}$. 用这 δ 个 y_i 和其余的 $25-16=9$ 个男孩去作圆排列，共有16!种办法，由于 δ 的取法有 $P_{25}^{16}=\dfrac{25!}{9!}$，所以我们也得到总数为 $\dfrac{16!25!}{9!}$ 种.

解法三：

经旋转可重合的排法应认为是同一排法，故可考虑让某女孩 A 固定不动，将圆圈按顺时针的方向拉成一直排. 以 a,b 分别表示女孩与男孩，先从25个男孩中选16个与8个女孩组成“Abb”和7组“abb”，有 $C_{25}^{16}P_{16}^{16}$. 再把剩下的9个男孩与除“Abb 外的7组“abb”视为16组作任意排列，有 P_{16}^{16} 种方法. 因此，不同的排法数为

$C_{25}^{16}\cdot P_{16}^{16}\cdot P_{16}^{16}=\dfrac{25!16!}{9!}$

例 7 求 $(1+2x-3x^2)^6$ 的展开式里 x^5 的系数.

解：因为 $(1+2x-3x^2)^6=(1+3x)^6(1-x)^6$

$=[1+C_6^1\cdot3x+C_6^2\cdot(3x)^2+C_6^3(3x)^3+\cdots+C_6^6(3x)^6][1-C_6^1x+C_6^2x^2-C_6^3x^3+C_6^4x^4-C_6^5x^5+C_6^6x^6]$

所以 $(1+2x-3x^2)^6$ 展开式中 x^5 的系数为

$1(-C_6^5)+3C_6^1\cdot C_6^4+3^2\cdot C_6^2(-C_6^3)+3^3C_6^3\cdot C_6^2+3^4C_6^4(-C_6^1)+3^5C_6^5\cdot1=-168$

【评述】 本题也可将 $(1-2x-3x^2)^6$ 化为 $[1+(2x-3x^2)]^6$ 用例1的作法可求得.

例 8 （1986. 全国高中数学联赛试题）已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots(a_0\neq0)$ 满足

$$a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i\quad(i=1,2,3,\cdots)$$

求证：对于任何自然数 n，

$P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+a_1C_n^1x(1-x)^{n-1}+a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+a_nC_n^nx^n$ 是 x 的一次多项式或零次多项式.

【分析】 由 $a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i$ 知 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $a_i=a_{i-1}+d=a_0+id\quad(i=1,2,\cdots)$，从而可将 $P(x)$ 表示成 a_0 和 d 的表达式，再化简即可.

解：因为 $a_{i-1}+a_{i+1}=2a_i\quad(i=1,2,3,\cdots)$

所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设其公差为 d，有 $a_i=a_0+id\quad(i=1,2,3,\cdots)$

从而 $P(x)=a_0C_n^0(1-x)^n+(a_0+d)C_n^1x(1-x)^{n-1}+(a_0+2d)C_n^2x^2(1-x)^{n-2}+\cdots+(a_0+$

$nd)C_n^nx^n$

$= a_0[C_n^0(1-x)^n + C_n^1x(1-x)^{n-1} + \cdots + C_n{}^nx^n] + d[1\cdot C_n^1x(1-x)^{n+1} + 2C_n^2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots + nC_n^nx^n]$

由二项式定理,知

$C_n^0(1-x)^n + C_n^1x(1-x)^{n-1} + C_n^2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots + C_n^nx^2 = [(1-x)+x]^n = 1$

又因为 $kC_n^k = k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$= n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = nC_{n-1}^{k-1}$

从而$C_n^1x(1-x)^{n-1} + 2C_n^2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots + nC_n^nx^n$

$= nx[(1-x)^{n-1} + C_{n-1}^1x(1-x)^{n-2} + \cdots + x^{n-1}]$

$= nx[(1-x)+x]^{n-1} = nx$

所以 $P(x) = a_0 + ndx$,当 $d\neq 0$ 时,$P(x)$ 为 x 的一次多项式.

当 $d = 0$ 时,$P(x)$ 为零次多项式.

例 9 设 $x = (15+\sqrt{220})^{19} + (15+\sqrt{220})^{82}$,求数 x 的个位数字.

【分析】 直接求 x 的个位数字很困难,需将与 x 相关数联系,解化成研究其相关数.

解:令 $y = (15-\sqrt{220})^{19} + (15-\sqrt{220})^{82}$,则 $x + y = [(15+\sqrt{220})^{19} + (15+\sqrt{220})^{82}] + [(15-\sqrt{220})^{19} + (15-\sqrt{220})^{82}]$,由二项式定理知,对任意正整数 n,

$(15+\sqrt{220})^n + (15-\sqrt{220})^n = 2(15^n + C_n^2\cdot 15^{n-2}\cdot 220 + \cdots)$ 为整数,且个位数字为零.

因此,$x + y$ 是个位数字为零的整数.

再对 y 估计

因为 $0 < 15-\sqrt{220} = \dfrac{5}{15+\sqrt{220}} < \dfrac{5}{25} = 0.2$

且$(15-\sqrt{220})^{82} < (15-\sqrt{220})^{19}$

所以 $0 < y < 2(15-\sqrt{220})^{19} < 2\times 0.2^{19} < 0.4$

故 x 的个位数字为 9

§10.3 巩固练习

(一) 选择题

1. n 名男生,m 名女生($m\leqslant n+1$)排成一纵队,使任两名女生不相邻的排法共有(　　)种

(A)$P_n^n\cdot P_{n+1}^m$　　(B)P_{m+n}^{m+n}　　(C)$P_n^n\cdot P_m^m$　　(D)$C_{n+m}^m\cdot C_{n+m}^n$

2. 一个非负整数的有序数对(m,n),如果在做 $m+n$ 的加法时不用进位,则称(m,n)为"简单的",$m+n$ 称为有序对$(m+n)$的和,则和为 1942 的"简单的" 非负整数有序对的个数是(　　)

A. 20　　B. 300　　C. 16　　(D)150

3. 集合 A、B 的并集$A\cup B = \{a_1,a_2,a_3\}$,当 $A\neq B$ 时,(A,B)与(B,A)视为不同的对,则这样的(A,B)的个数有(　　)

(A)8　　B. 9　　C. 26　　(D)27

4. 设 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1$,则 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 等于

(A)$1+\sqrt[5]{x-2}$　　(B)$1+\sqrt[5]{x}$

(C)$-1+\sqrt[5]{x-2}$　　(D)$1-\sqrt[5]{x-2}$

5. $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^{100}$ 的展开式中无理项的个数是(　　)

A. 84　　B. 85　　C. 86　　(D)87

(二) 填空题

1. 从给定的六种不同颜色中选用若干种颜色，将一个正方体的6个面染色，每两个具有公共棱的面染成不同的颜色，则不同的染色方法共有________种.

（注：如果对两个相同的正方体染色后，可以通过适当的翻转，使得两个正方体的六个对应面的染色都相同，则认为是同一种染色方法.）

2. $(x+y+z)^{1986}$ 有________项.

3. 8个女孩和25个男孩围成一圈，任意两个女孩之间至少站两个男孩，那么不同的排列方法共有________种（把圈旋转以后可以重合的两种排法视为相同的）.

4. 二项式 $(1-2x)^5$ 展开式中的第2项小于第1项，但不小于第3项，则 x 的取值范围是________.

5. 楼梯有10级，上楼可一步一级，也可一步两级，要用8步上完这楼梯，有________种上法.

(三) 解答题

1. 已知 $(x+m)^{2n+1}$ 与 $(mx+1)^{2n}$ $(n\in \mathbf{N}, m\in \mathbf{R}$ 且 $m\neq 0)$ 的展开式的 x^n 项的系数相等，若 $m>b$ 对一切自然数 n 都成立，求实数 b 的取值范围.

2. 直线 l 与圆相离，l 上有8个点，圆周上有4个点，通过任意两点连直线，最多可以连出多少条不同的直线？最少可以连出多少条不同的直线？

3. 从 1 ~ 100 这一百个自然数中选取20个不同的数，要求这20个数两两不相邻，问有多少种不同的选法？

4. 有标号为1,2,3,4,5的五个红球和标号为1,2的两个白球，将这七个球排成一排，使两端都是红球.

5. 用比较系数法证明：

$$C_n^n+2C_{n+1}^n+3C_{n+2}^n+\cdots+nC_{2n-1}^n=\frac{n^2+n+1}{n+2}C_{2n}^{n+1}$$

习题答案

第一章

1. A　**2.** B　**3.** 3904　**4.** A　**5.** A　**6.** 302　**7.** C

8. 设会英语教师集合为 Y,依题意 $|Y| = 70$;会俄语教师集合为 R,依题意 $|R| = 45$

会英语及俄语的教师集合为 $Y \cup R$,由题意知:$|Y \cup R| = 100$,用 $Y \cap R$ 表示既会英语又会俄语的教师的集合.

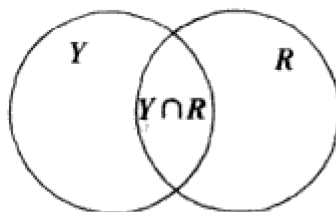


图 Ⅰ - D - 1 - 1

由图可见(图 Ⅰ - D - 1 - 1)

$|Y \cup R| = |Y| + |R| - |Y \cap R|$

$\therefore |Y \cap R| = |Y| + |R| - |Y \cup R|$

$= 70 + 45 - 100$

$= 15$

该校教师中会英语不会俄语的人数是

$70 - 15 = 55$(人)

9. D

【说明】 可直接证明D成立

$A \cup B = A \cup C \Rightarrow \bar{A} \cap (A \cup B) = \bar{A} \cap (A \cup C) \Rightarrow \bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$

10. $\because A \cap B = \phi$, $\therefore A$ 的非空真子必不是B的子集,反之亦然;只有 ϕ 既是A 的真子集又是B 的真子集,因此,$M \cap N = \{\phi\}$

11. A

12. -2

13. $\{2,5,8\}$

14. 780

15. $a \geqslant 1$ 或 $a \leqslant -1$

16. B

若两个三角形全等,则其对应边相等,面积也相等,所以甲是乙的必要条件.

如图 Ⅰ - 1 - 2,$\triangle ABC$ 中,$AB \geqslant AC$,M 为 BC 中点,则 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 中 $AM = AM$,$BM = CM$,$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM}$

但 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACM$ 不全等,因此甲不是乙的充分条件.

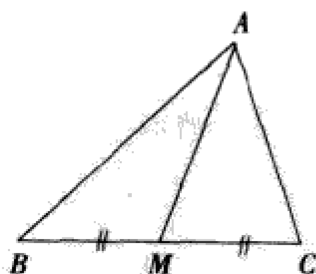


图 Ⅰ - D - 1 - 2

17. C

若 $p^3 - q^3$ 是偶数 $\Leftrightarrow p, q$ 有相同的奇偶

18. B

由于"甲"成立时,"乙"不一定成立(例如 $a = 3, b = 2$ 时甲成立,但乙不成立),因此可知"甲"不是"乙"的充分条件.

接着看"乙"在什么情况下成立,很明显,当且仅当 $a > 0$ 且 $b < 0$ 时"乙"才能成立.由此可知,"甲"是"乙"成立的必要条件.综上所述,"甲"是"乙"的必要而不充分条件.

19. -2

解:由集合相等知,两集合的元素相同,这样,M 中必有一元素为 0,又由对数的定义知 $xy \neq 0$,故

x,y 不为零,所以 $\lg(xy)=0, xy=1$

$\therefore M=\{x,1,0\}, N=\{0,|x|,\frac{1}{x}\}$

再由集合相等知

$\begin{cases} x=|x|, \\ 1=\frac{1}{x}; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{x} \\ 1=|x| \end{cases}$

但当 $x=1$ 时,将 $\frac{1}{x}$ 同一个集合中元素的相异性矛盾,故只有 $x=-1$,从而 $y=-1$,于是

$x^{2k+1}+\frac{1}{y^{2k+1}}=-2 \quad (k=0,1,2,\cdots)$

$x^{2k}+\frac{1}{y^{2k}}=2 \quad (k=1,2,\cdots)$

故所求代数式的值为 -2.

20. 答案:a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$

解:点集 A 是由顶点为 $(a,0),(0,a),(-a,0),(0,-a)$ 的正方形的四条边构成(如图 Ⅰ-D-1-3)

将 $|xy|+1=|x|+|y|$,变形为:

$(|x|-1)(|y|-1)=0$,所以,集合 B 是由四条直线 $x=\pm1, y=\pm1$ 构成.

欲使 $A\cap B$ 为正八边形的顶点所构成,只有 $a>2$ 或 $1<a<2$ 这两种情况.

(1) 当 $a>2$ 时,由于正八边形的边长只能为2,显然有 $\sqrt{2}a-2\sqrt{2}=2$,故 $a=2+\sqrt{2}$

(2) 当 $1<a<2$ 时,设正八边形边长为 l,则

$l\cos45^\circ=\frac{2-l}{2}, l=2\sqrt{2}-\sqrt{2}$,这时 $a=\sqrt{2}$.

综上所述,a 的值为 $2+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$.(图中:$A(\sqrt{2},0), B(2+\sqrt{2},0)$)

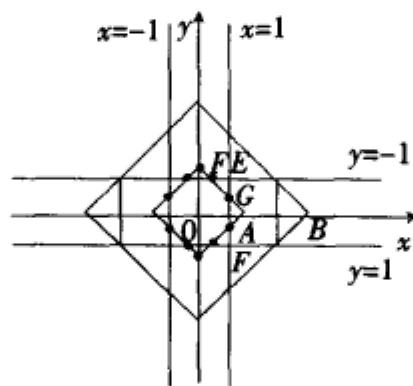


图 Ⅰ-D-1-3

21. A

解:对 N 中任一元素 u,有

$u=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5p)\in M$

从而 $N\subseteq M$

另一方面,对 M 中任一元素 u,有

$u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in \mathbf{N}$,从而 $M\subseteq N$,故 $M=N$

22. B

解:$\lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y \Leftrightarrow x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy, x>0, y>0$

由均值不等式

$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\sqrt[3]{(x^3)(\frac{1}{3}y^3)(\frac{1}{9})}=xy$ 当且仅当

$\begin{cases} x^3=\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9} \end{cases}$

上式等号成立,解此二方程得

$x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$,

故点集中有惟一点为

$(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\quad,\quad\sqrt[3]{\frac{1}{3}})$

23. $n=32$

解: 根 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,故第 n 组最后一数即第 n^2 个奇数 $2n^2-1$,可见有不等式 $2(n-1)^2+1\leqslant 1991\leqslant 2n^2-1$

由前一不等式得 $(n-1)^2\leqslant 995$,故须 $n\leqslant 32$;由后一不等式,须满足 $2n^2\geqslant 1992$,有 $n\geqslant 32$,故 $n=32$

24. D(图 Ⅰ－D－1－4)

解: 由 $|\mathrm{tg}\pi y|+\sin^2\pi x=0$ 得 $\mathrm{tg}\pi y=0,\sin\pi x=0$

$\therefore y=k(k\in\mathbf{Z}),x=k'(k'\in\mathbf{Z})$

又由 $x^2+y^2\leqslant 2$

$\therefore k=-1,0,1,k'=-1,0,1.$

如图,共有 9 个点,因此答案是(D).

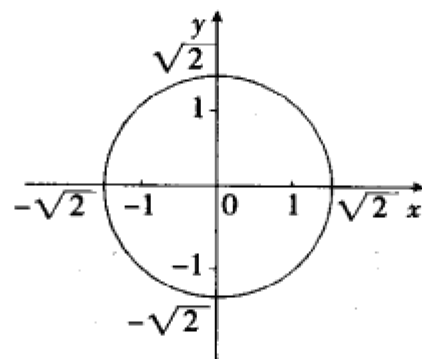


图 Ⅰ－D－1－4

25. D

解: 已知 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$,则作为其子集的 A、B 最多只有3个元素.

(1) 若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$,则满足题意的 B 可以是空集,或是单元素的集合,或是二元素的集合,或是三元素的集合,这样的 B 有 $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3$ 个,这时 (A,B) 有 $C_3^3\cdot 2^3$ 对.

(2) 若 A 为二元素的集合,则有 C_3^2 种,其对应的 B 的 2^3 个 $(C_2^0+C_2^1+C_2^2=2^2)$,这时 (A,B) 有 $C_3^2\cdot 2^2$ 对.

(3) 若 A 为单元素的集合,则有 C_3^1 种,其对应的 B 有 2 个,这时 $(A、B)$ 有 $C_3^1\cdot 2$ 对.

(4) 若 A 是空集,则有 C_3^0 种,其对应的 B 有一个,这时 (A,B) 有 $C_3^0\cdot 1$ 对.

$\therefore$ 这样的 (A,B) 共有

$C_3^3\cdot 2^3+C_3^2\cdot 2^2+C_3^1\cdot 2+C_3^0\cdot 2^0=3^3=27$ 个,因此答案是 D.

26. C

当 a,b 不同时为零时,$a\sin x+b\cos x+C>0$ ①

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+4)+C>0$

$\Leftrightarrow\sin(x+4)>-\dfrac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ②

而②式成立的充分条件是 $-\dfrac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}<-1$,即 $\sqrt{a^2+b^2}<C$,当 a,b 同时为零时,此时不等式成立的充要条件是 $C>\sqrt{a^2+b^2}$,这一结论含于 C 中,故选 C

27. B

解: 由题意得 $A\subseteq B$

$$\therefore\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\3a-5\leqslant 22,\\3a-5\geqslant 2a+1\end{cases}$$

解得: $6\leqslant a\leqslant 9$

28. D

如图 Ⅰ－D－1－5C 与 a,b 都相交;故命题 Ⅰ 不正确;又可以取无穷多个平行平面,在每个平面上取一条直线,且使这些直线中的任意两条都是异面直线,从而命题 Ⅱ 也不正确.

29. D

解: 由 $\sqrt{x-2}\leqslant 0$,得 $x=2$,故 $A=\{2\}$;由 $10^{x^2-x}=10x$ 得 $x^2-x-2=0$,故 $B=\{-1,2\}$,所

以 $A\cap(C_RB)=\phi$

30. C

因为方程 $x^2-3x-a^2+2=0$ 的 $\Delta=1+4a^2>0$,所以方程有两个不等的实根,于是 M 有 2 个元素,其子集个数为 $2^2=4$.

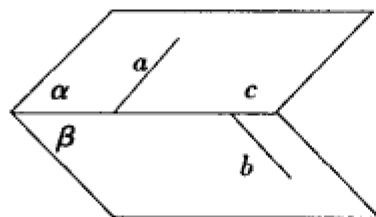


图 Ⅰ - D - 1 - 5

第二章

(一) 选择题

1. 答案:C(图 Ⅰ - 2 - 1)

解:由图直观可见,曲线上 A 点纵坐标为 $f(x)$,B 点纵坐标为 $f(y)$,M 点纵坐标为 $f(\frac{x+y}{2})$,A,M,B 应为共线,只有线性函数才能满足这一要求,故排除 A,B,D,选择 C.

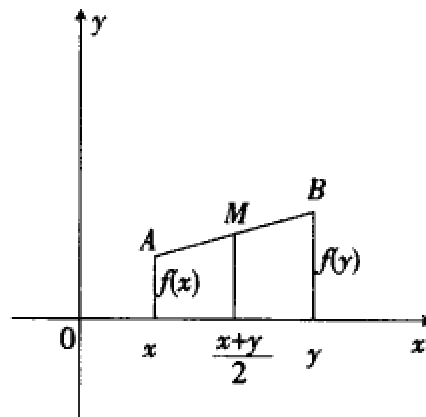


图 Ⅰ - D - 2 - 1

2. 答案:C

解:$f(x)-4=a\sin x+b\sqrt[3]{x}$,故 $f(x)-4$ 为奇函数. 这样 $f(-x)-4=-(f(x)-4)$,即 $f(x)+f(-x)=8$. 由于 $\lg\lg3=\lg\frac{1}{\log_3{}^{10}}=-\lg\log_3{}^{10}$,故有

$f(\lg\lg3)=f(-\lg\log_3{}^{10})=8-f(\lg\log_3{}^{10})=8-5=3$

3. 答案:C

解:由已知(1),$f(10+(10-x))=f(10-(10-x))$,

$\therefore f(x)=f(20-x)$

又由(2),有 $f(x)=-f(20+x)$ 则

$f(40+x)=f(20+(20+x))=-f(20+x)=f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是周期函数.

由 $f(x)=f(20-x)$ 和 $f(x)=-f(20+x)$ 得

$f(-x)=f(20+x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)$ 是奇函数

由此,$f(x)$ 即是奇函数,又是周期函数,选 C.

4. 答案:B

解:令 $x=1$,则 $f(1)+f(y)=f(y+1)-y-1$,

$\therefore f(y+1)-f(y)=y+2$, ①

令 $y=1,2,3,\cdots,y-1$,并将诸式相加,

得 $f(y)=\frac{y^2+3y-2}{2}$, ②

对任意 $y\in\mathbf{N}$,② 式都成立,若 $f(y)=y$,

则 $y^2+3y-2=2y$

解得 $y=-2,y=1$.$\therefore$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\neq1$ 时,$f(n)=n$ 无解.

对公式 ① 取 $y=0$,得 $f(0)=-1$;取 $y=-1$,得 $f(-1)=-2$. 从而 $f(-2)=-2$,$f(-3)=-1$,$f(4)=1$.

再由 ① 式,$y<-4$ 时,$f(y)>0$,即 $n<4$ 时,$f(n)\neq n$,故只有 $n=-2$ 时,$f(-2)=-2$,选 B.

5. 答案:B

解:由 $\lg(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9})=\lg x+\lg y$ 得

$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy,\quad x>0,y>0$

由均值不等式有

$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{1}{3}y^3\cdot\frac{1}{9}}=xy$

当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$ 时,等号成立.

即 $x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3},y=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ 时等号成立.

$\therefore$ 点集中有惟一的一个点$(\frac{\sqrt[3]{3}}{3},\frac{\sqrt[3]{9}}{3})$

6. 答案:C

解:由已知 $f(1)=a-c,f(2)=4a-c$

$\therefore a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$

$$\therefore f(3)=9a-c=3[f(2)-f(1)]-\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$$
$$=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$$

$\therefore \frac{8}{3}\times(-1)-\frac{5}{3}\times(-1)\leqslant f(3)\leqslant\frac{8}{3}\times5-\frac{5}{3}\times(-4)$

即 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$ 选 C

7. 答案:C

解:依题意可作出函数图形如图 Ⅰ-D-2-2 由图形可得:$f(x)=3-|x+1|$,选 C

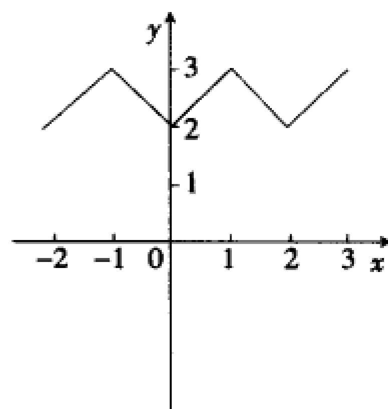


图 Ⅰ-D-2-2

(二) 填空题

1. 答案:-2.

解:由 $M=N$,及对数的定义,有 $xy>0$,故 $\lg(xy)=0$,因此有 $xy=1$,于是 $|x|=1$ 或 $y=1$

当 $|x|=1$ 时,因 $x\neq1$,故 $x=-1$,这时 $y=-1$;

当 $y=1$ 时,由 $xy=1$,得 $x=1$,不符合要求.$\therefore x=-1,y=-1$,于是

$x^{2k-1}+\frac{1}{y^{2k-1}}=-2,x^{2k}+\frac{1}{y^{2k}}=2,k=1,2,\cdots;$

$\therefore(x+\frac{1}{y})+(x^2+\frac{1}{y^2})+\cdots+(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}})=-2$

2. 答案:B

解:设 $y=f(x),z=f(y),\omega=f(z)$,下面分析 x 由 0 到 1 变化时,y,z,ω 的变化情况:

$x:\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow1$

$y:1\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow0\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow1$

$z:1\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow0\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow1\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow0\rightarrow\frac{1}{2}\rightarrow1$

$w:1\rightarrow0\rightarrow1\rightarrow0\rightarrow1\rightarrow0\rightarrow1\rightarrow0\rightarrow1$

因为"→"表示的变化是线性变化,而且是非负实数范围内变化,故 $w=f(f(f(x)))$ 的图形如图 D-2-3所示,显然 $w=f(f(f(x)))$ 的图形与 $w=\frac{1}{2}x$ 的交点有 8 个,即 $f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$ 的解有 8 个.

3. 答案:1995

解：设 $f(1)=t$，若 $f(m)=n$，则

$f(2n)=f(f(m)+f(m))=2m$ ①

特别，$m=1,n=t$，且

$f(2t)=2$ ②

下面证明 $t=1$，否则，设 $t=b+1(b\in\mathbf{N})$，再设 $f(b)=c\in\mathbf{N}$，则 $f(2c)=2b$，且

$2c+2t=f(f(2c)+f(2t))=f(2b+2)=f(2t)=2$

即 $c+t=1$，矛盾，于是若有

$f(n)=n$ ③

则 $f(n+1)=f[f(n)+f(1)]=n+1$

所以 ③ 式对一切自然数都成立，于是 $f(1995)=1995$

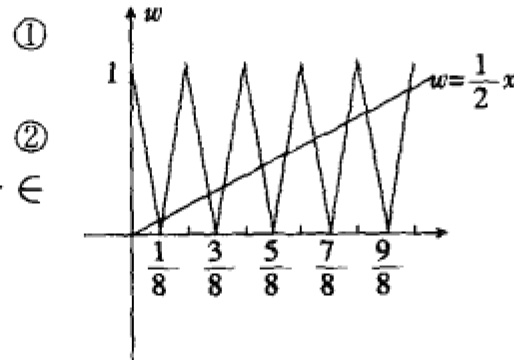


图 Ⅰ－D－2－3

4. 答案：9

解：将原不等式写为

$$\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_1}{x_2}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}}\geqslant K\frac{1}{\log_{1993}(\frac{x_0}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3})}$$

即
$$\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_1}{x_2}}+\frac{1}{\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}}$$
$$\geqslant\frac{k}{\log_{1993}\frac{x_0}{x_1}+\log_{1993}\frac{x_1}{x_2}+\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}}$$

令 $t_1=\log_{1993}\frac{x_0}{x_1},t_2=\log_{1993}\frac{x_1}{x_2},t_3=\log_{1993}\frac{x_2}{x_3}$

则原不等式可化为

$(t_1+t_2+t_3)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3})\geqslant K$ 由于

$$(t_1+t_2+t_3)(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3})\geqslant 3\sqrt[3]{t_1t_2t_3}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{t_2}\cdot\frac{1}{t_3}}=9$$

等号在 $t_1=t_2=t_3$，即 x_0,x_1,x_2,x_3 成等比数列时取得，故 K 的最大值是 9.

5. 答案：$4(\frac{5}{2})^{(\frac{1}{2})^{n-1}}(n\in\mathbf{N})$

解：$\because H(1)>0,\therefore H(n)>0$，将原方程两边取对数，得 $\lg(H(n+1))=\frac{1}{2}\lg(H(n))+\lg2$

令 $G(n)=\lg(H(n))$ 则 $G(n+1)=\frac{1}{2}G(n)+\lg2$

$G(1)=1$，从而 $G(n)-2\lg2=(1-2\lg2)^{(\frac{1}{2})^{n-1}}$，故

$$G(n)=2\lg2+(1-2\lg2)^{(\frac{1}{2})^{n-1}}$$
$$=\lg4(\frac{5}{2})^{(\frac{1}{2})^{n-1}}$$

$\therefore H(n)=4(\frac{5}{2})^{(\frac{1}{2})^{n-1}}(n\in\mathbf{N})$

（三）解答题

1. 证明：由 $0<a<1,a^x>0,a^y>0$ 有

$a^x+a^y\geqslant2\sqrt{a^x\cdot a^y}=2\sqrt{a^{x+y}}$

从而 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a(2\sqrt{a^{x+y}})=\log_a2+\frac{x+y}{2}$

下面证明：$\frac{x+y}{2}\leqslant\frac{1}{8}$ 即 $x+y\leqslant\frac{1}{4}$

$x + y = x - x^2 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$

等号在 $x = \frac{1}{2}$(此时 $y = -\frac{1}{4}$)时取得

$\therefore \log_a(a^x + a^y) \leqslant \log_a 2 + \frac{1}{8}$

2. 答案:$a > 0, b < 0, c > 0$

解:由原题图可知,当 $x \to \pm\infty$ 时,

$y \to +\infty$,故 $a > 0$

当 $x = 0$ 时,$y = c > 0$

又由图象可知,方程 $ax^4 - x^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2,且 $0 < x_1 < 1 < x_2$,于是由

$ax_1{}^4 - x_1{}^2 + bx_1 + c = 0,$ ①

$ax_2{}^4 - x_2{}^2 + bx_2 + c = 0,$ ②

① - ② 得 $a(x_1{}^4 - x_2{}^4) - (x_1{}^2 - x_2{}^2) + b(x_1 - x_2) = 0$

$\therefore a(x_1 + x_2)(x_1{}^2 + x_2{}^2 - 1) + b = 0$ ③

$\because a > 0, x_1 + x_2 > 0, x_1{}^2 + x_2{}^2 - 1 > 0$

$\therefore$ 由 ③ 可得 $b < 0$.

3. 证明:方程 $f(x) = px + q$ 有解等价于直线 $y = px + q$ 与方程 $y = f(x)$ 的图象有交点.假设对某个 $x_0, f(x_0) < x_0{}^2$,则点$(x_0, f(x_0))$ 在抛物线 $y = x^2$ 的下方,故过点$(x_0, f(x_0))$ 可引一条不与抛物线相交的直线 $y = px + q$,这时 $f(x) = px + q$ 有根x_0,但 $x^2 = px + q$ 无解,故对任意 $x^2, f(x) \geqslant x^2$,又设过抛物线上的点$(x_0, x_0{}^2)$ 的切线为 $y = px + q$(这里 $p = 2x_0, q = -x_0{}^2$),则方程 $x^2 = px + q$ 有惟一的根x_0,且对一切 $x \neq x_0$,有 $x^2 > px + q$.因此,对一切 $x \neq x_0, f(x) \geqslant x^2 > px + q$,这样,如果对加有 $f(x_0) > x_0{}^2$ 的话,就有对一切 $x, f(x) > px + q$ 成立,显然这与已知矛盾.

由此,对一切 $x, f(x) = x^2$

4. 证明:不妨设 $0 < b < a$,令 $x = \frac{a}{1}$,则所证不等式等价.

$\frac{2(x-1)}{x+1} < \ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$,其中 $x > 1$

考虑函数 $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$

其导数为 $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$

当 $x > 1$ 时,$f(x) > 0$,故 $f(x)$ 在区间$[1, +\infty)$ 上为增函数.

又 $f(1) = 0$,$\therefore$ 当 $x > 1$ 时,$f(x) > 0$,即当 $x > 1$ 时,$\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ 成立.也即$\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$ 成立.

类似的可证 $\ln x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ 成立,故原不等式成立.

5. 证明:由已知 $f(n) = \frac{1}{f(n-1)} + \frac{1}{f(n-2)} + \cdots + \frac{1}{f(0)} + f(0), f^2(n) = \frac{1}{(f(n-1))^2} + f^2(n-1) + 2$

$\therefore f^2(n) = \frac{1}{f^2(n-1)} + \frac{1}{f^2(n-2)} + \cdots + \frac{1}{f^2(0)} + f^2(0) + 2n$

$\therefore f^2(1000) > f^2(0) + 2X1000 = 25 + 2000 = 2025$

$\therefore f(1000) > 45$

又 $f(1000) > \sqrt{25 + 2 \times 100} = 15$

$\therefore f^2(1000) = \underbrace{\frac{1}{f^2(999)} + \cdots + \frac{1}{f^2(100)}}_{900\text{项}} + \underbrace{\frac{1}{f^2(99)} + \cdots + \frac{1}{f^2(0)}}_{100\text{项}}$

$$+ f^2(0) + 2000 < \frac{900}{15^2} + \frac{100}{5^2} + 25 + 2000$$
$$= 8 + 2025 < 45^2 + 0.1 \times 2 + 45 + 0.1^2$$
$$= 45.1^2$$

$\therefore 45 < f(1000) < 45.1$

第三章

(一) 选择题

1. 答案:B

解:设 $S'_{2m} = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+m}$

由已知有 $S_m = 30, S_{2m} = 100$,则 $S'_{2m} = 70$

又设 $S'_{3m} = a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{2m+m}$

易知 S_m, S'_{2m}, S'_{3m} 成等差数列

$\therefore 2S'_{2m} = S_m + S'_{3m}$,

$\therefore S'_{3m} = 140 - 30 = 110$

故 $S_{3m} = S_{2m} + S'_{3m} = 100 + 110 = 210$,选 C

2. 答案:C

解:据等比数列的通项公式 $a_n = 1536 \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$

前 n 项之积$= 1536^n \times (-\frac{1}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$= (3 \cdot 2^9)^n \times (-\frac{1}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

由$(-\frac{1}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}$的指数可知,当 n 为 9,12,13 时,$\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数,则 $\Pi_9, \Pi_{12}, \Pi_{13}$ 的值为正,而 Π_{11} 为负数.

$\therefore$ 只需比较 $\Pi_9, \Pi_{11}, \Pi_{13}$ 的大小.

$\because a_{10} = 3 \times 2^9(-\frac{1}{2})^9 = -3, a_{11} = a_{10}(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$a_{12} = a_{11}(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}, a_{13} = a_{12} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

且 $a_{10}a_{11}a_{12} = (-3)(\frac{3}{2})(-\frac{3}{4}) = \frac{27}{8} > 1$

$\therefore \Pi_9 < \Pi_{12}$

又 $\because 0 < a_{13} < 1, \therefore \Pi_{13} = a_{13} \cdot \Pi_{12} < \Pi_{12}$

则 Π_{12} 最大,选 C

3. 答案:C

解:由已知 $3(a_{n+1} - 1) = -(a_n + 1)$

即$\frac{a_{n+1} - 1}{a_n - 1} = -\frac{1}{3}$,且 $a_1 = 9, a_1 - 1 = 8$

$\therefore$ 数列$\{a_n - 1\}$是首项为 8,公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列.

$$\therefore S_n - n = \frac{8[1 - (-\frac{1}{3})^n]}{1 + \frac{1}{3}} = 6 - 6(-\frac{1}{3})^n$$

$\therefore |S_n - n - 6| = 6 \times \frac{1}{3^n}$

要使 $|S_n - n - 6| < \frac{1}{125}$,即使 $3^{n-1} > 250 > 3^5$

即 $n - 1 > 5, n > 6$

故 $n = 7$ 时,满足要求,选 C

4. 答案:D

解:由已知 $2^5 = \sqrt[11]{a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdots a_1 q^{10}}$

$= \sqrt[11]{a_1{}^{11} q^{\frac{10\times(10+1)}{2}}} = \sqrt[11]{a_1{}^{11} q^{55}} = a_1 q^5$

$\because a_1 = a^{-5}, \therefore q = 2^2 = 4$

设被抽去的项为 $a_n = a_1 q^{n-1}$,则

$2^4 = \sqrt[10]{a_1{}^{11} q^{55} / a_1 q^{n-1}} = \sqrt[10]{a_1{}^{10} q^{56-n}}$

$\therefore a_1{}^{10} q^{56-n} = 2^{40}, q^{56-n} = 2^{90} = 4^{45}$

$\therefore n = 56 - 45 = 11$,即被抽去的是第 11 项,故选 D

5. 答案:C

解:设等差数列首项为 a,公差为 d

据已知 $na + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d = 97^2$

即 $[2a + (n-1)d]n = 2 \times 97^2$ ①

$\because n \geqslant 3 (n \in \mathbf{N})$,而 97 是素数

$\therefore$ 数 n 的值只可能为 $97, 2\times 97, 97^2, 2\times 97^2$ 四者之一.

若 $d > 0$,则由 ① 式,$n(n-1) \leqslant n(n-1)d \leqslant 2 \times 97^2$

故只可能有 $n = 97$,代入 ① 式,$a + 48d = 97$

$\therefore \begin{cases} n = 97 \\ d = 1 \\ a = 49 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n = 97 \\ d = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

有两组解

若 $d = 0$,则 ① 式可化为 $na = 97^2$

$\therefore \begin{cases} n = 97 \\ d = 0 \\ a = 49 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n = 97^2 \\ d = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

有两组解

则符合条件的等差数列共有 4 个,选 C

6. 答案:C

解:由已知 $\frac{13(a_2 + a_{14})}{2} = 169$,则

$\frac{a_{12} + a_{14}}{2} = \frac{a_{11} + a_{15}}{2} = 13$

$\therefore S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = 15 \times 13 = 195$ 选 C

(二) 填空题

1. 答案:9

解:由已知 $a_1 + b_1 = 1 + b_1 = 3, \therefore b_1 = 2$

$a_2 + b_2 = 1 + d + b_1 q = 12, d + 2q = 11$

$a_3 + b_3 = 1 + 2d + b_1 q^2 = 23, 2d + 2q^2 = 22$

$\therefore q \neq 0$,解得 $q = 2, d = 7$

$\therefore d + q = 9$

2. 答案:$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$

解:设子数列的首项为$\frac{1}{2^k}$,公比为$\frac{1}{2^t}$,$(k, t \in \mathbf{N})$,所有项的和为 S

$$\therefore S = \frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2^t}} = \frac{1}{7}, \text{即} \frac{2^{t-k}}{2^t - 1} = \frac{1}{7}$$

则 $7 \cdot 2^{t-k} = 2^t - 1$

$\because 2^t - 1$ 是奇数,$\therefore t - k = 0, t = k$

$\therefore 2^t - 1 = 7, t = 3$

故首项 $= \frac{1}{8}$,公比 $= \frac{1}{8}$

3. 答案:3^n

解:利用不等式 $a + b + c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$($a, b, c$ 均为正数),$2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geqslant 3\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot a_i}$($i = 1, 2, \cdots, n$)

$\therefore (2 + a_1)(2 + a_2)\cdots(2 + a_n) \geqslant 3^n \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = 3^n$

4. 答案:$2\frac{2}{3}$

解:设两个数列的公差分别为 d, d'

则 $y - x = 4d = 3d'$,

$\therefore \frac{d}{d'} = \frac{3}{4}$

于是$\frac{b_4 - b_3}{a_2 - a_1} = \frac{2d'}{d} = 2 \times \frac{4}{3} = 2\frac{2}{3}$

5. 答案:27

解:由题意,$r \in \mathbf{Q}$,即有互素的正整数 p, q($q > p \geqslant 2$),使 $r = \frac{q}{p}$,则 $a_4 = a_1 r^3 = \frac{a_1 q^3}{p^3}$

$\because a_4 \in \mathbf{Z}$,$\therefore a_1$ 是 p^3 的倍数.

故可设 $a_1 = kp^3$(k 是正整数),于是 $a_4 = kq^3$

$\because q > p \geqslant 2$,故为使 a_4 最小,有 $k = 1, q = 3$,此时 $a_4 = 27$,此数列为 8,12,18,27.

(三) 解答题

1. 答案:$a_n = \begin{cases} 1, (n = 0) \\ \prod\limits_{k=1}^{n} (2^k - 1)^2, (n \in \mathbf{N}) \end{cases}$

解:将原式变形,$\sqrt{a_n \cdot a_{n-2}} - 2a_{n-1} = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}$,两边同除以$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}$ 得

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}} - 2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} = 1 \quad ①$$

于是

$$\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}} - 2\sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}} = 1 \quad ②$$

$$\sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}} - 2\sqrt{\frac{a_{n-3}}{a_{n-4}}} = 1 \quad ③$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} - 2\sqrt{\frac{a_1}{a_0}} = 1 \quad (n-1)$$

将①×1+②×2+③×2^2+⋯+ $(n-1)\times 2^{n-2}$得

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}-2^{n-1}\sqrt{\frac{a_1}{a_0}}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}$$

$\because a_0=a_1=1$

$$\therefore\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}=2^n-1$$

$$\begin{aligned}a_n&=(2^n-1)^2a_{n-1}\\&=(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^2a_{n-2}\\&=\cdots\\&=\prod_{k=1}^{n}(2^k-1)^2\end{aligned}$$

则 $a_n=\begin{cases}1(n=0)\\\prod\limits_{k=1}^{n}(2^k-1)^2(n\in\mathbf{N})\end{cases}$

2. 答案:$2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$

解:设第一行的公差为 d,各列的公比为 q,则

$a_{24}=a_{14}\cdot q=(a_{11}+3d)\cdot q=1$

$a_{42}=(a_{11}+d)\cdot q^3=\frac{1}{8}$

$a_{43}=(a_{11}+2d)\cdot q^3=a_{42}+dq^3=\frac{3}{16}$

于是 $dq^3=\frac{1}{16}$ ①

代入 a_{42},得 $a_{11}q^3=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$ ②

①÷②得$\frac{d}{a_{11}}=1$,故 $a_{11}=d$

则 a_{24},a_{42} 得$\begin{cases}4a_{11}\cdot q=1\\2a_{11}\cdot q^3=\frac{1}{8}\end{cases}$

解得 $q=\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{2}\text{舍去}\right)$

$\therefore a_{11}=d=q=\frac{1}{2}$

当$1\leqslant k\leqslant n$时,

$$\begin{aligned}a_{kk}&=a_{1k}q^{k-1}\\&=[a_{11}+(k-1)d]\cdot q^{k-1}\\&=ka_{11}\cdot q^{k-1}=k\cdot\frac{1}{2^k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S&=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn},\\&=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

又$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2^2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+3\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$,

将两式相减,得$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$= (1 - \frac{1}{2^n}) - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$\therefore S = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$

3. 证明：$n = 1$ 时，$a_1{}^3 = a_1{}^2 (a_n > 0)$

$\therefore a_1 = 1$ 成立

假设 $n = k$ 时，命题成立

即 $\sum_{i=1}^{k} a_i{}^3 = (\sum_{i=1}^{k} a_i)^2$ 时，$a_k = k(i = 1,2,\cdots,k)$

当 $n = k + 1$ 时，

$\sum_{i=1}^{k+1} a_i^3 = (\sum_{i=1}^{k+1} a_i)^2$

即 $\sum_{i=1}^{k} a_i{}^3 + a_{k+1}^3 = (\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1})^2$

$\therefore a_{k+1}^3 = 2a_{k+1} \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}^2$

而 $\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{k(k+1)}{2}$ $[\because a_i = i(i = 1,2,\cdots,K)]$

$\therefore a_{k+3}^3 = k(k+1)a_{k+1} + a_{k+1}^2 (a_{k+1} > 0)$

$\therefore a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0$

解得 $a_{k+1} = k + 1$ $(a_{k+1} = -k$ 舍去)

故当 $n = k + 1$ 时，命题成立.

即 $n \in \mathbf{N}$ 时，$a_n = n$

4. 答案：(1) $a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1) \\ -4(\frac{1}{3})^{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$

(2)3

解：(1) $S_1 = a_1 = 2, S_n = 2(\frac{1}{3})^{n-1}$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2(\frac{1}{3})^{n-1} - 2(\frac{1}{3})^{n-2}$$
$$= 2(\frac{1}{3})^{n-1}(1-3)$$
$$= -4(\frac{1}{3})^{n-1}$$

$\therefore a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1) \\ -4(\frac{1}{3})^{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$

(2) $b_n = a_n S_n = -4(\frac{1}{3})^{n-1} \cdot 2(\frac{1}{3})^{n-1} (n \geqslant 2)$

$$= -8(\frac{1}{3})^{2(n-1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = a_1 S_1 + \lim_{n \to \infty} \sum_{i=2}^{n} b_i = 4 + \frac{-8(\frac{1}{3})^2}{1 - \frac{1}{9}} = 4 - 1 = 3$$

5. 答案：$(\frac{n^2}{4})$

解：设 A 的公差为 d，则 $1 \leqslant d \leqslant n - 1$，分两种情况

(1) 设 n 为偶数,$1 \leqslant d \leqslant \frac{n}{2}$ 时,公差为 d 的数列 A 有 d 个,当 $\frac{n}{2}+1 \leqslant d \leqslant n-1$ 时,公差为 d 的数列 A 有 $(n-d)$ 个,这种 A 共有:$1+2+\cdots+\frac{n}{2}+\{1+2+\cdots+[n-(\frac{n}{2}+1)]\}$

$=\frac{\frac{n}{2}(1+\frac{n}{2})}{2}+\frac{(\frac{n}{2}-1)\cdot\frac{n}{2}}{2}=\frac{n^2}{4}$(个)

(2) 设 n 为奇数,当 $1 \leqslant d \leqslant \frac{n-1}{2}$ 时,公差为 d 的 A 有 d 个.

当 $\frac{n+1}{2} \leqslant d \leqslant n-1$ 时,公差为 d 的 A 有 $n-d$ 个.

∴ 这种 A 共有

$1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}+1+2+\cdots+\frac{n+1}{2}=\frac{n^2-1}{4}$ 个

综合(1)、(2),这种 A 共有$(\frac{n^2}{4})$个.

第四章

(一) 选择题

1. 答案:D

解:由条件甲知,$a \geqslant 0$;而由条件乙,$a \in \mathbf{R}$(可正可负).所以,由条件甲推不出条件乙,由条件乙也推不出条件甲,故选 D.

2. 答案:D

解:$f(x)$ 的定义域是$[-1,1]$,此时 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arctan x \leqslant \frac{\pi}{4}$,$-\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{1}{2}\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

$\arctan x$ 和 $\arcsin x$ 是单调增加的,因此 $f(x)$ 的值域是$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,故选 D.

3. 答案:B

解:由已知有 $\log_b x^2=\log_b(4x-4)$

$\therefore x^2=4x-4 \quad (x>1)$,解得 $x_1=x_2=2$

$\therefore C=2A, \sin B=2\sin A$

由 $A+B+C=\pi$,得 $3A+B=\pi$,于是

$\sin B=\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ 这样就有 $2\sin A=3\sin A-4\sin^2 A$,即

$\sin A(1-4\sin^2 A)=0$

而 $\sin A \neq 0$,$\therefore \sin^2 A=\frac{1}{4}$,$\sin A=\frac{1}{2}$

$\therefore A=30^\circ$,从而 $C=60^\circ$,$B=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形但不是等腰三角形

选 B

4. 答案:C

解:采取排除法

由 $\frac{\pi}{4}<1$,知 $\cos 1<\sin 1<1<\tan 1$,从而

$\log_{\sin 1}\tan 1<0$,$\log_{\cos 1}\tan 1<0$,$\log_{\sin 1}\cos 1>0$,$\log_{\cos 1}\sin 1>0$,于是排除 A、B.

又由 $\log_{\cos 1}\sin 1<\log_{\cos 1}\cos 1=\log_{\sin 1}\sin 1<\log_{\sin 1}\cos 1$

于是排除 D,即选 C

5. 答案:D

解：$\because \alpha \in (\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，$\therefore 0 < \cos\alpha < \sin\alpha < 1$

由 $y = (\cos\alpha)^x$ 是 **R** 上的减函数知

$(\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha}$

由 $y = x^{\cos\alpha}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数知

$(\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$

综上有 $(\cos\alpha)^{\sin\alpha} < (\cos\alpha)^{\cos\alpha} < (\sin\alpha)^{\cos\alpha}$，即选 D

(二) 填空题

1. 答案：$\frac{4\sqrt{3}}{9}$

解：$\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin\frac{2\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$\leqslant \sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right)^3}$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{(\frac{2}{3})^3} = \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$= \frac{4}{9}\sqrt{3}$

其中等号成立的条件是 $2\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}$

即 $\theta = 2\arctan\sqrt{2}$，故 $\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 的最大值是 $\frac{4}{9}\sqrt{3}$

2. 答案：$-2\arctan2$

解：由于要求 $f(x)$ 为奇函数，故

$f(0) = \arctan2 + c = 0$，即 $c = -\arctan2$

下面证明 $f(x) = \arctan\frac{2-2x}{1+4x} - \arctan2$ 为奇函数.

$\because \tg f(x) = \frac{\frac{2-2x}{1+4x}-2}{1+\frac{4-4x}{1+4x}} = -2x$

$\therefore$ 当 $x \in (-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ 时，$f(x) = -\arctan2x$ 为奇函数.

3. 答案：1

解：由已知得 $x^3 + \sin x = 2a = (-2y)^3 + \sin(-2y)$

令 $f(t) = t^3 + \sin t$，则 $f(x) = f(-2y)$，易知，$f(t)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上为增函数，故只有 $x = -2y$，即 $x + 2y = 0$

$\therefore \cos(x+2y) = 1$

4. 答案：$\frac{1}{2}$

解：易知 $h = c - a = \frac{h}{\sin A} - \frac{h}{\sin C}$，故有

$$\sin C - \sin A = \sin A\sin C$$

由条件知 $A + C = 120^\circ$，根据上式得

$2\sin\frac{C-A}{2}\cos\frac{A+C}{2} = \frac{1}{2}[\cos(C-A) - \cos(A+C)]$

$\therefore 2\sin\frac{C-A}{2}\cos60^\circ = \frac{1}{2}[\cos(C-A) - \cos120^\circ]$

即$(\sin\frac{C-A}{2})^2+\sin\frac{C-A}{2}-\frac{3}{4}=0$

解得 $\sin\frac{C-A}{2}=\frac{1}{2}$　$(\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{3}{2}$ 舍去)

5. 答案:$\frac{56}{65}$

解:$\because \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$

$\therefore -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\alpha<0$,则 $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=-\frac{4}{5}$

$\because 0<\beta<\frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$,则 $\cos(\frac{3\pi}{4}+\beta)=-\frac{12}{13}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)$

$=-\cos(\alpha+\beta+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})$

$=-\cos[(\frac{3\pi}{4}+\beta)-(\frac{\pi}{4}-\alpha)]$

$=-\cos(\frac{3\pi}{4}+\beta)\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\sin(\frac{3\pi}{4}+\beta)\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

$=-(-\frac{12}{13})\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times(-\frac{4}{5})=\frac{56}{65}$

(三)解答题

1. 证明:依题意有

$x=\cos(y+z),y=\cos(z+x),z=\cos(x+y)$,则

$$x-y=\cos(y+z)-\cos(z+x)=2\sin\frac{x+y+2z}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad ①$$

$\because |\sin\frac{x+y+2z}{2}|\leqslant 1, |\sin\frac{x-y}{2}|<\frac{|x-y|}{2}(x\neq y)$

$\therefore$ 当$(x\neq y)$时,由 ① 式有

$|x-y|\leqslant 2|\sin\frac{x-y}{2}|<|x-y|$

矛盾,则 $x=y$,同理可证 $x=z$,于是

$x=y=z$

2. 证明:设 $\sin 20^\circ=d$

$\because \sin 60^\circ=3\sin 20^\circ-4\sin^2 20,\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}=3d-4d^3$

即 $4d^3-3d+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

考虑函数 $f(x)=4x^3+3x+\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 d 是$f(x)=0$ 的一个根.由于

$f(-1)=\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0,f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$

$f(\frac{1}{3})=\frac{27\sqrt{3}-46}{54}>0,f(\frac{7}{20})=\frac{1000\sqrt{3}-1757}{2000}<0$

$f(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0,f(1)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1>0$

又由于 $f(x)$ 的图像与 x 轴至多有三个交点,所以 $f(x)=0$ 在区间$(-1,0)$,$(\frac{1}{3},\frac{7}{20})$ 和$(\frac{1}{2},1)$ 中恰好各有一个根.

由于 $0<\sin 20^\circ<\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,故 d 应在区间$(\frac{1}{3},\frac{7}{20})$ 内,即$\frac{1}{3}<\sin 20^\circ<\frac{7}{20}$

3. 证明:为了证明所给不等式,先证以下不等式

$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ①

如右图,在单位圆中

$\because S_{\triangle OAP} < S_{扇形OAP} < S_{\triangle OAT}$,

$\therefore \frac{1}{2} OA \cdot MP < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} OA \cdot AT$,

得$\frac{1}{2} OA \cdot MP < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} OA \cdot AT$

即 $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

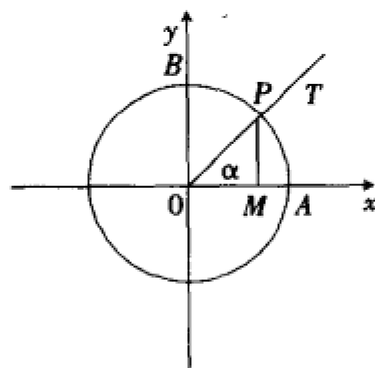


图 Ⅰ - D - 4 - 1

由 ① 可证得 $y = \frac{\sin x}{x} \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$ 是减函数,

下面用"增量法"证之

设 $t > 0, x \in (0, \frac{\pi}{2}), x + t \in (0, \frac{\pi}{2})$,则

$$\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin(x+t)}{x+t}$$

$$= \frac{(x+t)\sin x - x\sin(x+t)}{x(x+t)}$$

$$= \frac{x\sin x(1-\cos t) + (t\sin x - x\cos x\sin t)}{x(x+t)} \quad ②$$

由 $x > 0 \quad x + t > 0 \quad \sin x > 0, \quad 1 - \cos t > 0 t > \sin t$ 及 $\sin x > x\cos x$(由 $\operatorname{tg} x > x$,即$\frac{\sin x}{\cos x} > x$ 而得),可得 ② 的右边大于 0,

于是有$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(x+t)}{x+t}$

即 $y = \frac{\sin x}{x}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是减函数

将原不等式变形为 $3x - 4\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x > 0$

引进函数 $f(x) = 3x - 4\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x = x(3 - 4\frac{\sin x}{x} - \frac{\sin 2x}{2x})$,则由$\frac{\sin x}{x}$、$\frac{\sin 2x}{2x}(x \in (0, \frac{\pi}{2}))$为减函数知,$3 - 4\frac{\sin \pi}{x} - \frac{\sin 2x}{2x}$. 为$(0, \frac{\pi}{2})$内的增函数,于是 $f(x)$ 是$(0, \frac{\pi}{2})$内的增函数,又$f(0) = 0$,所以,对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,均有$f(x) > 0$,也即原不等式成立.

4. 答案:$\sqrt{2}$

解:$F(x) = |\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + Ax + B|$

当 $A = B = 0$ 时,$F(x) = |\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})| \leqslant \sqrt{2}$

等号在 $x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{5\pi}{8}, x_3 = \frac{9\pi}{8}$ 时取得,

$\therefore \sqrt{2}$ 是 $A = B = 0$ 时 $F(x)$ 的最大值.

下面证明,它是最大值中最小的那一个. 即有

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi} F(x) > \sqrt{2}, \text{其中 } A^2 + B^2 \neq 0 \quad ①$$

(1) 当 $A = 0, B \neq 0$ 时

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}} F(x) = \max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}} |\sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + B|$$

$$= \sqrt{2} + |B| > \sqrt{2}$$

$\therefore$① 式成立.

(2) 当 $A>0,B\geqslant 0$ 时,

$\because F(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B>\sqrt{2}$

$\therefore$① 式成立.

(3) 当 $A>0,B<0$ 时,

(ⅰ) 若 $|B|<\frac{9\pi}{8}A$,则 $>\frac{9\pi}{8}A+B>0$,于是

$F(\frac{9\pi}{8})=|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B|>\sqrt{2}$

(ⅱ) 若 $|B|\geqslant\frac{9\pi}{8}A$,则 $|B|>\frac{5\pi}{8}A,\frac{5\pi}{8}A+B<0$,于是

$F(\frac{5\pi}{8})=|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B|>\sqrt{2}$

$\therefore$ 总有 ① 式成立.

(4) 当 $A<0,B\leqslant 0$ 时,

$F(\frac{5\pi}{8})=|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B|>\sqrt{2}$

$\therefore$① 式成立

(5) 当 $A<0,B>0$ 时,

(ⅰ) 若 $B<-\frac{5\pi}{8}A$,则 $\frac{5\pi}{8}A+B<0$,于是

$F(\frac{5\pi}{8})=|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B|>\sqrt{2}$

(ⅱ) 若 $B\geqslant-\frac{5\pi}{8}A$,则 $B>-\frac{\pi}{8}A$,即 $\frac{\pi}{8}A+B>0$

于是 $F(\frac{\pi}{8})=|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B|>\sqrt{2}$

$\therefore$ 总有 ① 式成立.

综上,① 式成立.

5. 证明:由 $2\sin^2x+\sin^2y=1$,得 $\cos2x=\sin^2y>0$

$\therefore 0<2x<\frac{\pi}{2}$,即 $0<x<\frac{\pi}{4}$

$\because\theta<x,\therefore 2\sin^2\theta+\sin^2y<2\sin^2x+\sin^2y=3\sin^2\theta$

即 $\sin^2y<\sin^2\theta$

$\therefore y<\theta$,则有

$$0<y<\theta<x<\frac{\pi}{4} \qquad ①$$

由 $2\sin^2x+\sin^2y=3\sin^2\theta$,得

$2(\sin^2x-\sin^2\theta)=\sin^2\theta-\sin^2y$

即 $2\sin(x+\theta)\sin(x-\theta)=\sin(\theta+y)\sin(\theta-y)$

即 $\frac{2\sin(x-\theta)}{\sin(\theta-y)}=\frac{\sin(\theta+y)}{\sin(x+\theta)}$

于是 $\frac{2\sin(x-\theta)\cos(x-\theta)}{\sin(\theta-y)}=\frac{\sin(\theta+y)\cos(x-\theta)}{\sin(x+\theta)}$

由 ① 知,$\theta-y,\theta+y,x-\theta,2x-2\theta$ 均为锐角,且 $\theta+y<\theta+x$,则

$\frac{\sin2(x-\theta)}{\sin(\theta-y)}=\frac{\sin(\theta+y)\cos(x-\theta)}{\sin(x+\theta)}<1$

于是 $\sin(2x-2\theta)<\sin(\theta-y)$

$\therefore 2x-2\theta<\theta-y$,即 $2x+y<3\theta$.

第五章

1. 如图 Ⅰ－D－5－1，设$\overrightarrow{GH}=a\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{FH}=b\overrightarrow{FD}$，有$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AG}+a\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AF}+b\overrightarrow{FD}$，又$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{GB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$，同样，$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{FD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，得$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+a(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+b(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})$

即$(\frac{1}{2}-\frac{a}{6}-\frac{2b}{3})\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2}-\frac{b}{6}-\frac{2a}{3})\overrightarrow{AC}$，但$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$不共线，故有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{a}{6}-\frac{2b}{3}=0\\ \frac{1}{2}-\frac{b}{6}-\frac{2a}{3}=0\end{cases}\quad a=b=\frac{3}{5}，得 EH:HG=2:3$$

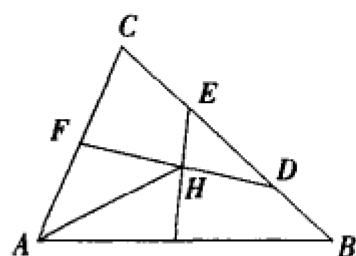


图 Ⅰ－D－5－1

2. 如图 Ⅰ－D－5－2，$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AP}$，要使 P' 与 P 重合，应$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AP}$，得

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}(4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB})$

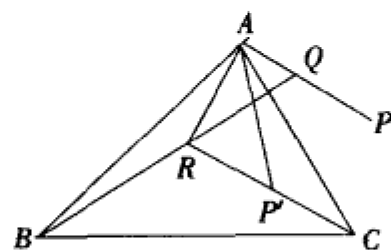


图 Ⅰ－D－5－2

3. 如图 Ⅰ－D－5－3 中，甲、乙取 FH 的中点K'，有$\overrightarrow{AK'}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}[ab\cos(\frac{\pi}{2}+A)-ab\cos(\frac{\pi}{2}+A)]=0$，得$\overrightarrow{AK'}\perp\overrightarrow{BC}$，但过 A 作 BC 的垂线是唯一的，故 K' 就是K，其中 $a=AB$，$b=AC$，又由垂直知$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

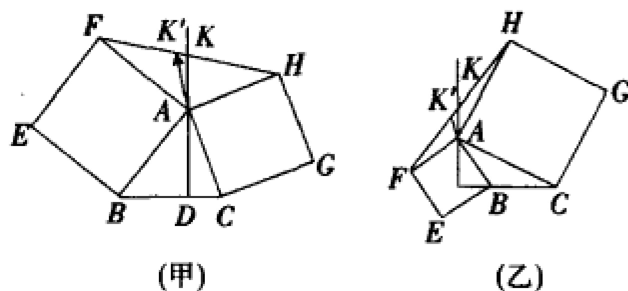


图 Ⅰ－D－5－3

4. 由垂直知$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DA}=0$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，得

$$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$$

即$$\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=0\end{cases}$$

相加得$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})^2=0,\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$

这表明$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共面,从而 A,B,C,D 四点共面.

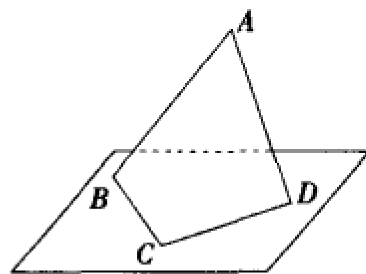


图 Ⅰ-D-5-4

5. 图 Ⅰ-D-5-5应设法从$\sum_{i=1}^{n}k_i|\overrightarrow{P_iQ}|$中分解出两个已知式$\sum_{i=1}^{n}k_i$和$\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{OP_i}$,由$|OP_i|=1$知

$$
\begin{aligned}
k_i|\overrightarrow{P_iQ}| &= k_i|\overrightarrow{QP_i}||\overrightarrow{OP_i}| \\
&\geqslant k_i\overrightarrow{QP_i}\cdot\overrightarrow{OP_i} \\
&= k_i(\overrightarrow{OP_i}-\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{OP_i} \\
&= k_i\overrightarrow{OP_i}\,\overrightarrow{OP_i}-ki\,\overrightarrow{OQ}\,\overrightarrow{OP_i} \\
&= k_i-\overrightarrow{OQ}\cdot(k_i\overrightarrow{OP_i})
\end{aligned}
$$

得 $\sum_{i=1}^{n}k_i|\overrightarrow{P_iQ}|\geqslant\sum_{i=1}^{n}k_i-\overrightarrow{OQ}\sum_{i=1}^{n}k_i\overrightarrow{OP_i}=n$

当 Q 为0时取等号.

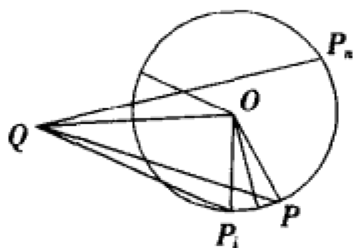


图 Ⅰ-D-5-5

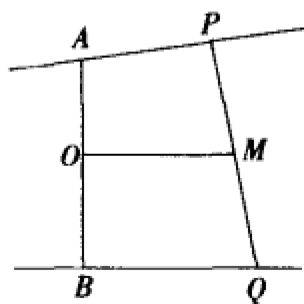


图 Ⅰ-D-5-6

6. 由已知的垂直条件知

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$

取 AB 的中点O,(如图 Ⅰ-D-5-6)有

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{OM} \\
&= \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QM}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{PM}
\end{aligned}
$$

相加得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})$,从而

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0\quad OM\perp AB$

$$
\begin{aligned}
\text{又 } l^2 &= \overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QP}=(\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})^2 \\
&= \overrightarrow{BA}^2+(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QB})^2+2\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QB}) \\
&= \overrightarrow{BA}^2+[(AP+BQ)^2-4\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}]+0 \\
&= \overrightarrow{BA}^2+(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ})^2=a^2+4\overrightarrow{OM}^2
\end{aligned}
$$

有$|\overrightarrow{OM}|=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2}$,所以点 M 的轨迹是以O为圆心,$r=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2}$为半径的圆,该圆所在的平面垂直于公垂线 AB.

7. $A^2 - 2A \cdot \sum_{i=1}^{7} = 0, 7A^2 - 2A \cdot 3A = 0,$

$A \cdot A = 0, A = 0$

8. 存在.如图 Ⅰ-D-5-7,设△ABC为正三角形点O为其内切圆圆心,点P为圆周上一点,于是向量$\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PO}$形成了所需的4个向量

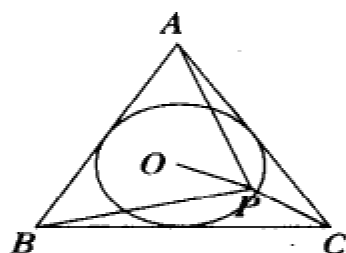


图 Ⅰ-D-5-7

$$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PO})$$

$$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{PO})$$

$$=(2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})(2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})$$

$$=(2\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OC})(2\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC})$$

$$=4\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OC}^2=0$$

第六章

(一) 选择题

1. 答案:B

解:$P^2 = ab + cd + 2\sqrt{abcd}$

$Q^2 = ab + cd + \frac{m}{n}ad + \frac{nbc}{m}$

利用均值不等式,得

$\frac{m}{n}ad + \frac{n}{m}bc \geqslant 2\sqrt{\frac{m}{n}ad\ \frac{n}{m}bc} = 2\sqrt{abcd}$

于是 $Q^2 \geqslant P^2$,注意到P,Q均非负,故$Q \geqslant P$,选B

2. 答案:B

解:由已知有

$$P > \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} + \frac{d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = 1$$

$P < (\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+d^2}) + (\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{d^2}{b^2+d^2})$

$= 1 + 1 = 2$　　故选B

3. 答案:D

解:甲 $= ab + \frac{1}{ab} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant ab + \frac{1}{ab} + 2 =$ 乙,且当$a \neq b$时,上面的不等式是严格成立的,故B不对.

取$a=1, b=2$,则甲$=5$,丙$=4\frac{25}{36}$,故C不对.

取$a=1, b=5$,则甲$=10\frac{2}{5}$,丙$=11\frac{1}{9}$,故A不对.

选D

4. 答案:D

解:$\because a > b > c > 0, \therefore ab > ac > bc$

$\therefore a^2 + 2ab + b^2 + c^2 > a^2 + 2ac + c^2 + b^2 > a^2 + b^2 + 2bc + c^2$

即$(a+b)^2 + c^2 > (a+c)^2 + b^2 > a^2 + (b+c)^2 > 0$

于是$\sqrt{(a+b)^2+c^2} > \sqrt{(a+c)^2+b^2} > \sqrt{a^2+(b+c)^2} > 0$

$\therefore l_3 > l_1 > l_2 > 0, \therefore l_3^2 > l_1 l_3 > l_2 l_3 > l_1 l_2 > l_2^2$

故选 D

5. 答案:C

解:$\because a_i > a_{i+1}, \therefore a_i - a_{i+1} > 0$

$\therefore \frac{1}{a_i - a_{i+1}} > 0(i = 1,2,\cdots,n-1)$

由算术平均值$\geqslant$调和平均值得

$$\frac{\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}}{n-1}$$

$$\geqslant \frac{n-1}{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)},$$

$\therefore m \geqslant n$,选 D

(二)填空题

1. 答案:$3\sqrt{2}$

解:设 $x = \sqrt{3a+1}, y = \sqrt{3b+1}, z = \sqrt{3c+1}$

则由柯西不等式知,$(x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2) = 3(3a+1+3b+1+3c+1) = 3[3(a+b+c)+3] = 18$,等号成立的重要条件是 $x = y = z$,此时 $a = b = c = \frac{1}{3}$,于是,当 $a = b = c = \frac{1}{3}$ 时,$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$ 取最大值 $3\sqrt{2}$

2. 答案:lg2

解:将 a,b,c 变形为

$a = \lg(xy^{-1}+z), b = \lg(yz+x^{-1}), c = \lg[(xz)^{-1}+y]$

设 $xy^{-1}+z, yz+x^{-1}, (xz)^{-1}+y$ 中的最大数为 u,得 $M = \lg u$

由 $u \geqslant xy^{-1}+z$ 及 $u \geqslant (xz)^{-1}+y$ 得

$$u^2 \geqslant (xy^{-1}+z)[(xz)^{-1}+y]$$
$$= y^{-1}z^{-1}+yz+x+x^{-1}$$
$$\geqslant 2+2 = 4$$

等号成立的重要条件为 $x = 1, yz = 1$

$xy^{-1}+z = (xz)^{-1}+y$

解之得 $x = y = z = 1$,于是 u 的最小值为 2,即 M 的最小值为 lg2.

3. 答案:$(\frac{1-n}{2},\infty)$

解:将原不等式变形为

$$-a < (\frac{1}{n})^x + (\frac{2}{n})^x + \cdots + (\frac{n-1}{n})^x$$

记 $f(x) = (\frac{1}{n})^x + (\frac{2}{n})^x + \cdots + (\frac{n-1}{n})^x, x \in (-\infty,1]$,现在考虑定义在区间$(-\infty,1]$上的函数 $f(x)$ 的取值范围,显然 $f(x)$ 为减函数.

$$\therefore f(x) \geqslant f(1) = \frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{2}$$

$$\therefore a > \frac{1-n}{2}$$

4. 答案:1

解:因为 $a,b > 0$,故由均值不等式得

$$ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2 = 1$$

等号成立的充要条件是 $a = b = 1$. 于是

$$\frac{1}{1+a^n}+\frac{1}{1+b^n}=\frac{2+a^n+b^n}{1+a^n+b^n+a^nb^n}\geqslant\frac{2+a^n+b^n}{1+a^n+b^n+1^n}=1$$

当 $a=b=1$ 时,上式取等号,故所求最小值为 1

5. 答案:$x>7$

解:由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 及 $|x^2-\sqrt{x-3}|=|(2-\sqrt{x-3})+(x^2-2)|$,可知原不等式等价于 $(2-\sqrt{x-3})(x^2-2)<0$,解此不等式得 $x>7$

(三) 解答题

1. 证明:利用均值不等式有

$2+a_i=1+1+a_i\geqslant3\sqrt[3]{1\cdot1\cdot a_i}=3\sqrt[3]{a_i}$

$\therefore(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant3^n\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}=3^n$

2. 证明:令 $S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$,规定 $S_0=0$

则由 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0.$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 知

$S_n=0,|S_i|\leqslant\frac{1}{2}\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$ 因为

$S_i-S_{i-1}=x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i-S_{i-1}}{i}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{S_{i-1}}{i}\\&=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{Si}{i}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{Si}{i+1}\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})S\end{aligned}$$

于是
$$\begin{aligned}|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}|&\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|S_i|(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})\\&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1})\\&=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

3. 证明:由 $\sqrt{k-1}<k<\sqrt{k+1}$ 三式加 $\sqrt{K}$ 得

$\sqrt{K}+\sqrt{K-1}<2\sqrt{K}<\sqrt{K+1}+\sqrt{K}$

取倒数得 $\frac{1}{\sqrt{K}+\sqrt{K-1}}>\frac{1}{2\sqrt{K}}>\frac{1}{\sqrt{K+1}+\sqrt{K}}$

化简得 $\sqrt{K}-\sqrt{K-1}>\frac{1}{2\sqrt{K}}>\sqrt{K+1}-\sqrt{K}$

于是 $\sqrt{n}-\sqrt{m-1}>\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{1}{2\sqrt{K}}>\sqrt{n+1}-\sqrt{m}$

取 $n=80,m=1$,则右边不等式变为

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{K}}>2(\sqrt{81}-\sqrt{1})=16$

取 $n=80,m=2$,则左边不等式变为

$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{K}}<2(\sqrt{80}-\sqrt{1})<2(\sqrt{81}-1)=16$

于是$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{K}}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{K}}<17$

4. 证明:反证法

设对一切 $x\in[-1,1]$,都有 $|x^3+px^2+qx+r|<\frac{1}{4}$

令 $x=\pm1,\pm\frac{1}{2}$,得以下四式:

(1) $-\frac{1}{4}<1+p+q+r<\frac{1}{4}$;

(2) $-\frac{1}{4}<-1+p-q+r<\frac{1}{4}$;

(3) $-\frac{1}{4}<\frac{1}{8}+\frac{1}{4}p+\frac{1}{2}q+r<\frac{1}{4}$;

(4) $-\frac{1}{4}<-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}p-\frac{1}{2}q+r<\frac{1}{4}$

由(1)+(2)×(−1)得 $-\frac{5}{4}<q<-\frac{3}{4}$

再由(3)+(4)×(−1)得 $-\frac{3}{4}<q<\frac{1}{4}$ 矛盾.

5. 证明:令 $m=(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$,

则$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$

$=\frac{1}{m}[(a+b)+(b+c)+(c+a)]\cdot[\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}]$

$=\frac{1}{m}[(\sqrt{a+b})^2+(\sqrt{b+c})^2+(\sqrt{c+a})^2]\cdot[(\frac{a}{\sqrt{a+b}})^2+(\frac{b}{\sqrt{b+c}})^2+(\frac{c}{\sqrt{c+a}})^2]$

$\geqslant\frac{1}{m}(a+b+c)^2$

$=\frac{a+b+c}{2}$

第七章

(一) 选择题

1. 答案:C

2. 答案:C

3. 答案:D

4. 答案:A

5. 答案:B

(二) 填空题

1. $x-y=0$ 或 $x-y+1=0$

2. $k=96$,夹角为 45°

3. $(x,y)=(1,2)$;$(3x+4y)_{max}=11$

4. $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$

(三) 解答题

1. 假设存在符合要求的直线族 l_1、l_2、$\cdots l_n\cdots$,直线 l_n 的方程为 $y-1=k_n(x-1)(k\neq0)$,则依题意有 $a_n=1-\frac{1}{k_n}$,$b_n=1-k_n$,于是,$k_{n+1}-k_n=-\frac{1}{k_n}$.从而求和得 $\sum_{k=1}^{n}(k_{i+1}-k_i)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}$,化简得

$k_{n+1} = k_1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$.

由 $k_n k_{n-1} \geqslant 0(n = 1,2,3\cdots)$ 知 $k_i(i = 1,2,3,\cdots)$ 符号相同,不妨设 $k_i > 0$,则可推知 $k_{n+1} < k_n$, $\frac{1}{k_{n+1}} > \frac{1}{k_n}$,再利用上式得到 $k_{n+1} < k_1 - \frac{n}{k_1}$.

当我们取 $n > k_1^2$ 时,这个不等式的右边小于零,而左边大于零,矛盾.故不存在符合条件的直线族.

2. 显然 A 点是 P、Q 的外分点,$\frac{PA}{AQ} = -\frac{2}{3}$,则由定比分点公式得 $x_A = -13, y_A = -5$.同理有 B 是 P、Q 的内分点,$\frac{PB}{BQ} = \frac{2}{3}$,则由定比分点公式得 $x_B = \frac{31}{5}, y_B = \frac{47}{5}$,所以,$SA$、$SB$ 均是直线系 $7x - 5y + 8 + u(3x + 4y - 13) = 0$ 上的直线.

将所得 A 点坐标代入直线方程得 $U_2 = \frac{-11}{108}$.故 SB 的方程为 $723x - 584y + 1007 = 0$

3. 设 $G(x,y)$ 为 $\triangle ABC$ 重心,在圆上另取 B,C 使 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$,则 $\angle BOC = \frac{2\pi}{3}$,由平面几何知识知,$BC$ 弦中点 $D(x_0,y_0)$ 的轨迹方程为:$x_0^2 + y_0^2 = (\frac{3}{2})^2 \quad \left(-\frac{3}{2} \leqslant x_0 \leqslant \frac{3}{4}\right)$

又 $\frac{AD}{DG} = -3$,故 $x_0 = \frac{3x-2}{2}, y_0 = \frac{3y}{2}$ 代入 D 点方程,整理得 $(x-1)^2 + y^2 = 1$(其中 $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$)

4. 设点 P 在圆上 Q 在所求椭圆上,且 $|PQ| = 1 + \sqrt{7}$,则 P,C,Q 三点共线,定点 $C(\frac{3}{2},0)$ 与椭圆上点的距离的最大值为 $\sqrt{7}$

设椭圆方程为 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数),则

$|CQ|^2 = a^2\cos\theta^2 + (b\sin\theta - \frac{3}{2})^2$

由于 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $a = 2b$,所以,$|CQ|^2 = -3b^2$

$(\sin\theta + \frac{1}{2b})^2 + 4b^2 + 3$

若 $b < \frac{1}{2}$,则当 $\sin\theta = -1$ 时,$|CQ|$ 有最大值.

此时,$b = \sqrt{7} - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$,矛盾,所以,$b \geqslant \frac{1}{2}$,且有 $|CQ|^2_{\max} = 4b^2 + 3 = 7$,解得 $b = 1$,从而可知 $a = 2$.

故椭圆方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)

5. 满足不等式组的三条直线围成的图形是 $\triangle AOB$(如图 Ⅰ-D-7-1),$A(75,25)$,$B(25,75)$,$C(100,0)$,$D(0,100)$,线段 CD 上有整点 101 个,CD 向左平移一个单位后,线段上有 100 个…,向左平移 100 个单位后,只有一个整点 1 个(原点),故 $\triangle COD$ 内(含边界)共有整点 $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 + 101 = 5151$ 个.令 $y = 0$(即 x 轴),OC 有整点 100 个(不含原点),令 $y = 1$,与 AO,AC 相交于 E,F,线段 EF 上有整点 $99 - 3 = 96$ 个(不含 OA 上的点),令 $y = 2$ 时,有整点 $98 - 6 = 92$ 个,……,令 $y = 24$ 时,有整点 4 个,故 $\triangle AOC$ 内有整点:$4 + 8 + \cdots + 92 + 96 + 100 = 1300$ 个(不含 OA 边上的整点),由对称可知 $\triangle OBD$ 内有整点 1300 个,故满足不等式组的整点共有:$5151 - 2 \times 1300 = 2551$ 个.

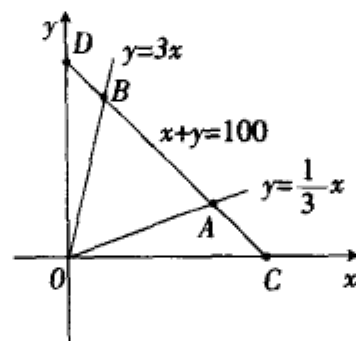


图 Ⅰ-D-7-1

6. $f(x) + f(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 \leqslant 8$,表示以 $(3,3)$ 为圆心,$2\sqrt{2}$ 为半径的圆块(含圆周),

$f(x)-f(y)\geqslant 0\Leftrightarrow (x-y)(x+y-6)\geqslant 0\Leftrightarrow \begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y-6\geqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}x-y\leqslant 0\\x+y-6\leqslant 0\end{cases}$与圆块求交集得两个圆心角为 90° 的扇形(图略).

第八章

(一) 选择题

1. 答案:选 B
2. 答案:选 C
3. 答案:选 A
4. 答案:选 D
5. 答案:选 D

(二) 填空题

1. $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OD^2}=1$

2. $y=x,y=-x$

$y=\frac{\sqrt{209}}{11}x+\frac{3\sqrt{77}}{55},y=-\frac{\sqrt{209}}{11}x+\frac{3\sqrt{77}}{55}$

$y=\frac{\sqrt{209}}{11}x-\frac{3\sqrt{77}}{55},y=-\frac{\sqrt{209}}{11}x-\frac{3\sqrt{77}}{55}$

3. $(\frac{1+\sqrt{7}}{4},\frac{1-\sqrt{7}}{4}),(\frac{1-\sqrt{7}}{4},\frac{1+\sqrt{7}}{4})$

4. $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1,\frac{x^2}{2.5}-\frac{y^2}{1.5}=1$

(三) 解答题

1. 分三步完成,第一步确定点 P 的位置,如右图 Ⅰ－D－8－1.H 为 O 到斜边上的射影,P 为满足条件的点,记 t 为 AP,AH 两线段的差,由已知有

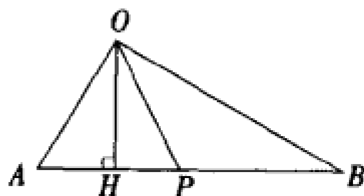


图 Ⅰ－D－8－1

$$\begin{aligned}&PA\cdot PB\\&=PO^2=OH^2+t^2\\&=AH\cdot HB+t^2\\&=(AP-t)(BP+t)+t^2\\&=AP\cdot BP+(AP-BP)t\end{aligned}$$

得$(PA-PB)t=0$

或 $t=0$,或 $PA=PB$,即 P 或为垂足或为中点.

第二步,当 P 为斜边上的垂足时,有

$$\begin{cases}b^2x_A^2+a^2y_A^2=a^2b^2 & ①\\b^2x_B^2+a^2y_B^2=a^2b^2 & ②\\x_Ax_B+y_Ay_B=0 & ③\end{cases}$$

由 ③ 可得

$x_A^2x_B^2=y_A^2y_B^2$ ④

解 ②、④ 可得

$$x_B^2=\frac{a^2b^2y_A^2}{a^2x_A^2+b^2y_A^2},y_B^2=\frac{a^2b^2x_A^2}{a^2x_A^2+b^2y_A^2}$$

于是$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$

$$=\frac{1}{x_A^2+y_A^2}+\frac{1}{x_B^2+y_B^2}$$

$$=\frac{1}{x_A^2+y_A^2}+\frac{a^2x_A^2+b^2y_A^2}{a^2b^2(x_A^2+y_A^2)}$$

$$=\frac{a^2b^2+a^2x_A^2+b^2y_A^2}{a^2b^2(x_A^2+y_A^2)}$$

$$=\frac{b^2x_A^2+a^2y_A^2+a^2x_A^2+b^2y_A^2}{a^2b^2(x_A^2+y_A^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)(x_A^2+y_A^2)}{a^2b^2(x_A^2+y_A^2)}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

进而,由 P 为斜边上的垂足有

$$PO^2=(\frac{OA\cdot OB}{AB})^2=\frac{OA^2\cdot OB^2}{OA^2+OB^2}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

故点 P 的轨迹为圆

$$x^2+y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad ⑤$$

第三步,当 P 为斜边 AB 的中点时,除 ①、②、③ 成立外,还有

$$\begin{cases}2x=x_A+x_B,\\2y=y_A+y_B\end{cases}$$

有 $4b^2x^2+4a^2y^2=b^2(x_A+x_B)^2+a^2(y_A+y_B)^2$

$$=(b^2x_A{}^2+a^2y_A{}^2)+(b^2x_B{}^2+a^2y_B{}^2)+2(b^2x_Ax_B+a^2y_Ay_B)$$

$$=a^2b^2+a^2b^2+2(b^2x_Ax_B-a^2x_Ax_B)$$

$$=2a^2b^2+2(b^2-a^2)x_Ax_B$$

即 $x_Ax_B=\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}(a^2b^2-2b^2x^2-2a^2y^2)$ ⑥

又由 ③,有

$$\frac{x_A{}^2x_B{}^2}{b^4}=\frac{y_A{}^2}{b^2}\cdot\frac{y_B{}^2}{b^2}$$

$$=(1-\frac{x_A{}^2}{a^2})(1-\frac{x_B{}^2}{a^2})$$

$$=1-\frac{x_A{}^2}{a^2}-\frac{x_B{}^2}{a^2}+\frac{x_A{}^2x_B{}^2}{a^4}$$

$$=1-\frac{(x_A+x_B)^2}{a^2}+\frac{2x_Ax_B}{a^2}+\frac{x_A{}^2x_B{}^2}{a^4}$$

$$=1-\frac{4x^2}{a^2}+\frac{2x_Ax_B}{a^2}+\frac{x_A{}^2x_B{}^2}{a^4}$$

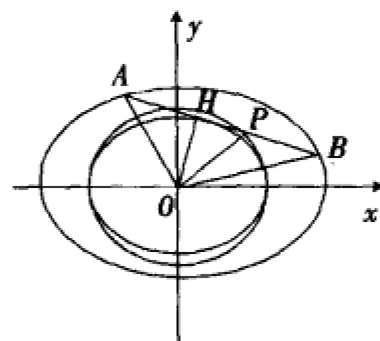


图 Ⅰ-D-8-2

即$\frac{a^4-b^4}{a^4b^4}x_A{}^2x_B{}^2-\frac{2x_Ax_B}{a^2}+\frac{4x^2}{a^2}-1=0$ ⑦

把 ⑥ 代入 ⑦ 得

$$(a^2+b^2)(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})-\frac{b^2x^2}{a^2}-\frac{a^2y^2}{b^2}=0 \qquad ⑧$$

去掉原点 $O(0,0)$ 后为中点的轨迹方程. 合并 ⑤、⑧ 且去掉原点可得点 P 的轨迹如图 Ⅰ-D-8-2.

2. 证明:在抛物线 $y=x^2$ 上取坐标为 (i,i^2) 的点,$i=1,2,\cdots,n(n\geqslant 3)$,则任两点 $P_1(i,i^2)$,$P_2(j,j^2)$ 之间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(i-j)^2+(i^2-j^2)^2}$$
$$=|i-j|\sqrt{1+(i+j)^2}$$

由 $(i+j)<\sqrt{1+(i+j)^2}<i+j+1$

知 $\sqrt{1+(i+j)^2}$ 不是正整数,同时 $\sqrt{1+(i+j)^2}$ 也不是即约分数,否则,平方之后引出矛盾,故 $|P_1P_2|$ 不是有理数.

任取点集中的 3 点 $P_1(i,i^2),P_2(j,j^2),P_3(k,k^2)$,由抛物线与直线最多有两个交点知,$\triangle P_1P_2P_3$ 存在且面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & i & i^2\\1 & j & j^2\\1 & k & k^2\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$
$$=\frac{1}{2}|(i-j)(j-k)(k-i)|$$

是一个有理数.

3. L_m 中有且只有一条直线过点 $P(x,y)$ 表明,关于 m 的二次方程

$$\frac{1}{4}m^2-xm+y=0$$

有等根,从而判别式等于零.

$$\Delta=(-x)^2-4\cdot\frac{1}{4}y=0$$

得点 P 所在的曲线方程为抛物线 $y=x^2$.

4. 过直线与圆交点的圆系方程为

$$(x^2+y^2+2x-4y+1)+\lambda(2x+y+4)=0$$

即 $x^2+y^2+(2\lambda+2)x+(\lambda-4)y+(4\lambda+1)=0$

其半径为

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(2\lambda+2)^2+(\lambda-4)^2-4(1+4\lambda)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5(\lambda-1.6)^2+3.2}$$

当 $\lambda=1.6$ 时,半径有最小值 $R=\sqrt{0.8}$,从而圆有最小面积,此时,圆的方程为

$$x^2+y^2+5.2x-2.4y+7.4=0$$

5. 设双曲线、PQ 的方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$$

联立消 $y(x)$ 可得 P,Q 的横(纵)坐标所满足的二次方程.

$$(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-3a^2c^2-5a^2b^2=0$$
$$(5b^2-3a^2)y^2+2\sqrt{15}b^2cy+3b^4=0$$

因为 P,Q 为不同的两点,所以 $5b^2-3a^2\neq 0$,将上两式相加,可得过 P、Q 的圆系方程

$$(5b^2-3a^2)(x^2+y^2)+6a^2cx+2\sqrt{15}b^2cy+(3b^4-3a^2c^2-5a^2b^2)=0 \quad ①$$

又由 $OP\perp OQ$ 知,原点 $(0,0)$ 在以 PQ 为直径的圆上,令 $x=y=0$,得

$$3b^4-3a^2c^2-5a^2b^2=0$$

即 $3b^4-8a^2b^2-3a^4=0$

得 $b^2 = 3a^2$,从而 $c = 2a$,代回 ① 得 $\triangle OPQ$ 的外接圆方程

$x^2 + y^2 + ax + \sqrt{15}ay = 0$

又由 $|PQ| = 4$ 知圆半径为 2,得 $a^2 = 1$,从而双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

第九章

(一) 选择题

1. 答案:D

2. 答案:A

3. 答案:A

4. 答案:D

5. 答案:A

6. 答案:C

7. 答案:A

8. 答案:C

9. 答案:C

(二) 填空题

1. $\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$

2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. 3

4. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

5. 25

(三) 解答题

1. 如图 Ⅰ－D－9－1,在棱 SC 上取点 D,过点 D 分别在平面 ASC 和平面 BCS 上作棱 SC 的垂线,交 SA 于 E,交 SB 于 F,连接 EF,设 $SD = 1$,则

在 $Rt\triangle ESD$ 中,$ED = \tan\alpha$,$ES = \sec\alpha$,

在 $Rt\triangle FSD$ 中,$FD = \tan\beta$,$FS = \sec\beta$,

在 $Rt\triangle EFS$ 中,$EF^2 = ES^2 + FS^2$

$$= \sec^2\alpha + \sec^2\beta$$

在 $\triangle EDF$ 中,由作法可知 $\angle EDF = \theta$,由余弦定理得

$$\cos\theta = \frac{ED^2 + FD^2 \cdot EF^2}{2ED \cdot FD}$$

$$= \frac{\tan^2\alpha + \tan^2\beta - \sec^2\alpha - \sec^2\beta}{2\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{-2}{2\tan\alpha\tan\beta}$$

$$= -\cot\alpha \cdot \cot\beta$$

$\therefore \theta = \pi - \arccos(\cot\alpha\cot\beta)$

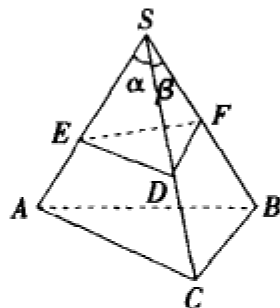


图 Ⅰ－D－9－1

2. 能

如图 Ⅰ－D－9－2,一个棱长为 1 的正方体,作 B_1D 的中垂面,这个平面将正方体分为两部分,只要证明其中一部分(取 B_1 的部分)能放入一个棱长为 1 的正四面体即可.关键先找出 B_1D 的中垂面,取

P、Q、R、S、T、M 分别为棱 A_1A、AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点，则易知六边形 $PQRSTM$ 为正六边形，且 MR，PS，QT 均过 Q 点，由对称性知截面 $PQRSTM$ 就是 B_1D 的中垂面.

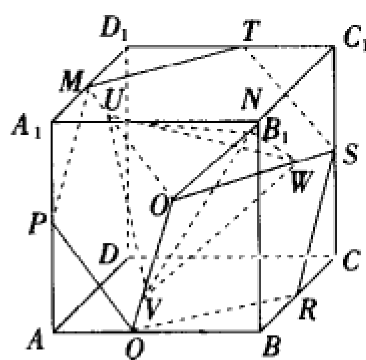


图 Ⅰ－D－9－2

由正方体棱长为 1 可以确定出

$$OM = OQ = OS = PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}, B_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

设 $NUVW$ 为正四面体，且其棱长为 1，底面 $\triangle UVW$ 的中心为 O'，则

$$O'U = O'V = O'W = \frac{\sqrt{3}}{3}, NO' = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

容易验证 $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$. 于是可将正四面体这样放进去：让 O' 与 O 重合，N 在 OB_1 上，U、V、W 分别在 OM、OQ、OS 上.

3. 可以

显然，当棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形时，任一平行于底面的截面所截得的截面边界均为平行四边形.

当 $ABCD$ 的两组对边都不平行时，则平面 SAD 与平面 SBC 有交线，设为 a，平面 SAB 与平面 SCD 也有交线设为 b，过 a，b 的平面与底面 $ABCD$ 所在平面也有交线，设为 c，如图 Ⅰ－D－9－3，取 $ABCD$ 中距离直线 c 最近的点，如 D 点，在 D 与直线 c 之间任取一条与 c 平行的直线 l，过 l 作与 a，b 所确定的平面平行的平面 α 去截棱锥，则平面 α 与棱锥的四个侧面都有交线，设与四条棱 SA、SB、SC、SD 分别交于 P、Q、R、S.

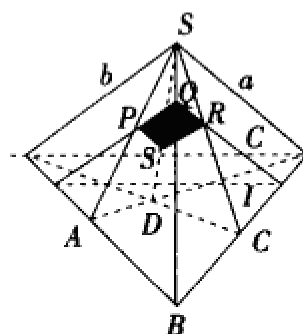


图 Ⅰ－D－9－3

由作法可知

$PS \parallel a$，$QR \parallel a$，$PQ \parallel b$，$SR \parallel b$.

即 $PQRS$ 为平行四边形.

若 $ABCD$ 有一组边平行，设 $AB \parallel CD$，则容易证得，平行于 a 的平面 α 即满足要求.

4. $\frac{2}{3}aS$

如图 Ⅰ－D－9－4，作四面体 $A_1DD_1C_1$ 关于 A_1D 的中点的对称四面体 DA_1AE，作四面体 B_1BAC 关于 B_1C 的中点的对称四面体 $CC_1E_1B_1$，则将平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 变为和它等面积的新的平行六面体 $AEDC-B_1A_1C_1E_1$.

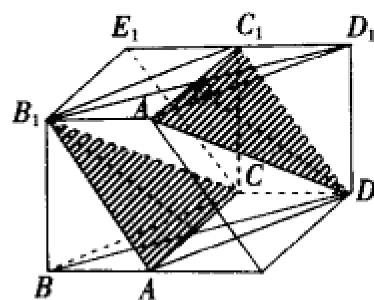


图 Ⅰ－D－9－4

在这个新的平行六面体中，将 $A_1B_1E_1C_1$ 看成底，则其面积为 $2S$，于是只需求出它的高即可.

由 $BD_1 \perp$ 平面 B_1AC，知 MK 就是所求的高. 在 $\triangle BDM$ 中易求得 $BK = KM$，同理 $D_1M = MK$，故 $MK = \frac{1}{3}BD_1 = \frac{1}{3}a$，于是

$$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = V_{AEDC-B_1A_1C_1E_1} = \frac{1}{3}a \cdot 2S = \frac{2}{3}aS$$

5. $2V$

如图 Ⅰ－D－9－5 所示，将 $\triangle KMN$ 看成底，由条件易知，$NM \underline{\parallel} AC$，因此 $NM \underline{\parallel} AK$，即 $KAMN$ 为平行四边形，则

$$S_{\triangle KMN} = \frac{1}{2}S_{\square KAMN} = \frac{1}{2} \times 4S_{\triangle DNM} = 2S_{\triangle DAC}$$

又由 $BC = CL$，知 B_1L 到平面 KCN 的距离相等，设为 h，则 $v = \frac{1}{3}hS_{\triangle DAC}$，于是

$$V_{KLMN} = \frac{1}{3}S_{\triangle KMN} \cdot h$$
$$= \frac{1}{3}h \cdot 2S_{\triangle DAC}$$
$$= 2V$$

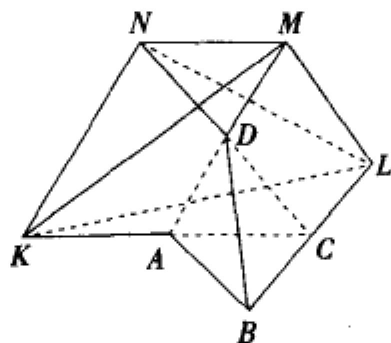


图 Ⅰ - D - 9 - 5

第十章

(一) 选择题

1. 答案:A
2. 答案:B
3. 答案:D
4. 答案:A
5. 答案:B

(二) 填空题

1. 320
2. 1975078
3. $P_{16}^{7} \cdot 25!$
4. $(-\frac{1}{10}, -\frac{1}{4}]$
5. C_8^2

(三) 解答题

1. 由题意知 $C_{2n+1}^{n+1}m^{m+1} = C_{2n}^{n} \cdot m^n$，即

$m = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n+2} > 1/2$

$\therefore b \leqslant 1/2$

2. 除题中 8 点共线外，无其它三点共线情况时，所作直线最多，此时共有直线

$C_4^2 + C_4^1C_8^1 + 1 = 39$ 条

当圆周上任意两点连成的 6 条直线分别过 l 上的 6 个已知点时，直线条数最少，此时共有直线 $39 - 6(C_3^2 - 1) = 27$ 条.

3. 本题等价于在一字排开的 80 个白球所形成的 81 个空档中选出 20 个空档放入黑球的方法数，即为 C_{81}^{20} 种取法.

4. (1) 用插空法知有 $P_5^5P_4^2 = 1440$ 种排法；

(2) 把两个一号球捆在一起看成一个元素 a，共 6 个元素进行排列，当 a 排在两端时，有 $2P_4^1{P_4}^4 = 192$ 种排法；当 a 不排在两端时，有 $P_4^2 \cdot (P_4^1P_2^2) \cdot P_3^3 = 576$ 种排法，故共有排法 $192 + 576 = 768$ 种

(3) 在 5 个红球的空档中选 1 个位置排 1 号白球，有 P_4^1 种排法；排 1 号红球有两种排法；其余红球有 P_4^4 种排法；2 号白球有 P_3^1 种排法.

∴ 有 $P_4^1 \cdot P_2^1 \cdot P_4^4 \cdot P_3^1 = 576$ 种排法

5. ∵ $C_n^n, C_{n+1}^n, C_{n+2}^n, \cdots, C_{2n-1}^n$ 依次为二项式 $(1+x)^n, (1+x)^{n+1}, (1+x)^{n+2}, \cdots, (1+x)^{2n-1}$ 的展开式中含 x^n 项的系数；

∴ 原恒等式左边就是多项式

$$(1+x)^n + 2(1+x)^{n+1} + 3(1+x)^{n+2} + \cdots + n(1+x)^{2n-1} \quad ①$$

中 x^n 项的系数

又利用数列求和方法（错位相减法）知

① 式等于 $\dfrac{(1+x)^n - (1+x)^{2n} + nx(1+x)^{2n}}{x^2}$

上式含 x^n 项的系数又为

$$-C_{2n}^{n+2} + nC_{2n}^{n+1} = \frac{n^2+n+1}{n+2}C_{2n}^{n+1}$$

比较系数知等式成立.

第二部分
高中数学奥林匹克专题教材

第一章

重要不等式

不等式是中学数学乃至现代数学中的重要内容,是奥林匹克数学的热门专题之一.它是数学竞赛的一项主要内容,又是解数学竞赛题的一个重要工具.

(1) 解不等式

早年的IMO有这样的独立题目,第二届IMO题2,第四届IMO题4,第七届IMO题1;而近年来,解不等式多作为工具,体现在解题过程中,如第29届IMO题4.

(2) 证明不等式

这是一类过去经常出现,今后也不会中断的常规赛题.近年来较多体现在六个方面:① 数列不等式,② 分式不等式,③ 三角不等式,④ 对称不等式,⑤ 几何不等式,⑥ 离散不等式.

不等式证明主要考查论证能力,这是无疑的,但恒等变形的熟练和数学运算的准确,这也是实质性要求.

(3) 不等式的应用

不等式应用于求极值,应用于解不定方程,应用于确定相等关系.

数学中有许多著名不等式,在这一讲里,介绍的是数学竞赛中常用的重要不等式及其应用.

§1.1 知识要点与基本方法

一、平均不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正实数,记

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},Q_n=\sqrt{\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}{n}}$$

分别称 H_n,G_n,A_n,Q_n 为这几个正数的调和平均,几何平均,算术平均和平方平均数,于是有

定理1 $H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant Q_n$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号"="成立.

证: 1°.由 $A_n\geqslant G_n$ 可推出 $G_n\geqslant H_n$

2°. $A_n\leqslant Q_n\Leftrightarrow\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i{}^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2\geqslant 0$

3°.证 $A_n\geqslant G_n$ 可这样进行.

取 $S=\{2^m\mid m\in\mathbf{N}\}$,易由第一数学归纳法可证明对于 $n\in S$ 有 $A_n\geqslant G_n$

再证命题 $A_n\geqslant G_n$ 对于 $n\in\mathbf{N}-S$ 也成立.

事实上,设 $n<2^m$,且 $n\in\mathbf{N}-S$,则

$$\frac{1}{2^m}(a_1+a_2+\cdots+a_n+\underbrace{A_n+\cdots+A_n}_{2^m-n\text{个}})$$

$\geqslant \quad (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot A_n{}^{2^m - n})2^{\frac{1}{m}}$ 即

$$\left(\frac{nA_n + (2^m - n)A_n}{2^m}\right)^{2^m} \geqslant G_n^{2^n} \cdot A_n^{2^m - n}$$

所以 $A_n{}^{2^n} \geqslant G_n^{2^n} \cdot A_n^{2^m - n}$

即 $A_n{}^{2^n} \geqslant G_n^{2^n}$ 亦即 $A_n \geqslant G_n$,得证.

平均不等式的进一步推广.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个正实数,实数 $r \neq 0$,则称

$$M_r = \left(\frac{x_1{}^r + x_2{}^r + \cdots + x_n{}^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的 r 次幂平均.

对 M_r,有幂平均不等式

定理 2 若 $\alpha > \beta$,则 $M_\alpha \geqslant M_\beta$.

即
$$\left(\frac{x_1{}^\alpha + x_2{}^\alpha + \cdots + x_n{}^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant \left(\frac{x_1{}^\beta + x_2{}^\beta + \cdots + x_n{}^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时等号"="成立.

(证略)

推论. 若 $\alpha > 1$,则

$$\frac{x_1{}^\alpha + x_2{}^\alpha + \cdots + x_n{}^\alpha}{n} \geqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^\alpha$$

二、柯西不等式

柯西不等式是指

定理 3 设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}(i = 1, 2, \cdots, n)$,

则
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i{}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i{}^2\right)$$

当数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,当且仅当 $b_i = \lambda a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 时等号"="成立.

简证:由恒等变换求和方法不难验证

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$
$$= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geqslant 0$$

证毕

变式(Ⅰ) 设 $a_i \in \mathbf{R}, b_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i{}^2}{b_i{}^2} \geqslant \frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum a_i b_i}$$

当且仅当 $b_i = \lambda a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时等号"="成立.

变式(Ⅱ) 设 a_i, b_i 同号且不为零$(i = 1, 2, \cdots, n)$,则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} \geqslant \frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum a_i b_i}$$

当且仅当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时等号成立.

推广:赫尔台(Hölder)不等式. 即

定理 4 设 $a_i > 0, b_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n), p > 0, q > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且仅当 $a_i^p = \lambda \cdot b_i^q (i = 1,2,\cdots,n;\lambda > 0)$ 时等号"="成立.

证明:

引理 （几何不等式）设 $x > 0, y > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$,则

$$x^{\alpha} \cdot y^{\beta} \leqslant \alpha x + \beta y \qquad (*)$$

当且仅当 $x = y$ 时"="成立.

（**【注】** 此不等式实质是 $\lg x$ 的凸性,证略）

证 Hölder 不等式

事实上,由(*)式有

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a_i^p}{\sum a_i^p}\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\frac{b_i^q}{\sum b_i^q}\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum a_i^p}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum b_i^q}\right]$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

当且仅当 $\dfrac{a_i^p}{\sum a_i^p} = \dfrac{b_i^q}{\sum b_i^q}$,即 $a_i^p = \lambda b_i^q (i = 1,2,\cdots,n)$ 等号成立.

Hölder 不等式的变式为

定理 5 设 $a_i > 0, b_i > 0 (i = 1,2,\cdots,n), m > 0$ 或 $m < -1$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{m+1} \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^m$$

当且仅当 $a_i = \lambda b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 时"="成立.

证:当 $m > 0$ 时,由 Hölder 不等式有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i^{\frac{m}{m+1}}}\right) \cdot b_i^{\frac{m}{m+1}} \quad \left(令\frac{1}{p} = \frac{1}{m+1}, \frac{1}{q} = \frac{m}{m+1}\right)$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i^{\frac{m}{m+1}}}\right)^{m+1}\right]^{\frac{1}{m+1}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}\left(b_i^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]^{\frac{m}{m+n}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^m}\right)^{\frac{1}{m+n}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\frac{m}{m+1}}$$

由此即得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geqslant \frac{\left(\sum a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum b_i\right)^m}$$

当 $m < -1$ 时,$-(m+1) > 0$,对数组 $(b_1, b_2, \cdots, b_n), (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 有

$$\sum \frac{b_i^{-(m+1)+1}}{a_i^{-(m+1)}} \geqslant \frac{\left(\sum b_i\right)^{-(m+1)+1}}{\left(\sum a_i\right)^{-(m+1)}}$$

即 $$\sum \frac{a_i^{m+1}}{b_i^m} \geqslant \frac{\left(\sum a_i\right)^{m+1}}{\left(\sum b_i\right)^m}$$

当且仅当 $\left(\dfrac{a_i}{b_i^{\frac{m}{m+1}}}\right)^{m+1} = \lambda\left(b_i^{\frac{m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}}$,即 $a_i = \lambda b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 时"="成立

【注】 定理 5 的不等式称为"权方和不等式"

三、排序不等式

考虑如下 $2(n+1)$ 个实数摆成的矩阵.

$$A=\begin{bmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\\ b_0\leqslant b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\\ b_{i_0}\quad b_{i_1}\quad\cdots\quad b_{i_n}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\ \cdots\leqslant a_n\\ b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_0\end{bmatrix}$$

其中 $i_0,i_1,\cdots,i_n$ 是 $0,1,2,\cdots,n$ 的一个排列，矩阵 A 称为同序矩阵，矩阵 B 称为矩阵 A 的乱序矩阵，矩阵 C 称为矩阵 A 的反序矩阵.

若矩阵 A 的乱序阵 M 可经过解列交换变出 A，则称矩阵 M 为 A 的可同序阵. 显然，A 的列积和或列和积均与 A 的列交换无关，记 $S(A)$，$T(A)$ 分别表示矩阵 A 的列积和与列和积，则 $S(M)=S(A)$，$T(M)=T(A)$.

排序不等式(Ⅰ)，设 A 为 $2(n+1)$ 同序实数矩阵，B 为 A 的乱序阵，C 为 A 的反序阵，则

$S(A)\geqslant S(B)\geqslant S(C)$

即
$$\sum_{k=0}^{n}a_kb_k\geqslant\sum_{k=0}^{n}a_{i_k}b_{i_k}\geqslant\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

左边等号成立当且仅当 B 中任意两列同序；

右边等号成立当且仅当 B 中任意两列反序.

证：用调整法，先证 $S(A)\geqslant S(B)$.

若 B 中任意两列同序，显然有 $S(A)=S(B)$. 否则，可令 B 中有子阵 $\begin{bmatrix}a_k\leqslant a_r\\ b_{i_k}>b_{i_r}\end{bmatrix}$. 在 B 中把 b_{i_k} 与 b_{i_r} 换位，其余不动，这样就由 B 调整出一个 B'，则

$$\begin{aligned}S(B')-S(B)&=(a_kb_{i_r}+a_rb_{i_k})-(a_kb_{i_k}+a_rb_{i_r})\\&=(a_k-a_r)(b_{i_r}-b_{i_k})\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $S(B)\geqslant S(B')$

重复上述作法，可将 B 经过有限次调整得出 $B',B'',\cdots,B^x$，且它们的列积和增大，即

$S(B)\leqslant S(B')\leqslant S(B'')\leqslant\cdots\leqslant S(B^x)=S(A)\qquad(*)$

这就证明了 $S(A)\geqslant S(B)$

下面用 $S(A)\geqslant S(B)$ 来证 $S(B)\geqslant S(C)$

事实上，令

$$B'=\begin{bmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\\ -b_{i_0}\ -b_{j_1}\ \cdots\ -b_{i_n}\end{bmatrix}$$

$$C'=\begin{bmatrix}a_0\leqslant a_1\leqslant\qquad\cdots\leqslant a_n\\ -b_n\leqslant -b_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant -b_0\end{bmatrix}$$

则 C' 是 B' 的同序阵

所以，$S(C')\geqslant S(B')$

即 $\quad -S(C)\geqslant -S(B)$

亦即 $S(B)\geqslant S(C)$

综上有 $\quad S(A)\geqslant S(B)\geqslant S(C)$

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 或 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全相等，则($*$)式中必有一个不等号是严格的. 因此，左(右)等号成立当且仅当 B 中任意两列同序.

值得指出的是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 保证了 B 中任意两列同序(线反序)，因此等号成立，但反之不然.

排序不等式(Ⅱ)，设 A 为 $2(n+1)$ 同序非负实数矩阵，B 为 A 的乱序阵，C 为 A 的反序阵，则 $T(A)\leqslant T(B)\leqslant T(C)$

即 $$\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_k)\leqslant\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_{i_k})\leqslant\prod_{k=0}^{n}(a_k+b_{n-k}).$$
左(右)边等号成立当且仅当 B 中任意两列同(反)序.

证:若 B 中任意两列同序,显然有 $T(A)=T(B)$,否则矩阵 B 中有子阵 $\begin{bmatrix}a_k\leqslant a_r\\ b_{i_k}>b_{i_r}\end{bmatrix}$.在 B 中把 b_{i_k} 与 b_{i_r} 对调,其余不动,把 B 调整出一个 B'.则

$T(B')-T(B)=(a_k-a_r)(b_{i_k}-b_{i_r})\prod_{\substack{t=0\\k\neq t\neq r}}^{n}(a_t+b_{i_t})\leqslant 0$,所以

$T(B)\geqslant T(B')$

重复上述作法,我们可得矩阵序列 $B,B',\cdots,\cdots,B^x$ 使得

$T(B)\geqslant T(B')\geqslant\cdots\cdots\geqslant T(B^x)=T(A)$

这就证明了 $T(A)\leqslant T(B)$

下证 $T(B)\leqslant T(C)$,事实上,若 B 中任意两列反序,有 $T(B)=T(C)$,否则,B 中有子阵 $\begin{bmatrix}A_l\leqslant a_m\\ b_{i_l}<b_{i_m}\end{bmatrix}$,在 B 中把 b_{i_l} 与 b_{i_m} 对调,其余不动,把 B 调整出一个 B'_*,则

$$T(B'_*)-T(B)=(a_l-a_m)(b_{i_l}-b_{i_m})\prod_{\substack{t=0\\l\neq t\neq m}}^{n}(a_i+b_{i_l})\geqslant 0$$

所以 $T(B)\leqslant T(B')$

所以 B 可经过有限次这样的调整改造得到 C,即

$T(B)\leqslant T(B'_*)\leqslant T(B''_*)\leqslant\cdots\cdots\leqslant T(B^y_*)=T(C)$

等号成立的条件是显然的,证毕.

排序不等式(Ⅲ)设 A 为 $m\times n$ 同序非负实数矩阵,A' 为 A 的乱序阵,则有

(1) $S(A)\geqslant S(A')$;即 $\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}a'_{ij}$;

(2) $T(A)\leqslant T(A')$;即 $\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\leqslant\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a'_{ij}$

等号成立均当且仅当 A' 为 A 的可同序阵.

证:若 A' 是 A 的可同序阵,则 $S(A')=S(A)$,$T(A')=T(A)$,否则,A' 中必有两列反序,不妨设第 i 列和第 j 列反序($i<j$),可令

$a'_{ki}>a'_{kj}$, $k=1,2,\cdots,l$

$a'_{ki}>a'_{kj}$, $k=l+1,\cdots,m$

则可对调 a'_{ki},a'_{kj} 的位置,调整出 $A''=(a''_{ij})_{mxn}$

其中 $a''_{ki}=a'_{kj}<a'_{ki}=a''_{kj}$ $k=1,2,\cdots,l$

其余 $a''_{st}=a'_{st}$.令

$a'_{1i}\cdot a'_{2i}\cdots a'_{li}=a>b=a'_{1j}a'_{2j}\cdots a'_{lj}$

$a'_{l+1i}\cdot a'_{l+2i}\cdot\cdots\cdot a'_{mi}=c\leqslant d=a'_{l+1j}\cdot a'_{l+2j}\cdot\cdots\cdot a'_{mj}$

$a'_{1i}+a'_{2i}+\cdots+a'_{li}=x>y=a'_{1j}+a'_{2j}+\cdots+a'_{lj}$

$a'_{l+li}+a'_{l+2i}+\cdots+a'_{mi}=z\leqslant\omega=a'_{l+1j}+a'_{l+2j}+\cdots+a'_{mj}$

则 $S(A'')-S(A')=(ad+bc)-(ac+bd)$

$=(a-b)(d-c)\geqslant 0$

$T(A'')-T(A')$

$=[(x+\omega)(y+z)-(x+z)(y+\omega)]\prod_{\substack{r=1\\i\neq r\neq j}}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}a'_{kr}\right)$

$$= (x - y)(z - \omega) \prod_{\substack{k=1 \\ i \neq r \neq j}}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a'_{kr} \right) \leqslant 0$$

$\therefore S(A') \leqslant S(A''), T(A') \geqslant T(A'')$

这就是说,A' 可经过有限次这样的调整,可得出一个 A 的可同序矩阵 A^x, A^y,且

$S(A') \leqslant S(A'') \leqslant \cdots \leqslant S(A^x) = S(A)$

$T(A') \geqslant T(A'') \geqslant \cdots \geqslant T(A^y) = T(A)$

等号成立的条件稍加讨论便可得出.

四、切比雪夫不等式

设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}(\text{逆序和}) \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i(\text{顺序和}) \qquad (*)$$

证明:用 A 及 B 分别表示逆序和及顺序和,由排序不等式,得

$A \leqslant a_1 b_2 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_n + a_n b_1 \leqslant B$

$A \leqslant a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_2 \leqslant B$

…………………………

$A \leqslant a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-2} + a_n b_{n-1} \leqslant B$

$A \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \leqslant B$

把以上几个式子加起来,再除以 n 即为(*)式. 证毕

五、琴生(Jensen)不等式

首先给出凸函数的概念.

定义:设 $f(x)$ 是定义在数集 $D(\subseteq R)$ 上的函数,如果对于任意 $x_1, x_2 \in D$,有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_2 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad ①$$

其中 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1(\lambda_1, \lambda_2 > 0)$,则称 $f(x)$ 是 D 上的下凸函数,若不等式(1)反向,即有

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2) \geqslant \lambda_1, f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad ②$$

则称 $f(x)$ 是 D 上的上凸函数,若不等式 ①、② 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时取等号,则分别称为严格下凸函数与严格上凸函数.

琴生(*Jensen*)不等式:设 $p_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,n)$,$f(x)$ 是区间 $D(\subseteq R)$ 上的严格下凸函数,则对于任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in D$,有

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right) \leqslant \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \cdots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \qquad ③$$

等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

若 $f(x)$ 是严格上凸,则不等式 ③ 反向.

证:不妨设 $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$,若 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$,则(3)式等号成立,否则,设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全相等,我们用数学归纳法证明 ③ 成为严格不等式.

当 $n = 2$ 时,由严格下凸函数的定义即得. 设 $n = k$ 时,(3)成立,考虑 $n = k + 1$ 的情形. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1} \in \mathbf{R}^+$,$p_1$、$p_2 \cdots p_k + p_{k+1} = 1$,不全相等的 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1} \in D$,令

$$p_k + p_{k+1} = p_k', \frac{p_k}{p'_k} x_k + \frac{p_{k+1}}{p'_k} x_{k+1} = x'_k$$

则 $x_k' \in D, p_1 + \cdots + p_{k-1} + p_k' = 1$,且 $p_k x_k + p_{k+1} x_{k+1} = p'_k x'_k$,易知,$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 及 x_k' 不全相同,于是,由归纳假设

$$f(p_1 x_1 + \cdots + p_{k-1} x_{k-1} + p'_k x'_k) < p_1 f(x_1) + \cdots + p_{k-1} f(x_{k-1}) + p'_k f(x'_k) \qquad ④$$

又因为 $\frac{p_k}{p'_k}, \frac{p_{k+1}}{p'_k} \in \mathbf{R}^+$ 且两者的和为 1,故

$$f(x'_k) = f\left(\frac{p_k}{p'_k}x_k + \frac{p_{k+1}}{p'_k}x_{k+1}\right) \leqslant \frac{p_k}{p'_k}f_{(x_k)} + \frac{p_{k+1}}{p'_k}f_{(x_{k+1})}$$

将此不等式应用于(4)的右端,即得

$$f(p_1x_1 + \cdots + p_kx_k + p_{k+1}x_{k+1}) < p_1f(x_1) + p_2f(x_2) + \cdots + p_{k+1}f(x_{k+1})$$ 证毕.

【注】 ① 对于 $f(x)$ 严格上凸的情形,只要考虑 $-f(x)$ 即可.

② 特别地,令 $p_i = \frac{1}{n}(i = 1,2,\cdots,n)$,则(3)式成为

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \quad ⑤$$

利用基本初等函数的凸性可构造许多不等式.

§1.2 赛题精讲

例1 (1995.第36届IMO第2题)设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc = 1$,试证

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

证法一:(平均值不等式)由 $4x^2 + y^2 \geqslant 4xy$,有

$$\frac{x^2}{y} \geqslant x - \frac{y}{4}(y > 0)$$

得 $$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{a^2(ab+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)} \geqslant \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)$$

同理 $$\frac{1}{b^3(c+a)} \geqslant \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$

相加,左边 $\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$$\geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}} = \frac{3}{2}$$

证法二:(用柯西不等式)

设 $A = \frac{1}{a}, B = \frac{1}{b}, C = \frac{1}{c}$

则 $ABC = 1$,问题转化为证

$$\frac{A^2}{B+C} + \frac{B^2}{C+A} + \frac{C^2}{A+B} \geqslant \frac{3}{2}$$

由柯西不等式有

$$[(B+C) + (C+A) + (A+B)]\left[\frac{A^2}{B+C} + \frac{B^2}{C+A} + \frac{C^2}{A+B}\right] \geqslant (A+B+C)^2$$

从而 $$\frac{A^2}{B+C} + \frac{B^2}{C+A} + \frac{C^2}{A+B} \geqslant \frac{1}{2}(A+B+C) \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{ABC} = \frac{3}{2}$$

证法三:(排序不等式)

设 $A = \frac{1}{a}, B = \frac{1}{b}, C = \frac{1}{c}$,不妨设 $A \geqslant B \geqslant C$,则

$$\frac{1}{A+B} \leqslant \frac{1}{A+C} \leqslant \frac{1}{B+C}$$

从而 $$\frac{C}{A+B} \leqslant \frac{B}{A+C} \leqslant \frac{A}{B+C}$$

据排序不等式有

$$A \cdot \frac{A}{B+C} + B \cdot \frac{B}{A+C} + C \cdot \frac{C}{A+B}$$

$$\geqslant B \cdot \frac{A}{B+C} + C \cdot \frac{B}{A+C} + A \cdot \frac{C}{A+B}$$

$$A \cdot \frac{A}{B+C} + B \cdot \frac{B}{A+C} + C \cdot \frac{C}{A+B}$$

$$\geqslant C \cdot \frac{A}{B+C} + A \cdot \frac{B}{A+C} + B \cdot \frac{C}{A+B}$$

相加 $2\left(\frac{A^2}{B+C} + \frac{B^2}{A+C} + \frac{C^2}{A+B}\right)$

$\geqslant A + B + C \geqslant 3\sqrt[3]{ABC} = 3$

例 2 (2001. 第 42 届 IMO 试题第 2 题) 对所有正实数 a,b,c,证明:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

证明:引用"权方和不等式"

不等式左边为

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} = \sum \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^3+8abc}} = \sum \frac{a^{1+\frac{1}{2}}}{(a^3+8abc)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geqslant \frac{(\sum a)^{\frac{3}{2}}}{\left[(\sum a^3) + 24abc\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad ⑥$$

故原不等式左边 $\geqslant 1$,就只需式 ⑥ 的右边 $\geqslant 1$ 即可.

$$\frac{\left(\sum a\right)^{\frac{3}{2}}}{\left[\left(\sum a^3\right) + 24abc\right]^{\frac{1}{2}}} \geqslant 1$$

$\Leftrightarrow (\sum a)^3 \geqslant (\sum a^3) + 24abc$

$\Leftrightarrow \sum a^3 + 3\sum(a^2b + ab^2) + 6abc \geqslant (\sum a^3) + 24abc$

$\Leftrightarrow \sum(a^2b + ab^2) \geqslant 6abc \qquad ⑦$

$\because \sum(a^2b + ab^2) \geqslant 6\sqrt[6]{\prod a^2b \prod ab^2}$

$= 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6abc$

$\therefore$ 原不等式得证.

【评注】 (1) 这里 $\sum$, $\prod$ 表示循环求和,循环求积.

(2) 显然引用"权方和不等式"的这种方法较命题组的方法简洁,干净,漂亮.

例 3 (1994. 第 35 届中国队选拔赛试题) 已知$5n$ 个实数r_i, s_i, t_i, u_i, v_i 都大于 1 ($1 \leqslant i \leqslant n$),记

$$R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i, S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i, T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i, V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$$

求证:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_is_it_iu_iv + 1}{r_is_it_iu_iv_i - 1}\right) \geqslant \left(\frac{KSTUV + 1}{KSTUV - 1}\right)^n$$

方法导引:本题的结构告诉我们要用平均值不等式,实际上也可以直接应用平均值不等式来证明.但命题者直接运用平均值不等式有困难.先给出一个引理,经过转化,再用平均值不等式.为了使读者深刻理解本题,由"不直接应用平均值不等式"到"直接应用平均值不等式"找到其中的奥妙.特给出两种

证法.望读者仔细品味.

证法一:(命题组委提供的证法)

引理　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个大于 1 的实数,$A=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n \tag{8}$$

引理的证明.不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n$,则 $x_1\leqslant A\leqslant x_n$

我们先证明

$$\frac{(x_1+1)(x_n+1)}{(x_1-1)(x_n-1)}\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)\cdot\left(\frac{\dfrac{x_1x_n}{A}+1}{\dfrac{x_1x_n}{A}-1}\right) \tag{9}$$

由于

$(x_1+1)(x_n+1)(A-1)(x_1x_n-A)-(x_1-1)(x_n-1)(A+1)(x_1x_n+A)=2(x_1x_n+1)(A-x_1)(x_n-A)\geqslant 0$

∴ ⑨ 成立.

于是,利用 ⑨ 有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\geqslant\prod_{i=2}^{n-1}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\left(\frac{\dfrac{x_1x_n}{A}+1}{\dfrac{x_1x_n}{A}-1}\right)\left(\frac{A+1}{A-1}\right)$$

再考虑剩下的 $n-1$ 个实数:$n-2$ 个 $x_i(i=2,3,\cdots,n-1)$ 和$\frac{x_1x_n}{A}$,这 $n-1$ 个数的几何平均值仍为 A.因此这 $n-1$ 个实数中亦存在最大值和最小值,且最大值不小于 A,最小值不大于 A,采取同上的证明方法,经 $n-1$ 次,可得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n$$

引理得证.

再来证明原命题,令 $x_i=r_is_it_iu_iv_i(1\leqslant i\leqslant n)$,由引理可得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_is_it_iu_iv_{i+1}}{r_is_it_iu_iv_{i-1}}\right)\geqslant\left(\frac{B+1}{B-1}\right)^n$$

其中　$B=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(r_is_it_iu_iv_i)}$.

因此要证原不等式,只需要证明

$$\frac{B+1}{B-1}\geqslant\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1} \tag{10}$$

又有 $RSTUV=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\right)$

$$\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}r_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}s_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}t_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}u_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}v_i}=B$$

因此$(B+1)(RSTUV-1)-(B-1)(RSTUV+1)=2(RSTUT-B)\geqslant 0$

即 ⑩ 式成立,原不等式得证.

证法二:

当 $x_i>1$ 时,由算术几何平均值不等式得

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1} \tag{11}$$

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1} \quad ⑫$$

⑪ + ⑫ 得

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i+1}}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}}\leqslant 1$$

即

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}+1 \quad ⑬$$

用 x_i-1 替代 ⑬ 中的 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，得

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\geqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)}+1$$

即

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)}\leqslant\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}-1 \quad ⑭$$

⑬ ÷ ⑭ 得，

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i+1}{x_i-1}\geqslant\left(\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}+1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}-1}\right)^n \quad ⑮$$

函数 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$，当 $x>1$ 时是减函数，取 $x_i=r_is_it_iu_iv_i(1\leqslant i\leqslant n)$，易知此时 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\leqslant RSTUV$，结合 ⑮，即得所求.

深入研究本题，我们发现，构凸函数，用琴生不等式方法，也是十分漂亮的方法.

证法三：令 $f(x)=ln\frac{e^x+1}{e^x-1}, x\in\mathbf{R}^+$，则

$$f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x)^2-1}, f''(x)=\frac{2e^x(e^{2x}-1)}{[(e^x)^2-1]^2}$$

$\because x\in\mathbf{R}^+ \therefore f''(x)>0 \quad \therefore f(x)$ 是凸函数

现令 $x_i=ln(r_is_it_iu_iv_i),(1\leqslant i\leqslant n)$

$r=\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n},\cdots,v=\sqrt[n]{v_1v_2\cdots v_n}$，则

$$f(x_i)=ln\left(\frac{r_is_iu_iv_it_i+1}{r_is_iu_iv_it_i-1}\right), f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=ln\frac{rstuv+1}{rstuv-1}$$

由琴生不等式，得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{r_is_it_iu_iv_i+1}{r_is_it_iu_iv_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{rstuv+1}{rstuv-1}\right)^n\geqslant\left(\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1}\right)^n$$

例 4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证：

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}$$

证明：为了利用柯西不等式，将左边乘以因式

$$(\sqrt{a_1+a_2})^2+(\sqrt{a_2+a_3})^2+\cdots+(\sqrt{a_{n-1}+a_n})^2+(\sqrt{a_n+a_1})^2$$

得

$$[(\sqrt{a_1+a_2})^2+(\sqrt{a_2+a_3})^2+\cdots+(\sqrt{a_{n-1}+a_n})^2+(\sqrt{a_n+a_1})^2]$$

$$\left[\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}}\right)^2+\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}+a_n}}\right)^2+\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{a_1+a_2}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{a_1+a_2}}+\sqrt{a_2+a_3}\cdot\frac{a_2}{\sqrt{a_2+a_3}}+\cdots+\sqrt{a_{n-1}+a_n}\cdot\frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}+a_n}}+\right.$$

$$\sqrt{a_n+a_1}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{a_n+a_1}}\Big)^2$$

即 $2(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right)\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$

$\therefore \frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}$

【评注】 (1) 对于分式不等式,通过配因式运用柯西不等式去分母是一种常见的手法.

(2) 本例更一般的情形是:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是正实数,满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$,则

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k \tag{16}$$

由柯西不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k+b_k}\cdot\frac{a_k}{\sqrt{a_k+b_k}}\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}$$

即 $$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k} \tag{17}$$

又由已知得

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=2\sum_{k=1}^{n}a_k$$

在 ⑰ 式两端约去 $2\sum a_k$,即得 ⑯ 式.

⑯ 式还可由 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^2}{a_k+b_k}+\frac{a_k+b_k}{4}\right)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$

移项简捷地给出证明.

例5 (1969.第11届IMO第6题)试证对所有满足条件 $x_1>0,x_2>0,x_1y_1-z_1^2>0,x_2y_2-z_2^2>0$ 的实数 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2,有不等式

$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2+}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$ 成立,并且给出式中等号成立的充分必要条件.

【分析】 本题是个分式型不等式,进一步说明"通过配因式运用柯西不等式证明"的手法.

证明:设 $A_1=\sqrt{x_1y_1}+z_1,A_2=\sqrt{x_2y_2}+z_2$

$B_1=\sqrt{x_1y_1}-z_1,B_2=\sqrt{x_2y_2}-z_2$

由已知可得 $y_1>0,y_2>0,A_1>0,A_2>0,B_1>0,B_2>0$,据柯西不等式,有

$$[(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2]\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)$$

$$\geqslant[(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2-(z_1+z_2)^2]\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)$$

$$=(A_1+A_2)(B_1+B_2)\left(\frac{1}{A_1B_1}+\frac{1}{A_2B_2}\right)$$

$$\geqslant(\sqrt{A_1B_1}+\sqrt{A_2B_2})^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{A_1B_1}}+\frac{1}{\sqrt{A_2B_2}}\right)^2$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\left[\sqrt{\sqrt{A_1B_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{A_1B_1}}}+\sqrt{\sqrt{A_2B_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{A_2B_2}}}\right]^4=8$$

变形即得,并且易知等号成立的充分必要条件是 $x_1=x_2,y_1=y_2,z_1=z_2$

例 6 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数，$m>1$，且 $(m-1)s=x_1+x_2+\cdots+x_m$，则

$$\frac{x_1{}^n}{x_2+\cdots+x_m}+\frac{x_2{}^n}{x_3+\cdots+x_m+x_1}+\cdots+\frac{x_m{}^n}{x_1+\cdots+x_{m-1}}$$
$$\geqslant\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}S^{n-1} \tag{18}$$

证明：不妨 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m>0$，则 $x_1{}^n\geqslant x_2{}^n\geqslant\cdots\geqslant x_m{}^n>0$，则

$$0<x_2+\cdots+x_m\leqslant x_3+\cdots+x_m+x_1\leqslant x_1+\cdots+x_{m-1}$$
$$\frac{x_1^n}{x_2+\cdots+x_m}\geqslant\frac{x_2^n}{x_3+\cdots+x_m+x_1}\geqslant\cdots\geqslant\frac{x_m^2}{x_1+\cdots+x_{m-1}}>0$$

由切比雪夫不等式得

$$(x_2+\cdots+x_m)\frac{x_1{}^n}{x_2+\cdots+x_m}+(x_3+\cdots+x_m+x_1)\cdot$$
$$\frac{x_2{}^n}{x_2+\cdots+x_m+x_1}+\cdots+(x_1+\cdots+x_{m-1})\cdot\frac{x_m^n}{x_1+\cdots+x_{m-1}}\leqslant$$
$$\frac{1}{m}[(x_2+\cdots+x_m)+(x_3+\cdots+x_m+x_1)+\cdots+(x_1+\cdots+x_{m-1})]\cdot$$
$$\left(\frac{x_1{}^n}{x_2+\cdots+x_m}+\frac{x_2{}^n}{x_3+\cdots+x_m+x_1}+\cdots+\frac{x_m{}^n}{x_1+\cdots+x_{m-1}}\right)$$

从而 ⑱ 式左边

$\geqslant\dfrac{m}{m-1}\cdot\dfrac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_m}(x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_m{}^n)$ 再由切比雪夫不等式得

$$x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_m{}^n$$
$$\geqslant\frac{1}{m}(x_1{}^{n-1}+x_2{}^{n-1}+\cdots+x_m{}^{n-1})(x_1+x_2+\cdots+x_m)$$
$$\geqslant\frac{1}{m^2}(x_1{}^{n-2}+x_2{}^{n-2}+\cdots+x_m{}^{n-2})(x_1+x_2+\cdots+x_m)^2$$
$$\geqslant\cdots\cdots$$
$$\geqslant\frac{1}{m^{n-1}}(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$$

$\therefore$ ⑱ 式左边 $\geqslant\dfrac{1}{(m-1)m^{n-2}}(x_1+x_2+\cdots+x_m)^{n-1}$

$$=\frac{1}{(m-1)m^{n-2}}[(m-1)s]^{n-1}$$
$$=\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-2}S^{n-1}$$

【评估】

(1) 当 $m=3$ 时，即为第 28 届 IMO 预选题：

若 a,b,c 是三角形的三边，且 $2s=a+b+c$，则

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot S^{n-1},(n\geqslant1)$$

(2) 当 $n=1$ 时 ⑱ 式成为

$$\frac{x_1}{x_2+\cdots+x_m}+\frac{x_2}{x_3+\cdots+x_m+x_1}+\cdots+\frac{x_m}{x_1+\cdots+x_{m-1}}\geqslant\frac{m}{m-1}$$

例 7 (1992.第 6 届 IMO 第 2 题) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数，记 $x_{n+1}=x_1,a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，求证：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$$

并证明等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$

证：设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个排列，
且 $0\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_n$，于是 $1\leqslant 1+y_1\leqslant 1+y_2\leqslant\cdots\leqslant 1+y_n$，由排序
不等式（Ⅰ）有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}$$

故只需要证明

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(y_j-a)^2$$

由于 $\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}+\frac{1+y_{n-j+1}}{1+y_j}-2=\frac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+y_j)\cdot(1+y_{n-j+1})}\leqslant\frac{(y_j-y_{n-j+1})^2}{(1+a)^2}$

$\therefore\sum_{j=1}^{n}\frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\cdot\sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]}^{n}(y_j-a)^2$

$\therefore\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$

等号当且仅当 $y_j=y_{n-j+1}=a(j=1,2,\cdots,n)$
即 $x_1=x_2=\cdots=x_n=a$.

例 8 （1991.第 32 届 IMO 备选题）设 $\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1,a_i\geqslant 0,0\leqslant b_i\leqslant p,i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2$，如果 $\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}a_i=1$

求证：

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}a_j\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$$

证：设 $A_i=a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$. 由于 $0\leqslant b_i\leqslant p$，且 $\sum_{i=1}^{n}b_i=1,\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant 1$

由排序不等式（Ⅰ）易知

$$\sum_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant pA_i+(1-p)A_2\leqslant p(A_1+A_2)$$

由 $A\cdot G$ 不等式

$$A_1+A_2=a_3a_4\cdots a_n(a_2+a_1)$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}=\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$$

即 $\sum_{i=1}^{n}b_iA_i\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$

【注】 本题可改造为 1992 年中国数学奥林匹克队选拔考试的一道试题：

"给定自然数 $n\geqslant 2$，求最小正数 λ，使对任意正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 中任意 n 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，只要 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，就有

$a_1a_2\cdots a_n\leqslant\lambda(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$

事实上，原题不等式即

$$a_1a_2\cdots a_n\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}\tag{19}$$

取 $p=\frac{1}{2}$，再由柯西不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_ib_i}\geqslant\frac{\left(\sum b_i\right)^2}{\sum a_ib_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^{-1}$$

所以 ⑲ 可化为

$$a_1a_2\cdots a_n \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{(n-1)^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

$\therefore \lambda \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$

又当 $a_1 = a_2 = \frac{1}{2(n-1)}, a_3 = \cdots = a_n = \frac{1}{n-1}$

$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \cdots = b_n = 0$ 时,有

$$a_1a_2\cdots a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot(b_1a_1+b_2a_2)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

综合上述知,$\lambda_{min} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$

例 9 (1) 设三个正实数 a,b,c 满足

$(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$

求证:a,b,c 一定是某个三角形的三边.

(2) 设 $n(n\geqslant 3)$ 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1{}^4+a_2{}^4+\cdots+a_n{}^4)$

求证:这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

证:(1) 题设不等式等价于

$2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2<0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)>0$

$\Leftrightarrow a+b>0, b+c>a, c+a>b$

得证.

(2) 对于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个正实数,任取三个,不妨设为 a_1,a_2,a_3,由柯西不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2 = \left[\frac{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}{2}+\sum_{j=4}^{n}a_j^2\right]^2$$
$$\leqslant\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sum_{i=1}^{3}a_i^2}{2}\right)^2+\sum_{j=4}^{3}a_j^4\right]\left(\sum_{j=1}^{n-1}1^2\right)$$
$$=(n-1)\left[\frac{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)^2}{2}+\sum_{j=4}^{n}a_j{}^4\right]$$

再利用题设条件,有

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n}a_j{}^4 < \left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2\right)^2$$
$$\leqslant(n-1)\left[\left(\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}{2}\right)^2+\sum_{j=4}^{n}a_j{}^4\right]$$

化简后,得$(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)^2 > 2(a_1{}^4+a_2{}^4+a_3{}^4)$

【评注】 (1) 上面使用的拆项配数的方法技巧性很强,不易想到,为此,也可以用待定系数法来配数使用柯西不等式,事实上,由柯西不等式(带正参数 λ) 得:

$$(n-1)\sum_{j=1}^{n}a_j{}^4 < \left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)^2 = \left[\lambda\left(\sum_{i=1}^{3}a_i{}^2\right)\cdot\frac{1}{\lambda}+\sum_{j=4}^{n}a_j{}^2\right]^2$$
$$\leqslant\left[\lambda^2\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)^2+\sum_{j=4}^{n}a_j{}^4\right]\left(\frac{1}{\lambda^2}+n-3\right)$$

为了将$\sum_{j=4}^{n} a_j^4$从不等式中消去，令

$\frac{1}{\lambda^2}+n-3=n-1$，得$\lambda^2=\frac{1}{2}$，代入得

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2>2(a_1^4+a_2^4+a_3^4).$$

(2) 作为一般情况，我们有如下结论：

设$p>1, a_i>0 (i=1,2,\cdots,n)$且满足不等式

$$(n-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{n} a_i^p<\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p$$

则对任意a_i, a_j, a_k有

$$2^{p-1}(a_i^p+a_j^p+a_k^p)<(a_i+a_j+a_k)^p$$

证：由 Hölder 不等式得($\lambda>0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

$(n-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{n} a_i^p<\left(\sum_{i=1}^{n} a_k\right)^p$

$=\left[(a_1+a_2+a_3)+\sum_{k=4}^{n} a_k\right]^p$

$=\left[\left(\frac{1}{\lambda}\right)^q+(n-3)\right]^{p-1}\cdot\left[\lambda^p(a_1+a_2+a_3)^p+\sum_{k=4}^{n} a_k^p\right]$

令$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^q+(n-3)=n-1$，得$\lambda^q=\frac{1}{2}$，即$\lambda^p=\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$

从而　$(n-1)^{p-1}\sum_{i=1}^{n} a_i^p<\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}(a_1+a_2+a_3)^p+\sum_{k=4}^{n} a_k^p\right]\cdot(n-1)^{p-1}$

即　$a_1^p+a_2^p+a_3^p<\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}(a_1+a_2+a_3)^p$ 得证

例 10　给定$m>1$，及正实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，如果不等式

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i-a_i)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right)^{\frac{1}{m}}-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

对所有非负实数的$x_1, x_2, \cdots, x_n$都成立，求$r_1, r_2, \cdots, r_n$，的值.

解：令$x_i=0 (i=1,2,\cdots,n)$，得，$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$. 再令$x_i=2a_i (i=1,2,\cdots,n)$，得

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

所以　$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}$　⑳

又令$x_k=a_k (k=2,3,\cdots,n), 0<x_1<a_1$

得　$$r_1\geqslant\frac{\left(a_1^m+\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}-\left(x_1^m+\sum_{i=2}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}}{a_1-x_1}>0$$

同理可推出$r_i>0, i=2,3,\cdots,n$. 于是由 Hölder 不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}=\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (*)$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{m}{m-1}}\geqslant 1 \quad ㉑$$

另一方面，由 ⑳ 知，原题设不等式等价于 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{m}\right)^{\frac{1}{m}}$

上式中令 $x_i = r_i^{\frac{m}{m-1}}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{m}{m-1}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{1}{m}}$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{m}{m-1}} \leqslant 1 \qquad ㉒$$

综合 ㉑、㉒ 知

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{m}{m-1}} = 1 \qquad ㉓$$

这说明(*)式只能成为等式，故

$$r_i^{\frac{m}{m-1}} = \lambda a_i^{m} (i = 1,2,\cdots,n)$$

代入 ㉓，得 $\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{m}\right)^{-1}$ 所以求得

$$r_i = \left[\frac{a_i^{m}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{m}}\right]^{\frac{m-1}{m}}, i = 1,2,\cdots,n$$

【注】 当 $m = 2$ 时，该题为 1988 年 CMO 第 1 题.

关于“琴生不等式”例 2 和例 4 的证法三我们已经有了一个用法，为强化它的应用，再给出一个例子说明“琴生不等式”的用法.

例 11 设 $a_i \in \mathbf{R}^+, 0 \leqslant x_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a_i} \leqslant \frac{1}{1 + x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证：若某个 x_j 为 0，易知不等式成立，以下设 $0 < x_i \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n$，令 $y_i = \ln x_i$，则 $x_i = e^{y_i} (i = 1,2,\cdots,n)$，且 $-\infty < y_i \leqslant 0$. 考虑函数

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^t} (-\infty < t \leqslant 0)$$

则 $f'(t) = -\frac{e^t}{(1 + e^t)^2}, f''(t) = e^t(e^t - 1)\frac{1}{(1 + e^t)^3} < 0$

所以，$f(t)$ 是 $(-\infty, 0]$ 上的严格上凸函数，由琴生不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + e^{y_i}} \leqslant (1 + e^{\sum a_i y_i})^{-1}$$

即 $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + x_i} \leqslant (1 + x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n})^{-1}$

易知等号成立当且仅当 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

【评注】 此法中为了确定函数的凹凸性是用导数方法，即用“分析”的方法，其根据是：

(1) $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 D 上严格下凸；

(2) $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 D 上严格上凸.

例 12 （第 39 届 IMO 预选题）设 x, y, z 为正数，$xyz = 1$，证明：

$$\frac{x^3}{(1 + y)(1 + z)} + \frac{y^3}{(1 + z)(1 + x)} + \frac{z^3}{(1 + x)(1 + y)} \geqslant \frac{3}{4}$$

【分析】 证法关键利用等号成立的条件，构造不等式，用均值不等式证明，即由 $x = y = z = 1$ 有

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}=\frac{1}{4}=\frac{1+y}{8}=\frac{1+z}{8}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{8}(1+y)+\frac{1}{8}(1+z)\geqslant$$

$$3\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\cdot\frac{1+y}{8}\cdot\frac{1+z}{8}}=\frac{3}{4}x$$

证明:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geqslant\frac{3}{4}x$$

同理

$$\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+z}{8}\geqslant\frac{3}{4}y$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\geqslant\frac{3}{4}z.$$

所以

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1}{8}(6+2x+2y+2z)\geqslant\frac{3}{4}(x+y+z)$$

从而$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$

$\geqslant\frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{1}{4}(3+x+y+z)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)-\frac{3}{4}$

$\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

故 $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+y)(1+x)}\geqslant\frac{3}{4}$

【评注】 (1) 本例可推广为:

命题 1 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{N}$ 且 $xyz=1$,证明:

$$\frac{x^n}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^n}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^n}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4} \quad ㉔$$

先证引理:若 $xyz=1,x,y,z\in\mathbf{R}$,则 $x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\geqslant x^n+y^n+z^n(n\in\mathbf{N})$

事实上,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则

$$\begin{aligned}&x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}-x^ny-y^nz-z^nx\\&=x^n(x-y)+y^n(y-z)+z^n(z-x)\\&=(x-y)(x^n-z^n)+(y-x)(y^n-z^n)\geqslant 0\end{aligned}$$

所以 $x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\geqslant x^ny+y^nz+z^nx \quad ㉕$

同理可得

$$\begin{aligned}&x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}-x^nz-y^nx-z^ny\\&=x^n(x-z)+y^n(y-x)+z^n(z-y)\\&=(x^n-y^n)(x-y)+(x^n-z^n)(y-z)\geqslant 0\end{aligned}$$

所以

$$x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1}\geqslant x^nz+y^nz+z^ny$$

于是

$$\begin{aligned}&3(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})\\&\geqslant(x^n+y^n+z^n)(x+y+z)\\&\geqslant(x^n+y^n+z^n)\cdot 3\sqrt[3]{xyz}\\&=3(x^n+y^n+z^n)\end{aligned}$$

引理得证.

证明推广命题.

通分去分母,㉔ 式可化为

$$4(x^n+y^n+z^n+x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})$$
$$\geqslant 3(1+x)(1+y)(1+z) \tag{26}$$
$$=3(2+x+y+z+xy+yz+xz)$$

由引理可知

$$x^n+y^n+z^n \geqslant x+y+z$$
$$x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1} \geqslant x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$$

又

$$x^n+y^n+z^n \geqslant 3\sqrt[3]{(xyz)^n}=3$$
$$x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1} \geqslant 3$$

所以㉖式左边

$4(x^n+y^n+z^n+x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})$

$=(x^n+y^n+z^n+x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})+3(x^n+y^n+z^n+x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})$

$\geqslant 6+3(x+y+z)+3(xy+yz+xz)$

$=3(2+x+y+z+xy+yz+xz)=$ 右边

由此可知㉔成立. 证毕

当 $n=3$ 时,即为第 39 届 IMO 这道预选题.

(2) 从以上证明过程可知,条件 $xyz=1$,可扩展为 $xyz \geqslant 1$,对于 n 属于负整数情况,记㉔式为

$$\sum \frac{x^{-n}}{(1+y)(1+z)} \geqslant \frac{3}{4}(n \in \mathbf{N}) \tag{27}$$

令 $x=x_1{}^{-1}, y=y_1{}^{-1}, z=z_1{}^{-1}$,则 $x_1 \cdot y_1 \cdot z_1=1$.

㉗式可化为

$$\sum \frac{x_1{}^n}{(1+y_1{}^{-1})(1+z_1{}^{-1})} \geqslant \frac{3}{4}$$

即

$$\sum \frac{x_1{}^n \cdot y_1 \cdot z_1}{(y_1+1)(z_1+1)}=\sum \frac{x_1{}^{n-1}}{(1+y_1)(1+z_1)} \geqslant \frac{3}{4}$$

由㉔式知,当 $n \geqslant 2$ 时,以上不等式成立,所以(27)式成立的条件是 $n \geqslant 2$,由此可知,对小于 -1 的负整数,例 12 不等式成立.

综上就有

设 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$, $xyz \geqslant 1$, n 是不等于 $0,-1$ 的所有整数都有 $\sum \frac{x^n}{(1+y)(1+z)} \geqslant \frac{3}{4}$ 成立.

§1.3　针对性训练

A组

1. 设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}^+ \ (i = 1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1} b_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

2. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 是等差正数列（公差 $d > 0$），求证：

(1) $\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + a_n}{2}$

(2) $n\left(\sqrt[n]{\dfrac{a_n + 1}{a_1}} - 1\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{d}{a_k} \leqslant \dfrac{d}{a_1} + (n-1)\left(1 - \sqrt[n-1]{\dfrac{a_1}{a_n}}\right)$

3. 设 $0 < a_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,n)$. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + a - a_i} + \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i) \leqslant 1$$

4. 设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}^+ \ (i = 1,2,\cdots,n)$，$m \in \mathbf{N}$. 求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{im+1}}{b_i^{\ m}} \geqslant (m+1)\sum_{i=1}^{n} a_i - m\sum_{i=1}^{n} b_i$$

5. 设 α, β, γ 为锐角，且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 求证：对任意实数 x, y, z 有 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant \cot\beta\cot\gamma \cdot yz + \cot\gamma\cot\alpha \cdot zx + \cot\alpha\cot\beta \cdot xy$

6. 设 $a_k, b_k \in \mathbf{R}, k = 1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{\ 2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \left[\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

7. 设 $a_i > 0, b_i > 0, a_ib_i - c_i^2 > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,

则 $\dfrac{n^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\right)^2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_ib_i - c_i^2}$

并指出何时取等号.

•

8. 求下列各式的最小值.

(1) $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{4b}{c+a} + \dfrac{5c}{a+b}(a,b,c > 0)$

(2) $\dfrac{a}{b+3c} + \dfrac{b}{8c+4a} + \dfrac{9c}{3a+2b}(a,b,c > 0)$

9. 若 $a,b,c > 0$,且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,试求:$f(x,y,z) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z}$,在 x,y,z 同为正时的最小值.

10. 设 $a_{ij} \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$, 则 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt[m]{a_{i1}a_{i2} - a_{im}}\right)^m \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}\right)\cdots\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{im}\right)$

B 组

1. 设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, $m,k \in \mathbf{N}$,且 $k > m$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^k}{b_i^m} \geqslant n^{1+m-k} \cdot \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\right)^m}$$

2. 设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0, 0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ 或 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0, r,s \geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^r}{b_i^s} \geqslant n^{1+s-r} \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s}$$

3. 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, 0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ 或 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0, r, s \geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^r b_i^s} \geqslant \frac{n^{1+s+r}}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^r \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s}$$

4. 设 $x_i \in \mathbf{R}^+$,求证:

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)\cdots\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant \left(G_n + G_n^{-1}\right)^n$$

5. 设非负实数 $a_i(i = 1,2,\cdots,r)$ 满足 $\sum_{i=1}^{r} a_i = k > 0, p, q \in \mathbf{R}^+, m \geqslant 0$,则

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^p}{(m + k - a_i)^q} \geqslant \frac{k^p r^{1+q-p}}{(mr + ur - k)^q}$$

6.(1997.第 26 届美国数学奥林匹克竞赛题)已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,证明:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leqslant \frac{1}{abc} \quad ①$$

7.(第41届IMO题)设a,b,c是正实数,且满足$abc=1$,证明:$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant 1$

8.(2000.奥地利—波兰数学竞赛题)对任意满足$a+b+c=1$的非负实数a,b,c,证明:不等式$2\leqslant(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leqslant(1+a)(1+b)(1+c)$成立,并求等号成立的条件.

第二章

基本方法与基本技巧

§2.1　知识要点与基本方法

证明不等式没有固定的程序，证法因题而异，而且灵活多样，技巧性很强. 但是除去一些专题研究的方法外，我们应当掌握一些证明不等式的基本方法，基本技巧，才能使我们拿过一个题目，不会束手无策，这里简单归纳了一下，大致有如下方法：

1. 基本不等式法
2. 比较法
3. 作积法
4. 综合法
5. 分析法
6. 数学归纳法
7. 放缩法
8. 反证法
9. 代换法

§2.2　赛 题 精 讲

1. 基本不等式法

若 $x,y\in\mathbf{R}^{+}$，则 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$ (*)，这是众所周知的基本不等式，但是应用之，却会产生出人意料的功效.

例 1　(第 36 届 IMO 试题) 设 a,b,c 为正实数，且满足 $abc=1$，求证：$\frac{1}{a^{3}(b+c)}+\frac{1}{b^{3}(c+a)}+\frac{1}{c^{3}(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$

证明：原不等式等价于

$$\frac{(abc)^{2}}{a^{3}(b+c)}+\frac{(abc)^{2}}{b^{3}(c+a)}+\frac{(abc)^{2}}{c^{3}(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$$

即

$$\frac{(bc)^{2}}{ab+bc}+\frac{(ac)^{2}}{bc+ba}+\frac{(ab)^{2}}{ca+cb}\geqslant\frac{3}{2}$$

由不等式(*)得

$$\frac{(bc)^{2}}{ab+bc}+\frac{ab+ac}{4}\geqslant bc$$

$$\frac{(ac)^{2}}{bc+ba}+\frac{bc+ba}{4}\geqslant ac$$

$$\frac{(ab)^{2}}{ca+cb}+\frac{ca+cb}{4}\geqslant ab$$

以上三个不等相加,得

$$\frac{(bc)^2}{ab+ac}+\frac{(ac)^2}{bc+ba}+\frac{(ab)^2}{ca+cb}\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geqslant\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3}{2}$$

∴ 原不等式成立.

例 2 (第 31 届 IMO 预选题)设 a,b,c,d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的正实数,求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$$

证明:据不等式(*)得

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{9}\geqslant\frac{2}{3}a$$

即 $\dfrac{a^3}{b+c+d}\geqslant\dfrac{2}{3}a^2-\dfrac{1}{9}a(b+c+d)$

同理可得

$$\frac{b^3}{a+c+d}\geqslant\frac{2}{3}b^2-\frac{1}{9}c(a+b+d)$$

$$\frac{c^3}{a+b+d}\geqslant\frac{2}{3}c^2-\frac{1}{9}c(a+b+d)$$

$$\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{2}{3}d^2-\frac{1}{9}d(a+b+c)$$

以上四个不等式两边分别相加,并注意到 $ab+bc+cd+da=1$ 可得

$$\begin{aligned}&\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\\&\geqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(1+ac+bd)\\&=\frac{2}{9}[3(a^2+b^2+c^2+d^2)-(1+ac+bd)]\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&2(a^2+b^2+c^2+d^2)\\&=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+(d^2+a^2)\\&\geqslant 2ab+2bc+2cd+2da=2\end{aligned}$$

∴ $\dfrac{5}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant\dfrac{5}{2}$

又 $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant ac+bd$

∴ 原不等式左边 $\geqslant\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{5}{2}-1\right)=\dfrac{1}{3}$

例 3 (第 20 届 IMO 试题)已知:$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两各不相同的正整数,求证:对任何正整数 n,下列不等式成立:

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

证明:因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为两两各不相同的正整数,所以显然有:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

据不等式(*)得

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{1}{a_1}\geqslant 2\cdot\frac{1}{1},\frac{a_2}{2^2}+\frac{1}{a_2}\geqslant 2\cdot\frac{1}{2},\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{a_n}\geqslant 2\cdot\frac{1}{n}$$

以上各不等式两边分别相加,得

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant 2(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})$$
$$\geqslant 2(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

例 4 (1991.亚太地区竞赛试题)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正实数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$,求证:

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

证明:据不等式(*)得

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_1+b_1}{4}\geqslant a_1,\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\frac{a_2+b_2}{4}\geqslant a_2,\cdots,\frac{a_n^2}{a_n+b_n}+\frac{a_n+b_n}{4}\geqslant a_n$$

以上各不等式两边分别相加,得

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

【注】 例 4 的两个特例如下二题.

题 1.(第二届友谊杯国际数学邀请赛试题)已知 a,b,c 均为正实数,求证:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c)$$

题 2.(第 24 届全苏中学生数学竞赛试题)求证:对于和为 1 的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,不等式

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}$$

成立.

2. 比较法

(i) 差值比较法:欲证 ⟺ 证明 $A-B>0$

例 5 (1978.第20届IMO第5题)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots\cdots$ 为两两各不相同的正整数,求证:对任何正整数 n,下列不等式成立.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

证明:

由

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}$$
$$=(a_1-1)+\frac{a_2-2}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}$$
$$\geqslant\frac{(a_1-1)+(a_2-2)}{2^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}$$
$$=\frac{(a_1+a_2)-(1+2)}{2^2}+\frac{a_3-3}{3^2}+\sum_{k=4}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}$$
$$\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3)-(1+2+3)}{3^2}+\frac{a_4-4}{4^2}+\sum_{k=5}^{n}\frac{a_k-k}{k^2}$$
$$\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}k\Big)\geqslant 0.$$

故 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

例 6 证明:对任意三角形的边长 a,b,c,成立不等式

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$$

证明:a,b,c 为三角形的三边长,这实际上隐含给出了 $a>0,b>0,c>0$,且 $a+b>c,a+c>b,b+c>a$ 的条件,我们在这些条件下去证明不等式

作差

$S=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3$

$\because c(a-b)^2+4abc=c(a+b)^2$

$\therefore S=a[(b-c)^2-a^2]+b[(c-a)^2-b^2]+c[(a+b)^2-c^2]$

$=a(b-c-a)(b-c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+c(a+b-c)(a+b+c)$

$=(a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)$

$=(a+b-c)[c^2-(a-b)^2]$

$=(a+b-c)(a+c-b)(c-a+b)$

$\because a+b>c,b+c>a,c+a>b,$

$\therefore a+b-c>0,c+b-a>0,c+a-b>0,$

$\therefore S>0$

即 $$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4ab>a^3+b^3+c^3$$

(ii) 商值比较法:若已知 $B>0$,欲证 $A\geqslant B\Leftrightarrow$ 证明$\frac{A}{B}\geqslant 1$ 或$\frac{B}{A}\leqslant 1$

例 7 设 $x_i\in\mathbf{R}^+$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 求证:

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{x_n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$$

证:由对称性可设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$,于是当 $i>j$ 时,$x_i-x_j\geqslant 0,\frac{x_i}{x_j}\geqslant 1$,故

$$\frac{\text{左边}}{\text{右边}}=\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{x_1-x_2}{n}}\cdot\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{\frac{x_1-x_3}{n}}\cdots\left(\frac{x_1}{x_n}\right)^{\frac{x_1-x_n}{n}}\cdot\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{\frac{x_2-x_3}{n}}\cdot\left(\frac{x_2}{x_4}\right)^{\frac{x_2-x_4}{n}}\cdots\left(\frac{x_2}{x_n}\right)^{\frac{x_2-x_n}{n}}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^{\frac{x_{n-1}-x_n}{n}}$$

$\geqslant 1$ 证毕

3. 作积法

例 8 (第 41 届 IMO 第 2 大题) 设 a,b,c 是正实数,且满足:$abc=1$,证明:

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})\leqslant 1$$

【分析】 设 $M=(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})$ 那么,如果利用条件 $abc=1$ 将 M 作适当变形得 M 的两种形式,作两种形式的积,即 M^2,并能证明 $M^2\leqslant 1$,又 $M>0\therefore M\leqslant 1$ 得证.

证明:

令 $M=(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})$

则 $M=abc(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})$

$=\left[b\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\right]\left[c\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\right]\left[a\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\right]$

$=(ab-b+1)(bc-c+1)(ac-a+1)$

且 $M=(abc)^2(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a})$

$=\left[bc(a-1+\frac{1}{b})\right]\left[ac(b-1+\frac{1}{c})\right]\left[ab(c-1+\frac{1}{a})\right]$

$=[(abc-bc+c)(abc-ac+a)(abc-ab+b)]$

$$= (1 - bc + c)(1 - ac + a)(1 - ab + b)$$

于是作积

$$\begin{aligned} M^2 &= [(1 - bc + c)(1 + bc - c)][(1 - ac + a)(1 + ac - a)][(1 - ab + b)(1 + ab - b)] \\ &= [1 - (bc - c)^2][1 - (ac - a)^2][1 - (ab - b)^2] \\ &\leqslant 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

即 $M \leqslant 1$

【评注】 此例显然是一道国际竞赛大题，但却用如此简单的作积方法即可解决，其中妙味尽在证题之中.

例 9 (1998 年全国高中联赛二试第二大题) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n \in [1,2]$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

并问等号成立的条件.

证明：

由 $1 \leqslant a_i \leqslant 2, 1 \leqslant b_i \leqslant 2$ 易得

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{a_i}{b_i} \leqslant 2 \quad ①$$

由此易得 $a_i - \frac{b_i}{2} \geqslant 0, a_i - 2b_i \leqslant 0$. 于是只能

作积

$$\left(a_i - \frac{b_i}{2}\right)(a_i - 2b_i) \leqslant 0 \quad ②$$

即

$$a_i^2 - \frac{5}{2} a_i b_i + b_i^2 \leqslant 0$$

为了出现 $\frac{a_i^3}{b_i}$，并消去 $a_i b_i$ 项，

再作积

$$\left(a_i^2 - \frac{5}{2} a_i b_i + b_i^2\right)\left(\frac{a_i}{b_i} + \frac{2}{5}\right) \leqslant 0 \quad ③$$

即

$$\frac{a_i^3}{b_i} - \frac{21}{10} a_i^2 + \frac{2}{5} b_i^2 \leqslant 0$$

于是移项求和，并用题设条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

即有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} &\leqslant \frac{21}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\ &= \frac{21}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\ &= \frac{17}{10} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \end{aligned}$$

等号成立的充要条件是 ① 取等号

$$a_i = \frac{b_i}{2} \text{ 或 } a_i = 2b_i \quad ④$$

下面再找 ④ 的等价条件，首先证明 a_i 只能取 1 或 2$(i = 1,2,\cdots,n)$. 若不然，存在 $a_j \in [1,2]$ 有 $\frac{b_j}{2} = a_j > 1 \Rightarrow b_j > 2$ 矛盾

或 $2b_j = a_j < 2 \Rightarrow b_j < 1$，也矛盾

这表明，一切 a_i 只能取 1 或 2，并且有 $\begin{cases} a_i = 1 \\ b_i = 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_i = 2 \\ b_i = 1 \end{cases}$ 均满足 $b_i = \dfrac{2}{a_i}$

其次证明，n 必为偶数，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中一半取 1，一半取 2，设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有 k 个 1，有 $n-k$ 个 2，则 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中有 k 个取 2，$n-k$ 个取 1，代入已知条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，得

$$\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{k} + \underbrace{2^2 + \cdots + 2^2}_{n-k\text{个}}$$

$$= \underbrace{2^2 + \cdots + 2^2}_{k\text{个}} + \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{n-k\text{个}}$$

即
$$k + 4(n-k) = 4k + (n-k)$$

得 $n = 2k$

这说明，等号成立的必要条件是 n 为偶数，且 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中有一半取 1，另一半取 2，$b_i = \dfrac{2}{a_i}$. 易知条件也是充分的，因而，这就是充分必要条件.

【评注】

(1) 本题第一部分证明出不等式的关键是 ② 和 ③ 两步作积.

(2) 本题可作如下推广

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in [a, b]$

$(0 < a < b)$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{y_i} \leqslant \frac{a^4 + b^4}{a^3 b + ab^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad ⑤$$

并且 ⑤ 式取等号的充要条件是：

n 取偶数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中有一半取 a，一半取 b，且 $x_i y_i = ab, i = 1, 2, \cdots, n$.

证明：由 $a \leqslant x_i \leqslant b, a \leqslant y_i \leqslant b$ 易知 $\dfrac{a}{b} y_i \leqslant x_i \leqslant \dfrac{b}{a} y_i$

作积 $(x_i - \dfrac{a}{b} y_i)(x_i - \dfrac{b}{a} y_i) \leqslant 0$

即
$$x_i^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab} x_i y_i + y_i^2 \leqslant 0 \qquad ⑥$$

再作积　乘以 $\dfrac{x_i}{y_i} + \dfrac{ab}{a^2 + b^2} > 0$，得

$$\frac{x_i^3}{y_i} - \frac{a^4 + b^4 + a^2 b^2}{ab(a^2 + b^2)} x_i^2 + \frac{ab}{a^2 + b^2} y_i^2 \leqslant 0 \qquad ⑦$$

移项并求和

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3}{y_i} \leqslant \frac{a^4 + b^4 + a^2 b^2}{ab(a^2 + b^2)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{ab}{a^2 + b^2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$= \frac{a^4 + b^4 + a^2 b^2}{ab(a^2 + b^2)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{ab}{a^2 + b^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$= \frac{a^4 + b^4}{a^3 b + ab^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad ⑧$$

故 ⑤ 式得证. 并且 ⑧ 取等号

$\Leftrightarrow$ ⑦ 中每一式都取等号

$\Leftrightarrow$ ⑥ 中每一式都取等号

$\Leftrightarrow x_i = \dfrac{a}{b} y_i$ 或 $x_i = \dfrac{b}{a} y_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

首先证明，x_i 只能取 a 或 $b(i=1,2,\cdots,n)$. 若不然，存在 x_j 使 $a<x_j<b$，有

$\frac{a}{b}y_j=x_j>a\Rightarrow y_j>b$，矛盾；

或 $\frac{b}{a}y_j=x_j<b\Rightarrow y_j<a$，也矛盾.

这表明，所有的 x_i 只取 a 或 b 两个值，且只能是 $\begin{cases}x_i=a,\\ y_i=b;\end{cases}\begin{cases}x_i=b,\\ y_i=a.\end{cases}$ 满足 $x_iy_i=ab$

其次证明，n 为偶数，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 一半取 a，一半取 b，记 x_i 中有 k 个 a，$n-k$ 个 b，则 y_i 中有 k 个 b，$n-k$ 个 a. 代入已知条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$，得

$$\underbrace{a^2+\cdots+a^2}_{k\text{个}}+\underbrace{b^2+\cdots+b^2}_{(n-k)\text{个}}$$
$$=\underbrace{b^2+\cdots+b^2}_{k\text{个}}+\underbrace{a^2+\cdots+a^2}_{(n-k)\text{个}}$$

故 $(b^2-a^2)(n-2k)=0$

但 $b^2-a^2>0$，故只有 $n=2k$.

这就证明了：等号成立时，n 为偶数，且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有一半取 a，一半取 b，且 $x_iy_i=ab$
反之，充分性的验证可以分别计算不等式左、右两边的值，有

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{a^3}{b}+\cdots+\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}+\cdots+\frac{b^3}{a}\\&=\frac{n}{2}\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\right)\\&=\frac{n(a^4+b^4)}{2ab}(n\text{ 为偶数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\frac{a^4+b^4}{a^3b+ab^3}(a^2+\cdots+a^2+b^2+\cdots+b^2)\\&=\frac{a^4+b^4}{ab(a^2+b^2)}\cdot\frac{n}{2}(a^2+b^2)\\&=\frac{n(a^4+b^4)}{2ab}(n\text{ 为偶数})\end{aligned}$$

左，右两边相等

4. 综合法

综合法是从已知条件出发，依据不等式的性质，函数性质及重要不等式逐步推导出待证不等式的一种方法.

例 10 对任意满足 $a+b+c=1$ 的非负实数 a,b,c，证明：不等式
$2\leqslant(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\leqslant(1+a)(1+b)(1+c)$ 成立，并求等号成立的条件.

证明：

设 $ab+bc+ca=u,abc=v$

则 $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+ux-v$ ⑨

这里记 $\sum f(a)=f(a)+f(b)+f(c)$. $f(a)$ 是关于 a 的代数式.

注意到 ⑨ 式左边在 $x=a,b,c$ 时均为零，所以

$a^3-a^2+ua-v=0,b^3-b^2+ub-v=0,c^3-c^2+uc-v=0$

$$\begin{aligned}\text{于是}\sum a^3&=\sum a^2-u\sum a+3v\\&=(\sum a)^2-2u-u+3v\\&=1-3u+3v\end{aligned}$$

又对前面的三个式子分别乘以 a,b,c 可知

$$\sum a^4 = \sum a^3 - u\sum a^2 + v\sum a$$
$$= (1-3u+3v) - u(1-2u) + v$$
$$= 1 + 2u^2 - 4u + 4v$$

利用上述表示,可知

$$\sum(1-a^2)^2 = \sum a^4 - 2\sum a^2 + 3$$
$$= 1 + 2u^2 - 4u + 2v - 2(1-2u) + 3$$
$$= 2 + 2u^2 + 4v$$

鉴于 $u \geqslant 0, v \geqslant 0$,可知 $\sum(1-a^2)^2 \geqslant 2$,等号当且仅当 $u = v = 0$ 时取到.

另一方面,$\prod(1+a) = 1 + \sum a + \sum ab + abc = 2 + u + v$

所以,为证右边的不等式,只需证明 $2u^2 + 3v \leqslant u$ ⑩

由于 $u - 2u^2 = u(1-2u) = u((\sum a)^2 - 2u) = u\sum a^2$

而 $u\sum a^2 \geqslant \frac{1}{3}u(\sum a)^2 = \frac{1}{3}(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$$\geqslant \frac{1}{3}(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2})(3\sqrt[3]{abc}) = 3abc = 3v$$

所以⑩式成立,并且易知⑩式当且仅当 $a = b = c$ 或者 $u = v = 0$ 时成立.

故命题成立.

左边等号成立的条件为 a,b,c 中有两个数为0,而另一个为1;右边等号成立的条件为 $a = b = c$ 或者 a,b,c 中有两个数为0,而另一个为1.

【评注】

(1) 由上述证明可知,本题是代数式变形,部分与整体的关系及均值不等式的综合运用.

(2) 解题关键:证明左边不等式,就是努力简化代数式,利用多项式理论逼近2,证明右边不等式需要用到均值不等式.

5. 分析法

分析法的证明过程是从求证的不等式出发,层层推出使它成立的充分条件,直到得到一个明显成立的不等式或者一个比较易证明的不等式为止,这种方法在探求不等式的证明思路上是最有效的方法之一.

例 11 设 x,y,z,λ,μ 是实数,且满足 $x+y+z=1, \lambda\mu(3\lambda-\mu)>0, \lambda-\mu x, \lambda-\mu y, \lambda-\mu z$ 同号,则有

$$f(x,y,z) = \frac{x}{\lambda-\mu x} + \frac{y}{\lambda-\mu y} + \frac{z}{\lambda-\mu z} \geqslant \frac{3}{3\lambda-\mu}$$

证:令 $a = \lambda - \mu x, b = \lambda - \mu y, c = \lambda - \mu z$,则 $a+b+c = 3\lambda - \mu$

$$\therefore f(x,y,z) = g(a,b,c) = \frac{\lambda-a}{\mu a} + \frac{\lambda-b}{\mu b} + \frac{\lambda-c}{\mu c}$$
$$= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{\mu}$$

于是,只需证明

$$\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{3}{\mu} \geqslant \frac{3}{3\lambda-\mu}$$

它等价于 $\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant \frac{9\lambda}{\mu(3\lambda-\mu)}$

当 $\lambda\mu(3\lambda-\mu) > 0$ 时,上面的不等式又等价于

$$(3\lambda-\mu)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

但 $a+b+c = 3\lambda-\mu$,于是

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 9$$

展开,整理得

$$(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\geqslant 6 \quad ⑪$$

当 a,b 同号时,$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$

当 b,c 同号时,$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$

当 c,a 同号时,$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2$

显然,⑪ 式成立.

6. 数学归纳法

数学归纳法可用来证明与自然数有关的不等式,在证明中应估量选择恰当的归纳形式,常用的有第一,第二数学归纳法.

例 12 题目见本讲例5

证明:(用数学归纳法)

(1)$n=1$ 时,$a_1\geqslant 1$ 显然成立.

(2) 假设 $n=m$ 时命题成立,当 $n=m+1$ 时,对于两两不等的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{m+1}$,取其中最大者为 a_j,若 $j=m+1$,由归纳假设

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

及

$$\frac{a_{m+1}}{(m+1)^2}\geqslant\frac{1}{m+1}$$

相加即得.

若 $1\leqslant j\leqslant m$,则由

$$\frac{a_j}{j^2}+\frac{a_{m+1}}{(m+1)^2}\geqslant\frac{a_{m+1}}{j^2}+\frac{a_j}{(m+j)^2}\text{(排序原理)}$$

$$\geqslant\frac{a_{m+1}}{j^2}+\frac{1}{m+1}$$

得
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{a_k}{k^2}&=\frac{a_1}{1^2}+\cdots+\frac{a_{j-1}}{(j-1)^2}+\frac{a_j}{j^2}+\cdots+\frac{a_{m+1}}{(m+1)^2}\\&\geqslant\frac{a_1}{1^2}+\cdots+\frac{a_{j-1}}{(j-1)^2}+\frac{a_{m+1}}{j^2}+\cdots+\frac{a_j}{(m+1)^2}\\&\geqslant\left(\frac{a_1}{1^2}+\cdots+\frac{a_{j-1}}{(j-1)^2}+\frac{a_{m+1}}{j^2}+\cdots+\frac{a_m}{m^2}\right)+\frac{1}{m+1}\\&\geqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

由数学归纳法知不等式成立.

例 13 设 x 为正数,$[x]$表示 x 的整数部分.

证明:

$$[x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}\leqslant[nx] \quad ⑫$$

证:第二数学归纳法.

令

$$a_k=[x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[kx]}{k} \quad ⑬$$

1°)$n=1$ 时$[x]\leqslant[x]$

2°) 假设 $n<k$ 时 ⑫ 成立,即

$$a_1 \leqslant [x]$$
$$a_2 \leqslant [2x]$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{k-1} \leqslant [(k-1)x]$$

相加得：$a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \leqslant [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x]$ ⑭

∴ 由定义 ⑬ 有 $a_k - a_{k-1} = \dfrac{[kx]}{k}$

∴

$$k(a_k - a_{k-1}) = [kx]$$
$$(k-1)(a_{k-1} - a_{k-2}) = [(k-1)x]$$
$$\cdots\cdots$$
$$2(a_2 - a_1) = [2 \cdot x]$$
$$1 \cdot a_1 = [x]$$

相加得

$$ka_k - a_{k-1} - \cdots - a_1 = [kx] + [(k-1)x] + \cdots + [x] \quad ⑮$$

由 ⑭ + ⑮ 得：

$ka_k \leqslant [kx] + [(k-1)x] + \cdots + [x] + [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x]$

$\because [ix] + [(k-i)x] \leqslant [ix + (k-i)x] = [kx]$

$\therefore ka_k \leqslant \underbrace{[kx] + [kx] + \cdots + [kx]}_{k\text{个}} = k[kx]$

即 $a_k \leqslant [kx]$

∴(12) 对 $n = k$ 时成立

∴(12) 对一切自然数成立

【注】 (1) 这里用的是第二数学归纳法.

第二数学归纳法分为以下三步.

① 奠基：证明 $n = 1$ 时命题成立.

② 归纳假设：设 $n \leqslant k$ 时命题成立.

③ 归纳递推：由归纳假设推出 $n = k + 1$ 时命题也成立.

(2) 第二数学归纳法与数学归纳法基本形式上的区别归纳假设.

第二数学归纳法的三步完成之后，命题的正确性可由以下逻辑关系得证.

"1 对"(奠基步骤证得)；

"1 对"(即"$n \leqslant 1$ 对")⇒"2 对"(归纳递推步骤证得)；

"1 对"，"2 对"，(即"$n \leqslant 2$ 对")⇒"3 对"(理由同上)；

"1 对"，"2 对"，"3 对"(即"$n \leqslant 3$ 对")⇒"4 对"(理由同上)，

依此类推，可得"n 对"(n 为任意自然数)，因此，第二数学归纳法是一种可信赖的形式.

7. 放缩法

为了证明不等式 $A \leqslant B$，我们找一个(或多个)中间量 C 作比较，即若能断定 $A \leqslant C$ 或 $C \leqslant B$ 同时成立，那么 $A \leqslant B$ 显然正确. 所谓"放"即把 A 放大到 C，再把 C 放大到 B，反之，由 B 缩小经过 C 而变到 A，则称为"缩"，统称为"放缩法"，放缩法是一种技巧性很强的不变形，必须时刻注意到放缩的跨度，放不能过头，缩不能不及.

例 14 求证 $16 < \sum\limits_{k=1}^{80} \dfrac{1}{\sqrt{k}} < 17$

证明：由 $\sqrt{k-1} < \sqrt{k} < \sqrt{k+1}$ 可得

$$\frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

即 $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$ 求和可得

$$2\cdot\sum_{k=2}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{81}-1)=16$$

$$1+\sum_{k=1}^{80}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=1+2(\sqrt{80}-1)=2\sqrt{80}-1<17$$

$$\therefore 16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$$

例 15 设 a,b,c,d 为任意正数,求证:

$$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$$

证明:首先,分母缩小以证明右式

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$$

$$<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}$$

$$=2$$

然后分母放大以证明左式

$$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$$

$$>\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}$$

$$=1$$

所以,原不等式成立

例 16 若 a,b,c 都为正数,证明

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

证明:不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$

$$\begin{aligned}\text{左}-\text{右}&=\frac{2a^2-ab-ac}{2(b+c)}+\frac{2b^2-ba-bc}{2(c+a)}+\frac{2c^2-ca-cb}{2(a+b)}\\&=\frac{a(2a-b-c)}{2(b+c)}+\frac{b(2b-a-c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}\\&\geqslant\frac{b(2a-b-c)}{2(a+c)}+\frac{b(2b-a-c)}{2(c+a)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}\\&=\frac{b(a+b-2c)}{2(a+c)}-\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}\\&\geqslant\frac{c(a+b-2c)}{2(a+c)}+\frac{c(2c-a-b)}{2(a+b)}=0\end{aligned}$$

例 17 设 $a_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$ 求证:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

证:左边

$$=2^n(1+\frac{a_1-1}{2})(1+\frac{a_2-1}{2})\cdots(1+\frac{a_n-1}{2})$$

$$\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right) \quad ⑯$$

$$\geqslant 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right) \quad ⑰$$

$$=\frac{2^n}{n+1}[n+1+(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)]$$

$=\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$

【评注】 此题证明中⑯、⑰两步"缩小"恰恰是证明本题的关键.

8. 反证法

例 18 (第25届全俄中学生数学奥林匹克(十一年级)竞赛题)是否存在实数 a,b 和 c,使得对所有实数 x 和 y,不等式

$|x+a|+|x+y+b|+|y+c|>|x|+|x+y|+|y|$?

解:假设这样的实数 a,b 和 c 存在,选取 $x>0$ 和 $y>0$,并使得

$x+a\geqslant 0, x+y+b\geqslant 0, y+c\geqslant 0$,由题设不等式的左边减右边所得的差为

$$a+b+c>0 \quad ⑱$$

如果取 $x<0$ 或 $y<0$,并使得 $x+a<0, x+y+b<0, y+c<0$

由题不等式的左边减右边所得的差为

$$-a-b-c>0,\text{即 } a+b+c<0 \quad ⑲$$

由⑱、⑲式得到矛盾,所以要求的实数 a,b,c 不存在.

9. 换元法

(1) 增量代换

若 $a\geqslant b$,则可设 $a=b+\alpha$,其中 $\alpha\geqslant 0$ 称为增量.

例 19 (1992年加拿大数学奥林匹克)实数 $x,y,z>0$,证明不等式 $x(x-z)^2+y(y-z)^2\geqslant(x-z)(y-z)(x+y-z)$

并确定等号何时成立.

证明:欲证明的不等式等价于

$$x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2z-y^2z-y^2x-z^2x-z^2y\geqslant 0$$

即
$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geqslant 0 \quad ⑳$$

⑳式关于 x,y,z 对称,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$

令 $x=z+t_1, y=z+t_2$,其中 $t_1\geqslant t_2\geqslant 0$,则⑳式等价于

$$(z+t_1)(t_1-t_2)t_1+(z+t_2)(t_2-t_1)t_2+zt_1t_2\geqslant 0$$

即
$$(t_1-t_2)[(z+t_1)t_1-(z+t_2)t_2]+zt_1t_2\geqslant 0 \quad ㉑$$

而㉑式显然成立,故原不等式成立.

同时,易知,仅当 $x=y=z$ 时等号成立.

(2) 均值代换

若 $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$,则可设 $x_i=\frac{a}{n}+t_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有 $\sum_{i=1}^{n}t_i=0$

例 20 若 $x,y,z\geqslant 0$,且 $x+y+z=1$,求证:$0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

证:由对称性:不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,于是 $1=x+y+z\geqslant 3z$,即 $z\leqslant\frac{1}{3}$ 故 $2xyz\leqslant\frac{2}{3}xy\leqslant xy$ 从而

$$yz+zx+(xy-2xyz)\geqslant 0$$

右边不等式可考虑"均值代换"

令 $x+y=\frac{1}{2}+t, z=\frac{1}{2}-t$,则由 $x+y\geqslant 2z$ 得

$\frac{1}{6}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$. 于是:$xy+yz+zx-2xyz=\frac{1}{4}-t^2+xy\cdot 2t$

$\leqslant\frac{1}{4}-t^2+2t(\frac{x+y}{2})^2=\frac{1}{4}\cdot 2t(\frac{1}{2}-t)(\frac{1}{2}-t)+\frac{1}{4}$

$\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{2t+(\frac{1}{2}-t)+(\frac{1}{2}-t)}{3}\right]^3+\frac{1}{4}=\frac{7}{27}$

例 21 已知 $a+b+c+d+e=8, a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$,求证:$0\leqslant e\leqslant \frac{16}{5}$

证明:考虑"均值代换"

设 $a=2-\frac{e}{4}+t_1, b=2-\frac{e}{4}+t_2, c=2-\frac{e}{4}+t_3, d=2-\frac{e}{4}+t_4$,则 $\sum_{i=1}^{4} t_i=0$

从而有 $16=\sum_{i=1}^{4}\left[(2-\frac{e}{4})+t_i\right]^2+e^2$

$$=4(2-\frac{e}{4})^2+2(2-\frac{e}{4})\cdot\sum_{i=1}^{4}t_i+\sum_{i=1}^{4}t_i{}^2+e^2$$

$$\geqslant(4-\frac{e}{2})^2+e^2$$

解得
$$0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$$

(3) 局部代换

例 22 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}=1$.求证:$abc\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$

证明:设 $x=\frac{a^2}{1+a^2}, y=\frac{b^2}{1+b^2}, z=\frac{c^2}{1+c^2}$,有 $0<x,y,z<1, x+y+z=1$,且

$$a=\sqrt{\frac{x}{1-x}}, b=\sqrt{\frac{y}{1-y}}, c=\sqrt{\frac{z}{1-z}}$$

于是,$abc\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow(1-x)(1-y)(1-z)\geqslant 8xyz$

$\because(1-x)(1-y)(1-z)=(y+z)\cdot(z+x)(x+y)$

$\geqslant 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}\cdot 2\sqrt{xy}=8xyz$

$\therefore$ 原不等式成立.

(4) 整体代换

证明分式不等式时,如果分母是多项式,可将分母设为一个整体,这将有利于问题的解决.

例 23 (第 19 届莫斯科奥林匹克试题)设 x,y 是满足 $|x|<1,|y|<1$ 的任意实数,求证:$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{2}{1-xy}$

证:设 $1-x^2=a, 1-y^2=0$,则 $a>0, b>0$,且 $a+b=2-(x^2+y^2)\leqslant 2-2xy$.

$\because(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 4$

$\therefore\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}\geqslant\frac{4}{2-2xy}=\frac{2}{1-xy}$

$\therefore\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{2}{1-xy}$

例 25 已知 $x,y,z>0$,求证:

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}\leqslant\frac{3}{4}$$

证:

设$\begin{cases}2x+y+z=a\\x+2y+z=b\\x+y+2z=c\end{cases}$

则：$\begin{cases} x = \dfrac{3a-b-c}{4} \\ y = \dfrac{3b-c-a}{4} \\ z = \dfrac{3c-a-b}{4} \end{cases}$

于是

$$\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{x+2y+z}+\frac{z}{x+y+2z}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3a-b-c}{a}+\frac{3b-c-a}{b}+\frac{3c-a-b}{c}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left[9-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)-\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{4}(9-2-2-2)=\frac{3}{4}$$

此外，还有"三角代换"，"复数代换""坐标代换""对称代换""万能代换" 等等，望读者在学习过程留心留意，注意总结，提高证明不等式的能力.

§2.3 针对性训练

A组

1. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,证明对任意实数 x,y,z 有

$x^2+y^2+z^2\geqslant\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy+\sqrt{\frac{b+c}{a}}yz+\sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right)$.并指出等号成立的充要条件.

2. 设 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$,求证:对任意满足 $x+y+z=0$ 的实数 x,y,z 有 $yz\sin^2\alpha+zx\sin^2\beta+xy\sin^2\gamma\leqslant 0$.

3. 设 $a_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 求证:对于任意非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有不等式 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i^2$ 成立的充要条件是 $a_i+a_j\geqslant 0(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$.

4. 设实数 a,b,c 使不等式

$A(x-y)(x-z)+B(y-z)(y-x)+C(z-x)(z-y)\geqslant 0$.对一切实数 x,y,z 都成立,问 A、B、C 应满足什么条件?

5. 设 $b+c>a\geqslant b\geqslant c>0$,求证:

$2(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3$

6. 设 $f(x),g(x)$ 是[0,1]上的实值函数,
证明:一定存在 $x_0,y_0\in[0,1]$ 使得

$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}$

7. 设 $0\leqslant x_i\leqslant 1,i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2$,则

$$\frac{n}{1+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\leqslant\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_1\cdots x_n}}$$

8. 设 $x_i > 0(i = 1,2,\cdots,n;n \geqslant 2)$. 求证：

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leqslant n - 1$$

B 组

1. 设 $a_i \in \mathbf{N}(i = 1,2,\cdots,n;n \geqslant 3)$，求证

$$2n \leqslant \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \frac{a_2 + a_4}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n} + \frac{a_n + a_2}{a_1} \leqslant 3n$$

2. 设 m,n 是正整数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$，是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的不同元素，并且满足若有 $a_i + a_j \leqslant n(1 \leqslant i < j \leqslant m)$，则存在 $k(1 \leqslant k \leqslant m)$，使得 $a_i + a_j = a_k$，求证：

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}$$

3. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n > 1,(n \geqslant 3)$，且 $|a_{k+1} - a_k| < 1(k = 1,2,\cdots,n-1)$，证明：

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} < 2n - 1$$

4. 设实数 $x,y,z,\alpha,\beta,\gamma$ 满足条件：$x + y + z > 0,\alpha + \beta + \gamma > 0,xy + yz + zx = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$，证明：

$$(\beta + \gamma)x + (\gamma + \alpha)y + (\alpha + \beta)z \geqslant 2 + \frac{(\gamma y - \beta z)^2}{(y+z)(\beta + \gamma)}$$

5. 设 $a_i \in \mathbf{R}^+(i = 1,2,\cdots,n)$，令

$kb_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k(k = 1,2,\cdots,n)$

$Cn = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2$

$Dn = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2$

求证：$Cn \leqslant Dn \leqslant 2Cn$

6. 设 $0 < m_1 \leqslant a_i \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_i \leqslant M_2, i = 1,2,\cdots,n$，则

$$1 \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}{\left(\sum a_i b_i\right)^2} \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right)^2$$

7. 设 $a_i \in \mathbf{R}, b_i \in \mathbf{R}(i = 1,2,\cdots,n)$，则

$$\left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}(a_i b_j - a_j b_i)\right]^2$$

$$\leqslant \left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j\right] \cdot \left[(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j\right]$$

第三章

递推不等式

§3.1 知识要点与基本方法

数列一般都有着明显的递推关系，由递推关系建立的一类不等式我们称之为"递推不等式"，有关递推不等式的证明问题，既要有证明不等式的基本思路和方法，又要结合数列递推关系本身的结构和特点，因此有着较强的技巧性，本讲结合具体实例，分析证明递推不等式的若干方法. 证明递推不等式的基本方法大致有

1. 利用递推关系与重要不等式.
2. 利用递推关系与裂项求和.
3. 利用递推的变形.
4. 用数学归纳法.
5. 构造辅助数列.
6. 利用数列的性质.
7. 利用部分和.
8. 反证法.
9. 构造递推关系.

§3.2 赛题精讲

1. 有关"利用递推关系和重要不等式"的例题

例 1 设数列$\{a_n\}$满足下列条件:

$a_1=5, a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+8a_n+16}{4a_n}(n=1,2,\cdots\cdots)$. 求证: $a_n\geqslant 4(n=1,2,\cdots)$

证明: 由 $a_1=5$ 及递推公式，可得 $a_n>0$，递推公式可以写成

$$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n+\frac{16}{a_n}+8)$$

又因为 $a_n>0, \dfrac{16}{a_n}>0$

有 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n+\dfrac{16}{a_n}+8)$

$\geqslant\dfrac{1}{4}(2\sqrt{a_n\cdot\dfrac{16}{a_n}}+8)$

$=4$

故 $a_{n+1}\geqslant 4$

又 $\because a_1=5>4$

$\therefore a_n\geqslant 4(n=1,2,\cdots\cdots)$

例 2 数列$\{F_n\}$定义如下: $F_1=1, F_2=2$，对任意的 $n\in\mathbf{N}$，有 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，证明: 对于任何

的 $n \in \mathbf{N}$,均有

$$\sqrt[n]{F_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$$

证明:令 $F_0 = F_2 - F_1 = 1$

于是 $1 = \frac{F_k}{F_{k+1}} + \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}, k = 1,2,\cdots,n$

从而 $1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{F_k}{F_{k+1}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$

$$\geqslant \sqrt[n]{\frac{F_1}{F_2}\cdot\frac{F_2}{F_3}\cdot\cdots\cdot\frac{F_n}{F_{n+1}}} + \sqrt[n]{\frac{F_0}{F_2}\cdot\frac{F_1}{F_3}\cdot\cdots\cdot\frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{F_{n+1}}} + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n\cdot F_{n+1}}}$$

因此 $\sqrt[n]{F_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{F_n}}$

2. 有关"利用递推关系与裂项求和"的例题

首先裂项求和是基本公式

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) \text{ 或 } a_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

例 3 定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_1 = \frac{1}{2}, 2ka_k = (2k-3)a_{k-1}(k \geqslant 2)$$

求证:对一切 $n \in \mathbf{N}$,有 $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$

【分析】 对递推式进行变形,可通过裂项求和变成"连续相差"的形式

证明:由题设可得

$$2(k+1)a_{k+1} = (2k-1)a_k$$

有

$$-a_k = 2[(k+1)a_{k+1} - ka_k]$$

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\sum_{k=1}^{n}[(k+1)a_{k+1} - ka_k]$$

$$= 2[(n+1)a_{n+1} - a_1]$$

即

$$1 - \sum_{k=1}^{n} a_k = 2(n+1)a_{n+1}$$

易知,对一切 $n \in \mathbf{N}, a_n > 0$,

故

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$$

例 4 设 $x_0 = 5, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}(n = 0,1,2,\cdots)$,求证:$45 < x_{1000} < 45.1$

证明:$\because x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$

$\therefore x_{n+1}^2 = x_n{}^2 + \frac{1}{x_n{}^2} + 2$

$x_n > 0$,且 $x_{n+1} > x_n$

于是 $x_{n+1}^2 = x_0^2 + \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}^2 - x_k^2)$

$$= x_0^2 + \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{x_k^2} + 2)$$

$$= 25 + 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x_k^2}$$

取 $n = 999$,则

$$x_{1000}^2 = 25 + 2000 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} > 45^2$$

又 $x_{1000}^2 = 2025 + \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=100}^{999} \frac{1}{x_k^2}$

$$< 2025 + \frac{100}{x_0^2} + \frac{900}{x_{100}^2} < 2033$$

$$< 45.1^2$$

(其中,$x_{100}^2 = 25 + 200 + \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{x_k^2} > 225$)

故 $45 < x_{1000} < 45.1$

3. 有关"利用递推关系变形"的例题

例 5 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1 = 1, a_n a_{n+1} = n + 1 (n \in \mathbf{N})$.求证:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

证明:由题设知 $a_2 = 2, a_n > 0$

$n = 1$ 时,$\frac{1}{a_1} = 1 > 2(\sqrt{2} - 1)$,命题成立.

当 $n \geqslant 2$ 时,由 $a_n a_{n+1} = n + 1$,得

$a_{n-1} a_n = n$

所以 $a_n (a_{n+1} - a_{n-1}) = 1$

从而有 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k+1} - a_{k-1})$

$$= a_{n+1} + a_n - 2$$

$$\geqslant 2\sqrt{a_n a_{n+1}} - 2$$

$$= 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

例 6 设 $n (n \geqslant 2)$ 是整数,证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} < 4$$

证:令 $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$

下面首先建立关于 a_n 的递推关系,然后证明结论.

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= \frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{2^{n-2}}\right)$$

$$+ \frac{1}{2n}\left(\frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{2^{n-2}}\right)$$

即

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \cdot a_n + \frac{n+1}{n}$$

又

$$a_2 = \sum_{k=1}^{2-1} \frac{2}{2-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} = 2$$

同理可得 $a_3=3, a_4=\frac{10}{3}, a_5=\frac{10}{3}$

设 $a_k\leqslant\frac{10}{3}(k\geqslant 5)$，则当 $k\geqslant 5$ 时，

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\frac{k+1}{2k}\cdot a_k+\frac{k+1}{k}\\&\leqslant\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{10}{3}+\frac{k+1}{k}\\&=\frac{8}{3}(1+\frac{1}{k})\leqslant\frac{8}{3}(1+\frac{1}{5})<\frac{10}{3}\end{aligned}$$

问题得证.

4. 利用数学归纳法

关于利用数学归纳法，在第一讲中我们已经讲了两例，有所交待. 但因为"递推不等式"的特殊性，利用数学归纳法是一种十分有效的基本方法，故本讲对此方面的问题再加大一些篇幅，进行专题研究，使读者有较大的收益.

例 7 令 $a_1=2, a_2=7$，对 $n\geqslant 2$，设 a_{n+1} 是整数，且由 $-\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}<\frac{1}{2}$，证明：对所有 $n\geqslant 2$，a_n 是奇数.

证明：易知 $a_1=2, a_2=7, a_3=25, a_4=89,\cdots$.

下面用数学归纳法证明

$$a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2} \quad ①$$

$n=3,4$ 时，显然成立

假设式 ① 对于 $k(k>2)$ 成立，则

$$\frac{a_k^2}{a_{k-1}}=\frac{a_k(3a_{k-1}+2a_{k-2})}{a_{k-1}}$$

如果

$$\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}<1 \quad ②$$

则
$$\begin{aligned}\frac{a_k^2}{a_{k-1}}&\leqslant 3a_k+2a_{k-1}+\left|\frac{2a_{k-2}}{a_{k-1}}\right|\cdot\left|\frac{a_{k-1}^2-a_k\cdot a_{k-2}}{a_{k-2}}\right|\\&<3a_k+2a_{k-1}+\left|a_k-\frac{a_{k-1}^2}{a_{k-2}}\right|\\&<3a_k+2a_{k-1}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

根据 a_{k+1} 的定义得 $a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1}$，即式 ① 对 $n=k+1$ 也成立.

对于式 ②，当 $n=3,4$ 时成立.

设对于 k 时，式 ② 成立，并且式 ① 成立.

则
$$\begin{aligned}a_k&=3a_{k-1}+2a_{k-2}\\&=2a_{k-1}+(a_k+2a_{k-2})>2a_{k-1}\end{aligned}$$

所以，式 ② 对一切自然数 $k(k\geqslant 3)$ 成立，问题得证.

例 8 （1997 年中国数学冬令营联赛试题六）设非负数列 $a_1, a_2,\cdots$ 满足条件

$$a_{m+n}\leqslant a_n+a_m, m,n\in N^*$$

求证：对任意 $n\geqslant m$ 均有

$$a_n\leqslant ma_1+\left(\frac{n}{m}-1\right)a_m.$$

【分析】 题设给出"$n\geqslant m$"，所以可从 $n=m$ 开始考虑，用数学归纳法对 n 进行归纳.

证明：由条件得

$$0\leqslant a_n\leqslant a_{n-1}+a_1\leqslant\cdots\leqslant na_1 \quad ③$$

下面用数学归纳法证明命题对一切 $n,m \in \mathbf{N}^*$ 成立.

固定 $m \in \mathbf{N}^*$，当 $n = 1$ 时

求证式 $\Leftrightarrow (1-m)a_1 \leqslant (\frac{1}{m}-1)a_m$

$\Leftrightarrow (m-1)a_m \leqslant (m-1)m \cdot a_1$

由③知当 $n=1$ 时命题成立.

假设当 $1 \leqslant n \leqslant k$ 时命题成立，分两种情况讨论：

1°) 若 $k < m$，则由③得

$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_m}{m} < a_1 - \frac{a_m}{m}$$

由 $a_1 - \frac{a_m}{m} \geqslant 0$ 知

$$\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_m}{m} \leqslant \frac{m}{k+1}(a_1 - \frac{a_m}{m})$$

得到 $a_{k+1} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1}{m} - 1\right)a_m$

2°) 若 $k \geqslant m$，则 $k+1-m \geqslant 1$

由条件得 $a_{k+1} \leqslant a_{k+1-m} + a_m$

由假设得 $a_{k+1-m} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1-m}{m} - 1\right)a_m$

得到 $a_{k+1} \leqslant ma_1 + \left(\frac{k+1}{m-1} - 1\right)a_m$

综合 1°)、2°) 知，当 $n = k+1$ 时命题成立.

所以，对一切 $r \geqslant m$，均有

$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) \cdot a_m$$

例 9 （第 37 届 IMO 预选题）给定 $a > 2$，$\{a_n\}$ 递归定义如下：

$$a_0 = 1, a_1 = a, a_{n+1} = \left(\frac{a_n{}^2}{a_{n-1}^2} - 2\right)a_n$$

证明：对任何 $k \in \mathbf{N}$，有

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_k} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2-4}).$$

证明： 设 $f(x) = x^2 - 2$，则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f^{(1)}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = f^{(2)}\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right) = \cdots = f^{(n)}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = f^{(n)}(a)$$

于是 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0$

$= f^{(n-1)}(a) \cdot f^{(n-2)}(a) \cdot \cdots \cdot f^{(0)}(a)$

（这里规定 $f^{(0)}(a) = a$）

下面用归纳法证明对任何 $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$，本题结论成立.

$k = 0$ 时，$\frac{1}{a_0} = 1 < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2-4})$，结论成立.

假设结论对于 $k = m$ 成立，即

$$1 + \frac{1}{f^{(0)}(a)} + \frac{1}{f^{(1)}(a) \cdot f^{(0)}(a)} + \cdots + \frac{1}{f^{(m-1)}(a)f^{(m-2)}(a)\cdots f^{(0)}(a)} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2-4}) \quad ④$$

由于 $a > 2$ 时，$f(a) = a^2 - 2 > 2$ 且④式对于所有的 $a > 2$ 均成立，用 $f(a)$ 代替④式中的 a，即得

$$1 + \frac{1}{f^{(1)}(a)} + \frac{1}{f^{(2)}(a)f^{(1)}(a)} + \cdots + \frac{1}{f^{(m)}(a)f^{(m-1)}(a) \cdot \cdots \cdot f^{(1)}(a)}$$

$$< \frac{1}{2}(2 + f(a) - \sqrt{f^2(a) - 4})$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - \sqrt{a^4 - 4a^2})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a(a - \sqrt{a^2 - 4})$$

$$\therefore \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{m+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{f^{(0)}(a)} + \frac{1}{f^{(1)}(a)f^{(0)}(a)} + \cdots + \frac{1}{f^{(m)}(a)f^{(m-1)}(a)\cdots f^{(0)}(a)}$$

$$= 1 + \frac{1}{f^{(0)}(a)}\left(1 + \frac{1}{f^{(1)}(a)} + \cdots + \frac{1}{f^{(m)}(a)f^{(m-1)}(a)\cdots f^{(1)}(a)}\right)$$

$$< 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{2}a(a - \sqrt{a^2 - 4})$$

$$= \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4})$$

即 $k = m + 1$ 时结论也成立.因此,对所有 $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$,结论成立.

5. 构造辅助数列

例 10 设 $a_0 = 1, a_n = \frac{\sqrt{1 + a_{n-1}^2} - 1}{a_{n-1}}$

$(n = 1,2,\cdots)$,求证:$a_n > \frac{\pi}{2^{n+2}}$

【分析】 根据递推关系的结构特点,如果令 $a_n = \tan\alpha_n, \alpha_n \in (0, \frac{\pi}{2})$,则

$$a_n = \tan\alpha_n = \frac{\sqrt{1 + \tan\alpha_{n-1}^2} - 1}{\tan\alpha_{n-1}}$$

据万能公式 $\tan \frac{\alpha_{n-1}}{2}$

于是,产生了新的递推关系

$$a_0 = 1 = \frac{\pi}{4}, a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

证明:显然,对 $n \in \mathbf{N}$,均有 $a_n > 0$.令 $a_n = \tan\alpha_n, \alpha_n \in (0, \frac{\pi}{2})$,则由已知条件有

$$a_n = \tan\alpha_n = \tan \frac{\alpha_{n-1}}{2}$$

因 $a_o = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$

$\therefore a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}$

由于当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时,$\tan x > x$

所以 $a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} > \frac{\pi}{2^{n+2}}$

例 11 设 $n, k \in \mathbf{N}$,证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}).$$

【分析】 欲证 $\sum_{k=1}^{n} a_k <$ (或 $>$) b_n

只要证明 $a_1 <$ (或 $>$) b_1,且 $a_k <$ (或 $>$) $b_k - b_{k-1}(k \geqslant 2)$ 即可,于是可设

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}, b_n = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

证明之

证明:设 $a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}, b_n=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

则 $b_1=2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})=2-\sqrt{2}>\frac{1}{2}=a_1$

又当 $k\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}b_k-b_{k-1}&=2(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}})-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\&=\frac{2}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\\&>\frac{2}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+1})}\\&=\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\\&=a_k\end{aligned}$$

故 $b_n=b_1+\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})$

$>a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k$

6. 利用数列性质

例 12 数列$\{a_n\}$为非负实数列,且满足 $a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant 0,\sum_{i=1}^{k}a_i\leqslant 1,k=1,2,\cdots$ 证明:$0\leqslant a_k-a_{k+1}<\frac{2}{k^2}(k=1,2,\cdots)$

分析与解:根据条件 $\sum_{i=1}^{k}a_i\leqslant 1$,若有某个 $a_k<a_{k+1}$

则 $a_{k+1}\leqslant a_k-a_{k+1}+a_{k+2}<a_{k+2}$

从而自 a_k 起,数列$\{a_n\}$单调递增,和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 将随 n 的增加而趋于无穷,不可能永远小于 1.

所以,$\{a_n\}$是单调递减的,即 $a_k-a_{k+1}\geqslant 0$

令 $b_k=a_k-a_{k+1}$,则由 $a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant 0$ 可得

$b_k\geqslant b_{k+1},b_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$

又由于
$$\begin{aligned}1&\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_k\\&=(b_1+a_2)+a_2+\cdots+a_k\\&=b_1+2a_2+\cdots+a_k\\&=b_1+2b_2+3a_3+\cdots+a_k\\&=\cdots\cdots 3b_1+2b_2+\cdots+kb_k\\&\geqslant(1+2+\cdots+k)b_k\\&=\frac{k(k+1)}{2}\cdot b_k\end{aligned}$$

故 $b_k\leqslant\frac{2}{k(k+1)}\cdot<\frac{2}{k^2}$,命题成立.

7. 利用"部分和"的方法

利用"部分和"的方法是基于下列公式:

"记 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k(k=1,2,\cdots,n)$

则 $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$"

例 13 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一列互不相同的自然数,求证:$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

分析与解:

令 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$

$$\geqslant 1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

$$b_k=\frac{1}{k^2}$$

则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$

$$=S_nb_n+\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$$

$$\geqslant\frac{1}{n^2}S_n+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

8. 利用"反证法"

"反证法"是证明数学命题的一种有效方法,在证明"递推不等式"也表现出其不可替代的作用.

例 14 (第 42 届 IMO 预选题)设 $a_0,a_1,a_2\cdots$ 是任意一个由正整数组成的无穷序列,证明:存在无穷多个正整数 n,使得

$$1+a_n>a_{n-1}\sqrt[n]{2}$$

证明:定义序列 $c_0,c_1,c_2\cdots$ 满足

$c_0=1,c_n=\frac{a_{n-1}}{1+a_n}\cdot c_{n-1},n\geqslant 1$,重写为

$$c_n=a_{n-1}\cdot c_{n-1}-a_nc_n$$

则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=a_0c_0-a_nc_n=a_0-a_nc_n$

由于$\{a_n\}$为正整数序列,则$\{a_n\}$为正整数序列,所以,$c_1+c_2+\cdots+c_n<a_0$

因此,原命题等价于证明存在无穷多个 n,使得$\frac{c_n}{c_{n-1}}<2^{-\frac{1}{n}}$成立.

反证:假设存在正整数 N,使得对于 $n\geqslant N$,均有$\frac{c_n}{c_{n-1}}\geqslant 2^{-\frac{1}{n}}$

当 $n>N$ 时,有

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}\cdot\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{c_{N+1}}{c_N}\geqslant 2^{-\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}-\cdots-\frac{1}{N+1}}$$

即 $c_n\geqslant c_N\cdot 2^{-\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$

$$=c\cdot 2^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$$

其中 $c=c_N\cdot 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}}$ 是一个正常数.

对于如上的 n,存在正整数 k,使得 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$,则

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\leqslant 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

$+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)$

$\leqslant 1+1+\cdots+1$

$=k$

所以，$c_n \geqslant c\cdot 2^{-k}$，其中 $2^{k-1}\leqslant n<2^k$

对于如上的 N，存在正整数 r，使得 $2^{r-1}\leqslant N<2^r$

当 $m>r$ 时，有

$C_{2^r}+C_{2^r+1}+\cdots+C_{2^m-1}$

$=(C_{2^r}+\cdots+c_{2^{r+1}-1})+(c_{2^{r+1}}+\cdots+c_{2^{r+2}-1})$

$+\cdots+(c_{2^{m-1}}+\cdots+C_{2^m-1})$

$\geqslant c(2^r\times 2^{-(r+1)}+2^{r+1}\times 2^{-(r+2)}+\cdots+2^{m-1}\times 2^{-m})$

$=\frac{c(m-r)}{2}$

这表明 c_n 的和可以任意大，与 $c_1+c_2+\cdots+c_n$ 的有界性矛盾，所以，有无穷多个 n，使得$\frac{c_n}{c_{n-1}}<2^{-\frac{1}{n}}$成立.

9. 构造递推关系

关于自然数 n 的递推不等式，有时递推关系没有给出，如果能够根递推不等式的结构，深入挖掘递推关系，构造出“递推关系式”，就可以采用适当方法——或直接递推解决或数学归纳法(递推关系本质就是解决从 k 到 $(k+1)$ 的问题.

例 15 (1990.美国威斯康星天赋探索题)设

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1+\cdots}{1+1}}}}$$

其中有 1000 条水平分数线，$x^2+x>1$ 是否成立?

解:令 x_n 表示具有 n 条分数线的形如 x 的数，则有 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$(这就是所构造的递推式)

易求 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{2}{3}$，$x_3=\frac{3}{5}$，$x_4=\frac{5}{8}$，…，记 $y_n=x_n{}^2+x_n$，则

$y_1=\frac{3}{4}<1$，$y_2=\frac{10}{9}>1$，$y_3=\frac{24}{25}<1$，$y_4=\frac{65}{64}>1$，猜测：n 为奇数时，$y_n<1$；n 为偶数时，$y_n>1$，下面证明这一猜测成立.

$\because y_{n+1}-1=x_{n+1}^2+x_{n+1}-1$

$$=\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^2+\left(\frac{1}{1+x_n}\right)-1$$

$$=\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^2[1+(1+x_n)-(1+x_n)^2]$$

$$=-\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^2(x_n{}^2+x_n-1)$$

$$=-\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^2(y_n-1)$$

$\therefore y_{n+1}-1$ 与 y_n-1 异号，即猜测成立.

故 $y_{1000}>1$

$\therefore x^2+x>1$

例 16 求证:对任何自然数 n 都有

$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}<2$

分析与解:构造递推式

设数列$\{a_n\}$,则

$$a_0=2,a_1=a_0{}^2-1,a_2=(a_0{}^2-1)^2-2$$
$$a_3=[(a_0^2-1)^2-2]^2-3$$
$$a_4=\{[(a_0^2-1)^2-2]^2-3\}^2-4$$
$$\cdots\cdots$$

即有递推式为 $a_n=a_{n-1}^2-n$

$\therefore a_{n-1}^2=a_n+n$

即 $a_{n-1}=\sqrt{a_n+n}$

如果能证明:$a_n>n$ ⑤

则有递推式:$a_{n-1}=\sqrt{a_n+n}>\sqrt{n+n}>\sqrt{n}$

$a_{n-2}=\sqrt{a_{n-1}+(n-1)}>\sqrt{\sqrt{n}+(n-1)}>\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}$

$\cdots\cdots$

$a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$

又 $\because a_0=2$

$\therefore\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}<2$ 得证

下面证明 ⑤ 式成立

显然,$a_0=2>0,a_1=3>1,a_2=7>2,a_3=46>3$

设 $n=k(k\geqslant3)$,有 $a_k>k$,则

$a_{k+1}=a_k^2-(k+1)>k^2-(k+1)$

$\quad=k\cdot k-(k+1)\geqslant3k-(k+1)$

$\quad=2k-1>k+1$

于是,对任意自然数 n,均有 $a_n>n$.

至此,命题得证.

例 17 (1996 年世界城市际数学联赛)

(1) 证明:$3-\frac{2}{(n-1)!}<\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots+\frac{n^2-2}{n!}<3$

(2) 求自然数 a,b,c 使得对任意$n\in\mathbf{N},n>2$有

$$b-\frac{c}{(n-2)!}<\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots+\frac{n^3-a}{n!}<3$$

证明:(1) 令 $a_n=3-\frac{2}{2!}-\frac{7}{3!}-\cdots-\frac{n^2-2}{n!}$

则,$a_{n+1}=a_n-\frac{(n+1)^2-2}{(n+1)!}$

变形为 $a_{n+1}-\frac{n+3}{(n+1)!}=a_n-\frac{n+2}{n!}$

即 $\left\{a_n-\frac{n+2}{n!}\right\}$为常数列.

$\therefore a_n=\frac{n+2}{n!}$

易证:$0<\frac{n+2}{n!}<\frac{2}{(n-1)!}$,即(1) 式成立.

(2) $\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots+\frac{n^3-a}{n!}$

$=\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots+\frac{n^3}{n!}-a\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

通过归纳计算:$a=5,b=9$时有

$$\frac{2^3-5}{2!}+\frac{3^3-5}{3!}+\cdots+\frac{n^3-5}{n!}<9$$

同(1)令 $b_n=9-\frac{2^3-5}{2!}-\frac{3^3-5}{3!}-\cdots-\frac{n^3-5}{n!}$

可得 $b_n=\frac{n^2+3n+5}{n!}$

即:

$$\frac{2^3-5}{2!}+\frac{3^3-5}{3!}+\cdots+\frac{n^3-5}{n!}<9$$

再寻找 $b_n<\frac{c}{(n-2)!}(c\in\mathbf{N},n>2)$ 的 c,

$$\frac{n^2+3n+5}{n!}<\frac{c}{(n-2)!}$$
$$\Leftrightarrow n^2+3n+5<cn(n+1)$$

当 $n=3$ 时,$c>\frac{23}{6}\Rightarrow c\geqslant 4$

取 $c=4$ 时,则

$b_n<\frac{c}{(n-2)!}\Leftrightarrow n^2+3n+5<4n(n+1)$

$\Leftrightarrow 3n^2-7n-5>0$

$\Leftrightarrow 3n(n-3)+2(n-3)+1>0$

对 $n\geqslant 3$ 显然成立.

故 $a=5,b=9,c=4$ 满足所求.

§3.3　针对性训练

A组

1. 设 $x>0$,定义函数下:

$f_n(x)=x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$　(共几个 x),$n=1,2,\cdots$

求证:对一切 $m(m\geqslant 3)\in\mathbf{N}$,有 $f_{n+1}(m)>2^{f_n(m+1)}$,$n=1,2,\cdots$

2. 设 $x_n=\frac{n}{a^n}(a>1,n=1,2,\cdots)$,求证:对一切 $n\geqslant 2$,有

$x_n<\frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{n-1}$

3. 设有数列$\{a_n\}$:$a_1=a_2=1,a_{n+1}=a_n+\frac{a_{n-1}}{n(n+1)}(n\geqslant 2)$,求证:对一切 $n\geqslant 3$,有 $a_n<\frac{5}{3}$

4. 给定一个自然数 n,定义数列:$a_0,a_1,\cdots,a_n$,满足 $a_0=\frac{1}{2}$ 及 $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k{}^2(k=0,1,\cdots,n-1)$,求证:$1-\frac{1}{n}<a_n<1$

5. 设实数列$\{a_k\}$满足

$|a_{k+m}-a_k-a_m|\leqslant 1\quad k,m\in\mathbf{N}.$

求证:对一切 $p,q\in\mathbf{N}$,有

$\left|\frac{a_p}{p}-\frac{a_q}{q}\right|<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

6. 设有等比数列,$1,r,r^2,\cdots,r^{n+1},(r>0)$,求证:首末两数的算术平均值,不小于中间 n 个数的算术平均值,即

$\frac{r+r^2+\cdots+r^n}{n}\leqslant\frac{1+r^{n+1}}{2}$

7. 设 $a_i \in \mathbf{R}, b_i \in \mathbf{R}^+ \ (i = 1,2,\cdots,n)$,求证:

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \cdots + \frac{{a_n}^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

8. 设 $n, k \in \mathbf{N}$,求证:

$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < \sum_{m=1}^{k} m^k < (1 + \frac{1}{k})^n \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

B 组

1. 设 $a_i \in \mathbf{R}^+ \ (i = 1,2,\cdots,n)$,求证:

$$1 < \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + a_1} < n - 1$$

试说明这个不等式是最优的,即左端的 1 不可能取更大的值,右端的 $n-1$ 不可能取更小的值.

2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 1)$ 为非负实数,

求证:$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1)$

3. 求证:对一切 $n \in \mathbf{N}$,有

$$x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{2} + \cdots + \frac{x_n}{2} < 3$$

4. 设 $0 \leqslant x_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,n)$,求证:$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$

5. 设 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 是所有那些不超过 $10^{100}-1$，且在其10进制记数表示中不出现数码0的自然数，求证：

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_m}<29$$

6.（1998年加拿大数学奥林匹克竞赛题）设 $n\geqslant 2$ 是自然数，证明：

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

7.（第11届CMO竞赛题）设 $n\in\mathbf{N}, x_0=0, x_i>0, i=1,2,\cdots;n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$，求证：

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$

第四章

分式不等式

§4.1 知识要点与基本方法

分式形不等式简称分式不等式是代数不等式的基本类型.本讲将从各个角度说明分式不等式的证明方法与技巧,意在起到举一反三,提高学生的数学素质.

本章试图说明的各种方法和各种技巧有

1. 零点;
2. 不等式基本性质;
3. 排序;
4. 换元;
5. 倒数不等式;
6. 柯西不等式;
7. 三角;
8. 类比;
9. 构造函数;
10. 引参;
11. 构造数列;
12. 构造模型;
13. 用分式平均值不等式;
14. 放缩;
15. 数学归纳法;

§4.2 赛题精讲

1. 零点

所谓零点就是使不等式 $A \geqslant B$ 中等号成立时不等式中各个变量的取值,零点又称为不等式的平衡点.抓住不等式的平衡点会产生一些证明思路.

例 1 (1991 年亚太地区数学竞赛)设 $a_i, b_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 都是正实数,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i + b_i}\right) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

【分析】 本例利用实数基本性质:

$(A - B)^{2n} \geqslant 0$ ($A = B$ 时等号成立)

证明:当 $a_i = b_i$ 时,不等式取等号,且 $\frac{a_i}{\sqrt{a_i + b_i}} = \frac{\sqrt{a_i + b_i}}{2}$,据实数基本性质,构造不等式

$$\left[\frac{a_i}{\sqrt{a_i + b_i}} - \frac{\sqrt{a_i + b_i}}{2}\right]^2 \geqslant 0$$

即 $$\frac{a_i^2}{a_i+b_i}+\frac{b_i-3a_i}{4}\geqslant 0$$

令 $i=1,2,\cdots,n$ 叠加,得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\right)+\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i-3\sum_{i=1}^{n}a_i}{4}\geqslant 0$$

因为 $$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i$$

所以 $$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{a_i+b_i}\right)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$$ 证毕

抓住平衡点,若引用均值不等式,还可有另外的思路,请看

例 2 在 $\triangle ABC$ 中,求证:

$$\frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^4}{c^2+a^2}+\frac{c^4}{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{3}\triangle$$

(其中 $\triangle$ 为 $\triangle ABC$ 的面积)

证明:当 $a=b=c$ 时等号成立

$$\because \frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{4}\geqslant a^2$$

$$\frac{b^4}{c^2+a^2}+\frac{a^2+b^2}{4}\geqslant b^2$$

$$\frac{c^4}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{4}\geqslant c^2$$

$$\therefore \frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^4}{c^2+a^2}+\frac{c^4}{a^2+b^2}\geqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\triangle=2\sqrt{3}\triangle$$

2. 利用不等式基本性质

利用不等式的基本性质,常能使难题得以简证:

例 3 (1997 年第 26 届美国数学奥林匹克)证明:对于所有正实数 a,b,c, $(a^3+b^3+abc)^{-1}+(b^3+c^3+abc)^{-1}+(c^3+a^3+abc)^{-1}\leqslant(abc)^{-1}$

证明:原式左边

$$\begin{aligned}
&=[(a-b)(a^2-b^2)+a^2b+ab^2+abc]^{-1}\\
&\quad+[(b-c)(b^2-c^2)+b^2c+cb^2+abc]^{-1}\\
&\quad+[(c-a)(c^2-a^2)+c^2a+ca^2+abc]^{-1}\\
&\leqslant(a^2b+ab^2+abc)^{-1}+(b^2c+cb^2+abc)^{-1}\\
&\quad+(ca^2+c^2a+abc)^{-1}\\
&=(abc)^{-1}\left[\frac{a+b+c}{c}\right]^{-1}+(abc)^{-1}\left[\frac{a+b+c}{a}\right]^{-1}\\
&\quad+(abc)^{-1}\left[\frac{a+b+c}{b}\right]^{-1}\\
&=(abc)^{-1}\left[\frac{c}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}\right]=(abc)^{-1}
\end{aligned}$$

【评注】 同样有

$(a^p-b^p)(a^q-b^q)\geqslant 0$

$\Rightarrow a^{p+q}+b^{p+q}\geqslant a^pb^q+a^qb^p$

(其中 $a,b,p,q\in\mathbf{R}^+$)

3. 排序

对称不等式可用有序化排列证明.

例 4 （1963 年莫斯科数学竞赛）设 $a,b,c \in \mathbf{R}^{+}$，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

证明：不妨设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$，则

$$\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{a+b}$$

于是由排序不等式，有

$$(\text{顺序和})\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$\geqslant \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}(\text{乱序和})$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$\geqslant \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}(\text{乱序和})$$

以上二式相加，得

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geqslant 3$$

所以$\frac{c}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$

例 5 $n \geqslant 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数，且 $x_1+x_2+\cdots+,x_n=1$. 求证：

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}} \qquad ①$$

【分析】 这个不等式主体上是分式形的，但其中又含有无理式，所以分式与无理式混合形的不等式，难度较大. 这个不等式的证明我们采用排序不等式与平均值不等式相结合方法.

证明：设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，易知 ① 左边为顺序和，记为 S，则

$$S \geqslant \frac{x_2}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_3}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_1}{\sqrt{1-x_n}}$$
$$S \geqslant \frac{x_3}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_4}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}}$$

…………

$$S \geqslant \frac{x_n}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-x_n}}$$

将 $n-1$ 个不等式相加，按列求和，有

$$(n-1)S \geqslant \frac{1-x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{1-x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{1-x_n}{\sqrt{1-x_n}}$$
$$=\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_n}$$

于是，要证 ① 式只需证明不等式

$$\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\cdots+\sqrt{1-x_n} \geqslant \sqrt{n-1}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}) \qquad ②$$

这里排序虽未得出最终结果，但已将原不等式转化为较简单且易证的不等式 ②，再由算术平均不大于平方平均，有

$$\frac{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\cdots+\sqrt{x_n}}{n-1} \leqslant \sqrt{\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{n-1}}=\sqrt{\frac{1-x_1}{n-1}}$$

即 $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{1-x_1}$

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_3}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n-1}\sqrt{1-x_2}$

………………

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_{n-1}}\leqslant\sqrt{n-1}\sqrt{1-x_{n-1}}$$

将上面 n 个不等式相加，即得②，从而证明原式.

4. 换元

对分式不等式，常将分母换元使之简化.

例6 （W·Janous 猜想）设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，求证：$\dfrac{y^2-x^2}{z+x}+\dfrac{z^2-y^2}{x+y}+\dfrac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant 0$

证明：令原不等式左边为 M，$z+x=a$，$x+y=b$，$y+z=c$，则 $y-x=c-a$，$z-y=a-b$，$x-z=b-c$，$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，所以

$$\begin{aligned}M&=\frac{b(c-a)}{a}+\frac{c(a-b)}{b}+\frac{a(b-c)}{c}\\&=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-(b^2ac+c^2ab+a^2bc)}{abc}\end{aligned}$$

因为 $b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2c^2ab$，$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2a^2bc$，$a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2b^2ca$，所以

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant(b^2ca+c^2ab+a^2bc)$$

故 $M\geqslant 0$，当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立，所以原不等式成立.

5. 倒数不等式

这里是指“利用 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{-1}\geqslant n^2(a_i\in\mathbf{R}^+)$ 证明”.

例8 （1979年全国高中数学联赛）设 α,β 都是锐角，求证：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta}\geqslant 9$$

α,β 取什么值时等号成立？

证明：由 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$，不等式两边拆项，得

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta}=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

又 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta=1$

由倒数不等式有

$$(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta)\cdot\left[\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\right]\geqslant 9$$

所以原不等式成立

当且仅当 $\sin^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha$，即 $\tan\beta=1$，$\tan\alpha=\sqrt{2}$ 时，等号成立.

所以，$\alpha=a_n\tan\sqrt{2}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，等号成立.

【评注】 同样可证：

若 $a_i>0,(i=1,2,\cdots,n)$ 不全等，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，有不等式

$$\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n+a_1}>\frac{n^2}{2}$$

6. 柯西不等式

利用 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2(a_i,b_i\in\mathbf{R}^+)$ 证明.

例9 若 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n$，则

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{2^2}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{a_{n-1}-a_n}+\frac{n^2}{a_n-a_1}\geqslant 0(n\geqslant 3)$$

证明：原不等式等价于

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{2^2}{a_2-a_3}+\frac{3^2}{a_3-a_4}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{a_{n-1}-a_n}\geqslant\frac{n^2}{a_1-a_n}$$

由柯西不等式得

$$[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)]\cdot\left[\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{2^2}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{a_{n-1}-a_n}\right]$$

$$\geqslant[1+2+3+\cdots+(n-1)]^2=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

又 $n\geqslant3$ $\frac{(n-1)^2}{4}\geqslant1$ 从而

$$\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{2^2}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{a_{n-1}-a_n}\geqslant\frac{\frac{n^2(n-1)^2}{4}}{a_1-a_n}\geqslant\frac{n^2}{a_1-a_n}$$

例 10 设 α,β,γ 为锐角,且 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$,则

$$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}\geqslant1$$

证明:不等式左边为

$$\frac{\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin^4\gamma}{\sin\gamma\sin\alpha}$$

由柯西不等式,得

$$\left[\frac{\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}+\frac{\sin^4\beta}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}+\frac{\sin^4\gamma}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}\right]\cdot(\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\beta\cdot\sin\gamma+\sin\gamma\cdot\sin\alpha)$$

$$\geqslant(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)^2=1$$

而 $\sin\alpha\cdot\sin\beta+\sin\beta\cdot\sin\gamma+\sin\gamma\cdot\sin\alpha$

$\geqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$

故原不等式成立

7. 三角

代数不等式的三角代换,常利用同角,万能公式,将常数转化为三角函数.

例 11 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$,且 $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{b^2}{1+b^2}+\frac{c^2}{1+c^2}+\frac{d^2}{1+d^2}=1$,求证:$abcd\leqslant\frac{1}{9}$

证明:设 $a=\tan\alpha$,则 $\frac{a^2}{1+a^2}=\sin^2\alpha\left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$,又设 $b=\tan\beta,c=\tan\gamma,d=\tan\delta\left(\beta_1\gamma_1\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$,由

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=1$$

有

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-\sin^2\delta=\cos^2\delta$$

则 $3\sqrt[3]{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}\leqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\cos^2\delta$ ③

同理 $3\sqrt[3]{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\delta}\leqslant\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\delta=\cos^2\gamma$ ④

$3\sqrt[3]{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta}\leqslant\sin^2\alpha+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=\cos^2\beta$ ⑤

$3\sqrt[3]{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta}\leqslant\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta=\cos^2\alpha$ ⑥

由 ③×④×⑤×⑥ 得

$81\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta\leqslant\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma\cdot\cos^2\delta$

即 $\tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta\cdot\tan^2\gamma\tan^2\delta\leqslant\frac{1}{81}$

$\therefore abcd\leqslant\frac{1}{9}$

8. 类比法

有的不等式难于找到证法,则多观察、联想、分析、比较、利用相似思想求取方法.

例 12 任给13个实数,求证:其中至少存在两个实数(记作 x,y)满足

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 2-\sqrt{3}$$

【分析】 考虑到13与$2-\sqrt{3}$,$\frac{x-y}{1+xy}$的联,从结构看与二角差的上切公式类似,又$2-\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{12}$,故从此人手求证.

证明:设任给13个实数分别记作 $\tan\theta_i$,$\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$(i=1,2,\cdots,13)$,将$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$等分成12个区间,则 θ_i 至少有两个角的终边落在同一区间(不落在 y 轴上),令这两个角分别为 $\alpha,\beta(\alpha\geqslant\beta)$,则 $\sigma\leqslant\alpha-\beta\leqslant\frac{\pi}{12}$,再令 $x=\tan\alpha$,$y=\tan\beta$,则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{1+xy}$,由于正切函数是增函数,且有 $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$,所以

$$0\leqslant\tan(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 2-\sqrt{3}$$

9. 函数法

利用函数性质巧构函数式.

例 13 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,求证:

$$\frac{a(3a-1)}{1+a^2}+\frac{b(3b-1)}{1+b^2}+\frac{c(3c-1)}{1+c^2}\geqslant 0$$

证明:构造函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$,易知在$(0,1)$上为增函数,所以对任意 $x\in(0,1)$,有

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{10}\right)\geqslant 0$$

则

$$\frac{x(3x-1)}{1+x^2}\geqslant\frac{3}{10}(3x-1)$$

分别令 $x=a,b,c$,代入上式,相加得

$$\frac{a(3a-1)}{1+a^2}+\frac{b(3b-1)}{1+b^2}+\frac{c(3c-1)}{1+c^2}$$
$$\geqslant\frac{3}{10}[3(a+b+c)-3]=0$$

证毕

10. 引参

引进参数常可化静态型为动态型,使不等式证明灵活简洁.

例 14 (1990.日本IMO代表队选拔赛)设 $x>0,y>0,z>0$,且 $x+y+z=1$,求$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$的最小值

解:用 $x+y+z-1=0$,引进参数 $t>0$,则$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}$

$=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}+t(x+y+z-1)$

$=\frac{1}{x}+tx+\frac{4}{y}+ty+\frac{9}{z}+tz-t$

$\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot tx}+2\sqrt{\frac{4}{y}\cdot ty}+2\sqrt{\frac{9}{z}\cdot tz}-t$

$=12\sqrt{t}-t$

$=36-(\sqrt{t}-6)^2$

由 t 的任意性,知$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\geqslant 36$

又当 $tx=\frac{1}{x}$, $ty=\frac{4}{y}$, $tz=\frac{9}{z}$, $t=36$ 时.

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}=36$$

即 $$\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+\frac{9}{z}\right)_{\min}=36$$

11. 构造数列

利用数列性质或公式证明不等式,常显得新颖,别具一格.

例 15 (第 19 届莫斯科数学竞赛)设 $x,y\in\mathbf{R}$,且满足 $|x|<1,|y|<1$,求证:$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geqslant\frac{2}{1-xy}$

证明:$\because |x|<1,|y|<1$,所以

$$0<x^2<1,0<y^2<1,|xy|<1$$

由无穷递缩等比数列求和公式 $S=\frac{a_1}{1-q}$ 得出数列,再求和,有

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}&=(1+x^2+x^4+\cdots)+(1+y^2+y^4+\cdots)\\&=2+(x^2+y^2)+(x^4+y^4)+\cdots\\&\geqslant 2+2xy+2x^2y^2+\cdots\\&=\frac{2}{1-xy}\end{aligned}$$

12. 构造模型

利用几何或物理模型证题,常常数形结合起来,使证明明快简洁.

例 16 已知 $a_1,a_2\in\mathbf{R}^+$,求证:

$$\sqrt{1+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}}{2}$$

证明:原不等式等价于不等式

$$\sqrt{1+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}\leqslant\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}$$

当 $a_1=a_2$ 时,等号成立

故左端为最小

可利用光学原理的最短路线模型构造图形(如图 ①)

作线段 $BC=a_1+a_2$,以 BC 的中点 M 为顶角作二直角 $\triangle AMB$,$\triangle DMC$,使 $AB=DC=1$,则有 $BM=MC=\frac{a_1+a_2}{2}$,再设 BC 上任一点 P,令 $BP=a_1,PC=a_2$,连 AP、PD. 根据光线直进为最短路线原理,知.

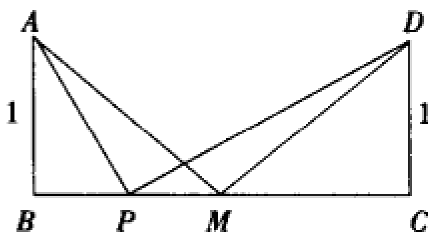


图 ①

$$AM+MB\leqslant AP+PD$$

有 $$\sqrt{1+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}+\sqrt{1+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2}\leqslant\sqrt{1+a_1^2}+\sqrt{1+a_2^2}$$

所以原不等式成立.

例 17 (第 18 届全俄中学生十年级数学竞赛)对任何正数 x,y 有不等式

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\geqslant\frac{2^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x+y}}$$

证明:原不等式等价于不等式

$$\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2}+\sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right)^2}\geqslant\sqrt[4]{2^5}$$

以$\sqrt{x}$,$\sqrt{y}$为直角边,构造直角三角形,则斜边为$\sqrt{x+y}$,令一锐角为α,(如图②),根据三角函数性质,原不等式又等价于不等式

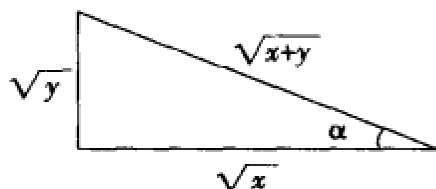
$$\sqrt[4]{\sec^2\alpha}+\sqrt[4]{\csc^2\alpha}\geqslant 2\sqrt[4]{2}$$

又有

$$\sqrt[4]{1+\tan^2\alpha}+\sqrt[4]{1+\cot^2\alpha}\geqslant 2\sqrt[8]{(1+\tan^2\alpha)(1+\cot^2\alpha)}$$

$$=2\sqrt[8]{2+\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}\geqslant 2\sqrt[4]{2}=2^{\frac{5}{4}}$$

证毕



图②

13. 分式平均值不等式

利用不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^m}{y_i}\geqslant\frac{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^m}{\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^m}{y_i}\geqslant\frac{1}{n^{m-2}}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^m}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}$$

($x_i,y_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n,m\geqslant 2$的正整数),证明一类难度较大的分式不等式很简捷.

例 13 若$a_i\in\mathbf{R}^+\ (i=1,2,\cdots,n)$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=S,m\in\mathbf{N}$,则

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_i^{-1})^m\geqslant n\left(\frac{s}{n}+\frac{n}{S}\right)^m$$

证明:(i) 当$m=1$时,

$$\because \sum_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\geqslant n^2(\text{倒数不等式})$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}\geqslant\frac{n^2}{S}$$

$$\text{故}\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_i^{-1})=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}$$

$$\geqslant S+\frac{n^2}{S}=n\left(\frac{S}{n}+\frac{n}{S}\right)$$

(ii) 当$m\geqslant 2$时,有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_i^{-1})^m\geqslant\frac{1}{n^{m-2}}\cdot\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+a_i^{-1})\right)^m}{n}$$

$$\geqslant n\left(\frac{S}{n}+\frac{n}{S}\right)^m$$

由(i)、(ii)知,原不等式成立.

14. 放缩

有些分式不等式,抓住其特点,灵活运用各种放缩的不等关系,就是很难的分式不等式也会得到行之有效,简便自然的证明方法.

例 19 若$m\in\mathbf{N},a_0,a_1,\cdots,a_n>0$,求证:

$$\frac{a_1}{(a_0+a_1)^{m+1}}+\frac{a_2}{(a_0+a_1+a_2)^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{(a_0+a_1+\cdots+a_n)^{m+1}}<\frac{1}{a_0^m}$$

【分析】 对于$a_0,a_1,\cdots,a_n$,除知道正实数外,我们一无所知,和式不可能计算,但可以充分利用正数的特征,放大化简.

证明：$\because a_0,a_1,\cdots,a_n>0$.

$\therefore$ 原不等式左边

$$< \frac{a_1}{a_0^m(a_0+a_1)}+\frac{a_2}{(a_0+a_1)^m(a_0+a_1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})^m(a_0+a_1+\cdots+a_n)}$$

$$=\left[\frac{1}{a_0^m}-\frac{1}{a_0^{m-1}(a_0+a_1)}\right]+\left[\frac{1}{(a_0+a_1)^m}-\frac{1}{(a_0+a_1)^{m-1}(a_0+a_1+a_2)}\right]$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})^m}-\frac{1}{(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})^{m-1}(a_0+a_1+\cdots+a_n)}\right]$$

$$<\left[\frac{1}{a_0^m}-\frac{1}{(a_0+a_1)^m}\right]+\left[\frac{1}{(a_0+a_1)^m}-\frac{1}{(a_0+a_1+a_2)^m}\right]$$

$$+\cdots+\left[\frac{1}{(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1})^m}-\frac{1}{(a_0+a_1+\cdots+a_n)^m}\right]$$

$$=\frac{1}{a_0^m}-\frac{1}{(a_0+a_1+\cdots+a_n)^m}<\frac{1}{a_0^m}$$

15. 数学归纳法

水平较高数学竞赛当中，应用数学归纳法往往不是单纯的用，在归纳法的第二步由假设 k 的情形正确的推证 $k+1$ 的情形也正确这一步，有时与反证法，放缩法，重要不等式等方法要有机结合，但这种方法在主体结构仍是数学归纳法.

有些公式不等式会用到"调整法"

下面的例题 20，是个水平较高的分式不等式问题，它的解决将用到数学归纳法，反证法及调整法.

例 20 （1999 年罗马尼亚数学奥林匹克竞赛题）(1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}^+$，满足：

$(a)\ 0<x_1y_1<x_2y_2<\cdots<x_ny_n$；

$(b)\ x_1+x_2+\cdots+x_k\geqslant y_1+y_2+\cdots+y_k,k\in\{1,2,\cdots,n\}$

证明：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\leqslant\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}$.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset\mathbf{N}$，对所有不同的子集 $B,C\subseteq A$，有

$\sum\limits_{x\in B}x\neq\sum\limits_{x\in C}x$，证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$

方法导引：第(1)小题用到数学归纳法（第二数学归纳法），特别注意在第二步由 $n\leqslant k$ 成立去推证 $n=k+1$ 时也成立时用到反证法，在反证法的施行过程中要特别注意使用条件进行分式的合理分析.

而第(2)小题用到"调整法"

证明：

(1) 当 $n=1$ 时，$x_1\geqslant y_1>0,\frac{1}{x_1}\leqslant\frac{1}{y_1}$

当 $n=2$ 时，$x_1+x_2\geqslant y_1+y_2,x_1-y_1\geqslant y_2-x_2$，则

$$\frac{1}{y_1}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-y_1}{x_1y_1}\geqslant\frac{y_2-x_2}{x_2y_2}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{y_2}$$

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\leqslant\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}$

假设 $n\leqslant k$ 时命题成立.

对于 $n=k+1$ 时，记 $y_i=x_i+a_i(i=1,2,\cdots,k+1)$，由条件 $a_1\leqslant0,a_1+a_2\leqslant0,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_k\leqslant0,a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}\leqslant0$，有

$$\frac{a_1}{x_1y_1}+\frac{a_2}{x_2y_2}+\cdots+\frac{a_k}{x_ky_k}\leqslant0$$

如若不然.

假设 $\frac{a_1}{x_1y_1}+\frac{a_2}{x_2y_2}+\cdots+\frac{a_k}{x_ky_k}>0$

则有

$$
\begin{aligned}
0 &< \frac{a_1}{x_1y_1}+\frac{a_2}{x_2y_2}+\cdots+\frac{a_k}{x_ky_k}+\frac{a_{k+1}}{x_{k+1}y_{k+1}}\\
&\leqslant \frac{a_1}{x_1y_1}+\frac{a_2}{x_2y_2}+\cdots+\frac{a_k}{x_ky_k}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{x_{k+1}y_{k+1}}\\
&=(a_1+a_2+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{x_ky_k}-\frac{1}{x_{k+1}y_{k+1}}\right)+\\
&\quad (a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})\left(\frac{1}{x_{k-1}y_{k-1}}-\frac{1}{x_ky_k}\right)+\\
&\quad (a_1+a_2+\cdots+a_{k-2})\left(\frac{1}{x_{k-2}y_{k-2}}-\frac{1}{x_{k-1}y_{k-1}}\right)+\\
&\quad \cdots+(a_1+a_2)\left(\frac{1}{x_2y_2}-\frac{1}{x_3y_3}\right)\\
&\quad +a_1\left(\frac{1}{x_1y_1}-\frac{1}{x_2y_2}\right)\leqslant 0
\end{aligned}
$$

矛盾.

所以,对 $n=k+1$ 时,原不等式也成立.

(2) 对于集合 $A=\{1,2,4,8,16,\cdots 2^{n-1}\}$,满足对 $\forall B\neq C,B,C\subseteq A$,有$\sum_{x\in B}x\neq\sum_{x\in C}x$,且

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2$$

对所有 $A'=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\subset \mathrm{N}$,不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$

令 $a_1=1$(否则将 a_i 都减一个数,使 $a_1=1$),又设 A' 中从第k 个数开始,$a_k\neq 2^{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$,则 $a_k\neq 1,2,\cdots,2^{k-1}-1$

于是 $a_k>2^{k-1}$,那么

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&>a_k+(1+2+\cdots+2^{k-2})\\
&\geqslant 2^{k-1}+1+(1+2+\cdots+2^{k-2})\\
&=2^k
\end{aligned}
$$

以此类推,则

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<2 \quad \text{证毕.}$$

§4.3 针对性训练

A组

1. 若 $m \in \mathbf{N}_+$,求证:$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{3m+1}>1$

2. 设 a,b,c 为正数,$abc=1$ 证明:$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1$

3. 求证:$16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$

4. 已知 $x_i \in \mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 满足$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1,\sum_{i=1}^{n}x_i=0$,求证:$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$

5. a,b,c 为正数,$M=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$,求证:$1<M<2$

6. $n>2$,求证:
$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

7. 求证:$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{n}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$

B组

1. 求证：$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{7}{4}(n\in\mathbf{N}_+)$

2. 求证：$\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}{1+|x_1+x_2+\cdots+x_n|}\leqslant\frac{|x_1|}{1+|x_1|}+\frac{|x_2|}{1+|x_2|}+\cdots+\frac{|x_n|}{1+|x_n|}$

3. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是非负实数，$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，记 $x_{n+1}=x$.
求证：$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\cdot\sum_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$（符号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立）.

4. ① 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则有：
$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$
② 若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n, b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则有
$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$
（车比雪夫不等式）

5. 已知 $x,y,z>0$，并且 $\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}=2$. 求证：$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant\sqrt{2}$

6. 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2, x_2+x_3+x_4\geqslant x$，求证：$(x_1+x_2+x_3+x_4)^{12}\leqslant 4x_1x_2x_3x_4$

7. 若：$x_i\in\mathbf{R}^+ (i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$，求证：
$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}\leqslant n-1$

8. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为大于或等于 1 的实数，证明：
$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$

第五章

对称不等式

§5.1 知识要点与基本方法

1. 轮换对称式

若代数式 $f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 中字母作一次轮换：$x_1\to x_2,x_2\to x_3,\cdots,x_{n-1}\to x_n,x_n\to x_1$，即 $(x_1,x_2,\cdots x_n)\to(x_2,x_3,\cdots,x_n,x_1)$，其形式不变，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为轮换对称式.

2. 对称式

若代数式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是关于任意两个 x_i 与 $x_j(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$ 皆是对称的(x_i 与 x_j 互换，其形式不变)，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,)$ 是关于所有字母的对称式，简称对称式.

3. 结论

(1) 对称式是轮换对称式，而轮换对称式未必是对称式.

反例：如"$x^2y+y^2x+z^2x$，$\dfrac{p-b}{b+c}+\dfrac{p-c}{a+c}+\dfrac{p-a}{a+b}$，$x^3y^2z+xy^3z^2+x^2yz^3$"均只是"轮换对称式"，而不是"对称式".

(2) 有关 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的命题推证过程中，只有在其为对称式时方可"设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$".

(3) 在有关轮换对称式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的命题推证过程中，不可"设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$". 但可以通过若干次轮换对称变换，将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中最大(小)的，调到第 k 位，因而可"设 x_k 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中最大(小)的($1\leqslant k\leqslant n$)."

例如，$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(2,1,3,4)$ 其所有可能轮换(复合)的结果是 $(4,2,1,3)$，$(3,4,2,1)$，$(1,3,4,2)$，无论怎样轮换，都不可能出现 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4$ 的情形. 但从所可能的轮换的 4 种结果可知：可"设 x_i 是 x_1,x_2,x_3,x_4 中的最大者($i=1,2,3,4$)"

4. 证明"对称不等式"中的一种思想方法——"整体"与"部分"合理巧妙转化，即巧妙地将整体转化为部分，再利用部分之和为整体，即使是较复杂的对称不等式问题，也能获得简捷合理的证法，例题详见赛题精讲.

5. 对称不等式的"扰动变换"

1969 年，$S,G,Gubu$ 建立了如下不等式

若 a,b,c,s 分别为三角形三边长及半周长，则

$$\frac{a-b}{s-b}+\frac{b-c}{s-c}+\frac{c-a}{s-a}\leqslant 0 \qquad ①$$

但我们发现 ① 等价于 ②(读者自证)

$$\frac{c}{b+c-a}+\frac{a}{c+a-b}+\frac{b}{a+b-c}\geqslant 3 \qquad ②$$

这使我们联想到熟知的不等式

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3 \qquad ③$$

③ 是对称不等式，它给人一种平衡之美，② 可以看是 ③ 打破平衡状态的结果，有趣的是不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$\frac{1}{b+c-a} \geqslant \frac{1}{c+a-b} \geqslant \frac{1}{a+b-c}$$

由排序不等式知

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geqslant \frac{c}{b+c-a}+\frac{a}{c+a-b}+\frac{b}{a+b-c}$$

所以 ② 是 ③ 的加强.因此我们提出一种研究对称不等式的方法 —— 扰动变换

改变对称不等式中字母的顺序,使所得非对称不等式在一定条件下仍成立,这种操作过程我们称为"对称不等式的扰动变换".

在赛题精讲中,我们将介绍利用对称不等式扰动变换可得到对称不等式的加强不等式.

6. 应该特别指出的是,轮换对称不等式的证明也不一定要弱排序;对称不等式的证明也不一定要排序.除去排序,它们有许多其它证法.

§5.2　赛 题 精 讲

1. 首先我们说如若在轮换对称式 $F(e,f,g)$ 中设 $e \geqslant f \geqslant g$,将会导致错误,错例如下

例 1　(1999 年加拿大数学奥林匹克题) 令 x,y,z 是满足 $x+y+z=1$ 的非负实数.证明:$x^2y+y^2z+z^2x \leqslant \frac{4}{27}$ 算术不等式成立的条件.

有不少书中是如下证明的:

由于不等式关于 x,y,z 轮换对称,故可设 $x \geqslant y \geqslant z$,从而

$$\begin{aligned} x^2y+y^2z+z^2x &\leqslant x^2y+2xyz \\ &= xy(x+2z)=\frac{1}{2}x \cdot 2y(x+2z) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x+2y+x+2z}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2(x+y+z)}{3}\right]^3=\frac{4}{27} \end{aligned}$$

等号在 $x=2y+x+2z$ 时成立.

即. $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{3}, z=0$ 时成立　　④

例 2　在 $\triangle ABC$ 中,有 $\frac{p-b}{b+c}+\frac{p-c}{a+c}+\frac{p-a}{a+b} \geqslant \frac{3}{4}$,其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

原书证明:不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,于是

$$\begin{aligned} &\frac{p-b}{b+c}+\frac{p-c}{a+c}+\frac{p-a}{a+b}-\frac{3}{4} \\ &=\left(\frac{p-b}{b+c}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{p-c}{a+c}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{p-a}{a+b}-\frac{1}{4}\right) \\ &=\frac{2a+c-3b}{4(b+c)}+\frac{2b+a-3c}{4(a+c)}+\frac{2c+b-3a}{4(a+b)} \quad ⑤ \\ &\geqslant \frac{2a+c-3b}{4(a+b)}+\frac{2b+a-3c}{4(a+b)}+\frac{2c+b-3a}{4(a+b)}=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p-b}{b+c}+\frac{p-c}{a+c}+\frac{p-a}{a+b} \geqslant \frac{3}{4}$$

仔细阅读上述两例的证明,不难发现:例 1 不等式既然是关于 x,y,z 轮换对称的,则它的等号成立的条件 ④ 显然没有写全;例 2 的证明中在不等号 ⑤ 处前第一项的分子 $2a+c-3b$ 的符号不定,因而 ⑤ 处的推导是错误的.

仔细推敲,这两个例题的证明中有一个共同点:设 $x \geqslant y \geqslant z$,这正是轮换对称不等式证明所犯的典型错误,其理由见"知识,方法,技能"

例 1 的证明作如下修改.

证明:由于 $x^2y+y^2x+z^2x$ 是关于 x,y,z 的轮换对称式

所以可设 $x=\max\{x,y,z\}$

则 $x^2y+y^2x+z^2x\leqslant x^2y+xyz+z^2x$

$$=x(xy+yz+z^2)$$

$$\leqslant x\left[y(x+z)+\frac{1}{2}z(z+x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x(x+z)(2y+z)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{x+(x+z)+(2y+z)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}(\because x,y,z\text{ 非负})$$

不等式等号当且仅当 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3},z=0$ 或 $x=0,y=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$ 或 $x=\frac{1}{3},y=0,z=\frac{2}{3}$ 时成立.

例 1 还可作如下推广:

令 x,y,z 是满足 $x+y+z=1$ 的非负实数,则

$$x^my^m+y^nz^m+z^nx^n\leqslant\frac{n^n\cdot m^n}{(n+m)^{n+m}}(n>m,n、m\in\mathrm{N})$$

当且仅当 $x=\frac{n}{n+m},y=\frac{n}{n+m},z=0$ 或 $x=0,y=\frac{n}{n+m},z=\frac{m}{n+m}$,或 $x=\frac{m}{n+m},y=0,z=\frac{m}{n+m}$ 时,等号成立.

仿上面例 1 的证法修改,可以证明推广(略).对于例 2,通过设最大(小)未能解决,有兴趣者请看中学数学月刊 2000(12)"对一个猜想证明的纠正".我们给出例 2 的目的在于说明"轮换对称式,不能将其中的变量排序!"

例 3 (W · Janous 猜想的推广)设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+,m,n\in\mathbf{N},m\geqslant2,n\geqslant1$,求证:

$$\frac{y^m-x^m}{z^n+x^n}+\frac{z^m-y^m}{x^n+y^n}+\frac{x^m-z^m}{y^n+z^n}\geqslant0$$

证明:这是关于 x,y,z 的轮换对称不等式,不能排序,只能找到一个最小字母作弱排序.

设 $y\geqslant x,z\geqslant x$,则

$$y^n\geqslant x^n,z^m\geqslant x^m$$

原不等式左边

$$=\frac{y^m-z^m}{z^n+x^n}+\frac{z^m-x^m}{z^n+x^n}+\frac{z^m-y^m}{x^n+y^n}+\frac{x^m-z^m}{y^n+z^n}$$

$$=\frac{(y^m-z^m)(y^n-z^n)}{(z^n+x^n)(x^n+y^n)}+\frac{(x^m-z^m)(x^n-y^n)}{(z^n+x^n)(y^n+z^n)}\geqslant0$$

2. 关于对称不等式

例 4 设 a,b,c 为正数求证:

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ac}+\frac{c^3}{ab}\geqslant a+b+c \quad ⑥$$

证明:不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则

$$\frac{1}{bc}\leqslant\frac{1}{ac}\leqslant\frac{1}{ab}$$

⑥ 式左边为顺序和.

$$\text{左边}=\frac{a}{bc}\cdot a^2+\frac{b}{ac}\cdot b^2+\frac{c}{ab}\cdot c^2$$

$$\geqslant\frac{a}{bc}\cdot b^2+\frac{b}{ac}\cdot c^2+\frac{c}{ab}\cdot a^2$$

$= \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$(还是顺序和)

$\geqslant \frac{ac}{c} + \frac{bc}{b} + \frac{ab}{a}$

$= a + b + c$

这里两次使用了排序式

例 5 (第二届友谊杯国际竞赛题)设 a,b,c 为正数,证明:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c) \quad ⑦$$

证明:设 $a \leqslant b \leqslant c$,则 $a^2 \leqslant b^2 \leqslant c^2$, $\frac{1}{b+c} \leqslant \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{a+b}$,可知 ⑦ 式左边为顺序和,记为 S,由排序式有

$$S \geqslant \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b} \quad ⑧$$

$$S \geqslant \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b} \quad ⑨$$

⑧ + ⑨,有

$$2S \geqslant \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} + \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

为了得到 ⑦ 式右边的结果,注意到

$$2(b^2+c^2) \geqslant (b+c)^2$$

即 $\frac{b^2+c^2}{b+c} \geqslant \frac{1}{2}(b+c)$

$\frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant \frac{1}{2}(c+a)$

$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}(a+b)$

于是 $2S \geqslant \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a+b)$

$= a + b + c$

$\therefore S \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c)$

例 6 设 $x_i \in \mathbf{N}(i = 1,2,\cdots,6)$,且

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_6 \quad ⑩$$

求证:$1 < \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_6}{6} \leqslant 2$ ⑪

证明:由 ⑩ 知正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 不可能全是 1,故 ⑪ 的左边不等式显然成立.

至于右边,由于不等式是对称的,所以,

不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_k > 1(1 \leqslant k \leqslant 6)$,其余各数均为 1,作代换,令 $x_i = 1 + y_i(i = 1,2,\cdots,k)$,则 $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_k \geqslant 1$,⑩ 式变为

$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + 6$

$= (1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_{12})$ ⑫

⑪ 式右端等价于

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k \leqslant 6 \quad ⑬$$

若 $k \geqslant 3$,那么

$(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_k)$

$= 1 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_k) + y_1y_2 + \cdots + y_1y_k + y_2y_3 + \cdots + y_2y_k + \cdots + y_1y_2\cdots y_k$

$> 1 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)$ ⑭

由 ⑫,⑭ 得

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k \leqslant 6$$

若 $k = 2$,⑫ 式即为

$y_1 + y_2 + 6 = (1 + y_1)(1 + y_2)$

即 $1 + y_1 y_2 = 6$ ⑮

因 $1 + y_1 y_2 = y_1 + y_2 + (1 - y_1)(1 - y_2) \geqslant y_1 + y_2$ ⑯

故由 ⑮、⑯ 知 ⑬ 成立

显然 $k \neq 1$,否则与 ⑫ 矛盾.

3. 关于"部分与整体思想"在对称(和轮换对称)不等式证明中的应用.

例 7 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$,求证

$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \sqrt{3}(a + b + c)$

【分析】 不等式有明显的轮换对称性,考虑整体等于部分之和,故左边三项转化成三个不等式相加,即各部分之和等于整体.

证明: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} = \sqrt{(a + b)^2 - ab}$

$\geqslant \sqrt{(a + b)^2 - \dfrac{(a + b)^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a + b)$

同理可证:$\sqrt{b^2 + bc + c^2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(b + c)$

$\sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c + a)$

三式相加得

$\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geqslant \sqrt{3}(a + b + c)$

【评注】 原不等式可推广成:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$,求证:

$\sqrt{a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2} + \sqrt{a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2} + \cdots + \sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-1}a_n + a_n^2}$

$+ \sqrt{a_n^2 + a_n a_1 + a_1^2} \geqslant \sqrt{3}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

例 8 (1998第39届IMO预选试题)设 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,且 $xyz = 1$,求证:$\dfrac{x^3}{(1 + y)(1 + z)} + \dfrac{y^3}{(1 + x)(1 + z)} + \dfrac{z^3}{(1 + x)(1 + y)} \geqslant \dfrac{3}{4}$

【分析】 此不等式是对称不等式,添入适当的辅助元素,转化成三个不等式.

证明: $\because x, y, z \in \mathbf{R}^+$

$\therefore \dfrac{x^3}{(1 + y)(1 + z)} + \dfrac{1 + y}{8} + \dfrac{1 + z}{8} \geqslant \dfrac{3}{4}x$

$\dfrac{y^3}{(1 + x)(1 + z)} + \dfrac{1 + x}{8} + \dfrac{1 + z}{8} \geqslant \dfrac{3}{4}y$

$\dfrac{z^3}{(1 + x)(1 + y)} + \dfrac{1 + x}{8} + \dfrac{1 + y}{8} \geqslant \dfrac{3}{4}z$

三式相加,得

$\dfrac{x^3}{(1 + y)(1 + z)} + \dfrac{y^3}{(1 + x)(1 + z)} + \dfrac{z^3}{(1 + x)(1 + y)}$

$\geqslant \dfrac{3}{4}(x + y + z) - \dfrac{1}{8}(6 + 2x + 2y + 2z)$

$= \dfrac{1}{2}(x + y + z) - \dfrac{3}{4}$

$\geqslant \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$

4. 关于“对称不等式扰动变换”的应用

宋庆先生在“中学数学教学参考”中发表文章《关于三个几何不等式》(1997年第10期),在此文章中建立了不等式:

若 a,b,c 为正数,且

$-1<\lambda<\min\{\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c}\}$,则

$$\frac{a}{b+c-\lambda a}+\frac{b}{c+a-\lambda b}+\frac{c}{a+b-\lambda c}\geqslant\frac{3}{2-\lambda} \quad ⑰$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$.

这是一个优美的对称不等式,应用对称不等式扰动变换,可以得到:

例 9 定理 设 a,b,c 是三角形三边长,$1\leqslant\lambda\leqslant\min\{\frac{b+c}{a},\frac{c+a}{b},\frac{a+b}{c}\}$,则

$$\frac{c}{b+c-\lambda a}+\frac{a}{c+a-\lambda b}+\frac{b}{a+b-\lambda c}\geqslant\frac{3}{2-\lambda} \quad ⑱$$

$$\frac{b}{b+c-\lambda a}+\frac{c}{c+a-\lambda b}+\frac{a}{a+b-\lambda c}\geqslant\frac{3}{2-\lambda} \quad ⑲$$

等号成立当且仅当 $a=b=c$.

证明:设 $x=b+c-\lambda a,y=c+a-\lambda b,z=a+b-\lambda c$

可得 $a=\frac{y+z+(\lambda-1)x}{(2-\lambda)(1+\lambda)},b=\frac{z+x+(\lambda-1)y}{(2-\lambda)(1+\lambda)}$

$c=\frac{x+y+(\lambda-1)z}{(2-\lambda)(1+\lambda)}$

⑱ 式左 $=\frac{1}{(2-\lambda)(1+\lambda)}\left[3+\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+(\lambda-1)\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}\right)\right]\geqslant\frac{3}{2-\lambda}$

同理可证 ⑲,等号成立的条件由证明过程易知

【评注】 其一,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则$\frac{1}{b+c-\lambda a}\geqslant\frac{1}{c+a-\lambda b}\geqslant\frac{1}{a+b-\lambda c}$,由排序不等式可知:在定理条件下,⑱,⑲ 是 ⑰ 的加强.

其二,⑰,⑱,⑲ 形式和协,相映成趣给人的美感!这正是对称不等式扰动变换的魅力!它为我们研究对称不等式的加强提供了可操作的思考程序,可以帮助我们探索新的优美结论.

应该特别指出“轮换对称不等式”和“对称不等式”的证明不一定要“弱排序”和“排序”,除去排序(弱),它们有更广阔的证明思路空间,我们通过最后两例说明这个问题,并结束本章

例 10 (第 42 届 IMO 第 2 题) 对所有正实数 a,b,c,证明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$$

【分析】 首先指出这是一个轮换对称不等式在第一讲中例 2 我们用“权方和不等式”进行证明,简捷、漂亮,根本没有用弱排序,此外我们还可以给证明本例的其它方法.如“换元法”,“反证与琴生不等式法”“均值不等式法”并将其命题推广,用“柯西不等式法”等等.

证法一:“权方和不等式法”见第一章例 2.

证法二:“换元法”

记 $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}},z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$

则 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$

因为 $x^2=\frac{a^2}{a^2+8bc}$,故$\frac{1}{x^2}-1=\frac{8bc}{a^2}$

类似地$\frac{1}{y^2}-1=\frac{8ac}{b^2},\frac{1}{z^2}-1=\frac{8ab}{c^2}$

于是$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$

另一方面,若 $x+y+z<1$

则 $0<x<1,0<y<1,0<z<1$

及 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$

$$=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{x^2y^2z^2}$$

$$>\frac{[(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]}{x^2y^2z^2}$$

$$=\frac{(y+z)(2x+y+z)(x+z)(2y+x+z)(x+y)(x+y+2x)}{x^2y^2z^2}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 2\sqrt{xy}\cdot 4\sqrt[4]{y^2xz}\cdot 2\sqrt{xy}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2}}{}$$

$$=\frac{512x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2}=512$$

矛盾.

$\therefore x+y+z\geqslant 1$　即

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$$

证法三:“换元法”

原不等式转化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ac}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}}\geqslant 1$$

令 $\alpha=\frac{bc}{a^2},\beta=\frac{ac}{b^2},\gamma=\frac{ab}{c^2}$ 显然有 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^+$,且 $\alpha\beta\gamma=1$,命题转化为证

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\beta}}+\frac{1}{\sqrt{1+8\gamma}}\geqslant 1$$

$\Leftarrow\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\beta)}+\sqrt{(1+8\beta)(1+8\gamma)}+\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\gamma)}$

$\quad\geqslant\sqrt{(1+8\alpha)(1+8\beta)(1+8\gamma)}$

令右式为 x,两边平方有

$\Leftarrow 1+8(\alpha+\beta)+64\alpha\beta+1+8(\beta+\gamma)+64\beta\gamma+1+8(\alpha+\gamma)+64\alpha\gamma+2(\sqrt{1+8\alpha}+\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma})x$

$\quad\geqslant 1+8(\alpha+\beta+\gamma)+8^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+8^3\alpha\beta\gamma$

$\Leftarrow 8(\alpha+\beta+\gamma)+2(\sqrt{1+8\alpha}+\sqrt{1+8\beta}+\sqrt{1+8\gamma})x$

$\quad\geqslant 8^3-2$　　⑳

注意到:

$x^2=1+8(\alpha+\beta+\gamma)+8^2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)+8^3$

$\quad\geqslant 1+8\times 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+8^2\times 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+8^3$

$\quad=729\Rightarrow x\geqslant 27$

式(20)左边 $\geqslant 8(\alpha+\beta+\gamma)+2\cdot 3x\sqrt[3]{\sqrt{1+8\alpha}\sqrt{1+8\beta}\cdot\sqrt{1+8\gamma}}$

$=8(\alpha+\beta+\gamma)+6x^{\frac{4}{3}}$

$\geqslant 8\cdot 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+6\times 27^{\frac{4}{3}}$

$=8\times 3+6\times 81=8^3-2=$ 右边

证法四:(反证法及琴生不等式的应用)

假设存在某一组正数 a_0,b_0,c_0,使

$$\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}}+\frac{b_0}{\sqrt{b_0{}^2+8a_0c_0}}+\frac{c_0}{\sqrt{c_0{}^2+8a_0b_0}}<1$$

令 $x=\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+8b_0c_0}},y=\frac{b_0}{\sqrt{b_0{}^2+8a_0c_0}},z=\frac{c_0}{\sqrt{c_0{}^2+8a_0b_0}}$,则

$$\frac{x^2}{1-x^2}=\frac{a_0^2}{8b_0c_0},\frac{y^2}{1-y^2}=\frac{b_0{}^2}{8a_0c_0},\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{c_0{}^2}{8a_0b_0}$$

故 $\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}=\frac{1}{8^3}$ ㉑

由 $x+y+z<1$,有

$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}<\frac{x}{y+z}\cdot\frac{y}{x+z}\cdot\frac{z}{x+y}$

$\leqslant\frac{x}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{y}{2\sqrt{xz}}\cdot\frac{z}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{8}$ ㉒

又由 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在 $(0,1)$ 内图形是双曲线上一段凹弧,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是凹函数,由琴生不等式,有

$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\leqslant3\cdot\frac{\frac{x+y+z}{3}}{1+\frac{x+y+z}{3}}=3\cdot\frac{1}{\frac{3}{x+y+z}+1}$

$<3\times\frac{1}{\frac{3}{1}+1}=\frac{3}{4}$ ($x+y+z<1$ 可得)

故 $\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}$

$\leqslant\left[\frac{\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}}{3}\right]^3<\frac{1}{4^3}$ ㉓

由 ㉒、㉓ 可得,

$$\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\cdot\frac{z}{1-z}\cdot\frac{x}{1+x}\cdot\frac{y}{1+y}\cdot\frac{z}{1+z}<\frac{1}{8^3}$$

即

$$\frac{x^2}{1-x^2}\cdot\frac{y^2}{1-y^2}\cdot\frac{z^2}{1-z^2}<\frac{1}{8^3}$$

与式 ① 矛盾,从而原不等式成立.

证法五:

1. 引理　若 $x>0$,则 $\sqrt{1+8x}\leqslant1+2x^{\frac{2}{3}}$

证明: $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}\geqslant2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}=2x$

故 $1+4(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}})\geqslant1+8x$

$\therefore\sqrt{1+8x}\leqslant1+2x^{\frac{2}{3}}$

2. 原不等式证明

由引理得 $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{bc}{a^2}}}\geqslant\frac{1}{1+2\left(\frac{bc}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+2b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{2}{3}}}\geqslant\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

同理 $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\geqslant\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$

三式相加得,原不等式成立.

【评注】 (1) 此证法之引理是以均值不等式为基础;

(2) 此证法十分简洁,但技巧较强.

可作如下推广.

例 10 对所有正实数 $a,b,c,\lambda \geqslant 8$,证明:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \quad (*)$$

证明:根据柯西不等式得

$\sum a \cdot \sum a(a^2+\lambda bc) \geqslant (\sum a\sqrt{a^2+\lambda bc})^2$

$\sum a\sqrt{a^2+\lambda bc} \cdot \sum \frac{a}{a^2+\lambda bc} \geqslant (\sum a)^2$

$\therefore \sum a \cdot \sum a(a^2+\lambda bc) \cdot (\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}})^2 \geqslant (\sum a)^4$

即
$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}}\right)^2 \geqslant \frac{(\sum a)^3}{\sum a \cdot (a^2+\lambda bc)} \quad ㉔$$

记 $m=\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{8(a^3+b^3+c^3)}, \quad n=\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}$

利用基本不等式得

$3(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 24\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}=24abc$

于是有 $m \geqslant n$

利用柯西不等式得 $9\sum a\sum a^3 \geqslant 9(\sum a^2)^2=(3\sum a^2)^2 \geqslant (\sum a)^4$

于是 $9\sum a^3 \geqslant (\sum a)^3=\sum a^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

则有 $1 \geqslant m$

而 $\frac{(\sum a)^3}{\sum a(a^2+\lambda bc)}=\frac{\sum a^3+3(a+b)(b+c)(c+a)}{\sum a^3+3\lambda abc}$

$=\frac{1+8m}{1+\lambda n}$

结合㉔得
$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} \geqslant \sqrt{\frac{1+8m}{1+\lambda n}} \quad ㉕$$

因此只要证明
$$\sqrt{\frac{1+8m}{1+\lambda n}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}} \quad ㉖$$

㉖ $\Leftrightarrow \frac{1+8m}{1+\lambda n} \geqslant \frac{9}{1+\lambda}$

$\Leftrightarrow 1+8m+\lambda+8\lambda m \geqslant 9+9\lambda n$

$\Leftrightarrow (\lambda-8)(1-n)+8(m-n)(1+\lambda) \geqslant 0$

利用 $\lambda \geqslant 8$ 及 $1 \geqslant m$ 与 $m \geqslant n$ 知上式成立,所以(*)式成立.

例 11 (第 39 届 IMO 预选题) 设 x,y,z 是正实数,且 $xyz=1$

求证:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}$$

证法一:均值不等式法(详见第一讲例 13)

【思路 2】 利用不等式等号成立的条件,构造不等式,用均值不等式证明.

由 $x=y=z=1$ 有

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}=\frac{1}{4}=\frac{x(1+y)(1+z)}{16}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{x(1+y)(1+z)}{16}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \cdot \frac{x(1+y)(1+z)}{16}} = \frac{1}{2}x^2$$

证法二: $\because x, y, z \in \mathbf{R}^+$ 且 $xyz = 1$

$$\therefore \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{x(1+y)(1+z)}{16} \geqslant \frac{1}{2}x^2 \quad ㉗$$

同理 $\dfrac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \dfrac{y(1+x)(1+z)}{16} \geqslant \dfrac{1}{2}y^2 \quad ㉘$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{z(1+x)(1+y)}{16} \geqslant \frac{1}{2}z^2 \quad ㉙$$

㉗ + ㉘ + ㉙ 得

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \frac{1}{16}[x(1+y)(1+z) + y(1+x)\cdot(1+z) + z(1+x)(1+y)]$$

$$= \frac{1}{16}[8(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 3]$$

$$= \frac{1}{16}[6(x^2+y^2+z^2) + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 - (x+y+z) - 3]$$

$$\geqslant \frac{1}{16}[6(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z) - 3]$$

$$= \frac{1}{16}[5(x^2+y^2+z^2) + (x^2+1) + (y^2+1) + (z^2+1) - (x+y+z) - 6]$$

$$\geqslant \frac{1}{16}[5(x^2+y^2+z^2) + (x+y+z) - 6]$$

$$\geqslant \frac{1}{16}\left[5\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + 3\cdot\sqrt[3]{xyz} - 6\right]$$

$$= \frac{1}{16}(5\times 3 + 3 - 6)$$

$$= \frac{3}{4}$$

当且仅当 $x = y = z = 1$ 时,原不等式取等号.

【思路 3】 利用:若 $a \in \mathbf{R}^+$,则有 $a \geqslant 2 - \dfrac{1}{a}$,当且仅当 $a = 1$ 时取等号.

证法三: $\because x, y, z \in \mathbf{R}^+$,且 $xyz = 1$

又 $\because \dfrac{x^3}{(1+y)(1+z)} = \dfrac{x^2}{4}\cdot\dfrac{4x}{(1+y)(1+z)}$

$$\geqslant \frac{x^2}{4}\left(2 - \frac{(1+y)(1+z)}{4x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{x(1+y)(1+z)}{16} \quad ㉚$$

同理有 $\dfrac{y^3}{(1+x)(1+z)} \geqslant \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{y(1+x)(1+z)}{16} \quad ㉛$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{1}{2}z^2 - \frac{z(1+x)(1+y)}{16} \quad ㉜$$

由 ㉚ + ㉛ + ㉜,得

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) - \frac{1}{16}[x(1+y)(1+z) + y(1+x)(1+z) + z(1+x)(1+y)]$$

以下同法二

【评注】 此题,除去第一讲由例 13 处推广外,还可作如下推广:

推广 1. 设 x,y,z 为正实数,且 $xyz = 1, p \in \mathbf{R}$,求证:

$$\frac{x^{3p}}{(1+y^p)(1+z^p)}+\frac{y^{3p}}{(1+x^p)(1+z^p)}+\frac{z^{3p}}{(1+x^p)(1+y^p)} \geqslant \frac{3}{4}$$

(证法同法一)

推广 2. 设 x,y,z 为正实数,且 $xyz = p^3(p \in \mathbf{R}^+)$,求证:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3p^3}{(1+p)^2}$$

(证法同法一)

推广 3. 设 a,b,c,d 为正实数,且 $abcd = 1$,求证

$$\frac{a^4}{(1+b)(1+c)(1+d)}+\frac{b^4}{(1+a)(1+c)(1+d)}+\frac{c^4}{(1+a)(1+b)(1+d)}+\frac{d^4}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geqslant \frac{1}{2}$$

(证法同法一)

推广 4: 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正实数,且 $a_1a_2\cdots a_n = 1$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^n(1+a_i)}{A} \geqslant \frac{n}{2^{n-1}}$$

(其中 $A = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)$)

(证法同证法二)

§5.3 针对性训练

A组

1. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,求证:$a^5+b^5+c^5\geqslant a^3bc+b^3ac+c^3ab$

2. 证明:若 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$,且 $abc=1$,则有 $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

3. 设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$,且 $a+b+c+d+e=1$,求证:$ad+dc+cb+be+ea\leqslant\frac{1}{5}$

4. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正数($n\geqslant 2$),且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=1$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{n-1}$$

5. 设 x,y 是正实数,且 $x+y=1$,求证:$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$

6.(第26届独联体奥林匹克试题)对任意 $a>1,b>1$ 的实数,求证:

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8$$

B组

1.(1995年第36届IMO试题)设 a,b,c 为正实数,且满足 $abc=1$,试证:$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$

2. 设 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,实数 α,β 满足 $\alpha\beta>0$,求证:

$$\frac{x_1^\beta}{x_2^\alpha}+\frac{x_2^\beta}{x_3^\alpha}+\cdots+\frac{x_{n-1}^\beta}{x_n^\alpha}+\frac{x_n^\beta}{x_1^\alpha}\geqslant x_1^{\beta-\alpha}+x_2^{\beta-\alpha}+\cdots+x_n^{\beta-\alpha}$$

3. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

4. 设 $\frac{1}{2}\leqslant P\leqslant1,a_i\geqslant0,0\leqslant b_i\leqslant P\quad(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant2)$.

$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1$,求证:

$$b_1a_2a_3\cdots a_n+b_2a_1a_3\cdots a_n+\cdots+b_na_1a_2\cdots a_{n-1}\leqslant\frac{p}{(n-1)^{n-1}}$$

5. 设 $0\leqslant x,y,z\leqslant1$,求证:

$$\frac{x}{1+y+z}+\frac{y}{1+z+x}+\frac{z}{1+x+y}+(1-x)(1-y)(1-z)\leqslant1$$

第六章

加　强　命　题

§6.1　知识要点与基本方法

首先我们指出要讲的“加强命题”是指:在命题条件不变的情况下,加强结论,在不等式证明中,这个加强的结论即为“加强不等式”我们要用“加强不等式”去证明“待证不等式”,换言之,要证某个不等式 A,可以去证明一个比 A 更强的不等式 B,用证明更强的不等式 B 来代替不等式 A 的证明.

通常人们认为若不等式 A 不易证明,那么它的加强不等式 B 就更不容易证明,实则不然,虽然待证的不等式 A 不易证明,但其加强的不等式 B 确是可以被证明,相对要容易.(请见实例分析)

另一个问题也是最重要的问题,即如何找到待证不等式 A 的加强不等式 B,这是本讲的关键问题,为了回答这个问题,我们将不易证明的待证不等式 A 分两大类型,一类是用“数学归纳法型”,另一类是用“放缩法型”.

一、数学归纳法型

实例

例 1　设 $0 < u < 1$,并且数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots$,满足:$u_1 = 1 + u, u_n = \frac{1}{u_{n-1}} + u, (n \geqslant 2)$,求证:$u_n > 1$

证明行得通吗?请看

证明:

当 $n = 1$ 时,$\because u_1 = 1 + u$,且 $0 < u < 1$

$\therefore u_1 > 1$

假设 $n = k$ 时成立,即 $u_k > 1$,待证 $n = k + 1$ 时,$u_{k+1} > 1$ 成立

但 $\because u_{k+1} = \frac{1}{u_k} + u$

又 $\because u_k > 1$,即$\frac{1}{u_k} < 1$

$\therefore u_{k+1} < 1 + u$

却得不到要证明的 $u_{k+1} > 1$

至此,证明受阻!

如何解救?

读者不妨自己先动动脑筋,想想解救的妙方,然后再读下面的文字.

要想解救,当先弄清受阻的原因!

因为,$u_{k+1} = \frac{1}{u_k} + u$,所以要证 $u_{k+1} > 1$,即证$\frac{1}{u_k} + u > 1$,即$\frac{1}{u_k} > 1 - u$,也就是 $u_k < \frac{1}{1-u}$,但在归纳假设里,只有 $u_k > 1$,根本没有 $u_k < \frac{1}{1-u}$,当然无法使证明顺利通过,没有 $u_k < \frac{1}{1-u}$,就是受阻原因!

因此,如果将要证的结论 $u_n > 1$ 换成$\frac{1}{1-u} > u_n > 1$,那么在上述证明中从假设 $n = k$ 时$\frac{1}{1-u} >$

$u_{k+1}>1$ 成立,当然能够顺应推出 $\frac{1}{1-u}>u_{k+1}>1$ 成立,从而 $u_{k+1}>1$ 得证.

至此,我们指出"在题设条件不变的条件下,所证明的不等式 $\frac{1}{1-u}>u_n>1$ 就是待证不等式 $u_n>1$ 的"加强不等式".

不妨将"用证明加强不等式"来证明"待证不等式的过程整理如下.

证明在题条件不变的情况下,$\frac{1}{1-u}>u_n>1$

事实上,

$n=1$ 时,$u_1=1+u$

又 $\because 0<u<1$

$\therefore u_1>1$

再注意到由 $0<u<1$ 有 $0<1-u^2<1$,两边除以 $1-u$ 有 $u_1=1+u<\frac{1}{1-u}$

$\therefore \frac{1}{1-u}>u_1>1$ 成立.

假设 $n=k$ 时结论成立,即 $\frac{1}{1-u}\overset{①}{>}u_k\overset{②}{>}1$,于是 $n=k+1$ 时,

$$\left.\begin{aligned}&u_{k+1}=\frac{1}{u_k}+u\overset{据①}{>}(1-u)+u=1\\ 且\quad &u_{k+1}=\frac{1}{u_k}+u\overset{据②}{<}1+u<\frac{1}{1-u}\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \frac{1}{1-u}>u_{k+1}>1$

$\therefore n=k+1$ 时,结论成立.

据数学归纳原理可知,对任意自然数 n,都有 $\frac{1}{1-u}>u_n>1$

$\therefore u_n>1$ 证毕

至此我们着重指出:所找到的"加强不等式"所起的作用的实质就是保证数学归纳法第二大步:保证由 $n=k$ 时成立推证出 $n=k+1$ 时成立的递推成功.

二、放缩法型

先看一个例子

例 2 求证:$\forall n\in \mathbf{N}_+,\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<3$ ③

【分析】 欲证 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<3$

即
$$1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<3$$

即
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<2 \quad ④$$

但是我们应该知道

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n}}<1 \quad ⑤$$

我们还应该知道

$$\frac{1}{k\sqrt{k-1}}=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\frac{1}{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{k-(k-1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$< \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)(k = 2,3,\cdots)$$

即
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}} < 2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad ⑥$$

由 ④、⑤ 可知
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}} < 2 \quad ⑦$$

又明显知道 $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}}$

因此 ⑦ 式是 ④ 式的"加强不等式",而 ④ 式是与待证不等式 ③ 等价的不等式,所以 ⑦ 式是待证不等式 ③ 的"加强不等式".

从而,要证明待证不等式 ③,只要证 ③ 的加强不等式 ⑦ 即可,不妨把证明过程归纳如下.

证明:先证 ③ 的加强不等式
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}} < 2 \quad ⑧$$

若 ⑧ 成立,则原题自然成立

一般项
$$\frac{1}{k\sqrt{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{k-1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}$$
$$= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$< 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)(k = 1,2,\cdots,n)$$
$$\therefore \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}} < 2 \cdot \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 2$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k-1}} < 1 + 2 = 3$$
证毕

至此,我们归纳如下:

如果一个不等式 A 经过一边放大或缩小得到 A 的加强不等式 B,并这个加强不等式 B 不但可以被证明,且可以代替不等式 A 的证明或可由加强不等式 B 推证出原不等式 A 成立,那么在题设条件下证明原不等式 A 就改证 A 的加强不等式 B.

由例 2 的分析可知"加强不等式"的得到是以"放缩法"为基础的,因此,参赛者必须有各个方面的非常丰富的"放缩技巧",方可较好的掌握"用加强不等式"的方法去证明待证的不等式.

但当一个不等式 A,将一边经过一些放缩即可得到证明,没有必要提取什么"加强不等式",这时不

等式 A 的证明即为放缩法.

§6.2 赛题精讲

一、数学归纳法型

例 1 求证:$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2(n\geqslant 1)$

【分析】 若设 $n=k$ 时不等式成立

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2$$

则有 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2+\frac{1}{(k+1)^2}$ 无法推出 $n=k+1$ 时命题成立

对此,可对 $n\geqslant 2$ 先证一个更强的命题,其加强不等式是:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \qquad (*)$$

证明:$n=2$ 时

$$1+\frac{1}{2^2}=1\frac{1}{4}<1\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}$$

假设 $n=k$ 时,(*)成立,即

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{k}$$

则当 $n=k+1$ 时,两边加上$\frac{1}{(k+1)^2}$,有

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\\&<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\\&=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}\\&=2-\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时命题成立

由数学归纳法得

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$$

更有

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$$

例 2 设 $n(\geqslant 2)$ 是整数,求证:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}<4$$

分析与证明:

设$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}$,则

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\\&=\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}\right)+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2n}a_n$$

$\therefore a_{n+1} = \frac{n+1}{2n}a_n + \frac{n+1}{n}$

$\because a_2 = 2$,所以 $a_3 = 3, a_4 = \frac{10}{3}, a_5 = \frac{10}{3}$

故可猜测一个比结论更强的命题:

设 $n \geqslant 2, (n \in N_+)$,则 $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant \frac{10}{3}$

证明:(1) 由上述验证可知

当 $n \leqslant 5$ 时,$a_n \leqslant \frac{10}{3}$

(2) 设 $a_k \leqslant \frac{10}{3}, (k \geqslant 5)$,则

$$a_{k+1} = \frac{k+1}{2k}a_k + \frac{k+1}{k}$$
$$\leqslant \frac{k+1}{2k} \times \frac{10}{3} + \frac{k+1}{k}$$
$$= \frac{8}{3}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
$$\leqslant \frac{8}{3}\left(1 + \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{48}{15} < \frac{10}{3}$$

从而由数学归纳可知 $a_n \leqslant \frac{10}{3}$

当然有原命题 $n(\geqslant 2)$ 是整数时

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} < 4$$

更成立.

例 3 (2002 全国高考理科(22)题(Ⅱ))设数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1, (n \in N), a_1 \geqslant 3$,证明对所有的自然数 n,有

(i) $a_n \geqslant n + 2$;

(ii) $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

【分析】

(i) 易用数学归纳法证明.

(ii) 是否也能用数学归纳法呢?

若假设$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_k} \leqslant \frac{1}{2}$,则

$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_k} + \frac{1}{1+a_{k+1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{1+a_k^2 - ka_k + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_k(a_k - k) + 2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{(k+2) \times 2 + 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k+6}$,推不出结论.

但若注意到:

$$\frac{1}{1+a_1} \leqslant \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}$$

且 $$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < \frac{1}{2}$$

故只要证明$\frac{1}{1+a_k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

再累加就可证明原不等式成立

证明:(i) 证略

(ii) 先证对任意自然数 n,不等式$\frac{1}{1+a_n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 成立.

1°) 当 $n = 1$ 时,$\frac{1}{1+a_1} \leqslant \frac{1}{1+1+2} = \frac{1}{4} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1}$

2°) 假设 $n = k(k \in \mathrm{N})$,$\frac{1}{1+a_k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$,则

当 $n = k+1$ 时,$\frac{1}{1+a_{k+1}} = \frac{1}{1+a_k^2 - ka_k + 1}$

$= \frac{1}{a_k(a_k - k) + 2} \leqslant \frac{1}{2a_k + 2} = \frac{1}{2(1+a_k)} \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k+1)+1}$

由 1°)、2°) 可知,对任意 $n \in \mathrm{N}$,都有

$$\frac{1}{1+a_n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

由不等式的可加性得

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \frac{1}{2}$$

从而有$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{1}{2}(n \in \mathrm{N})$

例 4 如果 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \pi, 0 \leqslant A_i \leqslant \pi, i = 1,2,\cdots,n$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin A_i \leqslant n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

【分析】 如果直接对 n 进行归纳,首先便有 $A_1 + A_2 + \cdots + A_{k-1} + (A_k + A_{k+1}) = \pi, \sin A_1 + \cdots + \sin A_{k-1} + \sin(A_k + A_{k+1}) \leqslant k\sin\frac{\pi}{k}$,但难以进行归纳过渡,故考虑如下的加强命题:

若 $0 \leqslant A_i \leqslant \pi, i = 1,2,\cdots,n$,则 $\sum_{i=1}^{n} \sin A_i \leqslant n\sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i\right)$

证明:

$n = 1$ 时,显然为真

设 $n = k$ 时为真,则 $n = k+1$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sin A_i \leqslant k\sin\frac{\sum_{i=1}^{k} A_i}{k} + \sin A_{k+1}$$

$$= (k+1)\left[\frac{k}{k+1}\sin\frac{\sum_{i=1}^{k} A_i}{k} + \frac{1}{k+1}\sin A_{k+1}\right]$$

$$\leqslant (k+1)\left[\sin\frac{\sum_{i=1}^{k} A_i}{k+1} + \frac{1}{k+1}\sin A_{k+1}\right]$$

$$\leqslant (k+1)\sin\frac{\sum_{i=1}^{k+1}A_i}{k+1} \quad (\text{“=”由 } y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi) \text{ 上的凸性得出})$$

即加强原命题对一切自然数成立.

从而,原命题对一切自然数成立.

例 5 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,证明:对一切 $n\geqslant 2$ 都有

$$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)$$

【分析】

设 $n=k$,命题成立,即

$$a_k^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)$$

则 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
a_{k+1}^2 &= \left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2\\
&= a_k^2+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&> 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2} &⑨\\
&= 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{2}{k+1}\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&= 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)-\frac{1}{(k+1)^2} &⑩
\end{aligned}$$

推不出 $a_{k+1}^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)$

但是,如果 ⑨ 式变成:$\underset{\sim}{a_k^2}+2\cdot\frac{a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}$

$$> \underset{\sim\sim\sim}{2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}}+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2} \quad ⑪$$

(即增加一项$\frac{1}{k}$)

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)^2}\\
&= 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2}+\frac{a_{k+1}}{2}\right)+\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\\
&> 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2}+\frac{a_{k+1}}{2}\right)+\frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}\\
&= 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2}+\frac{a_{k+1}}{2}\right)+\frac{1}{k+1} &⑫
\end{aligned}$$

比较 ⑪ 的曲线部分和 ⑫ 式,有

$$a_k^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2}\right)+\frac{1}{k} \quad ⑬$$

$$a_{k+1}^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2}+\frac{a_{k+1}}{2}\right)+\frac{1}{k+1} \quad ⑭$$

由此 ⑬、⑭ 可知,如果将命题结论所证的不等式 $a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2}\right)$加强成

$$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2}\right)+\frac{1}{n} \quad ⑮$$

则由 $n=k$ 时成立,到 $n=k+1$ 时也成立必会逆推成功,于是在题设条件不变的情况下改证加强不等式 ⑮

证明：

(1) 当 $n=2$ 时，$a_2^2=\frac{9}{4}$，而 $2\left(\frac{a_2}{2}\right)+\frac{1}{2}=2$

∴ 不等式⑮成立

(2) 假设 $n=k$ 时，⑮式成立，即

$a_k^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}$

则　当 $n=k+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}^2&=\left(a_k+\frac{1}{k+1}\right)^2\\
&=a_k^2+\frac{2a_k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)+\frac{1}{k}+\frac{2}{k+1}\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\\
&>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}\\
&=2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\right)+\frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

从而 $n=k+1$ 时，加强不等式⑮成立

由此可知，原不等式

$$a_n^2>2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)\text{成立.}$$

证毕

二、放缩法型

例 6　$\forall n\in\mathrm{N}_+$，求证：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$

证明：

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=C_n^0+C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)+C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&=2+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\cdots+\frac{n!}{n!n^n} \qquad ⑯
\end{aligned}
$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ 的加强不等式为

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}<1 \qquad ⑰$$

⑰式易证，事实上

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\
&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\
&=1-\frac{1}{n}<1
\end{aligned}
$$

再注意到：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(k-1)k}&\geqslant\frac{1}{k!}(k\geqslant 2,k\in\mathrm{N}_+)\\
&>\frac{1}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{n-k+1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$= C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$\therefore 1 > \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$> C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_n^3\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$\therefore$ 由 ⑯ 可知：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

【注】 (1) 事实上此题还可以用放缩法直接证：

$$\because \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!\,n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!\,n^n}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

(2) 我们知道自然对数的底数为 e，e 是个什么数？是怎么来的呢？当我们学过数列极限以后，便知：当 n 趋于正无穷大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限值就等于 e，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

这个 e 是无理数，它的值是

$$e = 2.718281828459045\cdots\cdots < 3$$

例 7 设 x,y,z 是正实数，且 $xyz=1$，证明：

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geqslant \frac{3}{4}$$

证明: 原不等式等价于

$$x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 \geqslant \frac{3}{4}(x+1)(y+1)(z+1) \tag{⑰}$$

由于对任意正数 u,v,w，有

$$u^3 + v^3 + w^3 \geqslant 3uvw$$

故考虑证明 ⑰ 的加强不等式

$$x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 \geqslant \frac{1}{4}[(x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3]$$

设 $f(t) = t^4 + t^3 - \frac{1}{4}(t+1)^3$

$g(t) = (t+1)(4t^2+3t+1)$

则 $f(t) = \frac{1}{4}(t-1)g(t)$，且 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格递增函数，因为

$$x^4 + x^3 + y^4 + y^3 + z^4 + z^3 - \frac{1}{4}[(x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3]$$

$$= f(x) + f(y) + f(z)$$

$$= \frac{1}{4}(x-1)g(x) + \frac{1}{4}(y-1)g(y) + \frac{1}{4}(z-1)g(z)$$

只要证明最后一个表达式非负即可

假设 $x \geqslant y \geqslant z$,则 $g(x) \geqslant g(y) \geqslant g(z) > 0, xyz = 1$

得 $x \geqslant 1, z \leqslant 1$

$\because (x-1)g(x) \geqslant (x-1)g(y), (z-1)g(y) \leqslant (z-1)g(z)$

$$\therefore \frac{1}{4}(x-1)g(x) + \frac{1}{4}(y-1)g(y) + \frac{1}{4}(z-1)g(z)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}[(x-1)+(y-1)+(z-1)]g(y)$$

$$= \frac{1}{4}(x+y+z-3)g(y)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}(3\sqrt[3]{xyz}-3)g(y)$$

$$= 0.$$

故原不等式成立,等号当且仅当 $x = y = z$ 时成立.

例 8 (第 13 届美国普特南赛题)对 $\forall n \in \mathrm{N}_+$,求证:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n} \tag{18}$$

证明:强化不等式

$$\frac{(2n+1)}{3}\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leqslant \frac{(4n+3)}{6}\sqrt{n} - \frac{1}{6}$$

一方面 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = 1\cdot\sqrt{1} + 1\cdot\sqrt{2} + \cdots + 1\cdot\sqrt{n}$

<u>阿贝尔和</u> $1\cdot(\sqrt{1}-\sqrt{2}) + 2(\sqrt{2}-\sqrt{3}) + \cdots + (n-1)(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) + n\sqrt{n}$.

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{n-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right) + n\sqrt{n}$$

$$> -\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{n-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}}\right) + n\sqrt{n}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}) + n\sqrt{n}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \sqrt{n}\right) + n\sqrt{n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} > \frac{(2n+1)}{3}\sqrt{n} \tag{19}$$

另一方面 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n}}$

<u>阿贝尔和</u> $1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (1+2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + [1+2+\cdots+(n-1)]\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) +$

$+ [1+2+\cdots+(n-1)+n]\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{1\cdot 2}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{1\cdot 2}}\right) + \frac{2\cdot 3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}\right) + \cdots + \frac{(n-1)n}{2}\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)n}}\right) + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\sqrt{(n-1)n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}}$$

$$< \frac{1}{8}[(\sqrt{1}+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n-1}+\sqrt{n})] + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{8}\left[2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \sqrt{1} - \sqrt{n}\right] + \frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \frac{(4n+3)}{6}\sqrt{n} - \frac{1}{6} \tag{20}$$

由 ⑲、⑳ 可知：加强不等式得证

∴ 原命题得证.

【评注】 阿贝尔(N. H. Abel, 1802 - 1829) 变换：

(Ⅰ) Abel 和差变换公式

设 $m < n \quad m, n \in \mathbf{N}$，则

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = A_n b_n - A_{m-1}b_m + \sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_k - b_{k+1})$$

(Ⅱ) Abel 分部求和公式

$$\sum_{k=1}^{n}a_k b_k = b_n\sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)(b_k - b_{k+1})$$

Abel 分部求和公式是例 8 考虑加强不等式的直接依据.

例 9 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 是正实数数列，对所有的 $n \geqslant 1$ 满足条件 $\sum_{j=1}^{n}a_j \geqslant \sqrt{n}$，证明：对所有的 $n \geqslant 1$，$\sum_{j=1}^{n}a_j^2 > \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

【分析】 因 $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\sqrt{j})^2} < \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{j} + \sqrt{j-1})^2}$

为此可考虑加强不等式 $\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{j} + \sqrt{j-1})^2} \leqslant \sum_{j=1}^{n}a_j^2$ ㉑

$\because \frac{1}{(\sqrt{1} + \sqrt{1-1})^2} > \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{2-1})^2} > \cdots > \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2}$

且 $\frac{1}{\sqrt{j} + \sqrt{j-1}} > 0 \quad (j = 1, 2\cdots, n)$

故考虑更一般的加强命题

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正数，且 $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n$， ㉒

若对所有 $k = 1, 2, \cdots, n$

$1, 2, \cdots, n$，$\sum_{j=1}^{n}a_j \geqslant \sum_{j=1}^{n}b_j$ ㉓

则有 $\sum_{j=1}^{n}a_j^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n}b_j^2$ ㉔

显然 ㉔ 是比㉑ 更强的不等式，若 ㉔ 得证，则 ㉑ 得证，进而原命题之中的不等式得证.

证明：先证加强命题

事实上，设 $b_{n+1} = 0$，由 ㉒，㉓ 可得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})\sum_{j=1}^{k}b_j \leqslant \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})\sum_{j=1}^{k}a_j$$

改变求和次序是

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=j}^{n}(b_k - b_{k+1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{k=j}^{n}(b_k - b_{k+1})$$

由此可得

$$\sum_{j=1}^{n}b_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}a_j b_j = \sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_j^2 b_j^2}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2 + b_j^2}{2} \quad \text{(柯西不等式)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j^2$$

$\therefore \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}b_j^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2$

即 $\quad \sum_{j=1}^{n}b_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n}a_j^2$ ㉕

∴ 加强命题得证.

为证本题不等式,令

$$b_j = \sqrt{j} - \sqrt{j-1} = \frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j-1}} \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

则 $$\sum_{j=1}^{n}a_j^2 \geqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(\sqrt{j}+\sqrt{j-1})^2} > \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\sqrt{j})^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

【评注】 本题证明之中交换求和次序的理论根据是"福比尼原理",也叫"算两次原理".它可通俗的叙述为:

对于一个适当的量,从两个方面去考虑它,然后综合起来得到一个等量关系式.

更深入,更具体的问题,请查阅有关书目.

例 10 $\triangle ABC$ 中,$BC = a, CA = b, AB = c$,求证:$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$(Weitzenbock 不等式)

证明:先引入一个"预备定理"(记 $S_{\triangle ABC} = \Delta$)

$4\sqrt{3}\Delta + 2\left(ha - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^2 = a^2+b^2+c^2$ 预备定理证明:

$$4\sqrt{3}\Delta + 2\left(ha - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-c^2}{2}\right)^2$$

$$= 4\sqrt{3}\Delta + 2\left(\frac{2\Delta}{a} - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-c^2}{2}\right)^2$$

$$= 4\sqrt{3}\Delta + \frac{8\Delta^2}{a^2} + \frac{3}{2}a^2 - 4\sqrt{3}\Delta + \frac{(b^2-c^2)^2}{2a^2}$$

$$= \frac{8}{a^2}\cdot\frac{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}{16} + \frac{3}{2}a^2 + \frac{(b^2-c^2)^2}{2a^2}$$

$$= \frac{2a^2c^2+2b^2a^2-a^4}{2a^2} + \frac{3}{2}a^2$$

$$= a^2+b^2+c^2$$

预备定理得证.

加强命题:"求证 $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta +$

$\frac{1}{b}\left[\left(\frac{a^2-b^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{c^2-a^2}{b}\right)^2\right]$" ㉖

证明加强命题

由预备定理有

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{3}\left[12\sqrt{3}\Delta + 2\left(ha - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + 2\left(h_b - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2\right.$$

$$\left. + 2\left(h_c - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2-a^2}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{c}\right)^2\right]$$

$$\geqslant 4\sqrt{3}\Delta + \frac{1}{b}\left[\left(\frac{b^2-c^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{c^2-a^2}{b}\right)^2 + \left(\frac{a^2-b^2}{c}\right)^2\right]$$

㉖ 得证

引入原命题条件,则 Weitzenbock 不等式自然成立.

§6.3 针对性训练

A组

1. 求证：$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n}-1)$

2. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{4a_n}$.证明：当$n>1$时，$\sqrt{\frac{2}{2a_n^2-1}}$均为正整数.

3.（1989.全国高中联赛第二试题二）已知，$x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$满足$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0,\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$，求证：$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$

4. 求证：$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1000}}>\sqrt{1000}$

5. 如果$A_1+A_2+\cdots+A_n=\pi,0<A_i<\pi,(i=1,2,\cdots,n)$，那么$\sin A_1+\sin A_2+\cdots+\sin A_n\leqslant n\sin\frac{\pi}{n}$

6. 设实数列$\{a_n\}$的项满足$a_1=1,a_{n+1}=1+a_1a_2a_3\cdots a_n,n\geqslant 1$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=2$

7. 已知$\triangle ABC$的三边长为$a,b,c,n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}$.

求证：$\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}+\sqrt[n]{b^n+c^n}+\sqrt[n]{c^n+a^n}}{a+b+c}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}$

8. 已知：$l \geqslant 5, A = \sum_{k=l}^{2l} \frac{1}{k^2}$

求证：$\left[\frac{1}{A}\right] = 2l - 3$

B组

1. 求证：$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$

2. 数列$\{a_n\}$满足关系

$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} (n \geqslant 2)$ 且 $a_1 = a_2 = 1$，证明$\{a_n\}$是有界数列.

3. 设数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足$a_0 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n} a_k^2 (k = 0,1,2,\cdots)$，其中 n 是一个给定的正整数，试证：$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

4. 设 $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$，求$[S_{1999}]$

5. 求最大的实数 a，使得$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > a$ 对所有正实数 x, y 和 z 成立.

6. 设 $x + y + z = xyz (x, y, z \in \mathrm{R}^+)$. 试证：$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) + 9 \geqslant 0$

第七章

参数与不等式

§7.1 知识要点与基本方法

首先我们指出,这一讲参数与不等式中所研究的问题不包括条件最值,也不包括满足一定条件的参数最值;不包括用不等式研究的多元函数最值问题,也不包括用不等式研究的复合最值问题,这些问题请详见第九讲"最值问题与不等式".这一讲我们所研究的问题主体上有两个方面的问题,其一,解含参不等式,即含参不等式的解法,其二,为了证明不等式或解涉及到不等式的数学竞赛问题中引入或挖掘辅助参数,谈谈引入参数的辅助作用.

一、巧解含参不等式

基础知识:(1) 含绝对值不等式的解法;

(2) 无理不等式解法;

(3) 分式不等式解法;

(4) 指数不等式,对数不等式解法;

(5) 高次不等式解法.

这些基础知识请读者见高中数学教材.

研究的主要问题

1. 转化与化归:主要利用等价转化思想化归为基本不等式,然后加以解决.

2. 数形结合:利用不等式与函数的联系,借助图象直观判断求解.

3. 分类讨论.

4. 函数与方程思想.

二、引入参数,证明不等式

证明不等式,是竞赛数学中的热点内容.因此,研究不等式证明的方法,多少年来也是人们研究的重点竞赛数学内容之一.本讲的第二个大问题将介绍引入参数,证明不等式的方法.

1. 引参,架桥,巧证不等式

2. 依规律引入参数,巧证不等式

其规律是:

由不等式 $a^2+(\lambda b)^2\geqslant 2\lambda ab(a,b\in\mathrm{R},\lambda$ 为参数)得 $a^2\geqslant 2\lambda ab-\lambda^2b^2$,若 $b>0$,则

$$\frac{a^2}{b}\geqslant 2\lambda a-\lambda^2 b \qquad (*)$$

对参数 λ 的任一实数值总成立,当且仅当 $\lambda=\frac{a}{b}$ 时,取等号.

应用(*)式可简捷、巧妙的证明许多不等式.

3. 引参,转化,巧证不等式

通过引入参数,将不等式等价地或同构地转化成另一不易证的不等式.让参数起到转化结构,变换角的目的.

4. 引入"公差(比)",巧证不等式

这是一种将所要证明的不等式命题与等差(比)数列巧妙结合,引进公差(比),巧证不等式的方法

以上 4 种方法，将给读者在研究不等式证明方法的问题上开辟一个新天地.

§7.2 赛题精讲

一、巧解含参不等式

1. 转化与化归

例 1 若 $x \in (0,1)$，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$，常数 $\lambda \in \left(2,\dfrac{5}{2}\right)$，解关于 x 的不等式 $f(x)>\dfrac{1}{\lambda}$.

解： $f(x)>\dfrac{1}{\lambda}$，即 $\dfrac{2^x}{4^x+1}>\dfrac{1}{\lambda}$ ①

因为 $4^x+1>1$，$\lambda>0$ 所以 ① 可等价转化成 $4^x-\lambda\cdot 2^x+1<0$

设 $t=2^x\in(1,2)$，不等式变为

$$t^2-\lambda\cdot t+1<0 \quad ②$$

因为 $\lambda\in\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$，所以 $\Delta=\lambda^2-4>0$

$$\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}<t<\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$$

而当 $\lambda\in\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$ 时，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}<1$，$1<\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}<2$

所以 $1<t<\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$

即 $0<x<\log_2\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$

综上可知，原不等式的解集是 $\left\{x \mid 0<x<\log_2\dfrac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}\right\}$

【评注】 本题利用题设条件将原不等式等价转化为(2)，即化归为一元二次不等式的解，是解决本题的关键.

例 2 设 $a>0$，解关于 x 的不等式

$$\sqrt{2ax-a^2}>1-x\,(a>0)$$

解：

原不等式 $\Leftrightarrow$ ① $\begin{cases}2ax-a^2\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\\2ax-a^2>(1-x)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\geqslant 0\\2ax-a^2\geqslant(1-x)^2\end{cases}$

或 ② $\begin{cases}2ax-a^2\geqslant 0\\1-x<0\end{cases}$

因为 $a>0$，所以

① $\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 1\\x^2-2(a+1)x+a^2+1<0\end{cases}$

② $\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{a}{2}\\x>1\end{cases}$

因为判别式 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2+1)=8a>0$

所以不等式 $x^2-2(a+1)x+a^2+1<0$ 的解集是$\{x \mid a+1-\sqrt{2a}<x<a+1+\sqrt{2a}\}$.

当 $0<a\leqslant 2$ 时，$\frac{a}{2}\leqslant a+1-\sqrt{2a}\leqslant 1$

$$a+1+\sqrt{2a}>1$$

不等式组 ① 的解是 $a+1-\sqrt{2a}<x\leqslant 1$

不等式组 ② 的解是 $x>1$

当 $a>2$ 时，$\frac{a}{2}>1, a+1-\sqrt{2a}>1$

不等式组 ① 无解；不等式组 ② 解是 $x\geqslant\frac{a}{2}$

综上可知：当 $0<a\leqslant 2$ 时，原不等式解集是$(a+1-\sqrt{2a},+\infty)$；当 $a>2$ 时，原不等式解集是$\left[\frac{a}{2},+\infty\right)$

例 3 (上海 2003 年高中数学竞赛第一大题第 5 小题) 若对 $|x|\leqslant 1$ 的一切 x，$t+1>(t^2-4)x$ 恒成立，则 t 的取值范围是什么？

解：(i) 显然当 $t=2$ 时，原不等式

$$t+1>(t^2-4)x \tag{③}$$

变成　$2+1>(2^2-4)\cdot x=0$　恒成立

如下分成两类：$t^2-4>0$ 和 $t^2-4<0$

(ii) 当 $t^2-4>0$ 时

$\because t+1>(t^2-4)x$

$\therefore \frac{t+1}{t^2-4}>x$ 对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 恒成立

$\therefore \frac{t+1}{t^2-4}>1$　　(即大于 $x_{\max}=1$)

$\therefore$ 有不等式组

$$\begin{cases}t^2-4>0\\ \frac{t+1}{t^2-4}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t<-2 \text{ 或 } t>2\\ -t^2+t+5>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t<-2 \text{ 或 } t>2\\ \frac{1-\sqrt{21}}{2}<t<\frac{1+\sqrt{21}}{2}\end{cases}\quad \therefore 2<t<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

(iii) 当 $t^2-4<0$ 时

$x>\frac{t+1}{t^2-4}$ 即$\frac{t+1}{t^2-4}<x$ 对 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 恒成立

$\therefore \frac{t+1}{t^2-4}<-1(x_{\min}=-1)$

$\therefore$ 有不等式组

$$\begin{cases}t^2-4<0\\ \frac{t+1}{t^2-4}<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<t<2\\ t^2+t-3>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<t<2\\ t<\frac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ 或 } t>\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{13}-1}{2}<t<2$

综上三种情况有　$\frac{\sqrt{13}-1}{2}<t<\frac{\sqrt{21}+1}{2}$

2. 数形结合

例 4 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$,解不等式 $f(x)\leqslant 1$.

解:要 $f(x)\leqslant 1$,即要$\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1(a>0)$

令 $g_1(x)=\sqrt{x^2+1},g_2(x)=ax+1(a>0)$

从图象上看当 $x<0$ 时,$g_1(x)$ 在 $g_2(x)$ 的上方,$f(x)\leqslant 1$ 不成立.

(1) 当 $a\geqslant 1$ 时,直线 $g_2(x)=ax+1$ 的斜率大于双曲线渐近线 $y=x$ 的斜率,两曲线只有一个交点(0,1),由图可看出当 $x\geqslant 0$ 时,双曲线只有一个交点(0,1).由图可看出当 $x\geqslant 0$ 时,双曲线上半支在直线 $g_2(x)=ax+1$ 的下方,即有 $f(x)\leqslant 1$,所以这时原不等式的解为$\{x\mid x\geqslant 0\}$

(2) 当 $0<a<1$ 时,直线 $y=ax+1(a>0)$ 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上半支有两个交点,其交点横坐标为 $x_1=0,x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$,由图象看出,当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}$ 时,双曲线上半支在直线的下方,即有 $f(x)\leqslant 1$,所以这时原不等式的解集为$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}\}$.

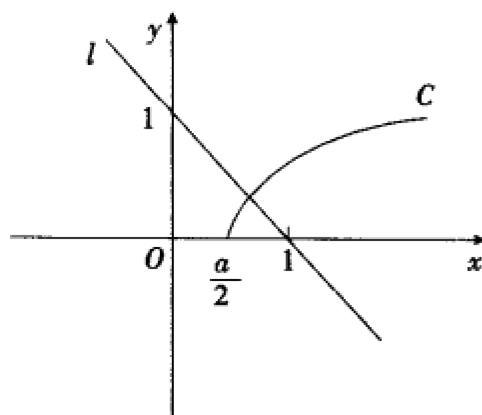
【评注】 本题将不等式变形为两侧均为基本初等函数且不同类别,为从图象角度解决它奠定了基础.图象的直观性、简洁性一定会给学生带来心理的愉悦,信心倍增.

例 5 题目前例2

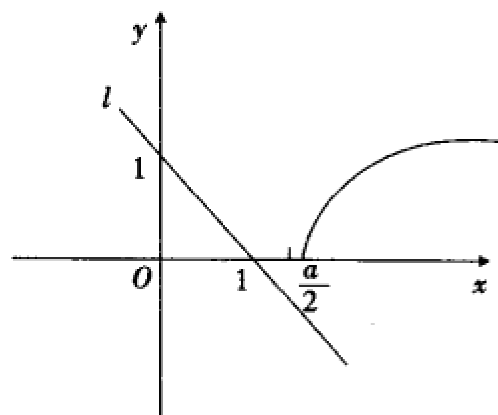
解:

设 $y=\sqrt{2ax-a^2}(a>0)\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=2a(x-\frac{a}{2})\\ y\geqslant 0\end{cases}$可知它的图象是顶点为$\left(\frac{a}{2},0\right)$,开口向右的抛物线的上半部分 C,而 $y=1-x$ 的图象是一条直线 l.

当 $0<a\leqslant 2$ 时,半抛物线 C 与直线 l 交点的横坐标为$a+1-\sqrt{2a}$,$(a+1-\sqrt{2a},+\infty)$是抛物线 C 位于直线上方各点横坐标的集合(见图 ①),当 $a>2$ 时,C 全部在 l 的上方,各点横坐标集合是$\left[\frac{a}{2},+\infty\right)$(如图 ②)



(图 ①)



(图 ②)

例 6 同前例3

解:令 $f(x)=(t^2-4)x-(t+1)$

$\because$ 对 $|x|\leqslant 1$ 的一切 x,$t+1>(t^2-4)x$ 恒成立

$\therefore f(-1) < 0$ 且 $f(1) < 0$

则 $\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2} \text{ 或 } t > \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} < t < \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{-1+\sqrt{13}}{2} < t < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

【评注】

(1) 例 6 图象可不作,但解法根本上是以图象法为基础的!

(2) 从例 5、例 6 可看出数形结合可使问题的解答简明、直观,但能准确应用数形结合思想还要多做一些练习,方可抓图形结合思想的玄机原理.

(3) 例 2、例 3 是分类讨论思想的运用,关键是从何处分类,这要因题而异. 通过这两题会给读者以启发;准确进行分类讨论,会使解法层次分明,提高高考、竞赛的基本数学能力. 为此,加重一点笔墨,再重点谈一谈.

3. 分类讨论

例 7 解不等式 $\sqrt{3\log_a x-2} < 2\log x_a - 1 \quad (a > 0, a \neq 1)$

解:原不等式等价于

$$\begin{cases} 3\log x_a - 2 \geqslant 0 \\ 3\log x_a - 2 < (2\log x_a - 1)^2 \\ 2\log x_a - 1 > 0 \end{cases}$$

可解得: $\dfrac{2}{3} \leqslant \log x_a < \dfrac{3}{4}$ 或 $\log x_a > 1$

$\therefore$(1) 当 $a > 1$ 时,不等式解集是

$$\{x \mid a^{\frac{2}{3}} \leqslant x < a^{\frac{3}{4}}, \text{或 } x > a\}$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,不等式解集是

$$\{x \mid a^{\frac{3}{4}} < x \leqslant a^{\frac{2}{3}}, \text{或 } 0 < x < a\}$$

【评注】 对于指数不等式,对底数 a 通常要按照 $a > 1$ 或 $0 < a < 1$ 分类讨论,本题是无理对数不等式,首先根据无理不等式的解法,等价转化为对数不等式组,然后对 a 进行分类讨论.

例 8 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}^2(x+1) - \left(m + \dfrac{1}{m}\right) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 1 < 0.$

解:令 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = t$,则原不等式化为

$t^2 - \left(m + \dfrac{1}{m}\right)t + 1 < 0$,即

$$(t-m)\left(t - \frac{1}{m}\right) < 0 \qquad (*)$$

(1) 当 $m \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$ 时

$\because m < \dfrac{1}{m}$, $\therefore m < t < \dfrac{1}{m}$,即

$$m < \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \frac{1}{m}$$

得解集为 $\{x \mid 2^{-\frac{1}{m}} - 1 < x < 2^{-m} - 1\}$

(2) 当 $m \in (-1,0) \cup (1, +\infty)$ 时

$\because m > \dfrac{1}{m}$, $\therefore m > t > \dfrac{1}{m}$

即 $m > \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \dfrac{1}{m}$

得解集为$\{x \mid 2^{-\frac{1}{m}} - 1 > x > 2^{-m} - 1\}$

【评注】 这一含参数的不等式讨论的对象为 m，当经过换元转化为(＊)后，须比较 m 与 $\frac{1}{m}$ 的大小关系，才能确定解集区间.

4. 函数与方程思想

例 9 对满足不等式$4^{\frac{1+a}{2}} < 2^a \cdot 2^{\frac{5}{a}}$的一切实数$a$，不等式$(a-3)x < 4a-2$都成立，求实数取 x 的取值范围

解: 原不等式可化为 $2^{a+1} < 2^{a+\frac{5}{a}}$，得

$$a + \frac{5}{a} > a + 1 \quad \therefore 0 < a < 5$$

设 $f(a) = (x-4)a - (3x-2)$ (＊)

由题意对于任意 $a \in (0,5)$，都有 $f(a) < 0$，则由一次函数的性质得$\begin{cases} f(0) \leqslant 0 \\ f(5) \leqslant 0 \end{cases}$ 代入解得

$$\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 9$$

【评注】 本题按常规理解会解以 x 为主元、含参数 a 的一元一次不等式，而本题解法反客为主，将 a 当作主元，构造(＊)函数，即关于 a 的一次函数，从而利用一次函数的性质获得解答.

例 10 设 $a > 0$，且 $a \neq 1$，函数 $f(x) = \log_a \frac{x-3}{x+3}$，若 $x \in [m,n)$，总有 $1 + \log_a(n-1) < f(x) \leqslant 1 + \log_a(m-1)$，求 m 与 a 的取值范围.

解: 由$\frac{x-3}{x+3} > 0$ 得函数定义域为: $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

又 $\because \frac{x-3}{x+3} = 1 - \frac{6}{x+3}$，在$(-\infty, -3)$ 和$(3, +\infty)$ 上是增函数

$\therefore 0 < a < 1$ 时，$f(x)$ 在$(-\infty, -3)$ 和$(3, +\infty)$ 上是减函数.

$a > 1$ 时，$f(x)$ 在$(-\infty, -3)$ 和$(3, +\infty)$ 上是增函数.

$\because m < n, \therefore m - 1 < n - 1$，又由条件: $\log_a(n-1) < \log_a(m-1)$

$\therefore 0 < a < 1$

又 $f(x)$ 的定义域为 $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$，且 $f(x)$ 在 $x \in [m,n)$ 上有意义，

$\therefore m \leqslant -3$ 或 $m > 3$，

又 $\because n - 1 > 0, \therefore m > 3$

$\because f(x)$ 在 $x \in [m,n)$ 上为减函数，

$\therefore \log_a \frac{n-3}{n+3} < f(x) \leqslant \log_a \frac{m-3}{m+3}$

又由 $1 + \log_a(n-1) < f(x) \leqslant 1 + \log_a(m-1)$

所以 可令 $\log_a \frac{n-3}{n+3} = 1 + \log_a(n-1) = \log_a[a(n-1)]$ ①

$\log_a \frac{m-3}{m+3} = 1 + \log_a(m-1) = \log_a[a(m-1)]$ ②

此即指方程 $\log_a \frac{x-3}{x+3} = \log_a[a(x-1)]$ 在 $x \in (3, +\infty)$ 上有相异的两个实数根，又可等价转化为方程: $ax^2 + (2a-1)x + 3(1-a) = 0$ 有两个大于 3 的相异实根.

令 $ax^2 + (2a-1)x + 3(1-a) = g(x)$，则有

$$\begin{cases} -\frac{2a-1}{2a} > 3, \\ g(3) > 0, \\ \Delta = (2a-1)^2 - 12a(1-a) > 0 \end{cases}$$

解得　$0 < a < \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

【评注】　本题从不等式中搜寻等式构造方程，是经过深入分析①，②式结构特点，抓住主要矛盾，即一个主元（变量），起到很好的转化效果.

以上各例分别围绕四大数学基本思想给出了各自解法，每题各有侧重，旨在归纳解含参数不等式的一般解法与基本出发点．当然在同一问题中多种思想并用的局面是很常见的，如等价转化的思想就一直贯穿于解不等式的始终．这就要求学生必须全面掌握基本的数学思想方法，并能将它们融会贯通地使用，才能真正解决好每一个问题.

二、引参巧证（解）不等式问题

1．引参、架桥、巧证不等式

数学竞赛中的不等式证明问题，通过巧妙地引入参数，可以把证明转化成对参数的讨论，使参数在不等式证明中起到桥梁作用.

例 11　（1988．四川省中学数学竞赛）已知 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathrm{R}$，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = A(A > 0)$，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{A^2}{n-1}$（$n \in \mathrm{N}$ 且 $n \geqslant 2$），求证：$0 \leqslant x_i \leqslant \frac{2A}{n}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）

证明：因 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A = 0$，引入参数 t，则从 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{A^2}{n-1}$ 有

$$
\begin{aligned}
\frac{A^2}{n-1} - x_1^2 &= x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \\
&= x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 + t(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A) \quad ① \\
&= \left(x_2 + \frac{t}{2}\right)^2 + \left(x_3 + \frac{t}{2}\right)^2 + \cdots + \left(x_n + \frac{t}{2}\right)^2 \\
&\quad + \left(tx_1 - tA - \frac{n-1}{4}t^2\right) \\
&\geqslant tx_1 - tA - \frac{n-1}{4}t^2 \quad ②
\end{aligned}
$$

又　$tx_1 - tA - \frac{n-1}{4}t^2$

$$= -\frac{n-1}{4}\left[t - \frac{2}{n-1}(x_1 - A)\right]^2 + \frac{1}{n-1}(x_1 - A)^2 \leqslant \frac{(x_1 - A)^2}{n-1} \quad ③$$

$\because \frac{A^2}{n-1} - x_1^2$ 是 t 无关的式子

$\therefore$ 式②对 $t \in \mathrm{R}$ 恒成立，

所以　$\frac{A^2}{n-1} - x_1^2 \geqslant \frac{(x_1 - A)^2}{n-1}$　④

整理得　$nx_1^2 - 2x_1A \leqslant 0$

$\therefore 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{2A}{n}$

同理可得

$$0 \leqslant x_i \leqslant \frac{2A}{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

【评注】　上述证法，正是利用了 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A = 0$ 的条件，对 $\frac{A^2}{n-1} - x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2$ 的右侧引入参数 t，平空添加而实则对证题起决定作用的项 $t(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - A)$ 得到①式，然后恰恰是利用了这个“平空”即 $\frac{A^2}{n-1} - x_1^2$ 与 t 无关，才有②式对 $t \in \mathrm{R}$ 恒成立，才得 $\frac{A^2}{n-1} - x_1^2$ 不小于 $\left(tx_1 - tA - \frac{n-1}{4}t^2\right)_{\max} = \frac{(x_1 - A)^2}{n-1}$　即④式　$\frac{A^2}{n-1} - x_1^2 \geqslant \frac{(x_1 - A)^2}{n-1}$ 成立

例 12 （第 36 届 IMO）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc=1$，求证：$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$

证明：引入正参数 t，注意到 $abc=1$，得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+ta(b+c)=\frac{abc}{a^3(b+c)}+t\cdot\frac{b+c}{bc}$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{abc}{a^3(b+c)}\cdot t\cdot\frac{b+c}{bc}}=\frac{2\sqrt{t}}{a}$$

同理可得 $\frac{abc}{b^3(c+a)}+t\cdot\frac{c+a}{ca}\geqslant\frac{2\sqrt{t}}{b}$

$$\frac{abc}{c^3(a+b)}+t\cdot\frac{a+b}{ab}\geqslant\frac{2\sqrt{t}}{c}$$

上述三个同向不等式相加得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}+2t\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\geqslant 2\sqrt{t}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \quad ⑤$$

将 $abc=1$ 与前三个不等式取等号的条件联立解得 $t=\frac{1}{4}$，代入⑤得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$$

【评注】 此题主体思路是利用平均值不等式，而主体思路被打通的各个关节的关键是设正参数 t 以及利用 $abc=1$ 与前三个不等式取等号的条件解出 $t=\frac{1}{4}$.

引入参数巧证不等式的首要问题如何引入参数，由于题目多如山海，各种不同题目的机关要道又各不相同，因此要适当多作一些题目总结一下规律.

2. 按规律、引入参数、巧证不等式

下面我们通过实例谈按照"知识，方法，技能"中给出的（ * ）式的规律，引入参数，证明不等式.

例 13 题目见上述例12

证明：依据（ * ）式得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{a^2b^2c^2}{a^3b+a^3c}=\frac{b^2c^2}{ab+ac}\geqslant 2\lambda bc-\lambda^2(ab+ac)$$

同理 $\frac{1}{b^3(c+a)}=\frac{a^2c^2}{ab+bc}\geqslant 2\lambda ac-\lambda^2(ab+bc)$

$$\frac{1}{c^3(a+b)}=\frac{a^2b^2}{ac+bc}\geqslant 2\lambda ab-\lambda^2(ac+bc)$$

三式相加得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$\geqslant 2\lambda(ab+bc+ac)-(2ab+2bc+2ac)\lambda^2$$
$$=2(ab+bc+ac)(\lambda-\lambda^2) \quad ⑦$$

当且仅当 $\lambda=\frac{ac}{ab+bc}=\frac{bc}{ab+ac}=\frac{ab}{ac+bc}=\frac{ac+bc+ab}{2(ab+bc+ca)}=\frac{1}{2}$ 所以⑦式即为

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(ab+bc+ac)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}[3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}] = \frac{3}{2}$$ 证毕

【评注】 (1)这个题目除去在例12中的证法外,还有许多证法(在前面各例有所体现),所有这些证法中我们认为例13的证明方法是最简明的.

(2)为说明此方法,我们再给两例——例14和例15.

例14 设 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$,且 $a+b+c+d=1$.求证:

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}>6$$

证明:由 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$ 及(*)式得

$$\frac{4a+1}{1} \geqslant 2\lambda\sqrt{4a+1}-\lambda^2$$

$$\frac{4b+1}{1} \geqslant 2\lambda\sqrt{4b+1}-\lambda^2$$

$$\frac{4c+1}{1} \geqslant 2\lambda\sqrt{4c+1}-\lambda^2$$

$$\frac{4d+1}{1} \geqslant 2\lambda\sqrt{4d+1}-\lambda^2$$

上述四式相加,得

$$4(a+b+c+d)+4$$
$$\geqslant 2\lambda(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1})-4\lambda^2$$

即 $2\lambda(\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1})-4\lambda^2 \leqslant 8$

取 $\lambda=\dfrac{\sqrt{4a+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{4b+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{4c+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{4d+1}}{1}$

即 $\lambda^2=4a+1=4b+1=4c+1=4d+1$

即 $4\lambda^2=4(a+b+c+d)+4=8$

$\therefore \lambda=\sqrt{2}$ (由规律知,取 $\lambda>0$)

得 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1} \leqslant 4\sqrt{2}$

当 $\lambda=\sqrt{2}$ 时即 $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$ 时取等号,

所以 $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1} \leqslant 4\sqrt{2}<6$

例15 设 a,b,c,d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的正实数,求证:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+d} \geqslant \frac{1}{3}$$

证明:由 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$,由规律可得: $\dfrac{a^2}{b+c+d} \geqslant 2\lambda a-\lambda^2(b+c+d)$

即 $\dfrac{a^3}{b+c+d} \geqslant 2\lambda a^2-\lambda^2(b+c+d)a$

当且仅当 $\lambda=\dfrac{a}{b+c+d}$ 时,取等号.

同理可得

$$\frac{b^3}{a+c+d} \geqslant 2\lambda b^2-\lambda^2(a+c+d)b$$

$$\frac{c^3}{a+b+d} \geqslant 2\lambda c^2-\lambda^2(a+b+d)c$$

$$\frac{d^3}{a+b+c} \geqslant 2\lambda d^2-\lambda^2(a+b+c)d$$

上述四式相加得

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$\geqslant 2\lambda(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(1+ac+bd)\lambda^2 \quad ⑧$$

当且仅当 $\lambda=\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+d}$，即 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时取等号.

将 $\lambda=\frac{1}{3}$ 代入 ⑧ 式有

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+d}$$

$$\geqslant \frac{2}{9}[3(a^2+b^2+c^2+d^2)-(1+ac+bd)] \quad ⑨$$

$$\because (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+(d^2+a^2)$$

$$\geqslant 2ab+2bc+2cd+2da=2$$

即 $\frac{5}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant\frac{5}{2}$ ⑩

另一方面

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant\frac{1}{2}(2ac+2bd)=ac+bd \quad ⑪$$

⑩ + ⑪ 得

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant\frac{5}{2}+ac+bd \quad ⑫$$

⑫ 代入 ⑨ 得

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$$

【评注】 从例 14，例 15 可看出利用所给规律，确实有章可寻，思路清新，开了一条证明不等式的新路.

3. 引参、转化、巧证不等式

例 16 （1989.新加坡数学竞赛）任给13个不同的实数，求证至少存在两个，不妨设 x 和 y 满足不等式

$$0<\frac{x-y}{1+xy}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

证明：设 13 个不同的数是 $a_1,a_2,\cdots,a_{13}$，由于 $\tan x$ 将 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 映到 $(-\infty,+\infty)$，所以能够找到不同的数 $\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $\tan\theta_i=a_i(i=1,2,3,\cdots,13)$

将 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 分成 12 等份，应用抽屉原理，在子区间中至少有一个子区间含有两个 θ_i，不妨设为 θ_j 和 θ_k，又设 $\tan\theta_j=x,\tan\theta_k=y,x>y$，

于是 $0<\tan(\theta_j-\theta_k)<\tan\frac{\pi}{12}$

即 $0<\frac{x-y}{1+xy}<\tan\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

【评注】 上述证法将代数不等式转化成三角不等式的关键有三点：

(1) 代数结构中有三角结构 $\tan(x-y)=\frac{x-y}{1+xy}$

(2) $\tan\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

(3) 抽屉原则的巧妙运用

(4) 由上述证法启发我们将本题推广为：

任给 $n(n\geqslant 4)$ 个实数，则其中存在两个实数 x,y 满足

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant\tan\frac{\pi}{n-1}$$

$n=13$ 时　即为本例

$n=17$ 时　即为第 16 届加拿大数学奥林匹克试题.

例 17　(第 20 届 IMO) 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为两两不相等的正整数,求证:对任何正整数 n,不等式

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}\geqslant\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\text{ 成立.}$$

证明:引入参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

设 $\frac{1}{1}=\frac{1}{x_1}+\alpha_1,\frac{1}{2}=\frac{1}{x_2}+\alpha_2,\cdots,\frac{1}{n}=\frac{1}{x_n}+\alpha_n$　⑬

因 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是两两不相同的正整数,故将上述 n 个等式相加得

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{x_1}+\alpha_1\right)+\left(\frac{1}{x_2}+\alpha_2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}+\alpha_n\right)\quad ⑭$$

且　$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\geqslant 0$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}\\&=x_1\left(\frac{1}{1}\right)^2+x_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+x_n\left(\frac{1}{n}\right)^2\\&=x_1\left(\frac{1}{x_1}+\alpha_1\right)^2+x_2\left(\frac{1}{x_2}+\alpha_2\right)^2+\cdots+x_n\left(\frac{1}{x_n}+\alpha_n\right)^2\\&=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\\&\quad+(x_1\alpha_1^2+x_2\alpha_2^2+\cdots+x_n\alpha_n^2)\qquad ⑮\\&\geqslant\left(\frac{1}{x_1}+\alpha_1\right)+\left(\frac{1}{x_2}+\alpha_2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}+\alpha_n\right)\qquad ⑯\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

证毕.

【评注】

(1) 证这个不等式的要害之处,是将左端的二次式转化成右端的一次式.

(2) 引入参数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 所满足的 ⑬ 式恰恰是将所证不等式的左端的“二次部分”转化成含有所需一次式“$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)+2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$”的 ⑮ 式的关键.

(3) 根据要证的目标“$\geqslant\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$”运用 ⑬⑭ 式,并合理的缩小 ⑮ 得到 ⑯ 式是证出目标的第二个关键.

(4) 经过上述(2)、(3) 才使所证不等式左端的“二次一次混合结构”转化成了右端的“一次结构”.

4. 引入公差(比),巧证不等式.

例 18　已知实数 a,b 满足 $ab=10,a^2+b^2=c^2$,求证:$|c|\geqslant 2\sqrt{5}$

证明:由 $ab=10$,得 $ab=(\sqrt{10})^2$,则 a、$\sqrt{10}$、b 成等比数列,

故设 $a=\sqrt{10}q,b=\frac{1}{q}\sqrt{10}$,代入 $a^2+b^2=c^2$

整理得　$10q^4-c^2q^2+10=0$

$\because q^2\in\mathbf{R}^+$

$\therefore\Delta=c^2-4\times10\times10\geqslant 0$

即　$c^2\geqslant 20$

$\therefore |c|\geqslant 2\sqrt{5}$

例 19　求证:$\sin^{10}x+\cos^{10}x\geqslant\frac{1}{16}$

证明: $\because \sin^2 x+\cos^2 x=2\times\frac{1}{2}$

$\therefore \sin^2 x,\frac{1}{2},\cos^2 x$ 成等差数列

故设 $\sin^2 x=\frac{1}{2}-d,\cos^2 x=\frac{1}{2}+d\left(-\frac{1}{2}\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}\right)$

$$\therefore \sin^{10}x+\cos^{10}x=\left(\frac{1}{2}-d\right)^5+\left(\frac{1}{2}+d\right)^5$$
$$=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5+C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 d^2+C_5^4\frac{1}{2}d^4\right]$$
$$\geqslant 2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{16}$$

例 20 (1957.北京市数学竞赛)假设 x,y,z 都是实数,$a\geqslant 0$,又知道它们满足 $x+y+z=a$, ⑰

$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}a^2$ ⑱

试证:x,y,z 都不是负数,也都不能大于$\frac{2}{3}a$

证明:由 ⑰ 得 $x+y=2\cdot\frac{a-z}{2}$,则 x、$\frac{a-z}{2}$、y 成等差数列,

故设 $x=\frac{a-z}{2}-d,y=\frac{a-z}{2}+d$

代入 ⑱ 式,化简得 $3z^2-2az=-4d^2$

$\therefore 3z^2-2az\leqslant 0$

解得 $0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a$

由 x,y,z 在条件等式中的对称式,知 $0\leqslant y\leqslant\frac{2}{3},0\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}a$

例 21 (第 25 届 IMO)设 x,y,z 为非负实数,且 $x+y+z=1$,求证:$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$

证明:由对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$

$\because (x+y)+z=2\times\frac{1}{2}$

$\therefore x+y,\frac{1}{2},z$ 成等差数列,故设 $x+y=\frac{1}{2}+d,z=\frac{1}{2}-d$

由 $x+y\geqslant 2z$,得$\frac{1}{6}\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}$,

则
$$xy+yz+zx-2xyz$$
$$=(x+y)z+xy(1-2z)$$
$$=\frac{1}{4}-d^2+2dxy\geqslant 0$$

当且仅当 $x=1,y=z=0$ 时等号成立.

又
$$\frac{1}{4}-d^2+2dxy$$
$$\leqslant\frac{1}{4}-d^2+2d\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}-d^2+\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{2}+d\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2d\left(\frac{1}{2}-d\right)^2$$
$$\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{2d+\left(\frac{1}{2}-d\right)+\left(\frac{1}{2}-d\right)}{3}\right]^3$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

当且仅当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时等号成立.

$\therefore 0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$

§7.3 针对性训练

A 组

1. 设 $a \in [-1,1]$，求不等式 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 的解集.

2. 若不等式 $\sqrt{9-x^2} \geqslant -a^2x$ 的解集区间长度为 $\frac{15}{4}$，则 a 的值是________.

3. 已知不等式组 $\begin{cases} x^2-x+a-a^2<0, \\ x+2a>1 \end{cases}$ 的整数解恰有两个，求 a 的取值范围.

4. 设任意实数 x,y 满足 $|x|<1$，$|y|<1$，求证：$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2} \geqslant \frac{2}{1-xy}$

5. 若 $\{a_n\}$ 是正项递增的等差数列，$n \in \mathrm{N}$，$2 \leqslant k \in \mathrm{N}$，求证：

$$\sqrt[k]{\frac{a_{(n+1)k+1}}{a_{k+1}}} < \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \cdot \frac{a_{3k+2}}{a_{3k+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{nk+2}}{a_{nk+1}} < \sqrt[k]{\frac{a_{nk+2}}{a_2}}$$

6. 任给 7 个不同实数，求证：必可以在它们中找出两个实数 x,y，使 $0<\frac{x-y}{1+xy}<\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 设 $a_i \geqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

B 组

1. 解关于 x 的不等式 $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} (a>b>0)$

2. 若对任意 x,不等式 $-9<\frac{3x^2+px+6}{x^2-x+1}\leqslant 6$ 恒成立,则 p 的值为(　　)

A. -3　　B. 3　　C. -5　　D. -6

3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_8\in\mathbf{R}^+$,$a_1+a_2+\cdots+a_8=20$,$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_8=4$,求证:$a_1+a_2+\cdots+a_8$ 中至少有一个小于 1.

4. 设 $x_n=\frac{n}{a^n}(a>1,n=1,2,\cdots)$,求证:对一切 $n\geqslant 2$,有 $x_n<\frac{2}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{n-1}$

5. 设 x,y,z 为不全为零的实数,求证:$xy+2yz+2zx\leqslant\frac{\sqrt{33}+1}{4}(x^2+y^2+z^2)$

6. 设 $a>4$,求证:$\frac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\frac{\lg(a-2)}{\lg 2}$

第八章

“最值”问题与不等式

§8.1 知识要点与基本方法

很长时期以来，与不等式相关的最值问题是国内国际数学竞赛中的热点问题，因此要研究讨论这类问题的解法.

Ⅰ. 与不等式相关的最值问题大体可分为四种题型.

一、条件最值问题（注：其中不含参数）

例如 2001 年全国高中数学联赛第二试第二大题：

设 $x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\cdot\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}\sqrt{\frac{k}{j}}x_kx_j = 1$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 的最大值与最小值.

就是属于条件最值问题.

二、含参数不等式中的参数最值问题

例如 2002 年中国数学奥林匹克（冬令营）第六大题：

给定 $C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，求最小常数 M，使对任意整数 $n\geqslant 2$ 及实数 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，只要满足 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k = C\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，总有 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant M\cdot\sum\limits_{k=1}^{m} a_k$，其中 $m=[cn]$ 表示不超过 cn 的最大整数.

就是属于含参数最值问题.

而从这个例子可以看出参数最值问题中往往也含有条件. 因此讲参数最值问题我们不能机械的看，而是抓住这类问题区别于其他问题的主要特征去称呼它. 当然这类最值也可称作条件参数最值问题.

三、多元函数的条件最值问题

例如 2001 年中国西部数学奥林匹克第三大题：

设 x,y,z 为正实数，且 $x+y+z\geqslant xyz$，求 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值.

就是一个三元函数的条件最值问题.

四、复合最值问题

例如 2001 年中国数学奥林匹克国家集训队选拔考试第六大题：

记 $F=\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$，当 a,b,c 取遍所有实数时，求 F 的最小值.

这个问题实则就是求

$\min\{\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|\}$

也就是当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，求函数 $|x^3-ax^2-bx-c|$ 最大值中的最小值. 这类问题我们称其为复合最值问题.

Ⅱ. 所用知识与方法

由于我们所研究的是与不等式相关的最值问题，因此所用知识与方法大致如下：

一、所用知识

1. 中学教材中关于不等式的若干性质、技巧.

2. 重要不等式.

(1) 平均值不等式

(2) 柯西不等式

(3) 排序不等式

(4) 切比雪夫不等式

(5) 琴生不等式

二、所用方法

(1) 直接应用基本不等式和重要不等式.

(2) 前面各讲中讲述的证明不等式的各种方法,尤其是放缩法、数学归纳法、参数法、函数单调性法等.

§8.2 赛题精讲

一、条件最值问题

例1 (2002.全国高中数学联赛二试第二大题) 实数 a,b,c 和正数 λ,使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实根 x_1,x_2,x_3,且满足

(1) $x_2-x_1=\lambda$; (2) $x_3>(x_1+x_2)/2$. 求: $(2a^3+27c-9ab)/\lambda^3$ 的最大值.

解: 由 $f(x)=f(x)-f(x_3)$

$$=(x-x_3)[x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b]$$

所以, x_1,x_2 是方程 $x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b=0$ 的两个根,

由(1) 可得 $(a+x_3)^2-4(x_3^2+ax_3+b)=\lambda^2$

即 $3x_3^2+2ax_3+\lambda^2+4b-a^2=0$

由(2) 可得 $x_3=\frac{1}{3}(-a+\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2})$ ①

且 $4a^2-12b-3\lambda^2\geqslant 0$ ②

易知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$$=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2}{27}a^3+c-\frac{1}{3}ab$$

由 $f(x_3)=0$ 可得

$$\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\left(x_3+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x_3+\frac{a}{3}\right) \quad ③$$

由 ① 得

$$x_3+\frac{a}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{a^2}{3}-b-\frac{\lambda^2}{4}}$$

记 $p=\frac{a^2}{3}-b$,由 ② 和 ③ 可知 $p\geqslant\frac{\lambda^2}{4}$ 且 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}(p-\lambda^2)$

令 $y=\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}$,则 $y\geqslant 0$ 且 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\frac{2\sqrt{3}}{9}y(y^2-\frac{3}{4}\lambda^2)$

$$\because y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y+\frac{\lambda^3}{4}=y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3+\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$$=\left(y-\frac{\lambda}{2}\right)^2(y+\lambda)\geqslant 0$$

$\therefore \frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c\geqslant -\frac{\sqrt{3}}{18}\lambda^3$

于是，$2a^3+27c-9ab\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda^3$

由此可得

$$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

取 $a=2\sqrt{3},b=2,c=0,\lambda=2$，则 $f(x)=x^3+2\sqrt{3}x^2+2x$ 有根 $-\sqrt{3}-1$，$-\sqrt{3}+1$，0. 显然假设条件成立，且

$$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{1}{8}(48\sqrt{3}-36\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

综上可知，$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

【评注】 以上是命题组公布的参考答案，这个答案解法显得繁琐冗长. 下面我们给出直截了当的解法，基本思想是，使用韦达定理换原目标函数，整体变形后再次换元，最后或者用导数法，或者用三角代换法，或者用比较法，或者用平均值不等式均可.

另解：由韦达定理有

$$a=-(x_1+x_2+x_3)$$
$$b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$
$$c=-x_1x_2x_3$$

$\therefore M\xlongequal{令}(2a^3+27c-9ab)/\lambda^3$

$=[-2(x_1+x_2+x_3)^3-27x_1x_2x_3+9(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)]/(x_2-x_1)^3$

$=[-2x_3^3+3(x_1+x_2)x_3^2+3(x_1^2-4x_1x_2+x_2^2)x_3-(2x_1^2-3x_1^2x_2-3x_1x_2^3+2x_2^3)]/(x_2-x_1)^3$

$$=-2\left(\frac{x_3-\frac{x_1+x_2}{2}}{x_2-x_1}\right)^3+\frac{9}{2}\left(\frac{x_3-\frac{x_1+x_2}{2}}{x_2-x_1}\right)$$

令 $u=\dfrac{x_3-\frac{x_1+x_2}{2}}{x_2-x_1}$，由已知条件知，$u>0$

则 $M=M(u)=-2u^3+\frac{9u}{2}$

由此结下有几种不同的方法

(i) 导数法：$M'(u)=\frac{9}{2}-6u^2$

当 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时 $M'(u)=0$

$\therefore M_{\max}=M|_{u=\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(ii) 比较法：$2u^3-\frac{9}{2}u+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(u+\sqrt{3})\geqslant 0$ 当 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立.

$\therefore M_{\max}=M|_{u=\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(iii) 三角变换法：

当 $u\geqslant\sqrt{3}$ 时，$g(u)<0$；当 $0<u<\sqrt{3}$ 时，设 $u=\sqrt{3}\sin t$，则 $M=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 3t$

当 $t=\frac{\pi}{6}$，即 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，M 取最大值，最大值是$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(iv) 用均值不等式

$$
\begin{aligned}
M &= -2u^3 + \frac{9}{2}u \\
&= \frac{1}{16}\cdot 4u\cdot(\sqrt{3}+1)(3-2u)\cdot(\sqrt{3}-1)(3+2u) \\
&\leqslant \frac{1}{16}\left(\frac{4u+(\sqrt{3}+1)(3-2u)+(\sqrt{3}-1)(3+2u)}{3}\right)^3 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

等号当 $4u=(\sqrt{3}+1)(3-2u)=(\sqrt{3}-1)(3+2u)$,即 $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时成立.

例 1 (1998.中国数学冬令营试题第六大题)设 $n\geqslant 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为实数,且 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}=1$,对于每一个固定的 $k(k\in\mathrm{N}, 1\leqslant k\leqslant n)$,求 $|x_k|$ 的最大值.

【分析】 注意到:$\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}=1$ 左边含平方项及一次项的乘积,联想到 $(x+y)^2$ 的展开式,将左边整理为平方和的形式,再利用均值不等式的"平方平均值不小于算术平均值"对 $|x_k|$ 进行放缩.

解法 1: 由已知条件得 $\quad 2\cdot\sum_{i=1}^{n}x^2+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}x_i\cdot x_{i+1}=2$

所以 $\quad x_1^2+(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\cdots+(x_{n-2}+x_{n-1})^2+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2=2 \qquad ④$

由均值不等式

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2}{k}} \\
&\geqslant \frac{1}{k}(|x_1|+|x_1+x_2|+\cdots+|x_{k-1}+x_k|) \\
&\geqslant \frac{1}{k}|x_1-(x_1+x_2)+x_2+x_3+\cdots+(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)| \\
&= \frac{1}{k}|x_k|
\end{aligned}
$$

所以 $\quad x_1^2+(x_1+x_2)^2+\cdots+(x_{k-1}+x_k)^2\geqslant\frac{1}{k}|x_k|^2 \qquad ⑤$

由均值不等式

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{(x_k+x_{k+1})^2+(x_{k+1}+x_{k+2})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2}{n-k+1}} \\
&\geqslant \frac{1}{n-k+1}(|x_k+x_{k+1}|+|x_{k+1}+x_{k+2}|+\cdots+|x_{n-1}+x_n|+x_n) \\
&\geqslant \frac{1}{n-k+1}|x_n-(x_n+x_{n-1})+(x_{n-1}+x_{n-2})+\cdots+(-1)^{n-k}(x_k+x_{k+1})| \\
&= \frac{1}{n-k+1}\cdot|x_k|
\end{aligned}
$$

所以 $\quad (x_k+x_{k+1})^2+(x_{k+1}+x_{k+2})^2+\cdots+(x_{n-1}+x_n)^2+x_n^2\geqslant\frac{|x_k|^2}{n-k+1} \qquad ⑥$

⑤ + ⑥ 得

$$2\geqslant\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)|x_k|^2$$

所以 $\quad |x_k|\leqslant\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}} \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad ⑦$

由上可知,当且仅当 $x_1=-(x_1+x_2)=x_2+x_3=\cdots=(-1)^{k-1}(x_{k-1}+x_k)$ 及 $x_k+x_{k+1}=-(x_{k+1}$

$+x_{k+2})=\cdots=(-1)^{n-k}x_n$ 时，⑦ 中等号成立，

即　当且仅当 $x_i=x_k\cdot(-1)^{i-k}\dfrac{i}{k}(i=1,2,\cdots,k-1)$

且　$x_j=x_k(-1)^{j-k}\dfrac{n+1-j}{n+1-k}(j=k+1,k+2,\cdots,n)$ 时，

$$|x_k|=\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$$

所以　$|x_k|_{\max}=\sqrt{\dfrac{2k(n+1-k)}{n+1}}$

解法 2: 令 $1=(\sqrt{a_1}x_1+\sqrt{1-a_2}x_2)^2+(\sqrt{a_2}x_2+\sqrt{1-a_3}x_3)^2+\cdots+(\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1}+\sqrt{1-a_k}x_k)^2+(\sqrt{1-a_{n+1-k}}\,x_k+\sqrt{a_{n-k}}\,x_{k+1})^2+\cdots+(\sqrt{1-a_2}x_{n-1}+\sqrt{a_1}x_n)^2+[1-(1-a_k)-(1-a_{n+1-k})]a_k^2$ ⑧

考虑到 $x_ix_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 项的系数应为 1，

所以 $a_1=1,2\sqrt{a_i}\cdot\sqrt{1-a_{i+1}}=1$

即　$a_1=1,a_{i+1}=1-\dfrac{1}{4a_i}(i=1,2,\cdots,n-1)$ ⑨

在 ⑨ 中，易由数学归纳法得到

$a_i=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{i+1}{i}(i=1,2,\cdots,n)$ ⑩

所以　$1-a_i=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{i-1}{i}(i=1,2,\cdots,n)$ ⑪

因此，由 ⑧，⑩，⑪ 可得　$[1-(1-a_k)-(1-a_{n+1-k})]x_k^2\leqslant 1$

即得　$|x_k|\leqslant\sqrt{\dfrac{2k(n+1-k)}{n+1}}(k=1,2,\cdots,n)$ ⑫

在 ⑧ 中，各平方项均为 0，所以，当且仅当 $\sqrt{a_1}x_1+\sqrt{1-a_2}x_2=\sqrt{a_2}x_2+\sqrt{1-a_3}x_3=\cdots=\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1}+\sqrt{1-a_k}\cdot x_k=\sqrt{1-a_{n+1-k}}\,x_k+\sqrt{a_{n-k}}\,x_{k+1}=\cdots=\sqrt{1-a_2}x_{n-2}+\sqrt{a_1}x_n=0$ 时，⑫ 式中等号成立，且这样的 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},x_{n-1},x_n$ 是存在的.

总之，$|x_k|_{\max}=\sqrt{\dfrac{2k(n+1-k)}{n+1}}\quad(k=1,2,\cdots,n)$

【评注】　在解法 2 中配方法的特点是突出 x_k 的位置，再从两头 (x_1,x_n) 往中间 (x_k) 挤，然后配上调节项（⑧ 中的最后一项），最后利用 $a^2\geqslant 0$ 来估计 $|x_k|$ 范围，这与解法 1 不同.

例 2　（2001. 全国高中数学联赛二试第二大题）设 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\cdot\sum\limits_{1\leqslant k<j\leqslant n}\sqrt{\dfrac{k}{j}}x_kx_j=1$，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最大值与最小值.

【分析】　通常条件是平方和 $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2=1$，而函数是线性的：$\sum a_iu_i$，由柯西不等式

$$(\sum a_iu_i)^2\leqslant\sum a_i^2\sum u_i^2=\sum a_i^2$$

易求得最大值 $\sqrt{\sum a_i^2}$. 现在条件是一般的二次形，应当先将它化为平方和，由于系数 $\sqrt{\dfrac{k}{j}}$ 有根号，并且根号下有分母，为运算简便，可先 $x_i=\sqrt{i}y_i,(1\leqslant i\leqslant n)$ 化二次形为整系数的二次形，这样问题就变成一个常见形式，从而可求最大值；最小值则将 $\sum x_i$ 平方后根据 x_i 范围直接放缩得到.

解法 1: 结论是 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ 的最小值为 1，而最大值为 $[\sum\limits_{i=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2]^{\frac{1}{2}}$

先求最小值.

由$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\cdot\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}x_kx_j\geqslant 1$，得$\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant 1$，等号成立，当且仅当存在 i，使得 $x_i=1$，$x_j=0,j\neq i$，所以$\sum_{i=1}^{n}x_i$ 的最小值为 1.

再求最大值.

令 $x_k=\sqrt{k}y_k$，有$\sum_{k=1}^{n}ky_k^2+2\cdot\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}ky_ky_j=1$ ⑬

设 $M=\sum_{k=1}^{n}x_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}y_k$

令$$\begin{cases}y_1+y_2+\cdots+y_n=a_1\\ y_2+\cdots+y_n=a_2\\ \cdots\cdots\\ y_n=a_n\end{cases}$$

则 ⑬$\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$

令 $a_{n+1}=0$，则
$$\begin{aligned}M&=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}(a_k-a_{k+1})\\&=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_{k+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}a_k-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1}a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})a_k\end{aligned}$$

由柯西不等式，得
$$\begin{aligned}M&\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\right)a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

等号成立$\Leftrightarrow \frac{a_1^2}{1}=\cdots=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}=\cdots=\frac{a_n^2}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}$
$$\Leftrightarrow\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{1+(\sqrt{2}-\sqrt{1})^2+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})^2}=\frac{a_k^2}{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2}$$
$$\Leftrightarrow a_k=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}}(k=1,2,\cdots,n)$$

由于 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，

从而 $y_k=a_k-a_{k+1}=\frac{2\sqrt{k}-(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}{\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}}\geqslant 0$

即　$x_k\geqslant 0$

故所求最大值为$\left[\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})^2\right]^{\frac{1}{2}}$

解法 2：

由
$$\begin{aligned}1&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\cdot\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\left(1-\sqrt{\frac{k}{j}}\right)x_kx_j\\&=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-2\cdot\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}\left(1-\sqrt{\frac{k}{j}}\right)x_kx_j\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

故由 $x_i \geqslant 0$ 可知 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 1$，且其中等号成立的条件是诸 $x_k x_j (k < j)$ 全为零，从而诸 x_i 中一个为 1 而其余全为零，于是，$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 的最小值为 1.

又 $1 = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{x_i}{\sqrt{j}}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} k\left(\frac{x_k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}\left(\sum_{j=1}^{i} j\frac{x_j}{\sqrt{j}} + i \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j}}\right)^2$$

令 $y_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j}}, i = 1,2,\cdots,n$，则诸 $y_i \geqslant 0$，且条件化为 $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$

由 $y_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j}{\sqrt{j}}, i = 1,2,\cdots,n$

有 $x_n = \sqrt{n} y_n, x_i = \sqrt{i}(y_i - y_{i+1}), i = 1,2,\cdots,n$

记 $y_{n+1} = 0$

故有 $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}(y_i - y_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} y_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} y_{i+1}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} y_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i-1} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}) y_i$$

由 *Cauchy* 不等式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2$$

从而 $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2}$

且其中等号成立的条件是存在常数 λ，使 $y_i = \lambda(\sqrt{i} - \sqrt{i-1})$ 对 $i = 1,2,\cdots,n$ 恒成立.

代入 $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$ 中可解出

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2}}$$

于是 $y_i = \frac{\sqrt{i} - \sqrt{i-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2}}, i = 1,2,\cdots,n$

从而 $x_i = \sqrt{i}(y_i - y_{i+1})$

$$= \frac{2i - \sqrt{i^2 + i} - \sqrt{i^2 - i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2}}$$

故当 $x_i = \frac{2i - \sqrt{i^2 + i} - \sqrt{i^2 - i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2}}$ 时，

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 取得最大值 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1})^2}$

在第七讲“引入参数巧证不等式”的内容中给出了一个参数引入的规律，即

由不等式 $a^2+(\lambda b)^2\geqslant 2\lambda ab(a,b\in \mathrm{R},\lambda$ 为参数) 得 $a^2\geqslant 2\lambda ab-\lambda^2b^2$，若 $b>0$，则

$$\frac{a^2}{b}\geqslant 2\lambda a-\lambda^2 b \qquad (*)$$

显然，对于参数 λ 的任一实数值(*)式总成立，当且仅当 $\lambda=\frac{a}{b}$ 时，取等号.

有趣的是(*)式在求一些函数的条件最值问题中也有较好的应用，举例如下：

例3 非负实数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求 $\frac{a_1}{1+a_2+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$ 的最小值.

解：记 $S=\frac{a_1}{1+a_2+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$

则 $S=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-a_i}-n$

$\because 2-a_i>0$，

故由(*)得 $\frac{1}{2-a_i}\geqslant 2\lambda-\lambda^2(2-ai)$

$\therefore S\geqslant 2\cdot\sum_{i=1}^{n}[2\lambda-\lambda^2(2-a_i)]-n$

$=2[2n\lambda-\lambda^2(2n-1)]-n$

取 $\lambda=\frac{n}{2n-1}$ 代入上式，有 $S\geqslant\frac{n}{2n-1}$

当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2-a_i}=\frac{n}{2n-1}$，即 $a_i=\frac{1}{n}$ 时，取等号，则 $S_{\min}=\frac{n}{2n-1}$

二、含参数不等式中的参数最值问题

例4 (第39届IMO中国队选拔赛试题) 对于固定的 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求满足以下两条件的最小正数 a：

(i) $\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}+\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta}>1$；

(ii) 存在 $x\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$，使得 $[(1-x)\cdot\sin x-\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}]^2+[x\cos\theta-\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}]^2\leqslant a$.

【分析】 此题要证的结论非常复杂，我们可以先把它变形，通过换元等方法证明一般性的情况.

解：

由(i)得 $\sqrt{a}>\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ ⑭

(ii)等价于：存在 $x\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$，满足

$2(1-x)\sin\theta\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}+2x\cos\theta\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}\geqslant a$

即 $2\sin\theta\cos\theta\left[(1-x)\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-x^2}+x\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}\right]\geqslant a$ ⑮

先证一个引理：设 $0<p<1,0<q<1,p+q>1,p^2+q^2\leqslant 1,f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\cdot\sqrt{q^2-(1-x)^2}(1-q\leqslant x\leqslant p)$，则当 $\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时，

即 $x=\frac{p^2-q^2+1}{2}\in[1-q,p]$ 时，$f(x)$ 达到最大值.

引理的证明

由于 $1-q\leqslant x\leqslant p$，因此可令

$x=p\sin\alpha, 1-x=q\sin\beta, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}, \alpha+\beta<\pi$

于是，有　$f(x)=pq(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)=pq\sin(\alpha+\beta)$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{p^2-x^2}\cdot\sqrt{q^2-(1-x)^2}-x(1-x)}{pq}$$

由于　$2[\sqrt{p^2-x^2}\sqrt{q^2-(1-x)^2}-x(1-x)]$

$$=-(\sqrt{p^2-x^2}-\sqrt{q^2-(1-x)^2})^2+p^2+q^2-x^2-(1-x)^2-2x(1-x)$$

$$=p^2+q^2-1-(\sqrt{p^2-x^2}-\sqrt{q^2-(1-x)^2})^2\leqslant 0$$

从而　$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha+\beta<\pi$

同时，当且仅当 $\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时，即 $x=\frac{1}{2}(p^2-q^2+1)\in[1-q,p]$ 时，$\cos(\alpha+\beta)$ 达到最大值 $\frac{p^2+q^2-1}{2pq}\leqslant 0$

因为在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上正弦函数单调递减，所以，$f(x)=pq\sin(\alpha+\beta)$ 也当且仅当 $x=\frac{1}{2}(p^2-q^2+1)$ 时达到最大值.

由引理可知，在 $\frac{a}{\sin^2\theta}+\frac{a}{\cos^2\theta}\leqslant 1$ 时，当且仅当 $\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-x^2}=\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}$

即　$x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$ 时，达到最大值.

$\sin\theta\cos\theta\sqrt{\frac{4a}{\cos^2\theta}-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2}$

由 ⑮ 得知所求的最小的 a 是满足下式且满足 ⑭ 的最小的 a：

$$\sqrt{\frac{4a}{\cos^2\theta}-\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2}\geqslant\frac{a}{\cos\theta\sin\theta}$$

即　$a^2\left(\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}\right)-2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)a+1\leqslant 0$　⑯

因为 $\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}>0$

⑯ 的左端的根为

$$\frac{\sin^4\theta\cos^4\theta}{1-3\sin^2\theta\cos^2\theta}\left[\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)^2-\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{1}{\sin^4\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}}\right]$$

$$=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1\mp\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$$

所以，由 ⑯ 可得

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}\leqslant a\leqslant\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{1-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$$

由于　$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}<\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$,

所以　$\frac{a}{\cos^2\theta}+\frac{a}{\sin^2\theta}=\frac{a}{\cos^2\theta\sin^2\theta}=\frac{1}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}<1$

因此，当　$a=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$ 时，满足 ⑮，

故所求的　$a=\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$

例 5　确定最小自然数 k,使得对任意的 $a\in[0,1]$ 及任意的 $n\in\mathbf{N}$ 有

$$a^k(1-a)^n<\frac{1}{(n+1)^3}$$

解:由算术——几何平均不等式有

$$\sqrt[n+k]{a^k\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]^n}\leqslant\frac{ka+n\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]}{n+k}=\frac{k}{n+k}$$

于是　$a^k(1-a)^n\leqslant\dfrac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$

当且仅当 $a=\dfrac{k(1-a)}{n}$(即 $a=\dfrac{k}{n+k}$)时等号成立.

这就是说,当 $a=\dfrac{k}{n+k}(\in[0,1])$ 时:$a^k(1-a)^n$ 取得最大值,于是,可把问题改成:

确定最小自然数 k,使得对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 有

$$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(n+1)^3} \tag{⑰}$$

易验证:当数对 $(k,n)=(1,1),(2,1),(3,3)$ 时,不等式 ⑰ 不成立,所以,要对一切 $n\in\mathbf{N}$ 成立,只能 $k\geqslant4$.

下证 $k=4$ 时,⑰ 式成立,即对一切 $n\in\mathbf{N}$ 有 $4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4}$

事实上,当 $n=1,2,3$ 时可直接验证.

当 $n\geqslant4$ 时有

$$\begin{aligned}\sqrt[n+4]{4^4n^n(n+1)^3}&=\sqrt[n+4]{16\times(2n)(2n)(2n)n^{n-4}(n+1)^3}\\&\leqslant\frac{16+8n+(n-4)n+3(n+1)}{n+4}\\&=\frac{n^2+7n+19}{n+4}<\frac{n^2+8n+16}{n+4}=n+4\end{aligned}$$

即　$4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4}$

综上,求得 k 的最小值为 4.

例 6　(第 40 届 IMO) 设 n 是一个固定的整数,$n\geqslant2$.

(1) 确定最小的常数 C,使不等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant C\cdot\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4 \tag{⑱}$$

对所有的非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都成立;

(2) 对于这个常数 C,确定等号成立的充要条件.

解:(1) 当非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为 0 时,记

$$x=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

$$y=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_jx_k(x_i+x_j+x_k)}{\left(\sum\limits_{i=1}^n x_i\right)^4}$$

$$\begin{aligned}\because\ &\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\left[\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2-2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j-\sum_{k=1}^n{}_k^2x\right](k\neq i,j)\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2-2\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right)^2\end{aligned}$$

$$-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} x_ix_jx_k(x_i+x_j+x_k)$$

$\therefore$ 式⑱$\Leftrightarrow C\geqslant -2x^2+x-y$

$\because -2x^2+x-y=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}-y\leqslant\dfrac{1}{8}$

其等号成立的充要条件是 $x=\dfrac{1}{4}$ 且 $y=0$

$\therefore C\geqslant\dfrac{1}{8}, C_{\min}=\dfrac{1}{8}$,当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 时也适合.

(2) 当 $C=\dfrac{1}{8}$ 时,$x=\dfrac{1}{4}$ 且 $y=0$ 的充要条件是:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=4\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$

且 $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k(x_i+x_j+x_k)=0$

$\Leftrightarrow\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2=2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 且 $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k=0$

$\because\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k=0$

$\Leftrightarrow x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任意三项之积为 0,即其中最多有两项 x_i,x_j 不为 0,

此时 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2=2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\Leftrightarrow x_i^2+x_j^2=2x_ix_j$

$$\Leftrightarrow x_i=x_j$$

$\therefore x=\dfrac{1}{4}$ 且 $y=0$ 的充要条件是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有两项相等(可以是 0),其余全为 0.

例 7 (1996 年·世界城市际数学竞赛)求自然数 a,b,c,使得对任意 $n\in\mathrm{N}, n>2$,有

$$b-\frac{c}{(n-2)!}<\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots+\frac{n^3-a}{n!}<b$$

解:令 $b_n=b-\dfrac{2^3-a}{2!}-\dfrac{3^3-a}{3!}-\cdots-\dfrac{n^3-a}{n!}=\dfrac{P(n)}{n!}$

其中,$P(n)$ 是关于 n 的多项式.

显然,$P(n)$ 的次数不能大于 2.

设 $P(n)=kn^2+ln+m$

由 $b_{n+1}-b_n=-\dfrac{(n+1)^3-a}{(n+1)!}=\dfrac{P(n+1)}{(n+1)!}-\dfrac{P(n)}{n!}$

及待定系数法得 $k=1, l=3, m=5, a=5$.

从而 $b=\dfrac{2^3-5}{2!}+\dfrac{3^3-5}{3!}+\cdots+\dfrac{n^3-5}{n!}+\dfrac{n^3+2n+5}{n!}(n>2)$

在上式中取 $n+1$ 及 n,两式相减知 b 是常数,令 $n=3$,得 $b=9$

由 $b_n<\dfrac{c}{(n-2)!}$ 得

$$c>(n-2)!\cdot b_n$$

$$=(n-2)!\cdot\frac{n^2+3n+5}{n!}=1+\frac{4n+5}{n^2-n}$$

注意到 $n>2$ 时$\dfrac{4n+5}{n^2-n}$ 是关于n 的减函数,从而

$$c>1+\frac{4\times3+5}{3^2-3}=\frac{23}{6}$$

可取 $c=4$,则

$$a=5, b=9, c_{\min}=4$$

【评注】 (1) 利用类似方法可考虑更一般情形：确定自然数 a,b,c，使对任意 $n,k\in\mathrm{N}, n>k-1$，有

$$b-\frac{c}{(n-k+1)!}<\frac{2^k-a}{2!}+\frac{3^k-a}{3!}+\cdots+\frac{n^k-a}{n!}<b$$

(2) 由本题还可以得到一些"副产品"：

1°) $\frac{2^2-2}{2!}+\frac{3^2-2}{3!}+\cdots+\frac{n^2-2}{n!}+\frac{n+2}{n!}=3(n>2)$

2°) $\frac{2^3-5}{2!}+\frac{3^3-5}{3!}+\cdots+\frac{n^3-5}{n!}+\frac{n^2+3n+5}{n!}=9(n>2)$

3°) $\frac{2^5-52}{2!}+\frac{3^5-52}{3!}+\cdots+\frac{n^5-52}{n!}+\frac{n^4+5n^3+14n^2+31n+52}{n!}=103$

等等，这些结果也给数学竞赛提供了有益的素材.

例 8 给定自然数 $n\geqslant 2$，求最小正数 λ，使得对任何 $a_i\geqslant 0, 0\leqslant b_i\leqslant\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$，都有 $a_1a_2\cdots a_n\leqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

解：若存在某个 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 使 $a_j=0$，则对于任何 $\lambda\geqslant 0$ 原不等式成立，故不妨设对一切 i，有 $a_i>0$.

$\because f(x)=\frac{1}{x}$ 是 $(0,+\infty)$ 内的下凸函数及 $\sum_{i=1}^{n}b_i=1$，故由琴生不等式有

$$\sum_{i=1}^{n}b_if(a_i)\geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)$$

即 $\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\geqslant\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_ib_i}, \sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)^{-1}$

由排序不等式及上述最后一个不等式两端的形式，不妨设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$ 及 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，令 $M=a_1,a_2\cdots a_n, A_i=\frac{M}{a_i}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$A_1\geqslant A_2\geqslant A_3\geqslant\cdots\geqslant A_n\geqslant 0$$

$$\begin{aligned}\therefore\sum_{i=1}^{n}b_iA_i&\leqslant b_1A_1+b_2A_2+\cdots+b_nA_2\\&=b_1A_1+(1-b_1)A_2\\&=\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{2}A_2-\left(\frac{1}{2}-b_1\right)(A_1-A_2)\\&\leqslant\frac{1}{2}(A_1+A_2)\\&=\frac{1}{2}(a_1+a_2)a_3a_4\cdots a_n\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}\end{aligned}$$

即 $M\leqslant\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)^{-1}$

于是，由 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i})^{-1}$ 得

$$a_1,a_2\cdots a_n\leqslant\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

又当 $b_1=b_2=\frac{1}{2},b_3=b_4=\cdots=b_n=0;a_1=a_2=\frac{1}{2(n-1)},a_3=a_4=\cdots=a_n=\frac{1}{n-1}$ 时，

有 $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1$，且 $a_1a_2\cdots a_n=\frac{1}{4(n-1)^n}$

及 $\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}\cdot\left[\frac{1}{4(n-1)}+\frac{1}{4(n-1)}\right]=\frac{1}{4(n-1)^n}$

综上讨论，所求最小正数为 $\lambda=\frac{1}{2(n-1)^{n-1}}$

例 9 （2002.中国数学奥林匹克第六大题）给定 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，求最小常数 M，使对任意整数 $n\geqslant 2$ 及实数 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，只要满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k \tag{⑲}$$

总有 $\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k$，其中 $m=[cn]$ 表示不超过 cn 的最大整数.

解法一：所求最小常数 $M=\frac{1}{1-c}$

以下是命题组的解法.

令 $r=cn,S_0=0,S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i,k=1,2,\cdots,n$. 于是由式⑲有

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=1}^{n}(k-r)a_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-r)S_k-\sum_{k=1}^{n}(k-r)S_{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-r)S_k-\sum_{k=1}^{n-1}(k+1-r)S_k\\&=(n-r)S_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\\&=(n+1-r)S_n-\sum_{k=1}^{n}S_k\end{aligned}$$

即 $$\sum_{k=1}^{n}S_k=(n+1-r)S_n \tag{⑳}$$

对于 $1\leqslant j\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}j\cdot S_k-k\cdot S_j&=j\cdot\sum_{l=j+1}^{k}a_l-(k-j)\sum_{l=1}^{j}a_l\\&\geqslant j(k-j)a_j-j(k-j)a_j=0\end{aligned}$$

故 $S_j\leqslant\frac{j}{k}\cdot S_k$

由此可得

$$\sum_{j=1}^{k-1}S_j\leqslant\frac{S_k}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k-1}j=\frac{k-1}{2}\cdot S_k \tag{㉑}$$

下面我们来证明：

$$\sum_{k=m}^{n}S_k\leqslant\frac{n+1-m}{2}(S_m+S_n) \tag{㉒}$$

对于 $k=0,1,\cdots,n-m$，有

$(n-m-k)(S_{m+k}-S_m)\leqslant k(n-m-k)a_{m+k}\leqslant k\cdot(S_n-S_{m+k})$

由此可得

$$S_{m+k}\leqslant\frac{1}{n-m}[(n-m-k)S_m+kS_n]$$

对 k 求和得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n}S_k&=\sum_{k=0}^{n-m}S_{m+k}\\&\leqslant\frac{1}{n-m}\Big[S_m\sum_{k=0}^{n-m}(n-m-k)+S_n\sum_{k=0}^{n-m}\cdot k\Big]\\&=\frac{n+1-m}{2}(S_m+S_n)\end{aligned}$$

式 ㉒ 得证：

在式 ⑱ 中令 $k=m$，得到

$$\sum_{j=1}^{m-1}S_j\leqslant\frac{m-1}{2}\cdot S_m \tag{23}$$

将式 ⑳、㉒ 和 ㉓ 结合起来，得到

$$(n+1-r)S_n\leqslant\frac{n}{2}\cdot S_m+\frac{n+1-m}{2}\cdot S_n$$

$$S_n\leqslant\frac{n}{n+1+m-2r}\cdot S_m\leqslant\frac{n}{n-r}\cdot S_m=\frac{1}{1-c}\cdot S_m$$

可见 $M\leqslant\frac{1}{1-c}$

显然，只需再证 $M\geqslant\frac{1}{1-c}$

对于 $n\geqslant\frac{1}{2c-1}$，令

$$a_1=a_2=\cdots=a_m=1$$

$$\begin{aligned}a_{m+1}&=a_{m+2}=\cdots=a_n\\&=\frac{2cnm-m(m+1)}{(n-m)(n+m+1)-2cn(n-m)}\end{aligned}$$

于是，$a_{m+1}\geqslant 1$ 且满足

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ka_k&=\sum_{k=1}^{m}k+a_{m+1}\cdot\sum_{k=m+1}^{n}K\\&=cn\cdot\frac{mn}{n+m+1-2cn}=cn\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

即满足条件 ⑲

注意到 $cn-1<m\leqslant cn$，有

$$\begin{aligned}M&\geqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k}=\frac{n}{n+m+1-2cn}\\&\geqslant\frac{n}{n-cn+1}=\frac{1}{1-c+\frac{1}{n}}\\&=\frac{1}{1-c}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n(1-c)}}\\&\geqslant\frac{1}{1-c}\Big(1-\frac{1}{n(1-c)}\Big)\\&=\frac{1}{1-c}-\frac{1}{n(1-c)^2}\quad\forall n>1\end{aligned}$$

由此可得 $M\geqslant\frac{1}{1-c}$

上述解法相对而言繁一些.如果将该题的已知等式变形后,对等式的左右两边分别运用切比雪夫不等式及等号成立的充要条件,能得到问题的一个较简明解法.

解法二: $\because m=[cn]$,且 $c\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

$\therefore cn-1<m\leqslant cn<n$

$\because \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$\therefore \sum_{k=1}^{m}\left(c-\frac{k}{n}\right)a_k=\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{k}{n}-c\right)a_k \quad ㉔$$

$\because c-\frac{1}{n}>c-\frac{2}{n}>\cdots>c-\frac{m}{n}\geqslant 0$ 且 $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m$

$\therefore$ 由切比雪夫不等式,有

$$\sum_{k=1}^{m}\left(c-\frac{k}{n}\right)a_k\leqslant\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(c-\frac{k}{n}\right)\right]\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right) \quad ㉕$$

又 $0<\frac{m+1}{n}-c<\frac{m+2}{n}-c<\cdots<1-c$ 且 $0<a_{m+1}\leqslant a_{m+2}\leqslant\cdots\leqslant a_n$,

由切比雪夫不等式,有 $\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{k}{n}-c\right)a_k\geqslant\frac{1}{n-m}\left[\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{k}{n}-c\right)\right]\left(\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right)$ ㉖

由式㉔,㉕,㉖知

$$\frac{1}{n-m}\left[\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{k}{n}-c\right)\right]\left(\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right)\leqslant\frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m}\left(c-\frac{k}{n}\right)\right]\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right) \quad ㉗$$

从而
$$\sum_{k=m+1}^{n}a_k\leqslant\frac{c-\frac{m+1}{2n}}{\frac{n+m+1}{2n}-c}\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k$$

$$\underset{(\because m>cn-1)}{\leqslant}\frac{c-\frac{cn}{2n}}{\frac{n+cn}{2}-c}\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k$$

$$=\frac{c}{1-c}\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k \quad ㉘$$

又
$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant M\sum_{k=1}^{m}a_k$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=m+1}^{n}a_k\leqslant(M-1)\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k \quad ㉙$$

比较㉘、㉙,及由 M 的最小性定义,有 $M-1\leqslant\frac{c}{1-c}$,即 $M\leqslant\frac{1}{1-c}$

下面,须再证 $M\geqslant\frac{1}{1-c}$

由于取 $a_1=a_2=\cdots=a_m>0,a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n>0$ 时,且能满足已知条件

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$$

因此,不等式㉕,㉖中,等号成立.于是㉗等号成立,有

$$\sum_{k=m+1}^{n}a_k=\frac{c-\frac{m+1}{2n}}{\frac{n+m+1}{2n}-c}\cdot\sum_{k=1}^{m}a_k \quad ㉚$$

由式㉙,㉚,则

$$M-1\geqslant\frac{\sum\limits_{k=m+1}^{n}a_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k}=\frac{c-\frac{m+1}{2n}}{\frac{n+m+1}{2n}-c}$$

$$\underset{(\because m<cn)}{\geqslant}\frac{c-\frac{cn+1}{2n}}{\frac{n+cn+1}{2}-c}=\frac{c-\frac{1}{n}}{1-c+\frac{1}{n}}$$

故 $M\geqslant\frac{1}{1-c+\frac{1}{n}}$ 对一切 $n\geqslant 2$ 成立.

令 $n\to+\infty$,则

$$M\geqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-c+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1-c}$$

三、多元函数最值问题

例10 （2001. 中国西部数学奥林匹克题 4）设 x,y,z 为正实数，且 $x+y+z\geqslant xyz$，求 $\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$ 的最小值.

解:注意到,当 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时,$x+y+z=xyz$,而$\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\sqrt{3}$

下面证明$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\right)_{\min}=\sqrt{3}$

事实上,有

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2$$

$$\geqslant\begin{cases}\frac{1}{3}(xyz)^2\\ \geqslant\sqrt{3}xyz\quad(\text{如果 } xyz\geqslant 3\sqrt{3})\\ 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\geqslant\sqrt{3}xyz\quad(\text{如果 } xyz<3\sqrt{3})\end{cases}$$

故$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\right)_{\min}=\sqrt{3}$

例 11 已知 $\angle A,\angle B,\angle C$ 为 $\triangle ABC$ 的内角,求

$$W=\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

的最小值

解:由 $\angle A,\angle B,\angle C$ 为三角形的内角可知 $\tan\frac{A}{2}$、$\tan\frac{B}{2}$、$\tan\frac{C}{2}$ 皆大于 0,为简便,以 x、y、z 分别表示 $\tan\frac{A}{2}$、$\tan\frac{B}{2}$、$\tan\frac{C}{2}$,则由 $xy+yz+zx=1$ 可推出

$$xyz=\sqrt{xy\cdot yz\cdot zx}$$

$$\leqslant\sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3}=\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt{3}}{9}<1$$

又当 $0<a\leqslant b<1$ 时,$a+\frac{1}{a}\geqslant b+\frac{1}{b}$

故 $\quad xyz+\frac{1}{xyz}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{28}{9}\sqrt{3}$

即 $\quad$ 当 $\angle A=\angle B=\angle C$ 时,$W_{\min}=\frac{28}{9}\sqrt{3}$

例 12 设 x,y,z,w 是不全为零的实数,求 $P=\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$ 的最大值.

【分析】 由于所求的最大值的式子是关于 x,y,z,w 的齐次二次多项式之比,可考虑到运用基本不等式
$$\lambda_1a^2+\lambda_2b^2\geqslant 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\cdot ab(\lambda_1,\lambda_2>0)$$
从而使原问题巧妙地得到解决.

解:引进参数 $\alpha,\beta,\gamma>0$,则有

$\alpha^2x^2+y^2\geqslant 2\alpha xy,\beta y^2+z^2\geqslant 2\beta yz$

$\gamma^2z^2+w^2\geqslant 2\gamma zw$

将上面三式相加,并整理得
$$\frac{\alpha}{2}x^2+\left(\frac{1}{2\alpha}+\beta\right)y^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}\right)z^2+\frac{w^2}{2\gamma}\geqslant xy+2yz+zw$$

令 $\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2\alpha}+\beta=\frac{1}{\beta}+\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2\gamma}$,解得 $\alpha=\sqrt{2}+1>0$

于是 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2)\geqslant xy+2yz+zw$

有 $\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}\leqslant\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

故 $P_{\max}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$(当 $x=w=1$ 及 $y=z=1+\sqrt{2}$ 时取得)

四、复合最值问题

这类问题解法的基本思路是:先求最值再求复合最值.

例 13 已知 $f(x)=(\sin x+4\sin\theta+4)^2+(\cos x-5\cos\theta)^2$ 的最小值为 $g(\theta)$,求 $g(\theta)$ 的最大值.

【分析】 此题与正、余弦函数有关,先利用三角函数的有界性确定 $g(\theta)$,再进一步求得 $g(\theta)$ 的最大值.

解:展开 $f(x)$ 的右边并整理,得
$$\begin{aligned}f(x)&=8(1+\sin\theta)\sin x-10\cos\theta\cos x-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42\\&=\sqrt{64(1+\sin\theta)^2+100\cos^2\theta}\cdot\sin(x+\varphi)-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42\end{aligned}$$
由正弦函数的有界性,有
$$\begin{aligned}g(\theta)&=-\sqrt{64(1+\sin\theta)^2+100\cos^2\theta}-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42\\&=-2\sqrt{-9\sin^2\theta+32\sin\theta+41}-9\sin^2\theta+32\sin\theta+42\end{aligned}$$
令 $t=\sqrt{-9\sin^2\theta+32\sin\theta+41}$,则 $0\leqslant t\leqslant 8$,于是,有
$$g(\theta)=t^2-2t+1=(t-1)^2,\quad 0\leqslant t\leqslant 8$$
求得 $g(\theta)_{\max}=(8-1)^2=49$

例 14 对于 $x\in\mathrm{R}$,$f(x)=\min\{4x+2,-12x^2+12,-2x+4\}$,求 $f(x)$ 的表达式及 $f(x)_{\max}$

【分析】 该题涉及到两个一元一次函数与一个一元二次函数,若能根据题设要求画出 $f(x)$ 的图象,再利用数形结合的方法,则可以很直观地解决问题.

解:如图 1-8-1 在同一直角坐标系中作出 $y_1=4x+2,y_2=-12x^2+12,y_3=-2x+4$ 的图象,根据 $f(x)$ 的定义,可得 $f(x)$ 的分段表达式如下.
$$f(x)=\begin{cases}-12x^2+12 & x\leqslant\frac{-1-\sqrt{31}}{6}\text{ 或 }x\geqslant\frac{1+\sqrt{97}}{12}\\4x+2 & \frac{-1-\sqrt{31}}{6}<x\leqslant\frac{1}{3}\\-2x+4 & \frac{1}{3}<x<\frac{1+\sqrt{97}}{12}\end{cases}$$

从图象可知,当 $x=\frac{1}{3}$ 时 $f(x)_{\max}=\frac{10}{3}$

最值总是和对称、有序、均衡以及特殊值、特殊点有关,复合最值也不例外.因此,我们可以利用这些

关联的情形先确定所给问题的上界或下界,再进一步求出复合最值,有时所得上界就是最大值,所得下界就是最小值.

例 15 (1990.国家数学集训队试题)在首项系数为1的二次函数 $f(x)=x^2+px+q$ 中,找出使 $M=\max|x^2+px+q|$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 取最小值时的函数表达式.

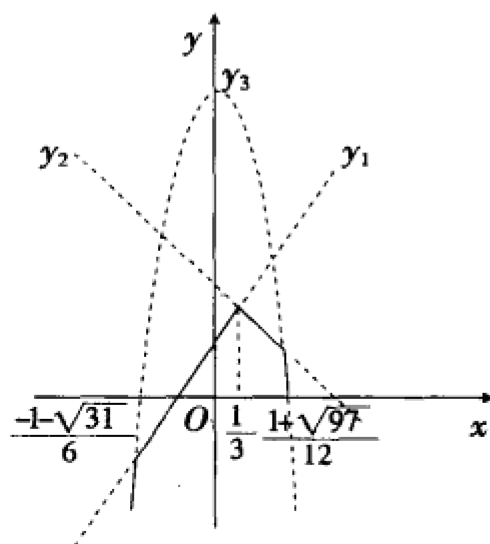


图 1-8-1

【分析】 此题可先通过特殊点,特殊值得到关于 p,q 的不等式,再利用绝对值不等式进行放缩,得到下界.

解:令 $g(x)=|x^2+px+q|\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$

则 $g(x)_{\max}$ 只能是 $|f(1)|$ 或 $|f(-1)|$ 或 $\left|\frac{4q-p^2}{4}\right|$

$$\begin{aligned}\because 4M&\geqslant|f(1)|+|f(-1)|+2|f(0)|\\&=|1+p+q|+|1-p+q|+2|-q|\\&\geqslant|(1+p+q)+(1-p+q)+2(-q)|\\&=2\end{aligned}$$

当且仅当 $p=0,q=-\frac{1}{2}$ 时取等号.

$\therefore M_{\min}=\frac{1}{2}$

故 $\quad f(x)=x^2-\frac{1}{2}$

例 16 (1994·国家数学集训队试题)给定正整数 $n\geqslant 3$,对于模长为1的 n 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,求

$$\min_{z_1,z_2,\cdots,z_n}\left[\max_{\{u\in C||u|=1\}}\prod_{i=1}^{n}|u-z_i|\right]$$

并求最大值中的最小值达到时,复数 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 满足的条件.

【分析】 在单位圆上有一组特殊点,那就是正 n 边形的顶点.因此,我们可以利用这 n 个点对应的复数找到所需的下界.

解:令 $f(u)=\prod_{i=1}^{n}(u-z_i)$

$$=u^n+C_{n-1}u^{n-1}+\cdots+C_1u+C_0 \tag{31}$$

其中 $|C_0|=|z_1z_2\cdots z_n|=1$

设 $C_0=e^{i\theta},0\leqslant\theta<2\pi$,在单位圆 $|u|=1$ 上取 n 个复数 $\epsilon_k=e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}},k=1,2,\cdots,n$,有 $\epsilon_k^n=e^{i\theta}=C_0$

当 $1\leqslant m\leqslant n-1$ 时,数列 $\{\epsilon_k^m\}$ 是首项为 $\epsilon_1^m=e^{i\frac{2m\pi+m\theta}{n}}$,公比 $q=e^{i\frac{2m\pi}{n}}\neq 1$ 的等比数列.

$$\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k^m=\frac{\epsilon_1^m-\epsilon_n^mq}{1-q}=\frac{e^{i\frac{2m\pi+m\theta}{n}}-e^{i\frac{m\theta}{n}}\cdot e^{i\frac{2m\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2m\pi}{n}}}=0$$

从而,有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|f(\epsilon_k)|&\geqslant\left|\sum_{k=1}^{n}f(\epsilon_k)\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k^n+C_{n-1}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k^{n-1}+\cdots+C_1\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k+nC_0\right|\\&=|2nC_0|=2n\end{aligned} \tag{32}$$

因此,至少有一个 ϵ_k 满足 $|f(\epsilon_k)|\geqslant 2$

于是 $$\max_{\{u\in C||u|=1\}}\prod_{i=1}^{n}|u-z_i|\geqslant 2 \tag{33}$$

要使㉝取等号,必须㉜取等号,由㉜知,当且仅当 $f(\varepsilon_k)(k=1,2,\cdots,n)$ 这 n 个复数相等.

又由㉜知 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)=2nC_0$

故 $f(\varepsilon_k)=2C_0, k=1,2,\cdots,n$

$\because \varepsilon_k^n=C_0$

则 $C_{n-1}u^{n-1}+C_{n-2}u^{n-2}+\cdots+C_1u=0$

由㉛知该方程有根 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

故 $C_1=C_2=\cdots=C_{n-1}=0$

$\therefore f(u)=u^n+C_0 \quad (|C_0|=1)$ ㉞

结合㉝,㉞知

$$z_k^n+C_0=0 \Rightarrow z_k^n=-C_0, k=1,2,\cdots,n$$

从而,知 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为单位圆内接正 n 边形的顶点时

$$\min_{z_1,z_2,\cdots,z_n}\left[\max_{\{u\in c \mid |u|=1\}}\prod_{i=1}^{n}|u-z_i|\right]=2$$

例 17 (2001. IMO 国家集训队选拔考试题)记 $F=\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$,当 a,b,c 取遍所有实数时,求 F 的最小值.

解法一:令 $f(x)=(x+2)^3-a(x+2)^2-b(x+2)-c$

$$=x^3+(6-a)x^2+(12-4a-b)x+(8-4a-2b-c)$$

记 $6-a=a_1, 12-4a-b=b_1, 8-4a-2b-c=c_1$

问题化为求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ 的最小值.

可以证明:$1+|a_1|+|b_1|+|c_1|\leqslant 7\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ (*)

((*)式的证明放在最后)

$\because$(*)成立,$\therefore$ 当 $|a_1|+|b_1|+|c_1|\geqslant \frac{3}{4}$ 时,有

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant \frac{1}{4}$$ ㉟

当 $|a_1|+|b_1|+|c_1|<\frac{3}{4}$ 时,由于

$$|f(1)|\geqslant 1-|a_1| \quad |b_1|-|c_1|>\frac{1}{4}$$ ㊱

从而,由㉟、㊱两式,得 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|\geqslant \frac{1}{4}$ 且 $\forall a_1,b_1,c_1\in \mathbf{R}$.

令 $a_1=0, b_1=-\frac{3}{4}, c_1=0$

即 $a=6, b=-\frac{45}{4}, c=\frac{13}{2}$

则 $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$

由 $f(x)-f(1)=(x-1)\left(x^2+x+1-\frac{3}{4}\right)$

$$=(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

从而,$f(x)\leqslant f(1)=\frac{1}{4} \quad \forall x\in[-1,1]$

同理可证 $f(x)-f(-1)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

即 $f(x)\geqslant f(-1)=-\frac{1}{4}, \forall x\in[-1,1]$

于是,得 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=|f(1)|=\frac{1}{4}$ ㊲

由 ㊱,㊲ 两式可知

$\max\limits_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$ 的最小值为$\frac{1}{4}$,且当 $a=6,b=-\frac{45}{4},c=\frac{13}{2}$ 时达到.

(*)式的证明

只要证明以下命题:

设实系数三次多项式 $p(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ 满足 $|p(x)|\leqslant 1,\quad \forall |x|\leqslant 1$

则 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|\leqslant 7$ ㊳

证明:由 $\pm p(\pm x)$ 均满足 ㊳ 式,不妨设 $\alpha,\beta\geqslant 0$

(i) 当 $\gamma,\delta\geqslant 0$ 时,则

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=\alpha+\beta+\gamma+\delta=p(1)\leqslant 1$

(ii) 当 $\gamma\geqslant 0,\delta\leqslant 0$ 时,则

$$\begin{aligned}|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|&=\alpha+\beta+\gamma-\delta\\&=p(1)-2p(0)\leqslant 3\end{aligned}$$

(iii) 当 $r<0,\delta\geqslant 0$ 时,则

$$\begin{aligned}&|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=\alpha+\beta-\gamma+\delta\\&=\frac{4}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\frac{1}{3}(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)\\&\quad-\frac{8}{3}\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{2}+\delta\right)+\frac{8}{3}\left(-\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}-\frac{\gamma}{2}+\delta\right)\\&=\frac{4}{3}p(1)-\frac{1}{3}p(-1)-\frac{8}{3}p\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{3}p\left(-\frac{1}{2}\right)\\&\leqslant 7\end{aligned}$$

(iv) 当 $r<0,\delta<0$ 时,则

$$\begin{aligned}&|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=\alpha+\beta-\gamma-\delta\\&=\frac{5}{3}p(1)-4p\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}p\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant 7\end{aligned}$$

综上可知 ㊳ 式成立.

【评注】 (1) 上述解法的关键是将 F 化为求 $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ 的最小值,这时仅需要证明

$$1+|a_1|+|b_1|+|c_1|\leqslant 7\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$$

其中 $a_1=6-a,b_1=12-4a-b,c_1=8-4a-2b-c$.从而得,$\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|=|f(1)|=\frac{1}{4}$

(2) 上述解法十分蹩脚,但如果"平移"之后,选取特殊点,特殊函数值,并将特殊函数值"拼凑"到一起,利用绝对值不等式缩小,使得消去待定系数,缩小到一个常数,这就是具体"拼凑"的意义,然后再验证成立将是非常有效简捷的方法.

解法二:先作平移变换,$x=x'+2$,则

$$F=\max_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|\quad (a,b,c\in \mathrm{R})$$

将变成

$$F'=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x'^3-a_1x'^2-b_1x'-c_1|\quad (a,b,c\in \mathrm{R})$$

于是可先求出 F' 的最小值.

令 $f(x)=x'^3-a_1x'^2-b_1x'-c_1\quad -1\leqslant x'\leqslant 1$

易知 $4f(1)-4f(-1)=8-8b_1$

$8f\left(\frac{1}{2}\right)-8f\left(-\frac{1}{2}\right)=2-8b_1$ ㊴

则 $24F'\geqslant 4|f(1)|+4|f(-1)|+8\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+8\left|f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$

$$\geqslant \left|4f(1)-4f(-1)-8f\left(-\frac{1}{2}\right)+8f\left(-\frac{1}{2}\right)\right|$$
$$=6 \qquad ㊵$$

从而　$F' \geqslant \frac{1}{4}$

故　$\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x'^3-a_1x'^2-b_1x-c_1| \geqslant \frac{1}{4}$　㊶

下面验证上式,也就是㊵式"="可取到.

当 $a_1=0, b_1=\frac{3}{4}, c_1=0$ 时,因为 $-1\leqslant x\leqslant 1$,故可令 $x=\cos\theta$,这时

$$|f(x)|=\left|\cos^3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta\right|=\frac{1}{4}|\cos^3\theta|\leqslant\frac{1}{4}$$

特别当 $|\cos^3\theta|=1$ 时,$|f(x)|=\frac{1}{4}$

因此　㊶即㊵中"="可取到.

故　F' 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

下面回到原问题:

$$F=\max_{1\leqslant x\leqslant 3}|x^3-ax^2-bx-c|$$
$$\xlongequal{x=x'+2}\max_{-1\leqslant x'\leqslant 3}|(x'+2)^3-a(x'+2)^2-b(x'+2)-c|$$
$$=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x'^3-(a-b)x'^2-(4a+b-12)x'-(4a+2b+c-8)|\geqslant\frac{1}{4}$$

等号在 $\begin{cases} a'=a-6=0\\ b'=4a+b-12=\frac{3}{4}\\ 4a+2b+c-8=0\end{cases}$

即　$a=6, b=-\frac{45}{4}, c=\frac{13}{2}$ 时达到.

因此,当 a,b,c 取遍所有实数时,F 的最小值为 $\frac{1}{4}$

【评注】(1)上述解法的关键是取到特殊法 $f(1)$、$f(-1)$、$f\left(\frac{1}{2}\right)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$,进行得到㊵式,要害是这种拼凑要遵循两条原则

1°)确保应用绝对值不等式缩小时消去常数

[当1°)满足后,一般情况对 $a_1,b_1,c_1\in \mathrm{R}$ 等号是不成立,因此第2°)要害原则是]

2°)验证等号成立,即找到使等号成立的特殊点.$(a_1,b_1,c_1)=\left(0,\frac{3}{4},0\right)$

[这个特殊点的找到,也是要反复取 a_1,b_1,c_1 的值,反复验证的过程]

(2)如果说上述"拼凑㊵"的过程还是比"弦",还是抽象的话,则可在解题开始作平移变换 $x=x'+2$ 得到 $F'=\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1}|x^3-a_1x^2-b_1x-c_1|$ 之后,抓住 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 作三角函数变换,令 $x=\sin\theta, \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 再展开即可.

解法三:令 $x=x'+2$

则　$f(x)=(x'+2)^3-a(x'+2)^2-b(x'+2)-c$
$\qquad=x'^3+(6-a)x'^2+(12-4a-b)x'+(8-4a-2b-c)$

记 $a_1=6-a, b_1=12-4a-b, c_1=8-4a-2b-c$

则　$f(x')=x'^3+a_1x'^2+b_1x'+c_1 \qquad -1\leqslant x'\leqslant 1$

则　问题转化为求 $\max\limits_{-1\leqslant x'\leqslant 1}|x'^3+a_1x'^2+b_1x'+c_1|$ 的最小值

$\because -1\leqslant x'\leqslant 1$

$\therefore$ 可设 $x' = \sin\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore$ 也就是求 $\max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}} |\sin^3\theta + a_1\sin^2\theta + b_1\sin\theta + c_1|$ 的最小值

记 $g(\theta) = \sin^3\theta + a_1\sin^2\theta + b_1\sin\theta + c_1$

$M = \max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}} |g(\theta)|$

分别取 $\theta = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ 可得

$M \geqslant \left|g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = |a_1 + c_1 - b_1 - 1|$ ㊷

$M \geqslant \left|g\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|\frac{1}{4}a_1 + c_1 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{8}\right|$ ㊸

$M \geqslant \left|g\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|\frac{1}{8} + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{2}b_1 + c_1\right|$ ㊹

$M \geqslant \left|g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = |1 + a_1 + b_1 + c_1|$ ㊺

由㊷、㊺，$2M \geqslant \left|g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = 2|b_1 + 1|$

由㊸、㊹，$2M \geqslant \left|g\left(\frac{\pi}{6}\right) - g\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| = 2\left|\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{8}\right|$

所以 $3M \geqslant |b_1 + 1| + 2\left|\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{8}\right|$

$= |b_1 + 1| + \left|b_1 + \frac{1}{4}\right|$

$\geqslant \left|(b_1 + 1) - \left(b_1 + \frac{1}{4}\right)\right|$

$= \frac{3}{4}$

$\therefore M \geqslant \frac{1}{4}$ ㊻

另一方面，验证等号成立.

取 $a_1 = 0, b_1 = -\frac{3}{4}, c_1 = 0$ 得

$g(\theta) = \sin^3\theta - \frac{3}{4}\sin\theta = \frac{1}{4}\sin 3\theta$

$\therefore M = \max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}} |g(\theta)| \leqslant \frac{1}{4}$

$\therefore M = \frac{1}{4}$ 的等号可取到. ㊼

由㊻、㊼可知 $M_{\min} = \frac{1}{4}$

$\because$ 平移变换不改变最值

$\therefore F$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$

易知 $a = 6, b = -\frac{45}{4}, c = \frac{13}{2}$ 时，$F = \frac{1}{4}$

§8.3 针对性训练

A组

1.(2001.上海市高中数学竞赛题) 实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2001}$ 满足 $\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|=2001$,令 $y_k=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\cdots+x_k)$,$k=1,2,\cdots,2001$.求 $\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$ 的最大可能值.

2.(1999.越南数学奥林匹克竞赛题) 设 a,b,c 是正实数,且 $abc+a+c=b$.试确定 $p=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$ 的最大值.

3. 已知 λ 是给定的正数,求最大的常数 $c(\lambda)$,使对任意 $x_1,x_2\geqslant 0$,有 $x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2\geqslant c(x_1+x_2)^2$

4. 设 $x+y=k$,$x,y\in \mathbf{R}^+$,试求 k 的最大值,使不等式 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\geqslant\left(\frac{k}{2}+\frac{2}{k}\right)^2$ 恒成立.

5. 设对任意满足 $\frac{m}{n}<\sqrt{7}$ 的自然数 m、n,有不等式 $7-\frac{m^2}{n^2}\geqslant\frac{\lambda}{n^2}$ 恒成立.试求 λ 的最大值.

6. 试求最小实数 a,使不等式 $a(x^2+y^2+z^2)+xyz\geqslant\frac{a}{3}+\frac{1}{27}$,对一切满足 x、y、$z\geqslant 0$,$x+y+z=1$ 的实数 x、y、z 成立.

7. 试确定具有下述性质的最小实数 c,使对于任何满足条件:$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 的正数数列 $\{x_i\}$,都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant c\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$

8. 设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数,求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

9. 设函数 $f:(0,1)\to R$ 定义为

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\\ \dfrac{p+1}{q} & \text{当 } x=\dfrac{p}{q},(p,q)=1,0<p<q\end{cases}$$

求 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$ 上的最大值.

10. 若实数 x 满足不等式 $x^4-2x^3-7x^2+8x+12\leqslant 0$,求函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{4}{x}\right|$ 的最大值.

11. 实数 x、y、z 满足 $x+3y+2z=1$,求 $3x^2-y^2+2z^2$ 的最小值.

12. 设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,求 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 的最小值.

13. 设 $a,b\in\mathrm{R}^+$,且 $a+b=1$,求 $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2$ 的最小值.

14. 设实数 x,y 满足 $3x^2+2y^2\leqslant 6$,求 $p=2x+y$ 的最大值.

15. $f(x)=\min\{3+\log_{\frac{1}{4}}x,\log_2 x\}$,其中 $\min\{p,q\}$ 表示 p,q 中较小者,试求 $f(x)$ 的最大值.

16. 函数 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间$[-1,1]$上的最大值 $M(a)$ 的最小值等于________.

B 组

1.(2001. IMO 国家集训队选拔考试题) 给定大于 3 的整数 n,设实数 $x_1, x_2\cdots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ 满足条件 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$,试求

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_{j+2}}{x_{j+1}}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}x_{k+2}}{x_{k+1}^2+x_kx_{k+2}}\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{x_{l+1}^2+x_lx_{l+2}}{x_lx_{l+1}}\right)}$$

的最小值,并求出使该式达到最小值的所有满足条件的实数组 $x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$.

2.(1997. 中国数学冬令营联赛试题) 设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{1997}$ 满足如下两个条件:

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}(i=1,2,\cdots,1997)$

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$

试求:$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$ 的最大值,并说明理由.

3. 求最大的常数 c,使得对满足 $x>0, y>0, x^2+y^2=1$ 的实数 x, y,恒有 $x^6+y^6\geqslant cxy$

4. 某个在 ox 轴的正方向运动的点的横坐标为 $x(t)=5(t+1)^2+\frac{a}{(t+1)^5}$,其中 a 是一个正的常数,求满足对所有 $t\geqslant 0, x(t)\geqslant 24$ 时 a 的最小值.

5. 求最大的常数 k,使得对于$[0,1]$中的一切实数 a, b, c, d 都有不等式

$$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant k(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

6. 设 $\lambda>0$,求最大的常数 $c=c(\lambda)$,使得对所有非负实数 x, y,均有 $x^2+y^2+\lambda xy\geqslant c(x+y)^2$

7. 设 a,b,c 是直角三角形的三边长,且 $a \leqslant b \leqslant c$,求最大常数 k,使得
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \geqslant kabc$

8. 求最小的正整数 k,使得对于满足 $0 \leqslant a \leqslant 1$ 的所有 a 和所有正整数 n,都有
$a^k(1-a)^n < \frac{1}{(n+1)^3}$

9. 求使下列两式
$$\begin{cases} 2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0 & ① \\ x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2 & ② \end{cases}$$
对任何实数 x,y 都成立的一切 b 值.

10. 求最小的正数 α,使得存在正数 β,当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,不等式
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \leqslant 2-\frac{x^\alpha}{\beta}$$
成立.

11. 设常数 a 使得关于 x 的不等式
$$\frac{1}{1+\sqrt{x}} \geqslant a\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$
有非零实数解,求 a 的最大值.

12. 若 $u=\sqrt{2p-q}+\sqrt{3q-2p}+\sqrt{6-2q}$,其中 p,q 是使 u 有意义的实数,试确定 u 的最大值.

13. 设 $a,b \in \mathrm{R}^+$ 且 $a+b+c=1$,求 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ 的最小值.

14. x,y,z 是非负实数,$9x^2+12y^2+5z^2=9$,求函数 $u=3x+6y+5z$ 的最大值.

15.(1995.中国数学冬令营联赛试题)试求

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}|(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

的最小值,其中 x 和 y 是任意实数.

16. 若 $2x^2+3xy+2y^2=1$,求 $k=x+y+xy$ 的最小值.

17. 若 x,y 为实数,求 $S=5x^2-4xy+y^2-10x+6y+5$ 的最小值.

18. 已知 a,b,c,d 为正实数,求

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}$$

的最小值.

19. 若 a,b,c 为非负实数,求

$$W=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+d^2}}{a+b+c}$$

的最小值

20. 已知 $x^2-y^2=16$,求函数

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{y}{8x}+1$$

的最小值和最大值.

21. 已知 $x^2-9y^2-4x+18y-9=0$,求函数

$$f(x,y)=\frac{5x^2+3xy-23x-6y+22}{x^2-4x+4}$$

的最值.

22. 已知 $-1\leqslant 2x+y-z\leqslant 8, 2\leqslant x-y+z\leqslant 9, -3\leqslant x+2y-z\leqslant 7$,求函数 $u=7x+5y-2x$ 的最大值和最小值.

23.(第三届加拿大数学竞赛题改编)设 x,y 是正数,且 $x+y=1$,求函数 $W=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$的最小值.

24. 已知 x,y,z 为正数,且 $4x+5y+8z=30$,求 $W=8x^2+15y^2+48z^2$ 的最小值.

25.(2002.北京高一数学竞赛题)用 $\max\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 表示实数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 中的最大值,用 $\min\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$ 表示实数 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 中的最小值,对任意的 $a>0,b>0$,$\min\left\{\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2+b^2\right\}\right\}=?$

第一章

多项式的概念运算

§1.1 知识要点与基本方法

当今的国际数学奥林匹克(IMO)竞赛中不乏多项式问题,大多数中学生在课堂上和课外读物中或多或少地接触过多项式,但有关的知识稍显零散和不足,遇到较难的题目常常感到不易下手.

一、一元多项式概念

定义1:给定 $n+1$ 个数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 和未知元 x,则代数和

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为一元多项式,简记为 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$,如果 $a_n\neq 0$,则称为一元 n 次多项式,记次数 n 为 $\deg(f(x))$,a_k 称为 x^k 的系数,当所有的 $a_k=0$ 时,$f(x)$ 称为零多项式,它无次数,当 $f(x)\neq 0$ 时,则 $\deg(f(x))\geqslant 0$,于是 $\deg(f(x))=0$ 时 $f(x)$ 为零次多项式,它是非零常数,当 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是复数(实数,有理数,整数)时,则多项式称为复(实,有理,整)系数多项式.

一般地,设 F 为某个数集,若 $a_i\in F$,$i=0,1,\cdots,n$,则称 $f(x)$ 为数集 F 上的一元多项式,记为 $f(x)\in F[x]$.

二、一元多项式的和、差、积运算

定义2:两个多项式的和、差、积定义为:

设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i,g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j,m\leqslant n$

则 $f(x)\pm g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k\pm b_k)x^k$,

当 $m<n$ 时,取 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$

则 $f(x)\cdot g(x)=\sum\limits_{k=0}^{n+m}\Big(\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j\Big)x^k$

多项式的次数在多项式的讨论中占有重要地位,有如下性质.

定理1 如果多项式 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$,那么

$\deg(f(x)+g(x))\leqslant \max(\deg f(x),\deg g(x))$

其中 $f(x)+g(x)\neq 0$;

$\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg f(x)+\deg g(x)$

对于整系数多项式 $f(x)$,$f_1(x)$ 及整数 m,我们用 $f(x)\equiv f_1(x)(\bmod m)$ 来表示 m 整除 $f(x)-f_1(x)$ 的所有系数,这时我们称 $f(x)$ 与 $f_1(x)$ 关于模 m 同余.

在模 m 下,多项式的加减法与乘法有如下性质.

定理2 若 $f(x)\equiv f_1(x)(\bmod m)$,且 $g(x)\equiv g_1(x)(\bmod m)$

则 $f(x)\pm g(x)\equiv f_1(x)\pm g_1(x)(\bmod m)$.

$f(x)\cdot g(x)\equiv f_1(x)\cdot g_1(x)(\bmod m)$

定理3 对于任意素数 p 有

$(x+y)^{p^m} \equiv x^{p^m} + y^{p^m} \pmod{p}$，其中 m 为自然数.

三、多项式的恒等

定义3　若多项式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 与 $g(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ 的次数相同，而且同次项的系数相等，即 $n=m$，且 $a_i=b_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等.

【注意】　多项式相等是证明多项式的许多定理的依据，也是处理多项式问题的一个基本出发点.

四、多项式的差分

（Ⅰ）差分的概念与性质

定义4：设 $f(x)$ 是一个函数，称 $f(x+1)-f(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一阶差分，记作 $\Delta f(x)\equiv\Delta f$，把函数 f 的 k 阶差分的一阶差分称为函数 f 的 $k+1$ 阶差分 $(k=1,2,3,\cdots,n)$，$f(x)$ 的 k 阶差分记作

$\Delta^k f(x)\equiv\Delta^k f$，即 $\Delta(\Delta^k f)=\Delta^{k+1}f$

定理4　对于函数 $f(x),g(x)$，有

(1)　$\Delta(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda\Delta f(x)+\mu\Delta g(x)$，其中 λ,μ 为常数.

(2)　$\Delta(f(x)g(x))=f(x)\Delta g(x)+g(x+1)\Delta f(x)$

$$=f(x+1)\Delta g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x)$$

定理5　设 $f(x)$ 是一个函数，则

(1)　$\Delta^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+k)$

注意到 $C_n^k=C_n^{n-k}$ 这个公式也可以写成

$$\Delta^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k)$$

(2)　$f(x+n)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Delta^k f(x)$

若 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，则有如下性质：

(i)　$\deg\Delta f\leqslant n-1$，$\Delta^m f=0$（当 $m>n$ 时）

(ii)　$\Delta^n f=n!a_0$（a_0 是 f 的首项系数）

(iii)　对所有 $\deg(f(x))<n$，$\sum_{i=0}^{n}f(i)(-1)^i C_n^i=0$

（Ⅱ）差分多项式

定义5：$P_0(x)=1$ 称为0次差分多项式；对 $k\geqslant1$，多项式 $p_k(x)=\frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ 称为 k 次差分多项式，显然，$\Delta^k p_k(x)=1$，为了方便，引入如下记号：

$$\binom{x}{k}=\frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)=p_k(x)$$

定义6：若多项式 $f(x)$ 当 x 取在一整数时，$f(x)$ 均取整数值，则称 $f(x)$ 为整值多项式.

差分多项式有如下性质：

定理6　差分多项式是整值多项式

定理7　$\binom{x}{k-1}+\binom{x}{k}=\binom{x+1}{k}$　$k=1,2,\cdots$，其中约定 $\binom{x}{0}=1$

推论：(1) $\Delta\binom{x}{k}=\binom{x}{k-1}$

(2) 当 $r\leqslant k$ 时，$\Delta^r\binom{x}{k}=\binom{x}{k-r}$

当 $r > k$ 时，$\Delta^r\binom{x}{k} = 0$.

定理 8 记 $x = 0$ 时，$\Delta^k f(x)$ 的值为 $\Delta^k f(0)$，则对任意 n 次多项式 $f(x)$，有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\Delta^k f(0)\binom{x}{k}$$

其中 $\Delta^0 f(0) = f(0)$

推论：当 $f(x)$ 是整值多项式时，它能且只能表示为 $\binom{x}{k}$ 的整系数多项式.

定理 9 n 次多项式 $f(x)$ 为整值多项式的充要条件是：当 x 取 $n+1$ 个连续整数值时，$f(x)$ 之值均为整数.

五、拉格朗日(*Lagrange*)插值多项式

我们知道，由多项式的恒等定理可导出：复数域上的任何一个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$ 都可惟一地表示为

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\cdot f(x_0) \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}\cdot f(x_1) \\ & + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\cdot f(x_n) \end{aligned}$$

其中 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两不同.

上式即为著名的 *Lagrange* 插值恒等式.

§1.2 赛题精讲

例 1 设 n 是任意正整数，计算 $S_n = \sum_{r=0}^{n} 2^{r-2n}\cdot C_{2n-r}^{n}$

解：$2^{r-2n}C_{2n-r}^{n}$ 是多项式 $\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-r}$ 展开式中 x^n 的系数，因此，S_n 是 $\sum_{r=0}^{r}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-r}$ 的展开式中 x^n 的系数.

令 $f_n(x) = \sum_{r=0}^{2n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n-r}$

S_n 也是 $f_n(x)$ 中 x^n 的系数(因为 $r > n$ 的项中 x 的幂指数小于 n).

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{s=0}^{2n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^s = \frac{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1+x}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2^{2n+1}-(1+x)^{2n+1}}{1-x} \\ &= \frac{2}{1-x} - \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(1+x)^{2n+1}}{1-x} \\ &\xlongequal{令} P - Q \end{aligned}$$

在 P 的展开式中，x^n 的系数是 2

下面求 Q 的展开式中 x^n 的系数：

$$Q = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{l=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{l}x^l\cdot\sum_{m=0}^{\infty}x^m$$

因此，x^n 的系数为 $\frac{1}{2^{2n}}\sum_{l=0}^{n}C_{2n+1}^{l}=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{l=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{l}=\frac{1}{2^{2n+1}}(1+1)^{2n+1}=1$

所以，$S_n=2-1=1$

例 2 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$，满足：$0\leqslant a_i\leqslant a_0, i=1,\cdots,n$，又设 $b_i(i=0,1,\cdots,2n)$ 满足：$[f(x)]^2=b_{2n}x^{2n}+b_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+b_1x+b_0$，证明：

$$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}[f(1)]^2$$

证明：根据多项式乘法，再由多项式恒等定理，比较 x^{n+1} 的数系，得

$$b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1$$

又因为 $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$，利用条件 $0\leqslant a_i\leqslant a_0$ 有

$$\begin{aligned}b_{n+1}&\leqslant a_0a_1+a_0a_2+\cdots+a_0a_n\\&\leqslant\sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}a_ka_j\\&\leqslant\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=0}^{n}a_k^2+2\sum_{0\leqslant k<j\leqslant n}a_ka_j\Big]\\&=\frac{1}{2}(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2\\&=\frac{1}{2}[f(1)]^2\end{aligned}$$

证毕

例 3 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, g(x)=C_{n+1}x^{n+1}+C_nx^n+\cdots+C_0$ 是两个实系数非零多项式，且存在实数 r，使得 $g(x)=(x-r)f(x)$，记 $a=\max(|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|)$，$c=\max(|C_{n+1}|,|C_n|,\cdots,|C_0|)$，求证：$\frac{a}{c}\leqslant n+1$

证明：因为

$$\begin{aligned}&C_{n+1}x^{n+1}+C_nx^n+\cdots+C_0\\&=(x-r)(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)\end{aligned}\quad ①$$

所以　$C_{n+1}=a_n, C_n=a_{n-1}-ra_n, C_{n-1}=a_{n-2}-ra_{n-1},\cdots,C_1=a_0-ra_1, C_0=-ra_0$

于是　$a_n=C_{n+1}, a_{n-1}=C_n+rC_{n+1}, a_{n-2}=C_{n-1}+rC_n+r^2C_{n+1},\cdots,a_0=C_1+rC_2+r^2C_3+\cdots+r^nC_{n+1}$.

若 $|r|\leqslant1$

则　$|a_n|=|C_{n+1}|\leqslant C$

$|a_{n-1}|\leqslant|C_n|+|r||C_{n+1}|\leqslant2C$

……

$|a_0|\leqslant|C_1|+|r||C_2|+|r|^2|C_3|+\cdots+|r|^n|C_{n+1}|\leqslant(n+1)C$

由此可见，$a\leqslant(n+1)C$

若 $|r|>1$，则在 ① 两边同除以 $-rx^{n+1}$，并令 $g=\frac{1}{x}$，得

$$\begin{aligned}&-\frac{C_0}{r}y^{n+1}-\frac{C_1}{r}y^n-\cdots-\frac{C_{n+1}}{r}\\&=\left(y-\frac{1}{r}\right)(a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_n)\end{aligned}$$

$\therefore\quad a\leqslant(n+1)\cdot\frac{C}{|r|}<(n+1)C$

命题得证.

例 4 （1998. 第 18 届匈牙利——波兰数学竞赛题）设 $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，证明：存在正次数的整系数多项式 $Q(y)$ 和 $R(y)$，使得 $Q(y)\cdot R(y)=p(5y^2)$

证明：$\because p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$

$\therefore p(5y^2) = 5^4y^8 + 5^3y^6 + 5^2y^4 + 5y^2 + 1$

因为这个多项式是每项偶次数的多项式,所以,它的分解应是

$(25y^4 + ay^3 + by^2 + cy + 1)(25y^4 - ay^3 + by^2 - cy + 1)$ 的形式

从而令 $p(5y^2) = (25y^4 + ay^3 + by^2 + cy + 1)(25y^4 - ay^3 + by^2 - cy + 1)$

于是 $p(5y^2) = 5^4y^8 + (50b - a^2)y^6 + (50 - 2ac + b^2)y^4 + (2b - c^2)y^2 + 1$

$\therefore 5^4y^8 + 5^3y^6 + 5^2y^4 + 5y^2 + 1 = 5^4y^8 + (50b - a^2)y^6 + (50 - 2ac + b^2)y^4 + (2b - c^2)y^2 + 1$

据定理 1 得方程组

$$\begin{cases} 50b - a^2 = 125 \\ 50 - 2ac + b^2 = 25 \\ 2b - c^2 = 5 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 25 \\ b = 15 \\ c = 5 \end{cases}$$

$\therefore$ 满足 $Q(y) \cdot R(y) = p(5y^2)$ 的

$Q(y) = 25y^4 + 25y^3 + 15y^2 + 5y + 1$

$R(y) = 25y^4 - 25y^3 + 15y^2 - 5y + 1$

证毕.

例 5 (第 57 届莫斯科数学奥林匹克赛题) 是否存在这样的实系数多项式 $p(x)$:它具有负系数,而对于 $n > 1$, $p^n(x)$ 的系数全是正的?

解:存在!

例如 整系数多项式

$$\begin{aligned} p(x) &= 10(x^3 + 1)(x + 1) - x^2 \\ &= 10x^4 + 10x^3 - x^2 + 10x + 10 \end{aligned}$$

具有负系数,并且

$$\begin{aligned} p^2(x) &= x^4 + 100(x^3 + 1)^2(x + 1)^2 - 20x^2(x^3 + 1)(x + 1) \\ &= x^4 + 20(x^3 + 1)[5(x^3 + 1)(x + 1)^2 - x^2(x + 1)] \\ &= x^4 + 20(x^3 + 1)(5x^5 + 10x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 10x + 5) \text{ 的系数全是正的,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^3(x) &= 1000(x^3 + 1)^3(x + 1)^3 - 300x^2(x^3 + 1)^2(x + 1)^2 + 30x^4 \cdot (x^3 + 1)(x + 1) - x^6 \\ &= 100(x^3 + 1)^2(x + 1)[10(x^3 + 1)(x + 1)^2 - 3x^2(x + 1)] - x^6 + 30x^4(x^3 + 1)(x + 1) \\ &= 100(x^3 + 1)^2(x + 1)(10x^5 + 20x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 20x + 1) - x^6 + 30x^4(x^3 + 1)(x + 1) \\ &= Q_1(x) - x^6 + Q_2(x) \end{aligned}$$

$\because Q_1(x)$ 中的 x^6 的系数不小于 1000

$\therefore p^3(x)$ 的系数也全是正的

又当 $k \geqslant 2$ 时,有

$$p^{2k}(x) = (p^2(x))^k, p^{2k+1}(x) = (p^2(x))^{k-1} \cdot p^3(x)$$

所以,对一切 $n > 1$, $p^n(x)$ 的系数全是正的. 证毕

【评注】

(1) 这类存在性问题,要设法先找到的一个满足条件的多项式.(若找不到,也应从反面证明不存在),对具有情况进行验证.

(2) 有了具有验证之后,用数学归纳法进行归纳证明.

例 6 求所求满足 $p(x^2) = p^2(x)$ 的多项式 $p(x)$

解:如果 $p(x)$ 为常数 a,则 $a = p(x^2) = p^2(x) = a^2$,即 $a^2 = a$, $\therefore a = 0$ 或 $a = 1$

设 $\deg p(x) = n \geqslant 1$

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 (a_n \neq 0)$

于是 $p(x^2) = a_nx^{2n} + a_{n-1}x^{2(n-1)} + \cdots + a_1x^2 + a_0$

$p^2(x) = a_n^2x^{2n} + \cdots + a_0^2$

比较这两个多项式的首项系数,得 $a_n = a_n^2$

$\because a_n \neq 0, \therefore a_n = 1$

假设 $f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \neq 0$,则 $p(x) = x^n + f(x)$

设 $\deg f(x) = k, f(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (a_k \neq 0)$

比较 $p(x^2) = a_nx^{2n} + a_kx^{2k} + \cdots + a_1x^2 + a_0$

与

$$p^2(x) = x^{2n} + 2x^n(a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0) + (a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0)^2$$
$$= x^{2n} + 2a_kx^{n+k} + \cdots + a_0^2$$

的 x^{n+k} 的系数,得 $2a_k = 0, \therefore a_k = 0$,矛盾.

所以 $f(x) = 0$ 故 $p(x) = x^n$

例 7 (1986.全国高中数学联赛)已知:实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$,满足 $a_{i-1} + a_{i+1} = 2a_i (i = 1,2, \cdots)$,求证:对任何自然数 n,

$$p(x) = a_0C_n^0(1-x)^n + a_1C_n^1x(1-x)^{n-1} + a_2C_n^2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x) + a_nC_n^nx^n$$

是 x 的一次多项式(注:数列 $\{a_i\}$ 不为常数列)

证:已知条件改写成:$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i (i = 1,2,\cdots)$,这表明 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是以 $a_1 - a_0$ 为公差的等差数列,其通项公式为:

$$a_i = a_0 + i(a_1 - a_0) \qquad (i = 1,2,\cdots),$$

那么,

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0C_n^0(1+x)^n + [a_0 + 1\cdot(a_1-a_0)]C_n^1x(1-x)^{n-1} + [a_0 + 2\cdot(a_1-a_0)]C_n^2x^2(1-x)^{n-2} \\
&\quad + \cdots + [a_0 + n(a_1 - a_0)]C_n^nx^n \\
&= a_0[C_n^0(1+x)^n + C_n^1x(1-x)^{n-1} + \cdots + C_n^nx^n] \\
&\quad + (a_1 - a_0)[1\cdot C_n^1x(1-x)^{n-1} + 2\cdot C_n^2x^2(1-x)^{n-2} + \cdots + n\cdot C_n^nx^n] \\
&= a_0[(1-x)+x]^n + (a_1-a_0)\cdot nx[(1-x)^{n-1} + C_{n-1}^1x\cdot(1-x)^{n-2} + \cdots + x^{n-1}] \\
&= a_0 + (a_1-a_0)nx[(1-x)+x]^{n-1} \\
&= a_0 + (a_1-a_0)nx \\
&= [(a_1-a_0)n]x + a_0
\end{aligned}$$

因为 $\{a_i\}$ 不是常数列,所以公差 $a_1 - a_0 \neq 0$,所以 $(a_1 - a_0)n \neq 0$,所以 $p(x)$ 是一次多项式.

例 8 (1990.巴尔干数学奥林匹克竞赛题)研究由等式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n} = (x + 2x^2 + \cdots + nx^n)^2 \qquad ①$$

所确定的多项式,证明:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$$

证:先计算系数 a_k,比较 ① 两端 k 次项的系数,得

$$\begin{aligned}
a_k &= 1\cdot(k-1) + 2\cdot(k-2) + \cdots + (k-1)\cdot 1 \\
&= k(1+2+\cdots+k) - (1^2+2^2+\cdots+k^2) \\
&= k\cdot\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
&= \frac{(k+1)k(k-1)}{6} = C_{k+1}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=0}^{n} a_k &= a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\
&= 0 + 0 + C_3^3 + C_4^3 + \cdots + C_{n+1}^3 \\
&= C_{n+2}^4
\end{aligned}$$

在 ① 中令 $x=1$,得

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n})$$

$$= (1+2+\cdots+n)^2 = \left[\frac{n(k+1)}{2}\right]^2$$

$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$

$$= \sum_{i=0}^{2n} a_i - \sum_{k=0}^{n} a_k = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - C_{n+2}^4$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}$$

$$= \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$$

例 9 (第 5 届莫斯科数学奥林匹克试题) 设 $f(x), g(x) \in 2[x]$, $f(x)\cdot g(x)$ 是偶系数多项式,但不是所有系数都是 4 的倍数,求证:$f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个的系数全是偶数,另一个至少有一个系数是奇数.

证: 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的系数中都有奇数,用 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 分别表示由 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中所有系数为奇数的单项组成的多项式,则

$$f(x) \equiv f_1(x) \pmod 2,\ g(x) \equiv g_1(x) \pmod 2$$

由已知,有

$$f(x)\cdot g(x) \equiv 0 \pmod 2,$$

所以 $f(x)\cdot g(x) \equiv f_1(x)\cdot g_1(x) \equiv 0 \pmod 2$

由此可知,$f_1(x)g_1(x)$ 的所有系数均为偶数,但由假设可得 $f_1(x)g_1(x)$ 的最高次项的系数必为奇数,矛盾,故 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个的系数全是偶数.

假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是偶系数,由多项式乘法可知,

$$f(x)\cdot g(x) \equiv 0 \pmod 4$$

即 $f(x)\cdot g(x)$ 的所有系数均是 4 的倍数,与已知矛盾.这就证明了 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个至少有一个系数是奇数.

例 10 设 $a \geqslant 3$, $p(x)$ 是实系数多项式,$\deg p(x) = n$,求证:

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n+1} |a^i - p(i)| \geqslant 1$$

证明: 由于题目涉及到函数 $f(x) = a^x - p(x)$ 在 $n+2$ 个连续整数 $x = 0,1,\cdots,n,n+1$ 的值,我们希望对 $f(x)$ 运用差分公式作估计来解决本题,

事实上,依定义有

$$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = (a-1)a^x$$

$$\Delta^2 a^x = (a-1)\Delta a^x = (a-1)^2 a^x$$

$$\vdots$$

$$\Delta^{n+1} a^x = (a-1)^{n+1} a^x$$

故 $\Delta^{n+1} a^x |_{x=0} = (a-1)^{n+1}$,于是,由定理 5 的(1)得

$$\Delta^{n+1} f(0) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k [a^k - p(k)]$$

又 $\Delta^{n+1} f_0 = \Delta^{n+1} a^x |_{x=0} - \Delta^{n+1} p(0) = (a-1)^{n+1}$

故 $(a-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k [a^k - p(k)]$

反设 $\max_{0\leqslant i\leqslant n+1} \{|a^i - p(i)|\} < 1$,即对一切 $i = 0,1,\cdots,n+1$, $|a^i - p(i)| < 1$,从而由 $a \geqslant 3$ 得

$$2^{n+1} \leqslant (a-1)^{n+1} < \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = 2^{n+1},\text{矛盾}.$$

故 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1}|a^i-p(i)|\geqslant 1$

例 11 (2000.第41届IMO中国队选拔赛试题二)给定正整数 k,m,n,满足 $1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$,试求:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{1}{n+k+i}\cdot\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}$$

的值,并写出推算过程.

【分析】 观察题中式子形式,知道通过构造多项式,运用"插值"或"差分"的方法来求解.

解法一:作多项式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix(x+1)\cdots(x+i-1)(x+i+1)\cdots(x+n)$$
$$-(x-m-1)\cdots(x-m-n)$$

可恰当选取系数 $a_i(0\leqslant j\leqslant n)$,使得 $f(x)\equiv 0$

注意到 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式,因此 $f(x)\equiv 0$ 当且仅当 $f(x)$ 有 $n+1$ 个根 $0,-1,-2,\cdots,-n$.于是,当 $0\leqslant i\leqslant n$ 时应有

$$\begin{aligned}0&=f(i)\\&=a_i(-i)(-i+1)\cdots(-i+i-1)(-i+i+1)\cdots(-i+n)\\&\quad-(-i-m-1)\cdots(-i-m-n)\\&=(-1)^ii!(n-i)!a_i-(-1)^n\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!}\end{aligned}$$

即 $a_i=(-1)^{mi}\dfrac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}$

从而,我们得到了代数恒等式

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}x(x+1)\cdots(x+i-1)\cdot(x+j+1)\cdot\cdots\cdot(x+n)$$
$$=(x-m-1)\cdot\cdots\cdot(x-m-n)$$

特别地,在上式中取 $x=n+k$,由 $1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$,可知 $m+1\leqslant n+k\leqslant m+n$,故此时等式右端为0,于是有

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}\frac{1}{n+k+i}\cdot\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}\cdot k(k+1)\cdots(n+k+i-1)\cdot(n+k+i)(n+k+i+1)\cdots(2n+k)=0$$

整理约去与 i 无关的因子后即得原式,故原题的答案为0

解法二:

设 $g(x)=\dfrac{(x+m+1)(x+m+2)\cdots(x+m+n)}{x+n+k}$

由 $1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$ 可知,$m+1\leqslant n+k\leqslant m+n$,因此,$g(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式.

由差分公式可写出 $g(x)$ 在0点的 n 次差分等于

$$\begin{aligned}\Delta^ng(0)&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^iC_n^ig(i)\\&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!}\cdot\frac{1}{n+k+i}\end{aligned}$$

而 $n-1$ 次多项式的 n 次差恒等于0,故

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}\cdot\frac{1}{n+k+i}=\frac{\Delta^ng(0)}{n!}=0$$

例 12 证明 $f(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{12}x^3-\frac{25}{24}x^2+\frac{11}{12}x+1$ 是整值多项式.

证明:将 $f(x)$ 表示为差分多项式的代数和,由于 $f(x)$ 的最高次数是4,首项为$\frac{1}{24}$

考虑 $f(x)-\binom{x}{4}=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{6}x+1\equiv f_1(x)$

类似地，考虑

$$f_1(x)-2\binom{x}{3}=-\frac{1}{2}(x^2-x)+1=-\binom{x}{2}+1$$

于是 $f(x)=\binom{x}{4}+2\binom{x}{3}-\binom{x}{2}+1$，它显然是一个整值多项式.

一般地，对 n 次多项式 $f(x)$，我们可适当选择 b_n，使 $f(x)-b_n\binom{x}{n}$ 为 $n-1$ 次多项式.

如此下去，事实上每一个 n 次多项式均可表示为 $f(x)=b_n\binom{x}{n}+b_{n-1}\binom{x}{n-1}+\cdots+b_1\binom{x}{1}+b_0$，其中 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 为常数. 显然，当 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 都为整数时，$f(x)$ 为整值多项式，但反过来是否成立呢？

例 13 已知 $f(x)=x^2+px+q$，求证：$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$

证明：考虑拉格朗日插值公式

取 x_0,x_1,x_2，依次为 1,2,3 有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}\cdot f(1)+\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}\cdot f(2)+\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}\cdot f(3)\\&=\frac{1}{2}(x-2)(x-3)f(1)-(x-1)(x-3)f(2)+\frac{1}{2}(x-1)(x-2)f(3)\equiv x^2+px+q\end{aligned}$$

比较上式两边 x^2 的系数，得 $\frac{1}{2}f(1)-f(2)+\frac{1}{2}f(3)=1$

所以
$$\begin{aligned}1&\leqslant\frac{1}{2}|f(1)|+|f(2)|+\frac{1}{2}|f(3)|\\&\leqslant\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)\max\{|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|\}\end{aligned}$$

所以 $\max\{|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|\}\geqslant\frac{1}{2}$

更一般地，我们有

例 14 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n(a_n\neq0)$，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 两两不同，则 $n+1$ 个数 $|f(x_0)|$，$|f(x_1)|,\cdots,|f(x_n)|$ 中至少有一个不小于

$$\frac{|a_n|}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}\text{，其中 } a_i=\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x_i-x_j)^{-1}$$

证明：由 *Lagrange* 插值恒等式，得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_if(x_i)\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x-x_i)\equiv a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

比较上式 x^n 的系数，得 $a_n=\sum_{i=1}^{n}a_if(x_i)$

所以 $|a_n|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|f(x_i)|\leqslant(\sum_{i=1}^{n}|a_i|)\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\{|f(x_i)|\}$

所以 $\max\{|f(x_i)|\}\geqslant\frac{|a_n|}{\sum_{i=0}^{n}|a_i|}$

特别地，我们有，设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，其中 $|a_n|=1$，则 $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\{|f(k)|\}\geqslant\frac{n!}{2^n}$

证明：令 $x_i=i,i=0,1,2,\cdots,n$

则 $a_i=\prod_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n}(i-k)^{-1}$

$$= \frac{1}{i(i-1)(i-2)\cdots 1\cdot[i-(i+1)]\cdot[i-(i+2)]\cdots[i-n]}$$

$$= (-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!i!} = \frac{(-1)^{n-i}}{n!}C_n^i$$

故 $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\{|f(k)|\} \geqslant \dfrac{|a_n|}{\sum\limits_{i=0}^{n}|a_i|} = \dfrac{n!}{\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i} = \dfrac{n!}{2^n}$

多项式与组合恒等式有着差密切关系,特别是许多组合恒等式的证明,往往要利用母函数方法,考虑多项式的有关系数而得到.有关内容在组合章节中有较多的讨论.

例 15 计算:$S = \sum\limits_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\dfrac{n(n-1)\cdots(n-(2r-1))}{(r!)^2}\cdot 2^{n-2r}$

解:先化简和的各项

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-(2r-1))}{(r!)^2}\cdot 2^{n-2r} = \frac{n!}{(n-2r)!(r!)^2}\cdot 2^{n-2r} = C_n^rC_{n-r}^r\cdot 2^{n-2r}$$

所以 $S = \sum\limits_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^rC_{n-r}^r2^{n-2r}$

考虑 $(1+x)^{2n} = (1+2x+x^2)^n = [1+x(x+2)]^n = \sum\limits_{r=0}^{n}C_n^rx^{n-r}(2+x)^{n-r}$

和式每一项中 x^n 的系数是 $C_n^r\cdot C_{n-r}^r\cdot 2^{n-r-r} = C_n^r\cdot C_{n-r}^r\cdot 2^{n-2r}$,所以 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数是:

$$\sum_{r=0}^{n}C_n^r\cdot C_{n-r}^r\cdot 2^{n-2r} \qquad (*)$$

因为 当 $r > \left[\frac{n}{2}\right]$ 时,$C_{n-r}^r = 0$

所以 $(*)$ 式 $= \sum\limits_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}C_n^rC_{n-r}^r2^{n-2r} = S$

所以 $S = (1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数 $= C_{2n}^n$

§1.3 针对性训练

A组

1. 设 $n \in \mathbf{N}$,求证:$x^n - \left(\frac{1}{x}\right)^n$ 可表示为 $x - \frac{1}{x}$ 的多项式的充要条件是 n 为奇数.

2. 设 $f(x), g(x), h(x)$ 为实系数多项式,且适合 $[f(x)]^2 = x[g(x)]^2 + x[h(x)]^2$,求证:$f(x) \equiv g(x) \equiv h(x) \equiv 0$

3. 求所有满足 $p(x^2) = [p(x)]^2$ 的多项式.

4. 设 k 是给定的正整数,且非零多项式 $f(x)$ 适合 $[f(x)]^k = f[f(x)]$,求 $f(x)$

5. 如果多项式 $p(x)$ 的所有系数都是 0,1,2,3 时,称之为"零许的",对于给定的自然数 u,求满足 $p(2) = n$ 的所有"零许的多项式"的个数.

6. 试求值

$p = (1-1997)(1-1997^2)\cdots(1-1997^{1997}) + 1997(1-1997^2)(1-1997^3)\cdots(1-1997^{1997}) + 1997^2(1-1997^3)\cdots(1-1997^{1997}) + 1997^3(1-1997^4)\cdots(1-1997^{1997}) + \cdots + 1997^{1996}(1-1997) + 1997^{1997}$

7. 设 M 是所有形如 $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbf{R}$,且当 $x \in [-1, 1]$ 时满足 $|p(x)| \leqslant 1$ 的多项式的集合,证明:必有某一个数 k,使得对所有 $p(x) \in M$,都有 $a \leqslant k$,并求最小的 k

8. 设 $p(x)$ 为 $2n$ 次多项式且满足

$p(0)=p(2)=\cdots=p(2n)=0$

$p(1)=p(3)=\cdots=p(2n-1)=2$

及 $p(2n+1)=-30$,求 n 及 $p(x)$

9. 对于给定的 n 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathrm{N}$, $n\geqslant 2$,记 $p_i=\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)$, $i=1,2,\cdots,n$,证明:对任意的 $k\in\mathrm{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$ 是整数.

10. 证明:存在正常数 c(与 n, a_i 无关),使得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2}\prod_{j=1}^{n}|x-a_j|\leqslant c^n\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\prod_{j=1}^{n}|x-a_j|$$

对任意正整数 n 及任意 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathrm{R}$ 均成立.

B 组

1. 证明:当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$ 时,k 次多项式

$f(x)=1-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+\cdots+(-1)^kC_n^kx^k$ 的值总是正的.

2. 证明下面恒等式:

(1) 当 n 为偶数时,

$(C_n^0)^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-(C_n^3)^2+\cdots+(-1)^k(C_n^k)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_n^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n}C_{n-k}^{m-n}\cdot C_k^n=C_{n+1}^{m+1}(k\leqslant m\leqslant n)$

3. 证明:整系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等的充要条件是 $f(t)=g(t)$,其中 t 是大于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的所有系数绝对值 2 倍的某一整数.

4. 设 $a\geqslant 3$,多项式 $p(x)$ 的次数为 n,求证:$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n+1}|a^i-p(i)|\geqslant 1$

5. 已知多项式 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n}a_kx^k$ 与多项式 $g(x)=(\sum\limits_{k=0}^{m}k\,x^k)^2$ 恒等,试求 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$

6. 设 $n\geqslant r\geqslant 0,n\geqslant m\geqslant 0$,则 $\sum\limits_{k\geqslant 0}C_{n-m}^{k}\cdot C_{m}^{r-k}=C_n^r$

7.(1991.第 6 届数学奥林匹克国家集训队选拔试题)设实系数多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根为实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其中 $n\geqslant 2$,求证:对于 $x>\max(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,

$$f(x+1)\geqslant\frac{2n^2}{\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}}$$

8.(第 2 届美国数学邀请赛试题)已知

$$\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1,$$

求 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的值.

9.(1983.全国高中数学联赛试题)已知函数 $f(x)=ax^2-c$,满足 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1,-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,那么,$f(3)$ 应满足(　　).

(A) $-7\leqslant f(3)\leqslant 26$

(B) $-4\leqslant f(3)\leqslant 15$

(C) $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$

(D) $-\frac{28}{3}\leqslant f(3)\leqslant \frac{35}{3}$

10.(IMO-15-3)设 a,b 都是实数,并且方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

至少有一个实根,试确定 a^2+b^2 的最小可能值.

11.(IMO-16-2)设 $p(x)$ 是一整系数非常数多项式,记方程 $[p(x)]^2=1$ 的整数根的个数为 $n(p)$,记多项式 $p(x)$ 的次数为 $\deg(p)$,试证:$n(p)-\deg(p)\leqslant 2$

第二章

多项式的除法

§2.1 知识要点与基本方法

1. 带余除法

定理 1 （带余除法定理）设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是多项式，且 $g(x) \neq 0$，那么存在惟一的一对多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$，使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x) \tag{①}$$

其中 $r(x) = 0$ 或者 $\deg r(x) < \deg g(x)$. $q(x)$ 叫做以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商，$r(x)$ 叫做余式.

定义 1：在①式中，当 $r(x) = 0$ 时，称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x) \times f(x)$，也称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，或 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式. 若 $r(x) \neq 0$，则称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记为 $g(x) \nmid f(x)$.

由定理 1 易证以下定理.

定理 2 （余数定理）多项式 $f(x)$ 除以 $x - a$ 所得余数为 $f(a)$

推论 1　$(x - a) \mid (f(x) - f(a))$

推论 2　若 $f(x) \in Z[x]$，a 与 b 是不同的整数，则 $(a - b) \mid (f(a) - f(b))$

由余数定理还可以得到以下重要定理：

定理 3 （因式定理）多项式 $f(x)$ 有因式 $x - a$ 的充要条件是 $f(a) = 0$

多项式整除的基本性质：

(1) 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid h(x)$，则 $f(x) \mid h(x)$

(2) 若 $h(x) \mid f(x)$，$h(x) \mid g(x)$，则 $h(x) \mid [f(x) \pm g(x)]$

(3) 若 $h(x) \mid f(x)$，则 $h(x) \mid f(x) \cdot g(x)$，$g(x)$ 为任意多项式

(4) 若 $f(x) \mid g(x)$，$g(x) \mid f(x)$，则 $f(x) = c \cdot g(x)$，其中 c 是不等于零的常数.

2. 多项式的分解

定义 2：一个次数大于零的多项式 $f(x)$，如果在数域 F 内除形如 λ 和 $\mu f(x)$（λ, μ 为非零数）的因式（称为 $f(x)$ 的平凡因式）外，无其它因式，则称 $f(x)$ 在 F 内不可约. 若 $f(x)$ 在 F 内除平凡因式外，还有其它因式，则称 $f(x)$ 在 F 内可约.

不可约多项式的一些重要性质：

(1) 如果多项式 $p(x)$ 不可约，而 $f(x)$ 是任一多项式，那么，或者 $(p(x), f(x)) = 1$，或者 $p(x) \mid f(x)$

(2) 如果多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积能被不可约多项式 $p(x)$ 整除，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中至少有一个被 $p(x)$ 整除

定理 4　数域 F 上的次数大于零的多项式 $f(x)$，如果不计零次因式的差异，那么 $f(x)$ 可以惟一地分解为以下形式：

$$f(x) = a p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_t^{k_t}(x) \tag{②}$$

其中 a 是 $f(x)$ 的最高次项的系数，$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 是首项系数为 1 的互不相等的不可约多项式，并且 $p_i(x)(i = 1, 2, \cdots, t)$ 是 $f(x)$ 的 k_i 重因式.

【注】　其中数域 F 是指 Q，或 R，或 C.

关于整系数多项式的分解问题.

定义 3:设整系数多项式 $f(x)=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j$ 各项系数的最大公约数等于 1,即 $(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m)=1$:则称 $f(x)$ 为本原多项式.

引理 设 $f(x)$,$g(x)$ 和 $h(x)$ 都是整系数多项式并且 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$,如果质数 p 整除多项式 $h(x)$ 的所有系数,那么至少有 $f(x)$ 与 $g(x)$ 这两个多项之一,其所有的系数也都能被 p 整除.

推论 本原多项式的乘积仍然是一个本原多项式.

定理 5 如果整系数多项式 $f(x)$ 在有理系数范围内可约,那么,它在整系数范围内也可约.

以上论断的等价陈述是:如果整系数多项式 $f(x)$ 在整系数范围内不可约,那么它在有理数范围内也不可约.

3. 艾森斯坦判别法及其推广

关于不可约整系数多项式,艾森斯坦(*Eisenstein*)提出了一个有用的判别法.

定理 6 (艾森斯坦判别法)设

$$f(x)=C_nx^n+C_{n-1}x^{n-1}+\cdots+C_0 \quad ③$$

是整系数多项式,并且对于质数 p 满足以下条件

(i) $p\nmid c_n$

(ii) $p\mid C_j \quad (j=0,1,\cdots,n-1)$

(iii) $p^2\mid C_0$

则 $f(x)$ 在整系数多项式范围内不可约.

由此定理容易证明:

在有理数域上存在任意次的不可约多项式.

事实上,对于任意给定的正整数 n,多项式 $f(x)=x^n+2$,可以找到质数 2 满足定理 6 的条件,故 $f(x)$ 在 Q 上不可约.

对艾森斯坦判别法可作如下推广:

定理 7 (艾森斯坦判别法的推广)设

$$f(x)=C_nx^n+C_{n-1}x^{n-1}+\cdots+C_0 \quad ④$$

是整系数多项式,并设存在质数 p 和自然数 $m\leqslant n$,使得

(i) $p\nmid C_n$

(ii) $p\mid C_j \quad (j=0,1,\cdots,m-1)$

(iii) $P^2\mid C_0$

则 $f(x)$ 具有次数 $\geqslant m$ 的(整系数)不可约因式.

4. 化零多项式与最低化零多项式

在本小节中,仍约定多项式的系数的取值范围在集合 Q,R 或者 C 中的某一个.

定义 4:设 ξ 是一个复数,若非零多项式 f 使得 $f(\xi)=0$,则称 f 为 ξ 的化零多项式;在指定的系数范围内,次数最低且首项系数为 1 的化零多项式被称为最低化零多项式(简称最低多项式).

【注】 这里提到的概念与系数的指定范围有紧密的关系,例如,在有理系数范围内,$\sqrt{2}$ 的最低化零多项式是 x^2-2;而在实系数范围内,$\sqrt{2}$ 的最低化零多项式是 $x-\sqrt{2}$.

定理 8 设 ξ 是给定的复数,则在指定的系数范围内,ξ 的最低多项式 $f(x)$ 能够整除 ξ 的任何化零多项式 $g(x)$.

定理 9 设 ξ 是给定的复数,f 是 ξ 的化零多项式并且首项系数等于 1,在指定系数范围内,f 为 ξ 最低多项式的充要条件是:f 不可约.

5. 最大公因式

定义 5:如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同时被 $d(x)$ 整除,那么 $d(x)$ 叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,

如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式,并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有公因式都整除 $d(x)$,则 $d(x)$ 叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

【注】 两个不全为零的多项式的最大公因式是不唯一的,它们之间只有常数因子的差异.这时,我们约定,最大公因式是指首项系数为 1 的那一个,这样,两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是惟一的,记为 $(f(x),g(x))$.

两个多项式的最大公因式,有以下重要定理:

定理 10 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$,那么存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$,使以下等式成立:

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x) \quad ⑤$$

定义 6:如果两个多项式除零次多项式外无其他的公因式,那么就称这两个多项式互素.

显然,$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow (f(x),g(x))=1$

定理 11 两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是,存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$,使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1 \quad ⑥$$

互素多项式的一些重要性质:

(1) 若 $(f(x),h(x))=1,(g(x),h(x))=1$,则 $(f(x)-g(x),h(x))=1$

(2) 若 $h(x)\mid f(x)g(x),(h(x),f(x))=1$,则 $h(x)\mid g(x)$

(3) 若 $g(x)\mid f(x),h(x)\mid f(x),(g(x),h(x))=1$,则 $g(x)h(x)\mid f(x)$

§2.2 赛 题 精 讲

例 1 求 $x^{1986}-1$ 除以 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ 所得的余式

解: $\because x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore (x^2+x+1)\mid(x^3-1)$

又 $\because x^{1986}-1=(x^3)^{662}-1=(x^3-1)p(x)$

$\therefore (x^3-1)\mid(x^{1986}-1)$

$\therefore (x^2+x+1)\mid(x^{1986}-1)$

由此可知,$x^{1986}-1$ 除以 $(x^2+1)(x^2+x+1)$ 所得余式 $r(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$.这里 $a,b\in\mathrm{R}$,

于是 $x^{1986}-1=(x^2+1)(x^2+x+1)g(x)+(x^2+x+1)(ax+b)$

令 $x=i$,得

$-2=0+i(ai+b)=-a+bi$

比较两端的实部和虚部,得

$a=2,b=0$

故所求余式为 $r(x)=2x(x^2+x+1)$

例 2 (2000.第 31 届西班牙数学奥林匹克题 1)设 a,b,c 为互异的实数,$P(x)$ 为实系数多项式,如果 $P(x)$ 除以 $x-a$ 余式为 a,$P(x)$ 除以 $x-b$ 余式为 b,$P(x)$ 除以 $x-c$ 余式为 c,求 $P(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的余式.

解: $P(x)$ 除以 $x-a$ 余式为 a,依题意有 $P(a)=a,P(b)=b$ 及 $P(c)=c$

设 $R(x)$ 为 $P(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 的余式,则 $R(x)$ 的次数 $\leqslant 2$ 且 $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)Q(x)+R(x)$.这里 $Q(x)$ 为多项式.

注意到 $R(a)=P(a)=a$,类似 $R(b)=b$ 和 $R(c)=c$.这样多项式 $R(x)-x$ 的次数 $\leqslant 2$ 且有三个互不相同的零点 a,b,c.因此 $R(x)-c$ 是一个零多项式,所以 $R(x)=x$

例 3 设多项式 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d\in\mathrm{Z}[x]$,并且 $bd+cd$ 是奇数,证明:$f(x)$ 不能分解为

两个整系数多项式的乘积.

证:因为 $bd+cd=(b+c)d$ 是奇数,所以 d 与 $b+c$ 均为奇数,从而 $f(1)=1+b+c+d$ 是奇数.假设

$$f(x)=(x+p)(x^2+qx+r)(p,q,r\in \mathbf{Z}) \tag{⑥}$$

比较两端的常数项,得 $pr=d$

因为 d 是奇数,所以 p 是奇数,从而 $1+p$ 是偶数.

在 ⑥ 中令 $x=1$,得

$$f(1)=(1+p)(1+q+r)$$

是偶数,矛盾,故 $f(x)$ 不能分解为两个整系数多项式的乘积.

例 4 (1962.波兰数学竞赛题)证明 $f(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$ 在整数范围内不可约,

证:存在素数 $p=3$,3 不整除首项系数 1,3 整除 $f(x)$ 的其余各项的系数,但 3^2 不能整除常数项 -6,由艾森斯坦判别法知,$f(x)$ 在有理数范围内不可约,从而 $f(x)$ 在整数范围内不可约.

例 5 (IMO-34-1)设 n 是大于 1 的整数,求证 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ 在整系数多项式范围内不可约,

证:倘若 $f(x)$ 在整系数多项式范围内可约,则根据艾森斯坦判别法之推广可以判定

$$f(x)=(x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+\alpha)\cdot(x+\beta)$$

比较系数可知

$\alpha\beta=3,\beta=\pm1$ 或 ±3

另一方面,$-\beta$ 必须是 $f(x)$ 的根.但直接验证可知

$f(\mp1)\neq0,f(\mp3)\neq0$

因此,关于 $f(x)$ 可约的假定不可能成立.

例 6 设 p 为质数,$N=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_p$ 为自然数集的一个 p——分划.证明:在 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 中存在一个集合 A,使得存在一个 $P-1$ 次的不可约多项式 $f(x)$,且 $f(x)$ 系数属于 A

证明:由于自然数集 N 中模 P^2 余 1 的数有无穷多个,于是存在某个集合包含有无穷多个这样性质的数,取其中 p 个数

$a_0p^2+1,a_1p^2+1,\cdots,a_{p-1}p^2+1$

令 $f(x)=(a_{p-1}p^2+1)x^{p-1}+\cdots+(a_1p^2+1)x+a_0p^2+1$,则 $f(x)$ 为 $p-1$ 次多项式,下面证明 $f(x)$ 是不可约的.

因为
$$\begin{aligned}f(x)&=a_{p-1}p^2x^{p-1}+\cdots+a_1p^2x+a_0p^2+x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1\\&=p^2g(x)+\frac{x^{p-1}}{x-1}\end{aligned}$$

$g(x)=a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_1x+a_0$

所以 $f(x+1)=p^2g(x+1)+\dfrac{(x+1)^p-1}{x}=p^2g(x+1)+(x^{p-1}+px^{p-2}+\cdots+p)$

易知 $f(x+1)$ 的系数满足:首项系数不能被 p 整除,其余项系数可以被 p 整除,但 p^2 不能整除常数项,于是 $f(x+1)$ 不可约,故 $f(x)$ 不可约.

例 7 设 p 为素数,$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+p\in \mathbf{Z}[x],n>1$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|<p$,证明:$f(x)$ 在 Z 上不可约.

证明:首先证明 $f(x)=0$ 的根之模大于 1,设 $f(x_0)=0$,若 $|x_0|\leqslant1$,则 $p=|a_nx_0{}^n+a_{n-1}x_0{}^{n-1}+\cdots+a_1x_0|\leqslant|a_n|+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|$ 与假设矛盾.

若 $f(x)=g(x)h(x),g(x),h(x)\in \mathbf{Z}[x]$,则 $p=|f(0)|=|g(0)||h(0)|,g(0),h(0)$ 为整数,不妨设 a 为 $g(x)$ 的首项系数,则 $\dfrac{g(0)}{a}$ 为所有根之积,于是 $\left|\dfrac{g(0)}{a}\right|>1$,从而 $|g(0)|>1$,同理 $|h(0)|>1$,故 $p=|g(0)|\cdot|h(0)|$ 与 p 为素数矛盾.

例 8 找出满足下列命题的所有正整数 k：

若 $F(x)$ 是整系数多项式，且满足条件，对任意 $c \in \{0,1,\cdots,k+1\}$，$0 \leqslant F(c) \leqslant k$，则 $F(0) = F(1) = \cdots = F(k+1)$

解：此命题当且仅当 $k \geqslant 4$ 时成立，我们先证明它对于任意的 $k \geqslant 4$ 时都成立.

对于满足给定条件的整系数多项式 $F(x)$，首先，由于 $F(k+1) - F(0)$ 是 $k+1$ 的倍数且其绝对值不超过 k，所以 $F(k+1) = F(0)$，因此 $F(x) - F(0) = x(x-k+1)G(x)$，其中 $G(x)$ 是整系数多项式，因而

$$k \geqslant | F(c) - F(0) | = c(k+1-c) | G(c) | \quad ⑦$$

对于任意的 $c \in \{1,2,\cdots,k\}$ 都成立.

因为不等式 $c(k+1-c) > k$ 等价于 $(c-1)(k-c) > 0$，因而，它对任意的 $c \in \{2,3,\cdots,k-1\}$ 都成立，注意到当 $k \geqslant 3$ 时，集合 $\{2,3,\cdots,k-1\}$ 非空，并且对这一集合中任意 c，⑦ 式表明 $| G(c) | < 1$，因为 $G(c)$ 是整数，所以 $G(c) = 0$，故 $2,3,\cdots,k-1$ 是 $G(x)$ 的根，于是有因式分解.

$$F(x) - F(0) = x(x-2)(x-3)\cdots(x-k+1)(x-k-1) \cdot H(x) \quad ⑧$$

其中 $H(x)$ 也是整系数多项式.

为证明结论，还须证明 $H(1) = H(k) = 0$

这很显然，因为，对于 $c = 1$ 和 $c = k$，等式 ⑧ 都表明

$$k \geqslant | F(c) - F(0) | = (k-2)! \cdot k \cdot | H(c) |$$

由于 $k \geqslant 4$ 时，有 $(k-2) > 1$，因此 $| H(c) | < 1$，于是 $H(c) = 0$

至此，我们证明了题中所给的命题对于任意的 $k \geqslant 4$ 都成立，但上述证明也为更小的 k 值的情况提供了线索，更确切地讲，若多项式 $F(x)$ 满足所给的条件，那么，对于任意的 $k \geqslant 1$，0 和 $k+1$ 都是 $F(x) - F(0)$ 的根；当 $k \geqslant 3$ 时，2 必定也是 $F(x) - F(0)$ 的根.

据此，不难举出证明命题对于 $k = 1$，$k = 2$ 或 $k = 3$ 不成立的反例，这些反例是：

$F(x) = x(2-x)$，对于 $k = 1$

$F(x) = x(3-x)$，对于 $k = 2$

$F(x) = x(4-x)(x-2)^2$，对于 $k = 3$

例 9 （1995.第 36 届 IMO 题 6）设 p 是一个奇质数，考虑集合 $\{1,2,\cdots,2p\}$ 的满足以下两条件的子集 A：

(i) A 恰有 p 个元素

(ii) A 中所有元素之和可被 p 整除

试求所有这样的子集 A 的个数

【分析】 这是一道组合题目，题目的叙述丝毫不涉及多项式，许多解决也几乎不涉及任何多项式知识.但是，巧妙地运用多项式代数知识，可以作出该题的漂亮解答.

解：约定记 $S = \{1,2,\cdots,2p\}$

我们取 p 次单位根 $\xi = e^{i\frac{2\pi}{p}}$，然后考察多项式 $\prod_{j=1}^{2p}(x - \xi^j) = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1$

比较 x^p 的系数得到

$$2 = \sum_{(i_1,\cdots,i_p)\in S} \xi^{i_1+\cdots+i_p} = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \xi^j \quad ⑨$$

上式的后一步是按照 $i_1 + \cdots + i_p$ 的模 p 的余数集项，由 ⑨ 式进一步得到

$$(n_0 - 2) + \sum_{j=1}^{p-1} n_j \xi^j = 0 \quad ⑩$$

不可约多项式

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$$

是 ξ（在有理数范围内）的最低化零多项式.而多项式

$$g(x)=(n_0-2)+\sum_{j=1}^{p-1}n_jx^j$$

也是 ξ 的化零式,因此 $f(x)\mid g(x)$,但这两多项式的次数相同,所以存在常数 λ,使得

$g(x)=\lambda f(x)$

由此得出

$$n_0-2=n_1=n_2=\cdots=n_{p-1} \quad ⑪$$

利用关系 $\sum_{j=0}^{p-1}n_j=C_{2p}^{p}$,又得到

$$(n_0-2)+n_1+n_2+\cdots+n_{p-1}=C_2^p p-2 \quad ⑫$$

由 ⑪ 和 ⑫ 最后求得

$$n_0=\frac{1}{p}(C_{2p}^{p}-2)+2$$

这就是所求的答案(满足条件(i) 和(ii) 的子集 A 的个数)

例 10 设 $d=(m,n)$,证明:$x^d-1=(x^n-1,x^m-1)$

证明:设 $m=dm_1,n=dn_1,(m_1,n_1)=1$

则 $x^m-1=(x^d)^{m_1}-1=(x^d-1)(x^{d(m_1-1)}+\cdots x^d+1)$

$x^n-1=(x^d)^{n_1}-1=(x^d-1)(x^{d(n_1-1)}+\cdots+x^d+1)$

从而$(x^d-1)\mid(x^m-1),(x^d-1)\mid(x^n-1)$

即 x^d-1 为 x^n-1 与 x^m-1 的公因式.

再设 $\varepsilon_i{}^m((f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{k-1}(x)),f_k(x))$ 由$(m_1,n_1)=1$,则存在 t,s 使 $tm_1+sn_1=1$

若 $\varepsilon_i^n=1$,则$(\varepsilon_i^m)^t(\varepsilon_i{}^n)^s=\varepsilon_i{}^{dm_1x}\varepsilon_i{}^{dn_1s}=\varepsilon_i{}^{d(m_1t+n_1s)}=\varepsilon_i{}^d=1$,这表明 x^n-1 与 x^m-1 的因式必为 x^d-1 的因式.故

$$x^d-1=(x^n-1,x^m-1)$$

例 11 证明:$\log_a x$ 不能表示为$\frac{f(x)}{g(x)}$ 的形式,其中 $f(x)\in R[x],g(x)\in R[x],a\neq1,a>0$

证明:若不然,设 $\log_a x=\frac{f(x)}{g(x)}$,则$\frac{f(x^2)}{g(x^2)}=2\cdot\log_a x=\frac{2f(x)}{g(x)}$

即 $f(x^2)\cdot g(x)=2f(x)\cdot g(x^2)$

不妨设$(f(x),g(x))=1$,则存在 $u(x),v(x)$ 使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$

从而

$$u(x^2)f(x^2)+v(x^2)g(x^2)=1$$

于是$(f(x^2),g(x^2))=1$

由 $f(x^2)\mid 2f(x)g(x^2)$,我们有 $f(x^2)\mid f(x)$,从而得到 $f(x)=C\neq0$

同理可得 $g(x)=C$ 为常数

故 $\log_a x$ 为常数,这是不可能的.

§2.3　针对性训练

A 组

1.（美国纽约，1973；比利时 1981）证明：对任意 $n \in \mathrm{N}^+$，多项式 $(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}$ 被多项式 x^2+x+1 整除.

2.（第 7 届加拿大数学竞赛试题）设 $k \in \mathrm{N}$，求一切实系数多项式 $P(x)$，使其满足 $P(P(x))=(P(x))^4$

3. 设 b、c、d 是整数，且 $bd+cd$ 为奇数，求证：x^3+bx^2+cx+d 不可能分解成两个整系数多项式的乘积.

4. 设多项式 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 和 $S(x)$ 满足

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5) \equiv (x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$$

证明：多项式 $P(x)$ 被多项式 $x-1$ 整除.

5. 给定两个不全为零的多项式 $f(x)$，$g(x)$，试证：在集合 $\{u(x)f(x)+v(x)g(x) \mid u(x),v(x)$ 为任意多项式$\}$ 中次数最低的多项式为 $f(x)$，$g(x)$ 的最大公因式.

6. 证明：$x(x+1)(2x+1)$ 能整除 $(x+1)^{2m}-x^{2m}-2x-1(m \in \mathrm{N})$

7.（1997. 民主德国）求所有满足

$$xp(x-1) \equiv (x-2)p(x) \quad x \in \mathrm{R} \text{ 的多项式}$$

8. 实系数多项式 $f(x)$ 被 x^2+1，x^2+2 除时余式分别为 $4x+4$，$4x+8$，求 $f(x)$ 被 $(x^2+1)(x^2+2)$ 除的余式.

B 组

1.(1975.美国纽约)求所有满足 $p(0)=0$ 且

$p(x)\equiv\frac{1}{2}(p(x+1)+p(x-1)),x\in\mathrm{R}$ 的多项式 $p(x)$

2.(1976.美国纽约)求所有满足$(x-1)P(x+1)-(x+2)P(x)\equiv 0,x\in\mathrm{R}$ 的多项式 $P(x)$

3. 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 和 $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是两个整系数多项式.如果乘积 $f(x)\cdot g(x)$ 的一切系数都是偶数,但不能全被 4 整除,证明:$f(x)$ 和 $g(x)$ 之一有全部偶系数,另一个至少有一个奇系数.

4. 设 $f(x)\in\mathrm{Z}[x]$,求证:不存在三个不同的整数 a,b,c,使得 $f(a)=b,f(b)=c,f(c)=a$ 同时成立.

5.(1953.苏联莫斯科)证明:多项式 $x^{200}y^{200}+1$ 不能表成一个 x 的多项式$f(x)$ 与一个 y 的多项式 $g(y)$ 的乘积 $f(x)g(y)$ 的形式.

6. 设多项式 $f(x),g(x),h(x),k(x)$ 满足

$$\begin{cases}(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0\\(x^2+1)k(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0\end{cases}$$

求证:$(x^2+1)\mid f(x),(x^2+1)\mid g(x)$

7. 试求 a,b 之值,使多项式

$f(x)=x^4+(2a+1)x^3+(a-1)^2x^2+bx+4$

可分解为两个首项系数为 1 的二次多项式 $p(x)$ 与 $Q(x)$ 之积,且

(1)$p(x)=0$ 有相异两实根 r,s

(2)$Q(r)=s,Q(s)=r$

8. 给定 n 个不同整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,试证:$2n$ 次整系数多项式 $f(x)=(x-a_1)^2\cdot(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 不可约.

第三章

多项式的根

§3.1 知识要点与基本方法

数域 F 上的一元 n 次方程,是指形如

$$f(x)=0 \quad ①$$

的方程,其中 $f(x)$ 是数域 F 上的一元 n 次多项式,若 F 中的数 α 适合 ①,则称 α 是方程 ① 在数域 F 中的根(或解).

方程 ① 的根也称多项式 $f(x)$ 的根,因此,多项式的根与方程 ① 的根这两个概念,常不加区分.

一、复系数一元多项式的根

1799 年,德国数学家高斯(Gauss)证明了一条多项式理论中极为重要的定理.

定理 1 (代数基本定理)任何 n 次($n\geqslant 1$)多项式至少有一个复数根.

推论 1 任何 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 有且有 n 个复根,这里规定 k 重根算 k 个根.

推论 2 (惟一分解定理)如果不考虑因子的顺序,则每一个非常数的复杂数多项式 $f(x)$ 可唯一分解为

$$f(x)=A(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$$

的形式,其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为多项式 $f(x)$ 的所有不同的复根,$m_1,m_2,\cdots,m_s$ 是它们的重数.

二、实系数一元多项式的根

对于实系数 n 次项式 $f(x)$,由代数基本定理,它最多有 n 个复根.

定理 2 实系数多项式 $f(x)$ 的虚根 α 和它的共轭虚根可成对出现.

定理 3 (惟一分解定理)实系数多项式 $f(x)$ 在实数范围内可惟一分解为

$$f(x)=A[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}\cdots[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s}\cdot(x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_t)^{r_t}$$

的形式,其中 $\alpha_1\pm\beta_1 i,\cdots,\alpha_s\pm\beta_s i$ 与 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 分别是 $f(x)$ 的所有不同的虚根和实根,$m_1,m_2,\cdots,m_s$,$r_1,r_2,\cdots,r_t$ 分别是它们的重数.

三、有理系数和整系数多项式的根

由于任何一个有理系数的一元 n 次方程均可化为整系数方程,任何一个关于有理根的等式也可以化为关于整数的等式.故我们借助于整系数多项式的性质以及整数的整除性来讨论有理系数和整系数方程的根.

定理 4 若既约分数 $\frac{r}{s}$ 是整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的根,则

(1)$r\mid a_0,s\mid a_n$

(2)$f(x)=\left(x-\frac{r}{s}\right)g(x)$,其中 $g(x)$ 是整系数多项式

(3)$f(x)=(sx-r)h(x)$,其中 $h(x)$ 是整系数多项式

四、韦达定理

定义:设 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 n 个未定元,k_i 是非负整数,$a_{k_1},a_{k_2}\cdots,a_{k_n}$ 是常数,形如

$f(x_1,x_2\cdots,x_n)=\sum\limits_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_1,k_2,\cdots,k_n}\cdot x_1^{k_0}\cdot x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的表达式积为 n 元多项式，式中的每一项称为单项式，$k_1+k_2+\cdots+k_n$ 称为该单项式的次数；f 中各单项式的最大次数，称为 f 的次数.

(1) 若 f 中各单项式的次数都是 m，则称 f 为 m 次齐次多项式；

(2) 若对任意 $i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$，在 f 中把 x_i 与 x_j 的位置交换，不改变 f，则称 f 为对称多项式，如 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 是三元三次齐次对称多项式；又如 $j_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 n 元 k 次齐次对称多项式，且专称为初等对称多项式，常见的初等对称多项式有

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\sigma_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_i x_j$$

$$\sigma_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_i x_j x_k$$

……

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$$

……

$$\sigma_n=\prod_{i=1}^{n}x_i$$

定理 5 （韦达定理）设方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,(a_n\neq 0)$ 有 n 个根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$（重根按重数计算），则有

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\text{（各根之和）}$$

$$\sigma_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_i x_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}\text{（各根两两乘积之和）}$$

$$\sigma_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_i x_j x_k=-\frac{a_{n-3}}{a_n}\text{（各根三个乘积之和）}$$

……

$$\prod_{i=1}^{n}x_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}\quad\text{（各根之积）}$$

定理 6 （牛顿公式）设 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式，约定 $\sigma_0=1$，又记等幂和 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k(k=0,1,\cdots)$

则 (1) 当 $k\geqslant n$ 时，有

$$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0$$

即 $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_iS_{k-1}=0$$

(2) 当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，有

$$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}-\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^k\sigma_kS_0=0$$

即 $$\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma_iS_{k-i}=0$$

五、实系数高次方程根的判别条件及其应用

首先，实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的判别式为 $\Delta=a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$，当两根 x_1,x_2 都是实数时，$\Delta\geqslant 0$；当 $\Delta<0$ 时，两根 x_1,x_2 不是实数，对于实系数高次方程，有如下定理.

定理 7 设实系数一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0(n>1,a_na_0\neq 0)$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 令

$\Delta_1 = (n-1)a_{n-1}^2 - 2n\, a_{n-2}a_n$

$\Delta_2 = (n-1)a_1^2 - 2n\, a_2 a_0$

则 (1) 当 $x_1, x_2\cdots, x_n$ 都是实数时，$\Delta_1 \geqslant 0$ 且 $\Delta_2 \geqslant 0$

(2) 当 $\Delta_1 < 0$ 或 $\Delta_2 < 0$ 时，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为实数

证明：事实上，由韦达定理有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1 &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ({x_i}^2 + {x_i}^2 - 2x_i x_j) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ({x_i}^2 + {x_j}^2) - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \\
&= (n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1} x_i x_j \\
&= (n-1)\Big[(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \Big] - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \\
&= (n-1)\Big[(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - 2n \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \Big] \\
&= (n-1)\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2n \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&= \frac{\Delta_1}{{a_n}^2}
\end{aligned}$$

故 $\Delta_1 = \mathrm{I}_1 \cdot {a_n}^2$

令 $y = \dfrac{1}{x}$，则原方程化为 $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} y + a_n = 0$，此方程的根为 $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \cdots, \dfrac{1}{x_n}$，类似地，有

$$\mathrm{I}_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_j}\right)^2 = \frac{\Delta_2}{{a_0}^2}$$

故 $\Delta_2 = {a_0}^2 \cdot \mathrm{I}_2$

所以，当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数时，$\Delta_1 = {a_n}^2 . \mathrm{I}_1 \geqslant 0$ 且 $\Delta_2 = {a_0}^2 \cdot \mathrm{I}_2 \geqslant 0$. 结论(1)成立.

由于结论(1)、(2)互为逆否命题，故结论(2)也成立. 证毕

六、关于多项式整除的一个判别法

定理 8 设 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个根互不相同，并且这些根都是另一个多项式 $g(x)$ 的根，则 $f(x) \mid g(x)$.

证明：作带余除法

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x)$$

则 $f(x)$ 所有的根也都是 $r(x)$ 的根. 但是，低于 n 次的非零多项式不能有 n 个根，所以 $r(x)$ 只能是零多项式. 证毕

【注】 以上未证明的定理，请看高等代数.

§3.2 赛题精讲

例1 设 $f(x)$ 为复系数 $2n+1$ 次多项式，若方程 $f(\overline{x})=\overline{f(x)}$ 有 $n+1$ 个模互不相等的虚数根，则 $f(x)$ 是实系数多项式.

证:设 $f(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}a_k x^k(a_{2n+1}\neq 0)$，$\alpha_0$ 为方程 $f(\overline{x})=\overline{f(x)}$ 的虚数根，则

$\sum_{k=0}^{2n+1}a_k\overline{\alpha_0}^k=\sum_{k=0}^{2n+1}\overline{a}_k\overline{\alpha}_0^k$，即 $\sum_{k=0}^{2n+1}(a_k-\overline{a}_k)\overline{\alpha_0}^k=0$ 两边同乘以虚数单位 i，得

$\sum_{k=0}^{2n+1}[(a_k-\overline{a}_k)i]\overline{\alpha_0}^k=0$

而 $(a_k-\overline{a}_k)i$ 是实数，故 $\overline{\alpha}_0$ 是实系数多项式

$$g(x)=\sum_{k=0}^{2n+1}[(a_k-\overline{a}_k)i]x^k$$ 的根，从而 α_0 也是 $g(x)$ 的根.

由此可见，方程 $f(\overline{x})=\overline{f(x)}$ 的 $n+1$ 个虚根 α_k 及 $\overline{\alpha_k}(0\leqslant k\leqslant n)$ 均是 $g(x)$ 的根. 由于 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是模互不相等的虚数，故 $\alpha_0,\overline{\alpha}_0,\alpha_1,\overline{\alpha}_1,\cdots,\alpha_n,\overline{\alpha}_n$ 两两不等，这说明 $g(x)$ 有 $2n+2$ 个不同的根，故 $g(x)$ 为零多项式，从而 $[a_k-\overline{a}_k]i=0(0\leqslant k\leqslant n)$，即 $a_k=\overline{a}_k$，即 $a_k\in \mathrm{R}(0\leqslant k\leqslant n)$. 这说明 $f(x)$ 是实系数多项式.

例2 设复系数多项式 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k(a_0a_m\neq 0)$ 的所有根的模都小于1，求证：多项式 $g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+\lambda\overline{a}_{n-k})x^k$ 的所有根的模都等于1，其中 $|\lambda|=1$.

证:设方程 $f(x)=0$ 的几个根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由 $a_0\neq 0$ 知，$x_k\neq 0,(1\leqslant k\leqslant n)$，故方程 $g(x)=0$ 变形为

$$g(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+\lambda a_n(1-x\overline{x}_1)(1-x\overline{x}_2)\cdots(1-x\overline{x}_n)=0$$

由于 $|\lambda|=1$，故

$$|x-x_1|\cdot|x-x_2|\cdots|x-x_n|$$
$$=|1-x\overline{x}_1|\cdot|1-x\overline{x}_2|\cdots|1-x\overline{x}_n| \quad (*)$$

注意到

$$|x-x_i|^2-|1-x_i\overline{x}_i|^2=(|x|^2-1)\cdot(1-|x_i|^2),$$

且 $|x_i|^2<1(1\leqslant i\leqslant n)$，所以当 $|x|>1$(或 $|x|<1$)时 $|x-x_i|>|1-x\overline{x}_k|$(或 $|x-x_i|<|x-\overline{x}x_i|$). 因此(*)式成立，当且仅当 $|x|=1$，即方程 $g(x)=0$ 所有根的模都等于1.

例3 已知 $f(z)=C_0z^n+Gz^{n-1}+C_2z^{n-2}+\cdots+C_{n-1}z^n+C_n$ 是一个 n 次复数多项式，求证：一定存在一个复数 z_0. $|z_0|\leqslant 1$，并且满足

$$|f(z_0)|\geqslant|C_0|+|C_n|$$

证法一 对于给定的多项式 $f(z)$，常数 C_n 的辐角是确定的(当 $C_n=0$ 时辐角可任取)，故可取复数 u 使 $\arg u=\arg C_n$，$|u|=|C_0|+|C_n|$，则 $u=\lambda C_n(\lambda>1)$，构造多项式.

$g(z)=f(z)-u=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_{n-1}z+C_n-u$，设多项式 $g(z)$ 的几个根为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，

则 $\quad g(z)=C_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$

于是 $\quad |g(0)|=|C_0|\cdot|z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|$

即 $\quad |z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|=\left|\dfrac{f(0)-u}{C_0}\right|=\left|\dfrac{C_n-u}{C_0}\right|$

$$=\frac{(\lambda-1)|C_n|}{|C_0|}=\frac{|u|-|C_n|}{|C_0|}=1$$

所以 $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|\leqslant 1$,记 $|z_0^1|=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|$,且 $g(z_0^1)=0$,则 $|f(z_0^1)|=|u|=|C_0|+|C_n|$

取 $|f(z_0)|=\max\limits_{|z|\leqslant 1}|f(z)|$,$|z_0|\leqslant 1$,则有

$|f(z_0)|\geqslant|f(z_0^1)|=|C_0|+|C_n|$ 证毕

证法二:考虑方程组

$$\begin{cases}|z|=1,\\ \arg z^n=\arg\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)=0(C_0\neq 0)\end{cases}$$

的 n 个根 $z_j(j=0,1,2,\cdots,n-1)$,其中 $z_j=e^{i\frac{2jn+\theta}{n}}$,不难算出 $z_j=\varepsilon^j\cdot e^{i\frac{\theta}{n}}$

$$\begin{aligned}&f(z_0)+f(z_1)+\cdots+f(z_{n-1})\\&=\sum_{j=0}^{n-1}C_0z_j^n+\sum_{j=0}^{n-1}C_1z_j^{n-1}+\cdots+\sum_{j=0}^{n-1}C_{n-1}z_j+nC_n\\&=nC_0e^{i\theta}+C_1\sum_{j=0}^{n-1}z_j^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}z_j+nC_n\\&=nC_0e^{i\theta}+nC_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore|f(z_0)|+|f(z_1)|+\cdots+|f(z_{n-1})|\\&\geqslant|f(z_0)+f(z_1)+\cdots+f(z_{n-1})|\\&=n|C_0e^{i\theta}+C_n|\\&=n(|C_0e^{i\theta}|+|C_n|)\\&=n(|C_0|+|C_n|)\end{aligned}$$

证法三:令 $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{n}}$,若 C_0,C_n 均为非负实数,则

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(\varepsilon^k)=C_0\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{kn}+C_1\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k(n-1)}+\cdots+C_{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k+nC_n$$

当 $0<j<n$ 时,$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{kj}=0$,所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(\varepsilon^k)=nC_0+nC_n$$

$\therefore\sum\limits_{k=0}^{n-1}|f(\varepsilon^k)|\geqslant|\sum\limits_{k=0}^{n-1}f(\varepsilon^k)|=n(|C_0|+|C_n|)$ 从而必有一个 $k(0\leqslant k\leqslant n-1)$,使

$$|f(\varepsilon^k)|\geqslant|C_0|+|C_n|$$

对一般情况,令 $C_0=|C_0|e^{i\varphi}$,$C_n=|C_n|e^{i\theta}$,则

$$f(z)=e^{i\theta}(|C_0|e^{i(\varphi-\theta)}z^n+C_1e^{-i\theta},z^{n-1}+\cdots+|C_n|)$$

令 $F(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\frac{\theta-\varphi}{n}}\cdot z)$

$=|C_o|\cdot z^n+\cdots+|C_n|$

则根据上面所证,必有 k 使 $|F(\varepsilon^k)|\geqslant|C_0|+|C_n|$.

即 $|f(e^{i\frac{\theta-\varphi}{n}}\cdot\varepsilon^k)|\geqslant|C_0|+|C_n|$

例 4 设 $f(x)$ 为实系数多项式,且对任何实数 x_0,$f(x_0)\geqslant 0$,试证:存在多项式 $g(x)$,$h(x)$ 使得 $f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

证:由虚根成对知,$f(x)$ 可表示为

$$f(x)=g_n(x-\alpha_1)^{\varepsilon_1}\cdots\cdots(x-\alpha_s)^{\varepsilon_s}\cdot[(x_1-\beta_1)(x-\overline{\beta}_1)]^{m_1}\cdot\cdots\cdot[(x-\beta_r)(x-\overline{\beta}_r)]^{m_r}.$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_s$ 为 f 的不同实根,$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_\gamma,\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2,\overline{\beta}_3,\cdots,\overline{\beta}_r$,为 f 的不同虚根,由 $f(x)\geqslant 0$,有 $\alpha_n>0$,显然 $(x-\beta_i)\cdot(x-\overline{\beta}_i)\geqslant 0$ 对一切实数 x 成立,取 $\varepsilon>0$ 且 ε 很小,使得在 $(-\varepsilon+\alpha_j,\alpha_j+\varepsilon)$ 中无 $f(x)$ 的根 $\alpha_1,\cdots,\alpha^{j-1},\alpha^{j+1},\cdots,\alpha_s$ 设 e_j 为奇数,则记 $g(x)=(x-x_1)^{\varepsilon_1}\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_s)^{\varepsilon_s}$ 有 $g_1(-\varepsilon+\alpha_j)\cdot g_1(\varepsilon$

$+\alpha_j) < 0$，于是 $f(\alpha_j-\varepsilon)\cdot f(\alpha_j+\varepsilon)<0$，这和假设矛盾，所以 $e_1,e_2,\cdots,e_s$ 都是偶数，记

$$\sqrt{a_n}\cdot(x-\alpha_1)^{\frac{e_1}{2}}\cdot\cdots\cdot(x-\alpha_s)^{\frac{e_s}{2}}=k(x)$$

$$(x-\beta_1)^{m_1}\cdot\cdots\cdot(x-\beta_r)^{m_r}=l(x)$$

则 $f(x)=k^2(x)\mid l(x)\mid^2=k^2(x)[k_e(l(x))]^2+k^2(x)[I_m(l(x))]^2$

这样取

$$g(x)=k(x)\cdot R_e(l(x)),h(x)=k(x)\cdot I_m(l(x))$$

则 $g(x),k(x)$ 符合要求.

例5 （第22届俄罗斯数学竞赛题）是否存在这样一个有限非零实数集 M，使得对任何一个自然数 n，总存在以 M 中的数为系数且次数不低于 n 的多项式，它的所有根都属于 M?证明你的结论.

证明：若不然，则存在满足问题条件的集合 $M=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，记 $b=\min\{\mid a_1\mid,\mid a_2\mid,\cdots,\mid a_n\mid\}$，$a=\max\{\mid a_1\mid,\mid a_2\mid,\cdots,\mid a_n\mid\}$

由已知，$a\geqslant b>0$

考察多项式 $P(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_1x+b_0$，它的所有系数 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 和根 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 均属于集合 M，根据根与系数的关系，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=-\frac{b_{k-1}}{b_k}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_k+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k=\frac{b_{k-2}}{b_k}$$

因此 $\quad x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_k{}^2=\left(-\dfrac{b_{k-1}}{b_k}\right)^2-\dfrac{2b_{k-2}}{b_k}$

于是 $\quad kb^2\leqslant x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_k{}^2$

$$=\frac{b_{k-1}^2}{b_k^2}-\frac{2b_{k-2}}{b_k}\leqslant\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}$$

所以 $\quad k\leqslant\dfrac{a^2}{b^4}+\dfrac{2a}{b^3}=A$，推出矛盾：多次式的次数不可能大于 A，故不存在.

【评注】 本题解题的关键是利用多项式的根与系数的关系，以及最值性得到估计 k 的不等式，且是有上界的.

例6 （1997.第38届IMO中国国家队选拔考试第4题）试求所有满足下列各条件的实系数多项式 $f(x)$：

(1) $f(x)=a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x^2+a_{2n}(a_0>0)$

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n}a_{2j}a_{2n-2j}\leqslant C_{2n}^{n}a_0a_{2n}$

(3) $f(x)$ 的 $2n$ 个根都是纯虚数.

【分析】

注意到 $f(x)$ 中的 x 均是偶数次幂，自然就会想到构造一个 n 项的多项式，则其根都是实数（由条件(3)知），从而利用 n 次多项式的韦达定理，得条件(2)考察系数之间的关系，其中需要灵活地运用不等式的某些技巧和恒等式 $C_{2n}^{n}=\sum\limits_{j=0}^{n}(c_n^j)^2$

解：首先记

$g(t)=a_0t^n-a_2t^{n-1}+\cdots+(-1)^ja_jt^{n-j}+\cdots+(-1)^na_{2n}$

易见 $\quad f(x)=(-1)^ng(-x^2)$

设 $\pm i\beta_1,\pm i\beta_2,\cdots,\pm i\beta_n$ 是多项式 $f(m)$ 的 $2n$ 个根（不妨设 $\beta_j>0,j=1,2,\cdots,n$）则多项式 $g(t)$ 的 n 个根为 $t_j=\beta_j{}^2>0,j=1,2,\cdots,n$

因而 $\dfrac{a_{2j}}{a_0}=\sum\limits_{k_2<k_3<\cdots<k_j}t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}>0$（在下面论述过程中，符号 $\sum$ 下方未标出的求和范围都是 $1\leqslant$

$k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqslant n), j = 1,2,\cdots,n$

则 ①$(C_n^j)^2 \frac{a_{2n}}{a_0}$

$$= \left[\sum \sqrt{t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_k} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_0}}}{\sqrt{t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}}}\right]^2$$

$$\leqslant \left(\sum t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}\right)\left[\sum \frac{\left(\frac{a_{2n}}{a_0}\right)}{t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}}\right]$$

$$= \frac{a_{2j}}{a_0} \cdot \frac{a_{2n-2j}}{a_0}$$

注意到 $C_{2n}{}^n = \sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2$，并根据 ① 和题目的条件(2)，可得

$$②C_{2n}^n \frac{a_{2n}}{a_0} = \sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2 \frac{a_{2n}}{a_0} \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{2j}}{a_0} \cdot \frac{a_{2n-2j}}{a_0}$$

$$= C_{2n}^n \frac{a_{2n}}{a_0}$$

由 ② 中式看出，对于 $j = 1,2,\cdots,n$，在 ① 中式中的"$\leqslant$"号都恰为"$=$"号，依据 *Cauchy* 不等式及等号成的条件，可知 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$. 将这个正数记为 r^2，就得到

$$\frac{a_{2j}}{a_0} = C_n^j r^{2j}, a_{2j} = a_0 C_n^j r^{2j}, j = 1,2,\cdots,n$$

于是 $f(x) = a_0(x^2 + r^2)^n (a_0 > 0, r > 0)$

易验证，这样的多项式 $f(x)$ 满足题目的全部条件.

例 7 设 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是实系数多项式

$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_{n-1}x + p_n (p_n \neq 0)$ 的 n 个根.

(1) 求证：$\prod_{j=1}^{n}(1 + r_j)^2 \geqslant 0$

(2) 若 $\prod_{j=1}^{n}(1 + r_j^2) \leqslant 1$，则 $f(x)$ 必有虚根 $a + bi$，且 $(a^2 + b^2 + 1)^2 \leqslant 4b^2 + 1$

证：(1) 首先，我们证明

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + r_j)^2 = (p_1 - p_3 + p_5 - \cdots)^2 + (1 - p_2 + p_4 - \cdots)^2 \quad (*)$$

事实上，因 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个根，故 $f(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$

观察($*$)式左边可联想虚数单位 i 的幂数列$\{i^n\}$各项的符号，于是令 $x = i$，得

$(i - r_1)(i - r_2)\cdots(i - r_n) = f(i)$

$= i^n + p_1 i^{n-1} + \cdots + p_{n-1}i + p_n$

$= i^n(1 - p_1 i - p_2 + p_3 i + p_4 - \cdots)$

$= i^n(p - qi)$ ①

再令 $x = -i$，得

$(-i - r_1)(-i - r_2)\cdots(-i - r_n) = f(-i)$

$= (-i)^n + p_1(-i)^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(-i) + p_n$

$= (-i)^n[1 + p_1 i - p_2 - p_3 i + p_4 + p_5 i - \cdots]$

$= (-i)^n(p + qi)$ ②

① × ② 得

$$\prod_{j=1}^{n}(1+r_j{}^2)=p^2+q^2$$

这样一来,我们证明了(*)式

即 $$\prod_{j=1}^{n}(1+r_j{}^2)=|f(i)|=|f(-i)|\geqslant 0$$

(2) 若 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 全为实数,则

$$|f(i)|=|\prod_{j=1}^{n}(i-r_j)|=\prod_{j=1}^{n}(1+r_j{}^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$$

结合 $|f(i)|\leqslant 1$ 知,$|f(i)|=1$,等号成立当且仅当 $r_j=0(1\leqslant j\leqslant n)$,从而 $f(0)=P_n=0$ 这与 $P_n\neq 0$ 矛盾,即 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 中必有虚数. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 中有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 个实根,有 r 对共轭虚根 $\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_r,\overline{\beta}_1,\overline{\beta}_2\cdots\overline{\beta}_r$(包括重根在内,$p+2\gamma=n$),则

$$f(x)=\prod_{j=1}^{p}(x-\alpha_j)\cdot\prod_{k=1}^{r}(x-\beta_k)(x-\overline{\beta}_k)$$

$$\therefore |f(i)|=\prod_{j=1}^{p}|i-\alpha_j|\cdot\prod_{k=1}^{r}|(i-\beta_k)(i-\overline{\beta}_k)|\leqslant 1$$

$\because |i-\alpha_j|=\sqrt{1+\alpha_j{}^2}\geqslant 1,j=1,2,\cdots,p$

$\therefore$ 存在一对共轭虚根 $\beta_k=a+bi,\overline{\beta}_k=a-bi(a,b\in\mathbf{R},b\neq 0)$ 使 $|(i-\beta_k)(i-\overline{\beta}_k)|\leqslant 1$

即 $(a^2+(b-1)^2)\cdot(a^2+(b+1)^2)=(a^2+b^2+1)^2-4b^2\leqslant 1$

$\therefore (a^2+b^2+1)^2\leqslant 4b^2+1$ 证毕

例 8 证明对每一整数 $n>1$,多项式

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}$$

无有理根.

证:设 $f(x)$ 有有理根 α,则整系数多项式 $F(x)=n!f(x)$ 也有有理根 α,从而 α 为整数

即 $\alpha^n+n\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{n!}{k!}\alpha^k+\cdots+\frac{n!}{2!}\alpha^2+n!\alpha+n!=0$

设 p 为 n 的质因数,则由上面的方程知 $p\mid\alpha^n$,从而 $p\mid\alpha$

设 r 为满足 $p^r\mid n!$ 的最大整数,$p^s\leqslant k<p^{s+1}(s\geqslant 0$ 为整数)

$$则\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{p^s}\right]\leqslant\frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\cdots+\frac{k}{p^s}$$

$$=k\cdot\frac{1-\frac{1}{p^s}}{p-1}<k$$

故 $p^k\nmid k!$,而 $p^k\mid\alpha^k$,故 $\frac{n!}{k!}\alpha^k$ 中至少出现 $r-(k-1)+k=r+1$ 次 p,从而 $p^{r+1}\mid\frac{n!}{k!}\alpha^k(k=1,2,\cdots,n)$,从而由上面方程得 $p^{r+1}\mid n!$,矛盾.

例 9 (1996.第 37 届 IMO 备选题)设 n 是正偶数,证明:存在一个正整数 K,满足 $K=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^2+1)$,其中 $f(x),g(x)$ 是某个整系数多项式,如果因 k 表示满足上式的最小的 k,试将 k_0 表示为 n 的函数.

解:(i) n 为偶数时 $((x+1)^n,x^2+1)=1$,于是存在有理系数多项式 $f^*(x),g^*(x)$,使得 $1=f^*(x)(x+1)^n+g^*(x)(x^n+1)$

设 k 为 $f^*(x),g^*(x)$ 的所有系数的分母的一个公倍数,记 $f(x)=Kf^*(x),g(x)=Kg^*(x)$,则 $f(x),g(x)$ 为整系数多项式,且

$K=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$

(ii) 设 $n=2^a\cdot t$,t 为奇数,记 $m=2^a$ 则可设 $x^n+1=(x^m+1)h(x)$

$h(x)$ 为整系数多项式,并设 $w_j=e^{i\cdot\frac{2j-1}{m}x}(j=1,2,\cdots,2^a)$ 为 $x^m+1=0$ 的 m 个根.

若正整数 K，整系数多项式 $f(x),g(x)$ 满足

$K=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$

则 $K=f(w_j)(w_j+1)^n, j=1,2,\cdots,m$

于是 $K^m=\prod_{j=1}^{m}f(w_j)\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n$

设 $\sigma_1=w_1+w_2+\cdots+w_m$

$\sigma_2=w_1w_2+w_2w_3+\cdots+w_{m-1}w_m$

$\vdots$

$\sigma_m=w_1w_2\cdots w_m$

由韦达定理知 σ_j 为整数，因为 $\prod_{j=1}^{m}f(w_j)$ 为关于 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 的整系数多项式，故 $\prod_{j=1}^{m}f(w_j)$ 可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 的整系数多项式，于是它为整数，而

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n&=\left[\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)\right]^n\\&=(1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m)^n\\&=2^n\end{aligned}$$

因此，$2^n\mid K^m$，即 $2^t\mid K$，于是，$K\geqslant 2^t$

记 $E(x)=(x+1)(x^3+1)\cdots(x^{2m-1}+1)$

$\quad=(x+1)^mF(x)$

对于固定的 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$，考虑集合 $(w_j,w_j^3,w_j^5,\cdots,w_j^{2m-1})$，其中的元素均为 $x^m+1=0$ 的根，且两两不等，故它为 $x^m+1=0$ 的解集，

于是 $$\begin{aligned}E(W_j)&=(1+w_j)(1+w_j^3)\cdots(1+w_j^{2m-1})\\&=(1+w_1)(1+w_2)\cdots(1+w_m)\\&=2\end{aligned}$$

设 $G(x)(x^m+1)+2=E(x)=(x+1)^mE(x)$

两边 t 次方，得 $G^*(x)(x^m+1)+2^t=(x+1)^nF^t(x)$ ①

其中 $G^*(x)$ 为某个整系数多项式

另外，由 $x^n+1=(x^m+1)h(x)$，有 $h(-1)=1$，故可设 $C(x)(x+1)=h(x)-1$

两边 n 次方，得 $C^n(x)(x+1)^n=h(x)d(x)+1$ ②

其中 $d(x)$ 为某个整系数多项式

由 ①、② 得

$$\begin{aligned}G^*(x)d(x)(x^n+1)&=G^*(x)(x^m+1)d(x)h(x)\\&=[(x+1)^nF^t(x)-2^t][C^n(x)(x+1)^n-1]\\&=(x+1)^n\bigcup(x)+2^t\end{aligned}$$

其中 $\bigcup(x)$ 为某个整系数多项式.

因此存在整系数多项式 $f(x),g(x)$，使得

$$2^t=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$$

综合上述，$k_0=2^t$，其 $n=2^\alpha\cdot t$，t 为奇数.

例 10 设 $f(x)=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{n-1}x^2+a_n(a_n>0)$，满足

(i) $\sum_{i=0}^{n}a_ia_{n-i}\leqslant C_{2n}^{n}a_0a_n$

(ii) 各根为纯虚数

求 $f(x)$

解：可令 $g(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 由 $f(x)$ 各根为纯虚数知，$g(x)$ 各根均为负，

设 $-x_i(x_i>0, i=1,2,\cdots,n)$ 为 $g(x)$ 的 n 个根，由韦达定理得

$$\sigma_j(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)=(-1)^j\frac{a_j}{a_0}, j=1,2,\cdots,n$$

即 $\sigma_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{a_j}{a_0}, j=1,2,\cdots,n$

由题意 $\sum_{j=0}^{n}\frac{a_i}{a_0}\cdot\frac{a_{n-j}}{a_0}\leqslant C_{2n}^{n}\cdot\frac{a_n}{a_0}$ ①

另一方面，由 A · G 不等式，得

$$\frac{a_j}{a_0}=\sigma_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant C_n^j\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\, C_{n-1}^{j-1}\right)^{\frac{1}{C_n^j}}$$

$$=C_n^j\prod_{k=1}^{n}x_k^{\frac{C_{n-1}^{j-1}}{C_k^j}}=C_n^j\prod_{k=1}^{n}x_k^{\frac{j}{n}}$$

$$=C_n^j\left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\frac{j}{n}}j=0,1,2,\cdots,n \quad ②$$

利用恒等式 $C_{2n}^{n}=\sum_{i=1}^{n}(C_n^i)^2$，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_0}\cdot\frac{a_{n-i}}{a_0}\geqslant\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\frac{j}{n}}\cdot\left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\frac{n-j}{n}}\cdot C_n^j\cdot C_n^{n-j}$$

$$=\frac{a_n}{a_0}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\cdot C_n^{n-j}=\frac{a_n}{a_0}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2=C_{2n}^{n}\frac{a_n}{a_0} \quad ③$$

由 ①,③ 知，$\sum_{j=0}^{n}a_ja_{n-j}=C_{2n}^{n}\cdot a_0$，由此知 ② 取等号，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=-t(t>0)$，从而 $g(x)=a_0(x+t)^n$，那么 $f(x)=a_0(x^2+t)^n(t>0)$ 为所求.

例 11 设 $f(x)$ 是整系数多项式，并且 $f(x)=1$ 有整数根，约定将所有满足上述条件的 f 组成的集合记为 F.

对于任意给定的整数 $k>1$，求最小的整数 $m(k)>1$，要求能保证存在 $f\in F$，使得

$$f(x)=m(k)$$

恰有 k 个不相同的整数根.

【分析】 首先对 $f(x)=m(k)$ 恰有 k 个不相同的整数根的情况进行研究，再利用作出结果解决原题.

解: 假定 $f\in F$ 使得 $f(x)=m(k)$ 恰有 k 个互不相同的整数根，设这些整数根依次为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 则存在整系数多项式 $g(x)$，使得

$$f(x)-m(k)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_k)g(x) \quad ①$$

又由 $f\in F$ 知存在整数 α，使得 $f(\alpha)=1$

将 α 代入上式 ① 并在等式两端取绝对值得 $m(k)-1=|\alpha-\beta_1|\cdot|\alpha-\beta_2|\cdot\cdots\cdot|\alpha-\beta_k|\cdot|g(\alpha)|$

依题设 $\alpha-\beta,\alpha-\beta_2,\alpha-\beta_3,\cdots,\alpha-\beta_k$ 是互不相同的整数，又 $m(k)>1$，所以它们均非零. 为保证 $m(k)$ 确为最小，显然应有 $|g(\alpha)|=1$，而 $\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_2,\alpha-\beta_3,\cdots,\alpha-\beta_k$ 取绝对值最小的 k 个非零整数，亦即从 $\pm1,\pm2\cdots$ 中顺次选取.

下面对 k 分情况讨论求出 $m(k)$ 的具体值.

当 k 是偶数时，$\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_2,\alpha-\beta_3,\cdots,\alpha-\beta_k$ 应取 $\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{k}{2}$，其中有 $\frac{k}{2}$ 个负数，考虑最初的分解式可知 $g(x)$ 必等于 $(-1)^{\frac{k}{2}+1}$

从而
$$m(k)=\left[\left(\frac{k}{2}\right)!\right]^2+1$$

相应的 f 可取

$$f(x)=(-1)^{\frac{k}{2}+1}\prod_{i=1}^{\frac{k}{2}}(x^2-i^2)+\left[\left(\frac{k}{2}\right)!\right]^2+1$$

类似地,当 k 为奇数时,$\alpha-\beta,\alpha-\beta_2,\alpha-\beta_3\cdots,\alpha-\beta_k$ 应取 $\pm1,\pm2,\cdots,\pm\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2}$,$g(\alpha)$ 等于 $(-1)^{\frac{k}{2}+1}$

从而 $m(k)=\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k+1}{2}\right)!+1$

相应的 f 可取

$$f(x)=(-1)^{\frac{k+1}{2}}\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}}(x^2-i^2)\left(x+\frac{k+1}{2}\right)+\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k+1}{2}\right)!+1$$

例 12 设实数 x,y,z,w 满足

$$x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0$$

试求:$u=w(w+x)(w+y)(w+z)$ 的值.

解:把 x,y,z,w 看成四个未定元,由题设 $\sigma_1=s_1=s_7=0$,由牛顿公式(1),得

$$s_2-\sigma_1s_1+2\sigma_2=0$$

从而 $s_2=-2\sigma_2$;$s_3-\sigma_1s_2+\sigma_2s_1-3\sigma_3=0$

从而 $s_3=3\sigma_3$

同理 $S_4=2\sigma_2{}^2-4\sigma_4$;$S_5=-5\sigma_2\sigma_3$;$S_7=7(\sigma_2{}^4-\sigma_4)\sigma_3$

因 $S_7=0$,故 $\sigma_3=0$ 或 $\sigma_4=\sigma_2{}^2$

若 $\sigma_3=0$,则以 x,y,z,w 为根的多项式

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)(t-w)$$
$$=t^4+\sigma_2t^2+\sigma_4$$

由上式可见,$f(t)$ 的四个根为两对相反数,则 w 必与 x,y,z 之一为相反数,从而 $u=0$

若 $\sigma_4=\sigma_2{}^2$,则 $s_4=-2\sigma_2{}^2\leqslant0$,又 $s_4=x^4+y^4+z^4+w^4\geqslant0$,因而 $s_4=0$,于是 $x=y=z=w=0$,所以 $u=0$

例 13 (1986.第 27 届 IMO 中国国家队选拔考试题)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数($n\geqslant3$),令 $p=\sum_{i=1}^{n}x_i$,$q=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$.求证:

(i) $\frac{n-1}{n}p^2-2q\geqslant0$

(ii) $|x_i-\frac{p}{n}|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}\quad(i=1,2,\cdots,n)$

证明:(i) 由韦达定理知,实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实系数 n 次方程 $x^n-px^{n-1}+qx^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的 n 个数.于是由定理 7 的(1)有

$$\Delta_1=(n-1)(-p)^2-2nq\geqslant0$$

即 $\frac{n-1}{n}p^2-2q\geqslant0$

(ii) 设实系数 $n-1$ 次方程 $x^{n-1}-bx^{n-2}+cx^{n-3}+\cdots+dx+e$ 的根为 $x_k(1\leqslant k\leqslant n,k\neq i)$,由韦达定理知,$b=p-x_i$,$q=c+x_ib=c+x_i(p-x_i)$

即 $c=q+x_i{}^2-px_i(1\leqslant i\leqslant n)$

由定理 7 的(1)有 $\Delta_1=(n-2)b^2-2(n-1)c\geqslant0$

即 $(n-2)(p-x_i)^2-2(n-1)(q+x_i{}^2-px_i)\geqslant0$

整理得

$$|x_i-\frac{p}{n}|\leqslant\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$$

例 14 （1989.第30届IMO中国国家队选拔考试）求最大整数 n，使方程 $(z+1)^n=z^n+1$ 的所有非零解都在单位圆上.

解：利用二项式定理，将方程化为

$z(C_n^1z^{n-2}+C_n^2z^{n-3}+C_n^3z^{n-4}+\cdots+C_n^{n-2}z+C_n^{n-1})=0(n>3)$

记方程的非零解为 $z_i(i=1,2,\cdots,n-2)$. 由韦达定理，有

$$S_1=\sum_{i=1}^{n-2}z_i=-\frac{C_n^2}{C_n^1}=-\frac{n-1}{2}$$

$$S_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-2}z_iz_j=\frac{C_n^3}{C_n^1}=\frac{1}{6}(n-1)(n-2)$$

设 $n>4$ 满足题设条件，则 $z_i\cdot\overline{z}_i=|z_i|^2=1$，$x_i=z_i+\overline{z}_i$ 为实数 $(i=1,2,\cdots,n-2)$，由于方程的系数都是实数，其根以共轭复数的形式成对出现，于是方程的非零解又可表示成 $\overline{z}_i(i=1,2,\cdots,n-2)$，因此

$$t_1=\sum_{i=1}^{n-2}x_i=\sum_{i=1}^{n-2}(z_i+\overline{z}_i)=2s_1=1-n$$

$$t_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-2}x_ix_j=\frac{1}{2}(t_1{}^2-\sum_{i=1}^{n-2}x_i{}^2)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-2}x_i{}^2&=\sum_{i=1}^{n-2}(z_i{}^2+\overline{z}_i{}^2+2z_i\cdot\overline{z}_i)\\&=\sum_{i=1}^{n-2}(z_i{}^2+\overline{z}_i{}^2)+2\sum_{i=1}^{n-2}z_i\cdot\overline{z}_i\\&=2\sum_{i=1}^{n-2}z_i{}^2+2\sum_{i=1}^{n-2}1\\&=2(S_1{}^2-2S_2)+2(n-2)\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}t_2&=\frac{1}{2}[(2S_1)^2-2(S_1{}^2-2S_2)-2(n-2)]\\&=\frac{1}{12}(7n^2-30n+35)\end{aligned}$$

由韦达定理知，实数 $x_i(i=1,2,\cdots,n-2)$ 是实系数方程 $x^{n-2}-t_1x^{n-3}+t_2x^{n-4}+\cdots+t_{n-3}x+t_{n-2}=0$ 的 $n-2$ 个根，利用定理7(1)有

$$\Delta_1=(n-3)(-t_1)^2-2(n-2)t_2\geqslant0$$

即 $(n-3)(n-1)^2-2(n-2)\dfrac{7n^2-30n+35}{12}\geqslant0.$

整理得 $(n-4)[(n-5)^2-12]\leqslant0$

解得 $n\leqslant5+\sqrt{12}<9$，即 $n\leqslant8$

当 $n=8$ 时，方程化为

$(8z^6+28z^5+56z^4+70z^3+56z^2+28z+8)z=0$. 其非零解是下列方程(*)的6个根.

$$4z^6+14z^5+28z^4+35z^3+28z^2+14z+4=0 \qquad (*)$$

而方程(*)可变形为

$4(z^3+z^{-3})+14(z^2+z^{-2})+28(z+z^{-1})+35=0$

即 $4(z+z^{-1})^3+14(z+z^{-1})^2+16(z+z^{-1})+7=0$

由于 $\Delta_2=(3-1)\cdot16^2-2\cdot3\cdot14\cdot7=-76<0$

由定理7的(2)知，方程 $4x^3+14x^2+16x+7=0$ 的根不全为实数，即存在方程(*)的根 z_i，使 $z_i+z_i{}^{-1}$ 不是实数. 于是，$z_i+z_i{}^{-1}\neq z_i+\overline{z}_i$，即 $|z_i|\neq1$，故 $n=8$ 不满足题设条件.

当 $n=7$ 时，方程化为

$$0=(z+1)^7-(z^7+1)$$
$$=(z+1)\sum_{i=0}^{6}C_6^i z^i-(z+1)\sum_{i=0}^{6}(-1)^i z^i$$
$$=(z+1)\sum_{i=0}^{6}[C_6^i-(-1)^i]z^i$$
$$=7(z+1)z(z^2+z+1)^2$$

其非零解为 -1 和 $\cos120^\circ\pm i\sin120^\circ$ 都在单位圆上.

综上所述,满足题设条件的最大整数 n 为 7.

【注】 上述解法比当时命题委员会的解答要算得自然,简洁.

例 15 (1996.第 37 届 IMO 国家队选拔考试题五)设 $n\geqslant4,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是两组实数,满足

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2<1,\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2<1$$
$$\text{记 }A^2=1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2,B^2=1-\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2$$
$$W=\frac{1}{2}(1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i)^2$$

求出一切实数 λ,使得方程 $x^n+\lambda(x^{n-1}+\cdots+x^3+wx^2+ABx+1)=0$ 仅有实根

【分析 1】 当 $\lambda=0$ 时结论是显然的,当 $\lambda\neq0$ 时设法推出矛盾,若直接从本题条件入手,则易联想到韦达定理沟通关系,从而进一步导出矛盾.

解法一:显然当 $\lambda=0$ 时题中方程仅有实根 $x=0$

下面考虑 $\lambda\neq0$ 的情形,此时方程无 0 根,假设方程的 n 个根全是实数,设为 $\epsilon_1,\epsilon_2,\cdots,\epsilon_n$

其中 $\epsilon_j\in C_k\{0\},j=1,2,\cdots,n$

观察根与系数的关系.

$$\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n=(-1)^n\lambda$$
$$\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n\left(\frac{1}{\epsilon_1}+\frac{1}{\epsilon_2}+\cdots+\frac{1}{\epsilon_n}\right)=(-1)^{n-1}\lambda AB$$
$$\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\epsilon_j\epsilon_k}\right)=(-1)^{n-2}\lambda w$$

由以上关系式可得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\epsilon_j}=-AB,\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\epsilon_j\epsilon_k}=w$$

于是 $A^2B^2-2w=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\epsilon_j}\right)^2-2\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\epsilon_j\epsilon_k}$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\epsilon_j^2}>0 \quad ①$$

但 $A^2B^2=(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2)(1-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2)$

$$\leqslant\left[\frac{(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2)+(1-\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2)}{2}\right]^2$$
$$=\left[1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j^2+\beta_j^2)\right]^2$$
$$\leqslant(1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j)^2$$
$$=2w \quad ②$$

①、② 矛盾，∴ 任何 $\lambda \neq 0$ 都不合要求.

综上可知，要使题中的方程仅有实根，必须且只须 $\lambda = 0$

【分析 2】 如果引用定理 7(2)，则会产生更简洁的方法.

解法二：当 $\lambda = 0$ 时，方程仅有实根 0.

当 $\lambda \neq 0$ 时

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= (n-1)(\lambda AB)^2 - 2n(\lambda w)\lambda \\ &= \lambda^2[(n-1)A^2B^2 - 2nw]\end{aligned}$$

由 $$\begin{aligned}1 - \sqrt{2w} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}({x_i}^2 + {\beta_i}^2) \\ &= \frac{2 - A^2 - B^2}{2}\end{aligned}$$

得 $\sqrt{2w} \geqslant \dfrac{A^2 + B^2}{2} \geqslant AB$

所以 $2w \geqslant A^2B^2$

故 $\Delta_2 \leqslant \lambda^2[(n-1)A^2B^2 - nA^2B^2] = -A^2B^2\lambda^2 < 0$，由定理 7(2) 知，方程的根不全为实根.

综上所述，只能是 $\lambda = 0$

例 16 题目见第二讲的例9.

【分析】 引用定理 8，解法将得很大简化.

解：考察多项式

$$f(x) = 1 + x + \cdots + x^{p-1}$$

$$g(x) = (n_0 - 2) + \sum_{j=1}^{p-1} n_j x^j$$

依据定理 8，立即可以判定 $f(x) \mid g(x)$，因而存在常数 λ，使得 $g(x) = \lambda f(x)$

于是 $n_0 - 2 = n_1 = n_2 = \cdots = n_{p-1}$ ①

利用关系 $\sum_{j=0}^{p-1} n_j = C_{2p}^{p}$，又得到

$$(n_0 - 2) + n_1 + \cdots + n_{p-1} = C_{2p}^{p} - 2 \quad ②$$

由 ①、② 得

$$n_0 = \frac{1}{p}(C_{2p}^{p} - 2) + 2$$

这就是所求的答案(满足条件(i) 和(ii) 的子集 A 的个数).

§2.3　针对性训练

A 组

1. (1) 设 $f(x)=x^{mn}+x^{(m-1)n}+\cdots+x^{2n}+x^{n}+1$ 能被 $g(x)=x^{m}+x^{m-1}+\cdots+x-1$ 整除，试确定正整数对 m,n 应满足的充要条件.

(2) 确定自然数 m，使 $f(x)=(1+x)^{m}+x^{m}+1$ 能被 $g(x)=x^{2}+x+1$ 整除.

2. (1) 设 $P(x)$ 是 n 次多项式，且对 $k=0,1,2\cdots,n$ 有 $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$，试求 $P(k+1)$

(2) 试确定所有多项式 f，使 $f(x^{2}+1)=f^{2}(x)+1$

3. 设 $a,b(\neq 0),c>0$ 是有理数，且 c 不是有理数的平方，又 $a+b\sqrt{c}$ 是整系数多项式 f 的根，求证：$f(a-b\sqrt{c})=0$

4. 已知 f 是 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式，$f(0)\neq 0$，且 f 的任两根的乘积仍是 f 的根，试求一切满足上述条件的 f

5. 求证：多项式 $f(x)=x^{n+1}-x^{n}-1$ 有模为 1 的根的充要条件是 $6\mid n+2$

6. 设 f 是整系数多项式，且 $f-2$ 有 4 个不同的整数根. 求证：对任意整数 a，$f(a)$ 不等于 1,3,5,7,9 中的任何一个.

7. 设实系数多项式 $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx+c$ 的三个根都是实数，证明：(1) $a^{2}\geqslant 3b$；(2) $f(x)$ 至少有一根 $\leqslant\dfrac{1}{3}(2\sqrt{a^{2}-3b}-a)$；(3) 最大根与最小根的差 $\geqslant\sqrt{a^{2}-3b}$

8. 设有理数$\frac{u}{v}$是整系数多项式$f(x)$的根,$(u,v)=1$,证明:(1) $\frac{f(m)}{m-\frac{u}{v}}$是整数;(2) $\frac{f(m)}{mv-u}$是整数.这里m是任意整数.

9. 设$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$是$2n$个互不相等的整数,若方程$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n})+(-1)^{n-1}(n!)=0$有一个整数解$r$,证明:$r=\frac{1}{2n}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})$

10. 设多项式$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1$有$n$个实根,并且系数$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$都是非负的,证明:$f(2)\geqslant 3^n$

11. 设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$为整系数多项式,且$a_0,a_n,f(1)$与$f(-1)$均非3的倍数.证明:$f(x)$有无理根.

12. 证明:对$n\geqslant 2(n\in \mathrm{N})$,方程$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=n^2$有一个有理根在1与2之间.

13. 设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+ax_n^n(a_n\neq 0)$为实系数多项式.
(i) 若$a_0\geqslant a_1\geqslant a_2\cdots\geqslant a_n>0$,则$f(x)$的所有根的模都不小于1.
(ii) 若$0<a_0\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则$f(x)$的所有根的根都不大于1.

14. 设方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$的系数都为实数,且适合条件:$0<a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant 1$,已知$\lambda$为此方程的复根,且适合条件$|\lambda|\geqslant 1$,试证:$\lambda^{n+1}=1$

15. 设一元n次方程

$$b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0=0$$

的系数都是虚数,$b_k=a_k+a_{n-k}i(k=0,1,2,\cdots,n)$且适合$0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$
若$|Z|$是方程的复根,求证:$|Z|=1$

16. 利用牛顿公式解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3\\x^3+y^3+z^3=3\\x^5+y^5+z^5=3\end{cases}$$

B 组

1.（1997.全国高中联赛试题）设非零复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 满足

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}\right)=S$$

其中 S 为实数且 $|S|\leqslant 2$，求证：复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 在复平面上所对应的点位于同一圆周上.

2.（1997.全国高中数学联赛加试第 2 题）试问：当且仅当实数 $x_0,x_1,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$ 满足什么条件时，存在实数 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 使得

$$Z_0^2=Z_1^2+Z_2^2+\cdots+Z_n^2$$

成立，其中 $Z_k=x_k+iy_k$，i 为虚数单位，$k=0,1,\cdots n$，证明你的结论.

3.（1997.第 37 届 IMO 备选题）设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 是满足下列条件的 n 个实数：对任何整数 $k>0$，有 $a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k\geqslant 0$ 成立.令 $P=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$.证明：$P=a_1$，并且对任何 $x>a$，均有 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant(x-an)\leqslant x^n-a_1^n$

4.(1996.第37届IMO备选题试题)设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是非负实数,且不全为零.

(a)证明:方程$x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$恰有一个正实根;

(b)令$A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j,B=\sum\limits_{j=1}^{n}ja_j$,并设$k$是上述方程的正实根,证明:$A^A\leqslant R^B$

5.(1996.第37届IMO中国国家队选拔考试第6题)是否存在非零负数a,b,c及自然数h,使得只要整数k,l,m满足$|k|+|l|+|m|\geqslant 1996$,就必定成立$|ka+lb+mc|>\frac{1}{n}$?

6.(1986.第27届IMO中国集训队试题)设a,b,c表示$\triangle ABC$中$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边长,$P_1$,$P_2$是$\triangle ABC$平面上任意两点,它们到$A,B,C$三个顶点的距离分别为$a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2$,求证:

$$aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$$

7.(1996.第37届IMO备选题)设n是正偶数,证明:存在一个正整数k,满足$k=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$,其中$f(x),g(x)$是某个整系数多项式.如果用$k$表示满足上式的最小的$k$,试将$k_0$表为$n$的函数.

8.(1999.中国数学奥林匹克第2题)给定实数a,设实多项式序列$\{f_n(x)\}$满足

$$\begin{cases}f_0(x)=1\\f_{n+1}(x)=nf_n(x)+f_n(ax);n=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

(1)求证:$f_n(x)=x^nf_n(\frac{1}{x}),n=0,1,2,\cdots$

(2)求$f_n(x)$的明显表达式

9.(2000.第40届IMO备选题)已知素数$P>3$,对于集合$\{0,1,2,\cdots,p-1\}$的每个非空子集T,设$E(T)$是所有$P-1$元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_{p-1})$组成的集合,其中每一个$x_i\in T$,且$x_1+2x_2+\cdots+(p-1)x_{p-1}$可以被$p$整除,设$|E(T)|$表示$E(T)$中元素的个数.证明:

$$|E(\{0,1,3\})|\geqslant|E(\{0,1,2\})|$$

当且仅当$P=5$时等号成立.

10.(2000.第41届IMO中国国家集训队选拔考试第4题)设$f(x)$是整系数多项式,并且$f(x)=1$有整数根.约定将所有满足上述条件的f组成的集合记为F.对于任意给定的整数$k>1$,求最小的整数$m(k)>1$,要求能保证存在$f\in F$,使得

$$f(x)=m(k)$$

恰有k个互不相同的整数根.

11.(2001.第41届IMO备选题)对于一个具有不同实系数的2000次多项式P,由P的系数的一个排列构成的所有多项式的集合设为$M(P)$,多项式P称为是n-无关的,如果$P(n)=0$,且从任一多项式$Q\in M(P)$,最多交换Q的一对系数得到一个多项式Q_1,使得$Q_1(n)=0$,求所有整数n,使n-无关多项式存在.

专题三　函数方程

§3.1　知识要点和基本方法

Ⅰ.概念

定义1　含有未知数的等式称为方程.

定义2　含有未知函数的等式称为函数方程.

例如:(1)$f(x)=f(-x)$,(2)$f(x)=-f(-x)$

(3)$f(x+T)=f(x)$(常数 $T\neq 0$)

(4)$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$ 等,都是函数方程.其中 $f(x)$ 是未知函数.

定义3　如果函数 $f(x)$ 在其定义域内的一切值均满足所给函数方程,那么称 $f(x)$ 是该函数方程的解.

函数方程的解可以是一个或几个,甚至可以是无限多个函数,例如上述方程(1),(2),(3) 的解分别是一切偶函数,一切奇函数,一切以 T 为周期的函数.

定义4　寻求函数方程的解或证明函数方程无解的过程,叫做解函数方程.

Ⅱ.函数方程的类型与方法

解函数方程不需要专门的知识,关键是要清楚它的类型和基本解题方法.

1.类型

按问题的性质分,函数方程可分成三类,

(1) 确定函数的表达式

(2) 确定满足函数方程的函数的性质

(3) 确定函数值

若按热点内容相对较集中,而彼此又有所区分来划分,则可分成六类.

(1) 柯西方程

(2) 确定周期函数的方程

(3) 函数值与界的估算

(4) 连续型函数方程

(5) 离散型函数方程

(6) 函数方程解的存在性

2.方法

解函数方程所用的方法与技巧大致如下:

(1) 定义法(2) 换元法(3) 解方程组法

(4) 赋值法(5) 待定系数法(6) 递推法

(7) 数列法(8) 数学归纳法(9) 参数法

(10) 函数迭代法(11) 不动点法(12) 反证法

(13) 不等式夹逼法(14) 函数运算与单调性

在赛题精讲中,我们是按热点问题相对集中,彼此又能区别开来的六类问题分别讲解的.

§3.2 赛题精讲

1. 柯西方程

例1 (柯西方程)设 $f(x)$ 在 k 上单调,对任意 $x,y\in k$ 有

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad ①$$

求函数 $f(x)$

【分析】 解法是变量代换法.

解:令 $y=x$,得 $f(2x)=2f(x)$

令 $y=2x$,得 $f(3x)=f(x)+f(2x)=3f(x)$

一般有 $f(nx)=nf(x)\quad(n\in \mathrm{N})$

用 $\frac{x}{n}$ 代 x,得 $f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right)$

$\therefore f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x)$

于是对 $n,m\in\mathrm{N}$ 有 $f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$

令 $y=0$,由①得 $f(x+0)=f(x)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

因此又有 $f(0\cdot x)=0\cdot f(x)$

令 $y=-x$,得 $0=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)$

$\therefore f(-x)=-f(x)$

于是对 $\forall r\in Q$,有 $f(rx)=rf(x)$

令 $x=1$,并记 $f(1)=k$,于是对有理数 r,有

$$f(r)=f(r\cdot 1)=rf(1)=kr \quad ②$$

又 $\because f(x)$ 在 k 上单调

$\therefore$ 函数方程①的惟一解为 $f(x)=kx$

事实上,对无理数 x,取 x 的不足近似有理数 r_n 和过剩近似有理数 s_n,使得

$$r_n\longrightarrow x,s_n\longrightarrow x(n\to\infty)$$

不妨 $k\geqslant 0$,于是有不等式

$$kr_n=f(r_n)\leqslant f(x)\leqslant f(s_n)=ks_n$$

令 $n\to\infty$,则得到 $f(x)=kx$

即①的惟一解为 $f(x)=kx$

下列各方程均可作变换转化为柯西方程来求解.

(1) 若 $f(x+y)=f(x)\cdot f(g)$ 且 $f(x)\not\equiv 0$,则 $f(x)=a^x$

(2) 若 $f(xy)=f(x)+f(y)(x>0,y>0)$,则 $f(x)=\log_a x$

(3) 若 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)(x>0,y>0)$,则 $f(x)=x^a$

(4) 若 $f(x+y)=\frac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)+f(y)}$,则 $f(x)=\frac{k}{x}$

(5) 若 $f(x)\geqslant 0$,且 $x>0,y>0$ 时,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$
则 $f(x)=ax^2(a>0)$

(6) 若 $f(x)\geqslant 0$,且 $x>0,y>0$ 时有

$$f^2(x)+f^2(y)=f^2(x+y)$$

则 $f(x)=a\sqrt{x}(a>0)$

(7) 若 $f(x) \geqslant 0$,且 $f^2(x+y)+f^2(x-y)=2[f^2(x)+f^2(y)]$,则 $f(x)=a|x|(a>0)$

(8) 若 $f(x+y)=f(x)+f(y)+kxy$,则 $f(x)=ax^2+bx$

(9) 若 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)$,则 $f(x)=ax+b$

(10) 若 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$,则 $f(x)=ax+b$ 我们来证明(10)

例 2 设 $f(x)$ 在 k 上单调,且

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

求 $f(x)$

【分析】 **方法是转化成柯西方程解.**

解:设 $f(0)=b$,由已知有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}=f\left(\frac{(x+y)+0}{2}\right)=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}$$

得 $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$

即 $f(x+y)-f(0)=[f(x)-f(0)]+[f(y)-f(0)]$

记 $g(x)=f(x)-f(0)$

于是有柯西方程

$g(x)$ 在 k 上单调,且 $g(x+y)=g(x)+g(y)$

由柯西方程得 $g(x)=ax=f(x)-f(0)$

即 $f(x)=ax+b$

2. 关于确定周期函数的方程

周期函数的定义:$f(x+l)=f(x)(\forall x\in D$(定义域)且$(x\pm l)\in D, l\neq 0)$.这本身就是一个函数方程形式的定义,稍加变形,例如,映射 $f:R\to k$ 且满足 $f(x+l)=-f(x)$,那么由

$$f(x+2l)=-f(x+l)=-(-f(x))=f(x)$$

知,$f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数.

类似地,若 $f(x+l)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0,\forall x)$,那么 $f(x+2l)=\frac{1}{f(x+l)}=f(x)$,即 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期.

例 3 (1989.北京高一,复试)已知 $f(x)$ 是定义在实数集上的函数,且 $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$

(1) 试证:$f(x)$ 是周期函数

(2) 若 $f(1)=2+\sqrt{3}$,试求 $f(1989)$ 的值.

解:(1) $\because f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$

又 $\because f(x)\neq 1$,否则 $0=2$ 矛盾.

即 $1-f(x)\neq 0$

$\therefore f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

$$\therefore f[(x+2)+2]=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$$

$$\therefore f(x+8)=f[(x+4)+4]=\frac{1}{-f(x+4)}=\frac{1}{-\frac{1}{-f(x)}}=f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为周期函数且周期为 8

(2) $\because f(1)=2+\sqrt{3}$

$\therefore f(8k+1)=f(1)=2+\sqrt{3}(k\in Z)$

$$\therefore f(1989) = f(1985+4) = -\frac{1}{f(1985)}$$
$$= -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$$

例 4 设 $f: R \to R, a \neq 0$,且有

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} \qquad (\forall x)$$

证明:$f(x)$ 是周期函数.

证明:易知 $f(x) \geqslant \frac{1}{2} \quad (\forall x \in k)$

$$f(x+a) - \frac{1}{2} = \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$
$$\therefore \left(f(x+a) - \frac{1}{2}\right)^2 = f(x) - (f(x))^2 \overset{(*)}{=} \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - f(x)\right)^2$$
$$\therefore \left(f(x+2a) - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - f(x+a)\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - f(x)\right)^2$$
$$\therefore f(x+2a) - \frac{1}{2} = f(x) - \frac{1}{2}$$

$\therefore f(x+2a) = f(x)$,$2a$ 为周期.

当 $a = 1$ 时,$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right)$为满足条件的函数.

【评注】 此题应注(*)处的变形和以后的递推.

例 5 (1996.第 37 届 IMO 预选题)设 f 是一个以实数集 R 映射到自身的函数,并且任何 $x \in \mathrm{R}$ 均有 $|f(x)| \leqslant 1$,以及

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x+\frac{1}{6}\right) + f\left(x+\frac{1}{7}\right)$$

证明:f 是周期函数,即存在一个非零实数 c,使得对任何 $x \in \mathrm{R}$,成立 $f(x+c) = f(x)$

解:因为对 $\forall x \in \mathrm{R}$,有

$$f\left(x+\frac{13}{42}\right) + f(x) = f\left(x+\frac{7}{42}\right) + f\left(x+\frac{6}{42}\right),$$

故 $f\left(x+\frac{7}{42}\right) - f(x) = f\left(x+\frac{13}{42}\right) - f\left(x+\frac{6}{42}\right) = f\left(x+\frac{19}{43}\right) - f\left(x+\frac{12}{42}\right)$

$= \cdots = f\left(x+\frac{49}{42}\right) - f\left(x+\frac{42}{42}\right),$

即 $f\left(x+\frac{42}{42}\right) - f(x) = f\left(x+\frac{49}{42}\right) - f\left(x+\frac{7}{42}\right)$ ③

同样,有

$$f\left(x+\frac{7}{42}\right) - f\left(x+\frac{1}{42}\right) = f\left(x+\frac{14}{42}\right) - f\left(x+\frac{8}{42}\right)$$
$$= f\left(x+\frac{21}{42}\right) - f\left(x+\frac{15}{42}\right) = \cdots = f\left(x+\frac{49}{12}\right) - f\left(x+\frac{43}{42}\right)$$

即 $f\left(x+\frac{49}{42}\right) - f\left(x+\frac{7}{42}\right) = f\left(x+\frac{43}{42}\right) - f(x)$ ④

由 ③,④ 得

$$f\left(x+\frac{49}{42}\right) - f(x) = f\left(x+\frac{43}{42}\right) - f\left(x+\frac{1}{42}\right)$$
$$f\left(x+\frac{42}{42}\right) - f(x) = f\left(x+\frac{43}{42}\right) - f\left(x+\frac{1}{42}\right)$$
$$= f\left(x+\frac{44}{42}\right) - f\left(x+\frac{2}{42}\right) = \cdots = f\left(x+\frac{84}{42}\right) - f\left(x+\frac{42}{42}\right)$$

即 $f(x+1) - f(x) = f(x+2) - f(x+1)$

因此，$f(x+n)=f(x)+n[f(x+1)-f(x)]$ 对所有 $n\in\mathrm{N}$ 成立.

又因为对所有 $x\in\mathrm{R}$，$|f(x)|\leqslant 1$，即 $f(x)$ 有界，故只有 $f(x+1)-f(x)\equiv 0$

因此对所有 $x\in\mathrm{R}$，$f(x+1)=f(x)$，即 $f(x)$ 为周期函数.

例 6 (2000. 北京高一数学竞赛第三大题) $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，对任意的 $x\in\mathrm{R}$，都有 $f(x+3)\leqslant f(x)+3$ 和 $f(x+2)\geqslant f(x)+2$，设 $g(x)=f(x)-x$

(1) 求证：$g(x)$ 是周期函数；

(2) 如果 $f(998)=1002$，求 $f(2000)$ 的值.

解：(1) 由 $g(x)=f(x)-x$ 及 $f(x+3)\leqslant f(x)+3$ 得

$$\begin{aligned}g(x+6)&=f(x+6)-(x+6)\leqslant f(x+3)+3-x-6\\&\leqslant f(x)+3+3-x-6\\&=f(x)-x=g(x)\end{aligned}\qquad⑤$$

由 $g(x)=f(x)-x$ 及 $f(x+2)\geqslant f(x)+2$ 得

$$\begin{aligned}g(x+6)&=f(x+6)-(x+6)\geqslant f(x+4)+2-(x+6)\\&\geqslant f(x+2)+2+2-(x+6)\\&\geqslant f(x)+2+2+2-x-6\\&=f(x)-x=g(x)\end{aligned}\qquad⑥$$

由⑤、⑥可知，对任意实数 x，都有 $g(x+6)=g(x)$ 成立，即 $g(x)$ 是以 6 为周期的周期函数.

(2) 因为 $g(998)=f(998)-998=1002-998=4$

而 $998=6\times 166+2$

所以 $g(2)=g(998)=4$

$g(2000)=g(6\times 333+2)=g(2)=4$

所以 $f(2000)=g(2000)+2000=4+2000=2004$

【评注】 第一问，关键是运用已知条件，采取夹逼方法，推导出：

$$g(x+6)\leqslant g(x)\leqslant g(x+6)$$

从而有 $g(x+6)=g(x)$

例 7 (2002. 全国高中联赛一、10) 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，$f(1)=1$，且对任意 $x\in\mathrm{R}$ 都有

$$f(x+5)\geqslant f(x)+5$$
$$f(x+1)\leqslant f(x)+1$$

若 $g(x)=f(x)+1-x$，则 $g(2002)=$ ________.

【分析】 由例 6 受到启发，要求 $g(2002)$ 的值，关键要证明 $g(x)$ 是周期函数，并找到其周期.

解：由 $g(x)=f(x)+1-x$ 得

$f(x)=g(x)+x-1$

$\because f(x+5)\geqslant f(x)+5$

$\therefore g(x+5)+(x+5)-1\geqslant g(x)+(x-1)+5$

又 $\therefore f(x+1)\leqslant f(x)+1$

$\therefore g(x+1)+(x+1)-1\leqslant g(x)+(x-1)+1$

即 $g(x+5)\geqslant g(x)$，$g(x+1)\leqslant g(x)$

$\therefore g(x)\leqslant g(x+5)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+3)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x+1)\leqslant g(x)$

$\therefore g(x+1)=g(x)$

即 $g(x)$ 是周期为 1 的周期函数

又 $g(1)=1$

故 $g(2002)=1$

3. 关于函数值与界的估算

例 8 (1996. 北京高一复试试题二) 函数 $f(k)$ 是定义在N上，在N中取值的严格增函数，并且满足

条件 $f(f(k))=3k$,试求 $f(1)+f(9)+f(96)$ 的值.

[1] **解**:① 对 $k\in N, f(f(k))=3k$ ⑦

$\therefore f[f(f(k))]=f(3k)$

又 $f[f(f(k))]=3f(k)$

$\therefore f(3k)=3f(k)$ ⑧

② 试算一些函数值,若设 $f(1)=1$,则代入 ⑦ 得 $f(1)=3$,矛盾

故 $f(1)=a>1$ ⑨

从 ⑦ 有 $f(f(1))=f(a)$

从 ⑦ 有 $f(f(1))=3\times 1=3$

$\therefore f(a)=3$

③ 再由 $f(k)$ 严格递增,即 $1<a\Rightarrow f(1)<f(a)=3$.即 $1<a=f(1)<f(a)=3$,且 $f:N\to N$.

$\therefore$ 只能 $a=2$,$\therefore f(1)=2$,且 $f(2)=3$.

[2]① 初始函数值知道后,利用条件推算函数值如下:

$f(3)=f(3\times 1)\overset{⑧}{=\!=}3f(1)=3\times 2=6$

$f(6)=f(3\times 2)\overset{⑧}{=\!=}3f(2)=3\times 3=9$

$f(9)=f(3\times 3)=\!=3f(3)=3\times 6=18$

$f(18)=f(3\times 6)=\!=3f(6)=3\times 9=27$

$f(27)=f(3\times 9)=\!=3f(9)=9\times 6=54$

$f(54)=f(3\times 18)=\!=3f(18)=3\times 27=81$

$f(96)=f(3\times 32)=\!=3f(32)$

② 为计算 $f(32)$,需要新的思考,由上可知

n:27,…,54

$f(n)$:54,…,81

即自变量由 27 变到 54,增加 27 个数,函数值相应地由 54 增至 81,也增加 27 个数,由 f 的严格递增性可知.

$f(28)=55, f(29)=56, f(30)=57, f(31)=58, f(32)=59,\cdots$

而 $f(96)=f(3\times 32)=3f(32)=3\times 59=177$

$\therefore f(1)+f(9)+f(96)=2+18+177=197$

例 9 (2002.全国高中联赛试题 15) 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in R, a\neq 0)$ 满足条件:

(1) 当 $x\in R$ 时,$f(x-4)=f(2-x)$,且 $f(x)\geqslant x$

(2) 当 $x\in(0,2)$ 时,$f(x)\leqslant\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$

(3) $f(x)$ 在 R 上的最小值为 0

求最大的 $m(m>1)$,使得存在 $t\in R$,只要 $x\in[1,m]$,就有 $f(x+t)\leqslant x$.

解法一:$\because f(x-4)=f(2-x)$

$\therefore$ 函数图象关于 $x=-1$ 对称

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-1, b=2a$

由 (3) $x=-1$ 时,$y=0$,即 $a-b+c=0$

由(1)得,$f(1)\geqslant 1$,由(2)得,$f(1)\leqslant 1$

$\therefore f(1)=1$,即 $a+b+c=1$

又 $a-b+c=0$

$\therefore b=\frac{1}{2}, a=\frac{1}{4}, c=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

假设存在 $t\in\mathbf{R}$,只要 $x\in[1,m]$

就有 $f(x+t)\leqslant x$

取 $x=1$ 有 $f(t+1)\leqslant 1$

即 $\frac{1}{4}(t+1)^2+\frac{1}{2}(t+1)+\frac{1}{4}\leqslant 1$

解得 $-4\leqslant t\leqslant 0$

对固定的 $t\in[-4,0]$,取 $x=m$

有 $f(t+m)\leqslant m$

即 $\frac{1}{4}(t+m)^2+\frac{1}{2}(t+m)+\frac{1}{4}\leqslant m$

化简有 $m^2-2(1-t)m+(t^2+2t+1)\leqslant 0$

解得 $1-t-\sqrt{-4t}\leqslant m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$

于是有 $m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}\leqslant 1-(-4)+\sqrt{-4(-4)}=9$

当 $t=-4$ 时,对任意的 $x\in[1,9]$,恒有

$$
\begin{aligned}
f(x-4)-x&=\frac{1}{4}(x^2-10x+9)\\
&=\frac{1}{4}(x-1)(x-9)\\
&\leqslant 0
\end{aligned}
$$

所以 m 的最大值为 9

解法二: $f(x-4)=f(2-x)$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称.

$\therefore -\frac{b}{2a}=-1$,即 $b=2a$ ⑩

令 $g(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$

则直线 $y=x$ 与抛物线 $g(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ 相切于点 $A(1,1)$

又当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x)\geqslant x$

当 $x\in(0,2)$ 时,$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=g(x)$

由直线 $y=x$ 与抛物线 $g(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$ 的图象可知 $y=f(x)$ 必过点 $A(1,1)$

$\therefore a+b+c=1$ ⑪

又由条件(3)知 $f(-1)=0$

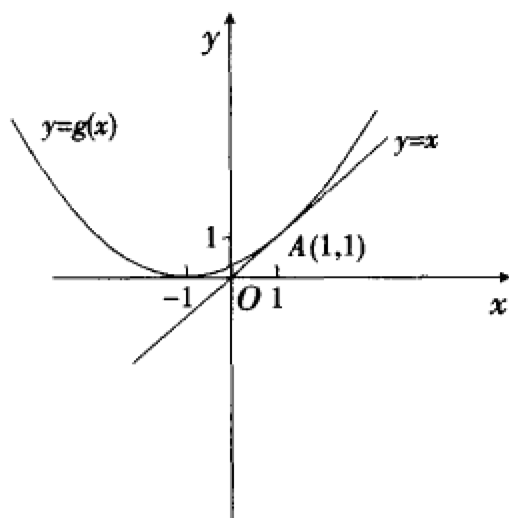
即 $a-b+c=0$ ⑫

联立⑩、⑪、⑫解得

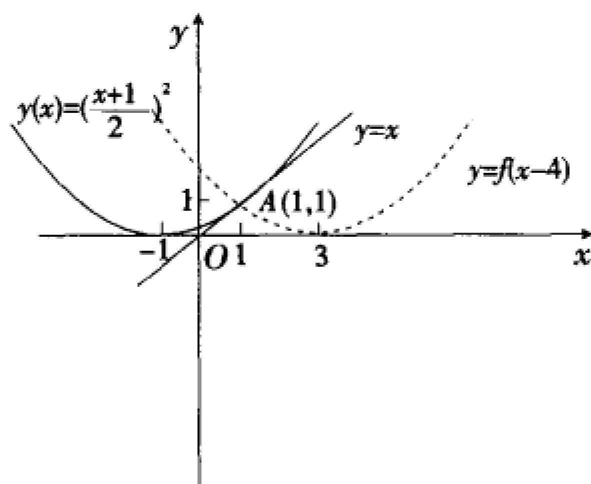
$a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

$y=f(x+t)(t\in\mathbf{R})$ 是将 $y=f(x)$ 的图象沿 x 轴正(负)方向右(左)平移 $|t|$ 个单位(其中 $t>0$ 是向左平移;$t<0$ 是向右平移),数形结合只要将 $y=f(x)$ 的图象向右移动 4 个单位,得 $y=x-4$



图①



图②

$y=f(x-4)$ 过点 $A(1,1)$,并且与 $y=x$ 的另一交点为$B(9,9)$.此时只要 $x\in[1,9]$,就有 $f(x-4)\leqslant x$;当 $t<-4$ 时,$f(1)>1$,将不满足条件,综上所述 m 的最大值为 9.

例 10 (1990.中国数学奥林匹克试题) 设函数 $f(x)$ 对 $x\geqslant 0$ 有定义,且满足条件:

(1) 对任何 $x,y\geqslant 0$, $f(x)\cdot f(y)\leqslant y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$

(2) 存在常数 $M>0$,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$|f(x)|\leqslant M$

求证:$f(x)\leqslant x^2$

证明:在题目条件(1) 中取 $x=y=0$ 就得到$[f(0)]^2\leqslant 0$

即 $f(0)=0$ ⑬

以下我们用反证法来证明:对任何非负实数 x 都有 $f(x)\leqslant x^2$ ⑭

假定对某个 $x_0>0$ 不等式 ⑭ 不成立,即 $f(x_0)>x_0^2$ ⑮

在题目条件(1) 中取 $x=y=x_0$ 可得

$$[f(x_0)]^2\leqslant 2{x_0}^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right) \tag{16}$$

由 ⑮、⑯ 有 $\quad {x_0}^4<2{x_0}^2 f\left(\frac{x_0}{2}\right)$

即 $\quad f\left(\frac{x_0}{2}\right)>\frac{1}{2}{x_0}^2$ ⑰

由题目条件(1) 容易看出,对任何 $x>0$ 都有

$$f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\frac{1}{2x^2}[f(x)]^2$$

据此,从 ⑰ 式出发,用归纳即可证明:对任何自然数 k,有

$$f\left(\frac{x_0}{2^k}\right)>2^{2^k-2k-1}{x_0}^2 \tag{18}$$

又因为

$2^k=(1+1)^k>1+k+\frac{k(k-1)}{2}=1+\frac{k+1}{2}k$

所以对 $k\geqslant 5$ 必有

$$2^k>1+3k \tag{19}$$

取足够大的自然数 $N\geqslant 5$ 使得

$$\frac{x_0}{2^N}\leqslant 1 \tag{20}$$

则根据题目的条件(2) 以及 ⑱,⑲,⑳ 式,可看到 $n\geqslant$ N 都有

$$M \geqslant f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) > 2^{2^n-2n-1}x_0{}^2 > 2^n x_0{}^2$$

但这不可能,因为 M 是常数,而 2^n 随着 n 的增大可任意大.这一矛盾证明了:对任何非负实数都有

$$f(x) \leqslant x^2$$

例 11 (1993.美国数学奥林匹克竞赛题)设函数 $f:[0,1] \longrightarrow R$ 满足:

(1)$f(x) \geqslant 0$ 对一切 $x \in [0,1]$ 成立

(2)$f(1) = 1$

(3)$f(x) + f(y) \leqslant f(x+y), x, y, x+y \in [0,1]$

求出最小的常数 c,使 $f(x) \leqslant cx$ 对一切满足上述条件的函数 f 及一切 $x \in [0,1]$ 都成立.

证明:最小常数 $c = 2$

首先证明:如果 f 满足(1),(2),(3),则 $f(x) \leqslant 2x$ 对一切 $x \in [0,1]$ 成立

由(3)与(1)得,$f(x) \leqslant f(x) + f(y) \leqslant f(x+y)$,即 $f(x)$ 在$[0,1]$上是增函数.

对 $x \in (0,1]$,取负整数 n,使$\frac{1}{2^{n+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^n}$,而由(3),$2f(x) \leqslant f(2x)$

所以 $2^n f(x) \leqslant 2^{n-1} f(2x) \leqslant 2^{n-2} f(2^2 x) \leqslant \cdots \leqslant f(2^n x) \leqslant f(1) = 1 < 2^{n+1} x$

即 $f(x) < 2x$

又显然有 $f(0) + f(1) \leqslant f(0+1) = f(1)$,所以由(1)有 $f(0) = 0$

于是 $f(x) \leqslant 2x, x \in [0,1]$

另一方面,令

$$f(x) = \begin{cases} 0\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ 1\left(\frac{1}{2} < x \leqslant 1\right) \end{cases}$$

这个函数显然满足(1)和(2)

设 $x, y, x+y$ 都在$[0,1]$内,由对称性可以假设 $x \leqslant \frac{1}{2}$,从而

$$f(x) + f(y) = f(y) \leqslant f(x+y)$$

即 $f(x)$ 满足题设的所有条件

如果 $0 < c < 2$,取 $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{c}\right)$,则 $f(x) = 1 > cx$,所以 2 为所求的最小常数.

例 12 (1996.中国数学奥林匹克)设 $f:\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{R}$,满足

(1)$f(1) = 2$

(2)$f(n+1) \geqslant f(n) \geqslant \frac{n}{n+1} f(2n)$

论 S 是满足上述条件的 f 全体,求最小自然数 M,使对任何 $f \in S$ 及 $n \in \mathrm{N}$,有 $f(n) < M$

【分析】 确定上界确小值,常常采用先估计后构造的思路,本题即应先估计$\{f(n)\}$的上界,鉴于 f 的单调性,也即考察$\{f(2^k)\}$的上界,从而由条件(2)得到突破口,再构造说明 M 是最小值即可.

证明:由(2),$f(n) \leqslant f(n+1)$,故 f 单增,现考察$\{f(2^k)\}$之上界.

由(2)$f(2n) \leqslant \frac{n+1}{n} f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) f(n)$.于是

$f(2^{k+1}) = f(2 \times 2^k) \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) f(2^k) \leqslant \cdots$

$\leqslant \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2}\right)(1+1) f(1)$

令 $\lambda_k = (1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$,则

$f(2^{k+1}) \leqslant 2\lambda_k, \lambda_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 5\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) < 5$,现假设 $\lambda_k \leqslant 5\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$,则有

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$
$$=5\left(1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{2k+1}}\right)$$
$$<5\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

于是对任意 $n\in \mathrm{N}$,取 k,使 $2^{k+1}\geqslant n$,我们归纳证明了 $f(n)\leqslant f(2^{k+1})\leqslant 2\lambda_k<10$

现在证明 $\min\limits_{f\in S}M=10$,即是满足条件的最小自然数 $M=10$.为此,只需要构造适当的 $f_0\in S$,它在某处的函数值大于 9,即可.

定义 $f_0:\mathrm{N}\longrightarrow \mathrm{R}, f_0(1)=2, f_0(n)=2\lambda_k, 2^k<n\leqslant 2^{k+1}(k=0,1,2,\cdots,\lambda_0=2)$,显然 $f_0(n+1)\geqslant f_0(n)$,现验证:$f_0(n)\geqslant \frac{n}{n+1}f_0(2n)$

$$2^k<n\leqslant 2^{k+1}, 2^{k+1}<2n\leqslant 2^{k+2}$$

$f_0(2n)=2\lambda_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)2\lambda_k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)f_0(n)=\frac{n+1}{n}f_0(n)$,取 $n=2^6$

即有 $f_0(2^6)\geqslant 2\lambda_5>9$

例 13 (第 12 届韩国数学奥林匹克竞赛题)设函数 $f(x)$ 对所有的有理数 m,n,都有

$$|f(m+n)-f(m)|\leqslant\frac{n}{m}$$

证明:对所有正整数 k,有

$$\sum_{i=1}^{k}|f(2^k)-f(2^i)|\leqslant\frac{k(k-1)}{2}$$

【分析】 用归纳法证明

证明:对 k 进行归纳

当 $k=1$ 时,左 $=0=$ 右

当 $k=2$ 时,左 $=|f(4)-f(2)|=|f(2+2)-f(2)|\leqslant 1=$ 右

设当 $k=n$ 时,结论成立,即

$$|f(2^n)-f(2)|+|f(2^n)-f(4)|+\cdots+|f(2^n)-f(2^{n-1})|+|f(2^n)-f(2^n)|\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

则当 $k=n+1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n+1}|f(2^{n+1})-f(2^i)|$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|f(2^{n+1})-f(2^n)+f(2^n)-f(2^i)|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(2^{n+1})-f(2^n)|+\sum_{i=1}^{n}|f(2^n)-f(2^i)|$$
$$\leqslant n|f(2^{n+1})-f(2^n)|+\sum_{i=1}^{n}|f(2^n)-f(2^i)|$$
$$\leqslant n|f(2^n+2^n)-f(2^n)|+\frac{n(n-1)}{2}$$
$$\leqslant n\times 1+\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{(n+1)[(n+1)-1]}{2}$$

即 $k=n+1$ 时结论也成立

4. 关于连续型函数方程

连续型函数方程是指函数方程中,函数的自变量在某区间内连续变化的情形,其求解方法在“知识要点与基本方法”中所谈的方法都能涉及到,如下只能选择性的举出一些实例进行分析.

例 14 (1994.亚太 MO)设 $f:R\longrightarrow R$,且满足

(1)$f(x)+f(y)+1\geqslant f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$

(2)$f(0)\geqslant f(x),x\in[0,1)$

(3)$-f(-1)=f(1)=1$

求出满足条件的函数.

解:在试探阶段中,先求出一些个别点上或部分段上的函数值.

令 $x=y=0,f(0+0)\geqslant f(0)+f(0),f(0)\leqslant 0$

由条件(2),当 $x\in[0,1)$ 时,$f(0)\geqslant f(x)$ 取 $x=\frac{1}{2}$,再由条件(1)得.

$$2f(0)+1\overset{(2)}{\geqslant}2f\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{(1)}{\geqslant}f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f(1)\overset{(3)}{=}1$$

所以 $f(0)\geqslant 0$,又已证 $f(0)\leqslant 0$,故 $f(0)=0$

研究 x 在(0,1)上的值,已有 $f(0)=0$,由条件(2)知,$f(x)\leqslant 0$,但 $f(x)$ 可能取负值吗?

如果 $f(x)<0(x\in(0,1))$,则也有 $f(1-x)\leqslant 0(x\in(0,1)$ 利用(1)有

$1>f(x)+f(1-x)+1\overset{(1)}{\geqslant}f(x+1-x)=f(1)=1$

矛盾,故 $f(x)\equiv 0,x\in(0,1)$

由条件(1)和(3),有

$f(x+1)\overset{(1)}{\geqslant}f(x)+f(1)\overset{(3)}{=\!=}f(x)+1$

$f(x)=\!=f(x+1-1)\overset{(1)}{\geqslant}f(x+1)+f(-1)\overset{(3)}{=}f(x+1)-1$

即 $\quad f(x+1)\leqslant f(x)+1$

所以 $\quad f(x+1)=f(x)+1,x\in R$

通过以上讨论可知,$f(x)$ 是高斯函数 —— 取整函数:$f(x)=[x]$

【注】 (1)解此题时,如果能有猜测的目标是$[x]$,那么证明过程就会快捷得多.

(2)取整函数$[x]$的表达式,还可以有

$[x]=x-\{x\},\{x\}$ 是 x 的小数部分,

$$[x]=\begin{cases}x-\dfrac{1}{\pi}arc\cot(\cot\pi x) & x\text{ 不是整数}\\ x & x\text{ 是整数}\end{cases}$$

例 15 (1996.世界城市际数学联赛试题(高年级))证明:不存在对任意实数 x 均满足 $f[f(x)]=x^2-1996$ 的函数 $f(x)$

【分析】 本题将采取"不动点"的方法证明,为此,我们给出一个定义.

定义:设 $F(x)$ 是关于 x 的一个代数函数,称方程 $F(x)=x$ 的根为函数 $F(x)$ 的不动点.

证明:令 $g(x)=f[f(x)]=x^2-1996$,设 a,b 为 $x^2-1996=x$ 的两个实根,则 a,b 是 $g(x)$ 的不动点,设 $f(a)=p$,则 $f[f(p)]=f[f(f(a))]=f(a)=p$

即 p 也是 $g(x)$ 的不动点,$p\in\{a,b\}$

同理,$f(b)\in\{a,b\}$

令 $h(x)=g[g(x)]=(x^2-1996)^2-1996$,则

$h(x)=x\Leftrightarrow(x^2-1996)^2-1996=x$

$\Leftrightarrow(x^2-x-1996)(x^2+x-1995)=0$

即 $h(x)$ 存在四个不动点 a,b,c,d.

$h[g(c)]=g[h(c)]=g(c)$.

$g(c)$ 是 $h(x)$ 的不动点,显然 $g(c)\neq a,g(c)\neq b,g(c)\neq c$,故 $g(c)=d,g(d)=g[g(c)]=c$.

令 $f(c)=r$,则 $h[f(c)]=f[h(c)]=f(c)$,即 r 亦是$h(x)$ 的不动点.

若 $r\in\{a,b\}$,则 $d=f(r)\in\{a,b\}$,这是不可能的;若 $r=c$,则 $g(c)=f(r)=f(c)=r=c$,这是不可能的;若 $r=d$,则 $g(c)=f(r)=f(d)=d,g(d)=f(d)=d$,这是不可能的.

综上所述,满足条件的函数 $f(x)$ 不存在.

例 16 (1994.第35届IMO)设 S 是所有大于 -1 的实数集合,确定所有的函数 $f:S\longrightarrow S$,使得满足下面两个条件:

(i) 对于 S 内所有 x 和 y,有

$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$

(ii) 在区间 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 的每一个盾,$\dfrac{f(x)}{x}$ 是严格递增的.

解:在条件(i) 中,令 $x=y$,得

$$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x) \quad ㉑$$

则 $x+f(x)+xf(x)$ 是 f 的一个不动点(即使得 $f(z)=z$ 成立的 z)

设 $A=x+f(x)+xf(x)$,在式 ㉑ 中,令 $x=A$,得

$$\begin{cases}f(A)=A\\ f(A+f(A)+Af(A))=A+f(A)+Af(A)\end{cases}$$

$\Rightarrow f(A^2+2A)=A^2+2A$

所以 A^2+2A 也是f 的一个不动点

若 $A\in(-1,0)$,则有

$A^2+2A=(A+1)^2-1\in(-1,0)$,且 $A^2+2A\neq A$

从而,$(-1,0)$ 中有两个不动点,与$\dfrac{f(x)}{x}$ 在$(-1,0)$ 内严格递增矛盾.

若 $A\in(0,+\infty)$,则 $A^2+2A\in(0,+\infty),A^2+2A\neq A$.这也与$\dfrac{f(x)}{x}$ 在$(0,+\infty)$ 上严格递增矛盾.

所以 $A=0$

即 $x+f(x)+xf(x)=0$

解得 $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$

下面验证 $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$ 确实符合条件

显然,$\dfrac{f(x)}{x}=-\dfrac{1}{1+x}$ 在S 中严格递增.

对任意的 $x,y\in S$,有

$$\begin{aligned}f(x+f(y)+xf(y))&=f(x+\frac{-y}{1+y}+\frac{-y}{1+y}\cdot x)\\&=f\left(\frac{x-y}{1+y}\right)=-\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}=\frac{y-x}{1+x}\end{aligned}$$

$$y+f(x)+yf(x)$$

$$=y+\frac{-x}{1+x}+\frac{-x}{1+x}\cdot y=\frac{y-x}{1+x}$$

从而,条件(1) 成立

因此,所求的所有的函数为 $f(x)=-\dfrac{x}{1+x}$

例 17 (1994.中国数学奥林匹克)求适合以下条件的所有函数 $f:[1,+\infty)\longrightarrow[1,+\infty)$.

(1)$f(x)\leqslant 2(x+1)$

(2)$f(x+1)=\dfrac{1}{x}[(f(x))^2-1]$

【分析】 本题所给的式子比较复杂,但仔细观察不难得到 $f(x)=x+1$ 这一个函数,然后利用条件对 $g(x)=f(x)-x-1$ 进行夹逼,利用不等式性质和极限的思想论证 $g(x)=0$

解:易见 $f(x)=x+1$ 满足条件,下面证明这是惟一符合要求的函数.

一方面,由(2)得:$f(x)=\sqrt{1+xf(x+1)}$ ㉒

那么,若设 $f(x)\leqslant a(x+1)$,其中 $a>1$ 且任意,

则 $f(x+1)\leqslant a[(x+1)+1]=a(x+2)$

代入㉒ $f(x)=\sqrt{1+xf(x+1)}$

$$\leqslant\sqrt{1+x\cdot a(x+2)}\leqslant\sqrt{a+x\cdot a(x+2)}$$

$$\leqslant\sqrt{a(x^2+2x+1)}=a^{\frac{1}{2}}(x+1)$$

即 $f(x)\leqslant a^{\frac{1}{2}}(x+1)$ ㉓

那么运用㉒到㉓的递推关系

由已知 $f(x)\leqslant 2(x+1)$ 可推出 $f(x)\leqslant 2^{\frac{1}{2}}(x+1)$

再运用可逐步推出:$f(x)\leqslant 2^{\frac{1}{2^n}}(x+1)$ ㉔

于是令 $n\to\infty$ 从㉔有 $f(x)\leqslant x+1$ ㉕

另一方面 $\because f(x)\geqslant 1$,$\therefore f(x+1)\geqslant 1$,由㉒有

$$f(x)\geqslant\sqrt{1+x}\geqslant x^{\frac{1}{2}}=x^{1-\frac{1}{2}} \quad ㉖$$

进行数学归纳

假设,$f(x)\geqslant x^{1-\frac{1}{2^n}}$,$\therefore f(x+1)\geqslant x^{1-\frac{1}{2^n}}$

$\therefore f(x)=\sqrt{1+xf(x+1)}\geqslant\sqrt{1+x\cdot x^{1-\frac{1}{2^n}}}=\sqrt{1+x^{2-\frac{1}{2^n}}}$

$$\geqslant\sqrt{x^{2-\frac{1}{2^n}}}=x^{1-\frac{1}{2^{n+1}}}$$

$\therefore$ 由数学归纳可知:恒有 $f(x)\geqslant x^{1-\frac{1}{2^n}}$

令 $n\to+\infty$,则 $f(x)\geqslant x$ ㉗

进而以㉗为基础,再进行第二循环的数学归纳.

假设 $f(x)\geqslant x+1-\dfrac{1}{2^n}$($n\geqslant 0$,当 $n=0$ 时为㉗)

则 $f(x)=\sqrt{1+xf(x+1)}\geqslant\sqrt{1+x\left(x+1+1-\dfrac{1}{2^n}\right)}$

$$>\sqrt{x^2+2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2}$$

$$=x+\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

则由数学归纳法知:

恒有 $f(x)>x+1-\dfrac{1}{2^n}$

令 $n\to+\infty$ 得 $f(x)\geqslant x+1$ ㉘

由㉕,㉘可知:$f(x)=x+1$

另解:易见 $f(x)=x+1$ 满足条件,下面证明这是惟一符合要求的函数.

令 $g(x)=f(x)-(x+1)$.由(2)有

$|g(x+1)|=|f(x+1)-(x+2)|$

$$\overset{(2)}{=}\frac{|f^2(x)-(x+1)^2|}{x}$$

$= |g(x)| \cdot \dfrac{f(x)+x+1}{x}$

因　$f(x) \geqslant 1$,故

$|g(x)| = |g(x+1)| \cdot \dfrac{x}{f(x)+x+1} \leqslant \dfrac{x}{x+2} \cdot |g(x+1)|$　㉙

$\therefore 1 \leqslant f(x) \leqslant 2(x+1)$

即　$-x \leqslant g(x) \leqslant x+1$

$\therefore$　$-(x+1) \leqslant g(x+1) \leqslant x+2$

代入㉙得　$|g(x)| \leqslant \dfrac{x}{x+2} \cdot (x+2) = x = \dfrac{x(x+1)}{x+1}$　㉚

以㉚为基础进行数学归纳.

假设　$|g(x)| \leqslant \dfrac{x(x+1)}{x+k} \therefore |g(x+1)| \leqslant \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+k+1}$　㉛

㉛代入㉙得　$|g(x)| \leqslant \dfrac{x(x+1)}{x+k+1}$

因此,对任何自然数 n,都有

$|g(x)| \leqslant \dfrac{x(x+1)}{x+n}$

令 $n \to \infty$,有 $g(x) = 0$

从而　$f(x) = x+1$ 是满足本题条件的惟一函数.

【评注】　另解不但比原解减少了一个循环的数学归纳,而引进绝对值.使讨论过程富于技巧性,别具一格.

例 18　(1996.中国数学奥林匹克)设函数 $f:\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 适合条件.

$f(x^3+y^3) = (x+y) \cdot \{[f(x)]^2 - f(x) \cdot f(y) + [f(y)]^2\}, x, y \in \mathrm{R}$

试证:对一切 $x \in \mathrm{R}$,都有 $f(1996x) = 1996f(x)$

【分析】　所求式中 1996 显然与题设无很大关系,令 $n = 1996$,则需证 $f(nx) = nf(x)$.另一方面分别取 $x = y = 0$,可得到 $f(0) = 0$ 和 $f(x^3) = x[f(x)]^2$,从而作变换可得 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}[f(x^{\frac{1}{3}})]^2$,进一步呢?结合要证的结论,则想到从满足 $f(ax) = af(x)$ 的 a 的特点着手考虑.

证:$f(x^3+y^3) = (x+y)\{[f(x)]^2 - f(x) \cdot f(y) + [f(y)]^2\}$　㉜

在㉜中令 $x = y = 0$,得到 $f(0) = 0$

在㉜中令 $y = 0$ 得到 $f(x^3) = x \cdot [f(x)]^2 \quad x \in \mathrm{R}$　㉝

㉝式又可写成

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}[f(x^{\frac{1}{3}})]^2 \qquad x \in \mathrm{R} \tag{34}$$

由此可知,函数 $f(x)$ 与 x 广义同号,即当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) \geqslant 0$,当 $x \leqslant 0$ 时,$f(x) \leqslant 0$

令　$S = \{a > 0 \mid f(ax) = af(x), x \in \mathrm{R}\}$

于是问题转化为 1996 是否属于 S

显然 $1 \in S$,接着证 $a \in S$,则 $a^{\frac{1}{3}} \in S$

事实上,由㉝式及 S 的定义,有

$ax[f(x)]^2 \overset{㉝}{=} a \cdot f(x^3) \overset{S\text{的定义}}{=} f(ax^3) = f[(a^{\frac{1}{3}}x)^3] \overset{㉝}{=} (a^{\frac{1}{3}}x)[f(a^{\frac{1}{3}}x)]^2$

约去公因式 $a^{\frac{1}{3}}x$,得到　$a^{\frac{2}{3}}[f(x)]^2 = [f(a^{\frac{1}{3}}x)]^2$

即　$[a^{\frac{1}{3}}f(x)]^2 = [f(a^{\frac{1}{3}}x)]^2$

再利用 $f(x)$ 与 x 的广义同号性可得

$a^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = f(a^{\frac{1}{3}}x)$　㉟

㉟表明 $a^{\frac{1}{3}} \in S$

于是上述我们证明了当 $a \in S$ 时，有 $a^{\frac{1}{3}} \in S$

因此可证，当 $a,b \in S$ 时，$a+b \in S$，事实上，据 ㉜ ~ ㉟，我们有

$f[(a+b)x] = f[(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3]$

$\overset{㉜}{=}(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\cdot x^{\frac{1}{3}}\{[f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})]^2 - f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\cdot f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}) + [f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})]^2\}$

$\overset{㉟}{=}(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})\cdot x^{\frac{1}{3}}\{[a^{\frac{1}{3}}f(x^{\frac{1}{3}})]^2 - a^{\frac{1}{3}}f(x^{\frac{1}{3}})\cdot b^{\frac{1}{3}}f(x^{\frac{1}{3}}) + [b^{\frac{1}{3}}f(x^{\frac{1}{3}})]^2\}$

$= (a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) - x^{\frac{1}{3}}\cdot[f(x^{\frac{1}{3}})]^2$

$\overset{㉞}{=}(a+b)f(x) \quad x \in \mathrm{R}$

进而，因为 $1 \in S$，所 $2 = 1+1 \in S$，再依次类推可知：任意自然数 n 都属于 S

$\therefore f(nx) = nf(x)$

特别取 $n = 1996$，则有 $f(1996x) = 1996f(x)$

【评注】 上述解决本题思想应当巩固，同类练习可做：

设 f 是定义在 $(1,+\infty)$ 上，且在 $(1,+\infty)$ 中取值的函数，满足条件，对任何 $x,y>1$，及 $u,v>0$ 都成立.

$$f(x^u y^v) \leqslant [f(x)]^{\frac{1}{4u}} \cdot [f(y)]^{\frac{1}{4v}}$$

试确定所有这样的函数 f

例 19 (2001.第 42 届 IMO 中国队选拔赛试题三）给定大于1 的整数 k，记 R 为全体实数组成的集合，求所有函数 f;R ⟶ R，使得对 R 中的一切 x 和 y，都有

$$f[x^k + f(y)] = y + [f(x)]^k \qquad (*)$$

【分析】 显见 $f(x) = x$ 是一解，且 k 为奇数时，$f(x) = -x$ 亦为一解，故可设法证明无其余的解，为此，应首先将原方程尽量化简为熟知的，如柯西方程 $f(x+y) = f(x)+f(y)$ 等.在解题过程中不会分奇偶讨论等.

解： 设 $f(0) = a$，令 $x = 0$，则由 $(*)$ 有

$$f[f(y)] = y + a^k \qquad ㊱$$

用 $f(y)$ 代替式中的 y，可得

$$f[x^k + f(f(y))] = f(y) + [f(x)]^k \qquad ㊲$$

由 ㊱ 可知，㊲ 即为

$$f(x^k + y + a^k) = f(y) + [f(x)]^k \qquad ㊳$$

所以 $f[f(x^k + y + a^k)]$

$= f[f(y) + (f(x))^k]$

$\overset{(*)}{=} y + [f(f(x))]^k$

$\overset{㊱}{=} y + (x + a^k)^k$

而由 ㊱ 有 $f[f(x^k + y + a^k)] = (x^k + y + a^k) + a^k = x^k + y + 2a^k$

$\therefore x^k + 2a^k \equiv (x + a^k)^k \quad x \in \mathrm{R}$

$\therefore a^k = 0$ 即 $a = 0$ 即 $f(0) = 0$

$\therefore$ 由 ㊱ 可知 $\quad f(f(x)) = x \qquad ㊴$

而 $f(x+y) \overset{㊴}{=} f(x + f(f(y)))$

$= f[(x^{\frac{1}{k}})^k + f(f(y))]$

$\overset{(*)}{=} f(y) + [f(x^{\frac{1}{k}})]^k \qquad ㊵$

其中 k 为偶数时，限制 $x \in \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$

如下分两种情形讨论

(Ⅰ)k 为偶数

由 ㊵ 可知，$f(x)$ 在 R 上单调递增

若存在 $x_0 \in \mathrm{R}, f(x_0) \neq x_0$

当 $x_0 < f(x_0)$ 时，有 $x_0 < f(x_0) \leqslant f(f(x_0)) \overset{㊴}{=} x_0$，矛盾

当 $x_0 > f(x_0)$ 时，有 $x_0 > f(x_0) \geqslant f(f(x_0)) \overset{㊴}{=} x_0$ 矛盾

所以不存在 $x_0 \in \mathrm{R}$，使 $f(x_0) \neq x_0$

即　对一切 $x \in \mathrm{R}$ 有 $f(x) = x$

(Ⅱ)k 为奇数

在(*)中令 $y = 0$，有 $f(x^k) = (f(x))^k$

从而　$(f(x^{\frac{1}{k}}))^k = f(x)\quad x \in \mathrm{R}$　㊶

∴ 由 ㊵ 和 ㊶ 有

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{㊷}$$

由 ㊷ 式，据例 1 的分析可知对任意有理 a，有

$$f(ax) = af(x) \text{ 且 } \forall x \in \mathrm{R}, f(x) + f(-x) = 0 \tag{㊸}$$

由 ㊶、㊷ 有

$$f((a + x)^k) \overset{㊶}{=} (f(a + x))^k \overset{㊷}{=} (f(t) + f(x))^k$$

从而　$f\left[\sum_{s=0}^{k} C_k^s a^s x^{k-s}\right] = \sum_{s=0}^{k} C_k^s (f(a))^s (f(x))^{k-s}$

由 ㊷、㊸ 及上式可知，对任意有理数 a，有

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{k} C_k^s t^s f(x^{k-s}) &\overset{㊶}{=} \sum_{s=0}^{k} C_k^s f(t^s) \cdot (f(x))^{k-s} \\ &= \sum_{s=0}^{k} C_k^s f(t^s \cdot 1^s) \cdot (f(x))^{k-s} \\ &\overset{㊸}{=} \sum_{s=0}^{k} C_k^s t^s (f(1^s)) \cdot (f(x))^{k-s} \\ &\overset{㊶}{=} \sum_{s=0}^{k} C_k^s t^s (f(1))^s \cdot (f(x))^{k-s}\end{aligned} \tag{㊹}$$

从而 $f(x^{k-s}) = (f(1))^s \cdot (f(x))^{k-s}, s \in \{0,1,\cdots,k\}$　㊺

令　$s = k, x = 1$，有

$f(1) = (f(1))^k$　㊻

即　$f(1)^{k-1} = 1$

∵ $k - 1$ 是偶数 ∴ $f(1) = \pm 1$　㊼

(i) 若 $f(1) = 1$，则由 ㊺ 有

$$f(x^{k-s}) = (f(x))^{k-s}$$

令 $s = k - 2 \geqslant 2$，则 $f(x^2) = (f(x))^2$

所以 $x > 0$ 时，$f(x) \geqslant 0$，由 ㊵ 知 $f(x)$ 在 R 上单调递增，则同(Ⅰ)易得 $f(x) = x$

(ii) 若 $f(1) = -1$，则由 ㊺ 有　$f(x^{k-s}) = (-1)^s \cdot (f(x))^{k-s}$

令 $s = k - 2$ 为奇数，则有 $f(x^2) = -(f(x))^2$

由 ㊵ 知　$f(x)$ 在 R 上单调递减

令　$g(x) = -f(x)$. 所以 $g(x) = f(-x)$

所以　$g(x)$ 在 R 上单调递增

且　$g(g(x)) = -f(-f(x)) = f(f(x)) = x$

同(Ⅰ)可得　$g(x) = x$

所以　$f(x) = -g(x) = -x$

经检验 $f(x)=x(k\in\mathrm{N}^*,k\geqslant 2)$ 以及 $f(x)=-x(k\geqslant 3,k$ 为奇数) 均为原方程的解

综上所述,原方程的解为

$$\begin{cases} f(x)=x & (k\text{ 为偶数}) \\ f(x)=x\text{ 或 }f(x)=-x & (k\text{ 为奇数}) \end{cases}$$

5. 关于离散型函数方程

例 20 (1995.中国台湾数学奥林匹克)N 是全体正整数构成的集合,设 f、g 是 $\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{N}$ 的映射,其中 f 是满射,g 是单射,且 $\forall n\in\mathrm{N}$,有 $f(n)\geqslant g(n)$.求证:$f=g$

【分析】 应用第二数学归纳法.

证明: $\forall k\in\mathrm{N}$,令 $m_k=\min\{x\mid f(x)=k\}$ 则 $f(m_k)=k$

下面用归纳法证明:$\forall k\in\mathrm{N}$,有 $g(m_k)=k$.

当 $k=1$ 时,$\because g(m_1)\leqslant f(m_1)=1$

$\therefore g(m_1)=1$

假设对于 $k\leqslant s$ 时结论成立.

那么对于 $k=s+1$ 时

$\because g(m_{s+1})\leqslant f(m_{s+1})=s+1$

又由归纳假设知 $g(m_j)=j,j=1,2,\cdots,s$,而 g 是单射.

$\therefore g(m_{s+1})=s+1$

由归纳法原理知结论成立.

$\because\forall k\in\mathrm{N}$,有 $g(m_k)=k$,$\therefore g$ 是满射,又 g 是单射,从而知 g 是双射.

$\therefore\{m_k\mid k\in\mathrm{N}\}=\mathrm{N}$

综上知 $f=g$

例 21 (1995.中国数学奥林匹克)设 $f:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{N}$,满足

(1)$f(1)=1$

(2)$3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n))$

(3)$f(2n)<6f(n)$

试求 $f(k)+f(l)=293$ 的所有 $k<l$ 的解.

【分析】 题中 f 为正整数集上的自身映射,故可利用整数的性质对关系式进行代换.

解: 由题设得

$3f(n)\cdot[f(2n+1)-f(2n)]=f(2n)<6f(n)$ ㊽

所以 $0<f(2n+1)-f(2n)<2$

从而 $f(2n+1)-f(2n)=1$

即 $f(2n+1)=f(2n)+1$ ㊾

㊾代入㊽得 $f(2n)=3f(n)$ ㊿

将 n 表示成二进制,设 $n=2^{m_1}+\cdots+2^{m_s}$,其中 $m_1>\cdots>m_s\geqslant 0$

下面用数学归纳法证明 $f(2^{m_1}+\cdots+2^{m_s})=3^{m_1}+\cdots+3^{m_s}$ (51)

当 $n=1=2^0$ 时,

$f(2^0)=f(1)=1=3^0$,结论成立.

假设当 $n\leqslant k=2^{m_1}+\cdots+2^{m_s}$ 时,$(m_1>\cdots>m_s)$ 结论成立.

当 $n=k+1=2^{m_1}+\cdots+2^{m_s}+2^0$ 时,分奇偶性讨论:如果 k 为偶数,则 $m_s>0$,由㊾及归纳假设,得

$$f(k+1)=f(k)+1=3^{m_1}+\cdots+3^{m_s}+3^0$$

即 $f(2^{m_1}+\cdots+2^{m_s}+2^0)=3^{m_1}+\cdots+3^{m_s}+3^0$,结论成立.

如果 k 为奇数,则 $m_s=0$,由㊿式

有 $f(k+1)=3f\left(\frac{k+1}{2}\right)$，其中 $k+1=2^{m_1}+\cdots+2^1$

而 $f\left(\frac{k+1}{2}\right)=f(2^{m_1-1}+\cdots+2^0)=3^{m_1-1}+\cdots+3^0$

所以 $f(k+1)=3(3^{m_1-1}+\cdots+3^0)=3^{m_1}+\cdots+3^1$

即 $f(2^{m_1}+\cdots+2^1)=3^{m_1}+\cdots+3^0$

所以 $f(2^{m_1}+\cdots+2^{m_s})=3^{m_1}+\cdots+3^{m_s}$ 成立，其中 $m_1>\cdots>m_s$

设 $k=m_1+\cdots+m_s<l=n_1+\cdots+n_t$

由题意 $3^{m_1}+\cdots+3^{m_s}+3^{n_1}+\cdots+3^{n_t}$

$=293=3^5+3^3+2\cdot 3^2+3+2\cdot 3^0$

由于右式中 3^2 和 3^0 项的系数均为2，所以在 l,k 的二进制表达式中都含有 2^2 和 2^0 的项，因为 $k<1$，所以最高次项 2^5 在 l 中，2^3 和 2 在 l 或 k 的二进制表达式中出现，共有 4 种情况：

(1) $k=2^2+2^0=5$；$l=2^5+2^3+2^2+2+2^0=47$

(2) $k=2^2+2+2^0=7$；$l=2^5+2^3+2^2+2^0=45$

(3) $k=2^3+2^2+2^0=13$；$l=2^5+2^2+2+2^0=39$

(4) $k=2^3+2^2+2+2^0=15$；$l=2^5+2^2+2^0=37$。所以方程 $f(k)+f(l)=293$，$k<l$ 的解为 $(5,47)$；$(7,45)$；$(13,39)$；$(15,37)$

【评注】 此题中最难的一步是用归纳法证明 $f(n)$ 的表达式，应注意推导出的式子与计算所得的数据的特征，进行猜想，归纳．二进制的应用是此题的关键．

例 22 （1999．越南数学奥林匹克）设 T 是由所有不超过 1999 的非负整数组成的集合，N 是由所有非负整数组成的集合．试找出所有满足下列条件的 $f:\mathrm{N}\longrightarrow\mathrm{T}$

(i) 对所有的 $t\in T$，有 $f(t)=t$

(ii) 对所有的 $m,n\in\mathrm{N}$，有 $f(m+n)=f(f(m)+f(n))$

解：设 $f(2000)=u$，$u\in\mathrm{T}$，记 $p=2000-u$，对所有 $k\geqslant 2000$，用归纳法证明，都有

$$f(k)=\max\{l\in\mathrm{T}\mid k\equiv l(\bmod p)\} \tag{52}$$

首先，当 $k=2000$ 时，$2000\equiv u(\bmod p)$ 且 $u+p>\max T$．即 $2000\notin\mathrm{T}$，故

$$f(2000)=u=\max\{l\in\mathrm{T}\mid l\equiv 2000(\bmod p)\}$$

即 这时式 (52) 成立．

假设式 (52) 已对正整数 $k(k\geqslant 2000)$ 成立，考察 f 的自变量为 $k+1$ 时的情形

由条(ii)得 $f(k+1)=f(f(k)+f(1))=f(f(k)+1)$

(1) 当 $f(k)\leqslant 1998$ 时，$f(k)+1\leqslant 1999$

故 $f(k+1)=f(k)+1$

由归纳假设得 $f(k)\equiv k(\bmod p)$，且 $f(k)+p\geqslant 2000$

$f(k)+1\equiv k+1(\bmod p)$ 且 $p+f(k)+1>2000$

即 $f(k)+p+1\in\mathrm{T}$

$\therefore f(k+1)=f(k)+1=\max\{l\in\mathrm{T}\mid l=k+1(\bmod p)\}$，即这时 (52) 也成立．

(2) 当 $f(k)=1999$ 时，$f(k+1)=f(2000)=u$

由归纳假设得

$k\equiv f(k)\equiv 1999(\bmod p)$

$\therefore k+1\equiv 2000\equiv u(\bmod p)$

而 $u+p>\max T$，即 $u+p\notin\mathrm{T}$

$\therefore f(k+1)=u=\max\{l\in\mathrm{T}\mid l=k+1(\bmod p)\}$

即 这时 (52) 也成立．

因此，式 (52) 对自变量为 $k+1$ 的情况也成立．

故 $f(k)=\max\{l\in\mathrm{T}\mid l\equiv k(\bmod p)\}$ 对 $\forall k\geqslant 2000$ 成立．

再根据条件(ⅰ)得到函数 f 的全部表达式

$$f(k)=\begin{cases}k & (\text{当 } 0\leqslant k\leqslant 1999)\\ \max\{l\in T\mid l\equiv k(\bmod p)\} & (\text{当 } k\geqslant 2000)\end{cases} \quad ⑬$$

其中 $p=2000-u$

下面证明如上的 f 满足条件(ii).

(1) 当 $m\geqslant 2000$ 时,注意到 $t\equiv f(t)(\bmod p)\ \forall t\in N, f(m)+f(n)\equiv m+n=f(m+n)(\bmod p)$

若 $f(m)+f(n)\geqslant 2000$

$f(f(m)+f(n))=\max\{l\in T\mid l\equiv f(m)+f(n)(\bmod p)\}$

而 $m+n\geqslant 2000, f(m+n)+p>\max T$

$\therefore f(f(m)+f(n))=f(m+n)$

若 $f(m)+f(n)\leqslant 1999$

$$f(f(m)+f(n))=f(m)+f(n)$$

由于 $m\geqslant 2000$,所以

$$f(m)+f(n)+p\geqslant f(m)+p>\max T$$

故 $f(m+n)=f(m)+f(n)=f(f(m)+f(n))$

总而言之,在 $m\geqslant 2000$ 时,⑬ 满足条件(ii)

(2) 当 $n\geqslant 2000$ 时,由于条件中 m,n 对称,所以 ⑬ 也满足条件(ii).

(3) 当 $m,n\leqslant 1999$ 时,条件(ii)化为 $f(m+n)=f(m+n)$ 这是恒等式.

综上所述,⑬ 中的 f 满足题意,所以

$$f(k)=\begin{cases}k & (\text{当 } 0\leqslant k\leqslant 1999)\\ \max\{l\in T\mid l\equiv k(\bmod p)\} & (\text{当 } k\geqslant 2000)\end{cases}$$

其中 $p=2000-u$

当 u 取遍 $0,1,2,\cdots,1999$ 时,给出满足条件的所有 2000 个解.

例 23 (1999.荷兰数学奥林匹克试题)已知 $A_n=\{1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 5), S\subseteq A_n$,若 $x\in S$ 且 $x-1,x+1$ 均不属于 S,则称 x 为 S 的一个孤立点.用 $f(n)$ 表示 A_n 的无孤立点的5元子集的个数,求 $f(n)$

解法一:设 $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 是 A_n 的一个无孤立点的 5 元子集,$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$,则 $a_3\in\{3,4,\cdots,n-2\}$,对于 $a_3=k,3\leqslant k\leqslant n-2$,$\because 9$ 无孤立点,故有如下 3 种情况.

(1)$a_1+2=a_2+1=a_3=a_4-1=a_5-2$

(2)$a_1+2=a_2+1=a_3<a_4-1=a_5-2$

(3)$a_1+2=a_2+1<a_3=a_4-1=a_5=2$

对于(1),$S=3k-2,k-1,k,k+1,k+2!$,满足条件的 S 有 1 个

对于(2),$\because a_4>a_3+1=k+1$

$\therefore S=\{k-2,k-1,k,j,j+1\}k+2\leqslant j\leqslant n-1$,满足条件的 S 有 $(n-1)-(k+1)=n-k-2$ 个.

对于(3)$\because a_2<a_3-1=k-1$

$\therefore S=\{j-1,j,k,k+1,k+2\},2\leqslant j\leqslant k-2$,满足条件的 S 有 $(k-2)-1=k-3$ 个

由加法原理,当 $a_3=k$ 时,满足条件的 S 有 $1+(n-k-2)+(k-3)=(n-4)$ 个

$$\therefore f(n)=\sum_{k=3}^{n-2}(n-4)=(n-4)^2$$

解法二:设 S 是 A_n 的任一个无孤立点的 5 元子集

$$\text{令 } a_i=\begin{cases}1 & \text{当 } i\in S\\ 0 & \text{当 } i\notin S, i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

作序列 $\quad a_1,a_2,\cdots,a_n \quad ⑭$

则序列 ⑭ 中恰好有 5 个 1,$(n-5)$ 个 0,又因 S 无孤立点,故序列 ⑭ 中必有连续的 3 个 1 和连续的 2 个 1,将连续的 3 个 1 看成 a,连续的 2 个 1 看成 b,则序列 ⑭ 可看成 $n-4$ 个选两个位置排 a,b,故共

有$(n-4)(n-3)$种.

但在上述计数中,当5个1连续出现时,计数有重复,因为此时可将前3个1看成连续的3个1,也可将后3个1看成连续的3个1,由于连续5个1出现的情况共有$n-4$种,所以$f(n)=(n-3)(n-4)-(n-4)=(n-4)^2$

解法三:考虑$f(n)$满足的递归关系

对于A_{n+1}的一个无孤立的5元子集S

(1)若$n+1\notin S$,则$S\subseteq A_n$,即S是A_n的一个无孤立点的5元子集.

(2)若$n+1\in S$,$\because S$无孤立点,$\therefore n\in S$.若$n-1\in S$,则S的余下两个元素为$\{n-2,n-3\}$,$\{n-3,n-4\}$,$\cdots$,$\{2,1\}$,共有$n-3$种;若$n-1\notin S$,则S的余下3个元素构成的集合为$\{n-2,n-3,n-4\}$,$\{n-3,n-4,n-5\}$,$\cdots$,$\{3,2,1\}$,共$n-4$种.

$$\therefore f(n+1)=f(n)+(n-3)+(n-4)=f(n)+2n-7$$

即 $f(n+1)=f(n)+2n-7(n\geqslant 5)$ ㊺

又显然$f(5)=1$

由㊺得 $f(i+1)-f(i)=2i-7,i=5,6,\cdots,n-1$

$$\therefore \sum_{i=5}^{n-1}[f(i+1)-f(i)]$$
$$=\sum_{i=5}^{n-1}(2i-7)=2\sum_{i=5}^{n-1}i-7(n-5)$$
$$=2\cdot\frac{(5+n-1)(n-5)}{2}-7(n-5)$$
$$=(n+4-7)(n-5)$$
$$=(n-3)(n-5)$$

即 $f(n)-f(5)=(n-3)(n-5)$

$$\therefore f(n)=(n-3)(n-5)+f(5)=(n-3)(n-5)+1=n^2-8n+16=(n-4)^2$$

6.存在型函数方程

判断满足函数方程的函数存在与否的问题,这里称之为存在型函数方程问题.要特别注意的是解函数方程与判断或证明满足函数方程的函数存在与否是根本不同的两个问题,其中解函数方程是求满足函数的函数的具体表达式,而存在型函数方程只是回答满足函数方程的函数是否存在!

存在型函数方程的解答大多用构造方法,也可以解函数方程,求出具体的解,当然满足函数方程的函数也就存在了;还可用反证法.

例24 (2000.波兰数学奥林匹克第8题)关于非负整数$n,k(n\geqslant k)$的函数$c(n,k)$定义如下:

对任意$n\geqslant 0,c(n,0)=c(n,n)=1$;对$n\geqslant k\geqslant 1,c(n+1,k)=2^kc(n,k)+c(n,k-1)$

证明:对$n\geqslant k\geqslant 0$,均有$c(n,k)=c(n,n-k)$

证明:构造函数$f:\mathrm{N}\to\mathrm{N}^+$,使$f(0)=1,f(m)=(2-1)(2^2-1)\cdots(2^m-1),m\geqslant 1$,定义

$$g(n,k)=\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)},n\geqslant k\geqslant 0$$

注意到,由$g(n,k)$的定义,可知$g(n,0)=g(n,n)=1$,并且,当$n\geqslant k\geqslant 1$时,有

$$2^kg(n,k)+g(n,k-1)$$
$$=2^k\frac{f(n)}{f(k)f(n-k)}+\frac{f(n)}{f(k-1)f(n+1-k)}$$
$$=f(n)\left[\frac{2^k(2^{n+1-k}-1)+2^k-1}{f(k)f(n+1-k)}\right]$$

$= \frac{(2^{n+1}-1)f(n)}{f(k)f(n+1-k)} = \frac{f(n+1)}{f(k)f(n+1-k)} = g(n+1,k)$

这表明，$g(n,k)$ 与 $c(n,k)$ 具有相同的初始值和递推关系式，而由题中的条件及递推式，可知对任意 $n \geqslant k \geqslant 0$，$c(n,k)$ 惟一确定，所以，$c(n,k) = g(n,k)$

利用 $g(n,k)$ 的定义，易知 $g(n,k) = g(n,n-k)$. 故题获证.

例 25 （1995. IMO备选题，乌克兰提供）设R是实数集合，是否存在具有以下三个性质的函数 f:R → R:

(1) 存在正数 M，使得对任意 x，都有 $-M \leqslant f(x) \leqslant M$

(2) $f(1) = 1$

(3) 如果 $x \neq 0$，则 $f(x+\frac{1}{x^2}) = f(x) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$

解：具有题设三性质的实函数是不存在的.

用反证法证明如下：

设 f:R → R具有题设三性质，由性质(1)，存在实数 c，使得 c 大于任何 $f(x)$，且 c 是 $\frac{1}{4}$ 的最小整数倍数，由性质(3) 和(2) 得到

$f(2) = f\left(1+\frac{1}{1^2}\right) = f(1) + \left[f\left(\frac{1}{1}\right)\right]^2 = 1 + 1^2 = 2$ 因此，$c \geqslant 2$

现在由 c 的定义可知，存在某 $x \in$ R，使得 $f(x) \geqslant c - \frac{1}{4}$. 因此

$c \geqslant f\left(x+\frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 \geqslant c - \frac{1}{4} + \left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2$，所以 $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^2 \leqslant \frac{1}{4}$，于是 $f\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant -\frac{1}{2}$，再由

$$c \geqslant f\left(\frac{1}{x}+x^2\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + [f(x)]^2 \geqslant -\frac{1}{2} + \left(c-\frac{1}{4}\right)^2$$

以及 $c \geqslant 2$，得到

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \geqslant c\left(c-1-\frac{1}{2}\right) \geqslant 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

矛盾

∴ 同时满足三性质(题设) 的实函数不存在.

例 26 （1978. 美国纽约）函数 f:R → R满足

$f(x \cdot y) \equiv \frac{f(x)+f(y)}{x+y}$，$x, y \in$ R，$x + y \neq 0$

是否存在 $x \in$ R，使得 $f(x) \neq 0$?

解：不存在 $x \in$ R，使 $f(x) \neq 0$

结证，函数 $f(x)$ 满足恒等式 $f(x) \equiv 0$，$x \in$ R

事实上，在函数 $f(x)$ 满足的恒等式中取 $y = 1$，得到

$f(x) \equiv \frac{f(x)+f(1)}{x+1}$，$(x \neq -1)$

即　$xf(x) \equiv f(1)$，当 $x = 0$ 时便得到 $f(1) = 0$，这表明，当 $x \notin \{-1, 0\}$ 时，$f(x) = 0$

其次，在原恒等式中代入 $y = 0$，$x = 2$，得

$$f(0) = \frac{f(2)+f(0)}{2}$$

由此，得　　$f(0) = f(2) = 0$

最后，再代入 $y = 0$，$x = -1$，得到 $f(0) = -f(-1) - f(0)$

从而　$f(-1) = 2f(0) = 0$

这样，便证明了函数 $f(x)$ 满足恒等式 $f(x) \equiv 0$，$x \in$ R.

例 27 （1990. IMO 试题）存在映射 $f:Q^+\to Q^+$（正有理数集），使得满足

$$f(x\cdot f(y))=\frac{f(x)}{y}$$

解：先探讨该映射性后，再构造该映射

(1) 先证明该映射为单射.

设 $f(y_1)=f(y_2)$，则由条件得

$\frac{f(x)}{y_1}=f(x\cdot f(y_1))=f(x\cdot f(y_2))=\frac{f(x)}{y_2}$

$\therefore y_1=y_2$

(2) 求证 $f(1)=1$，令 $x=y=1$，则有

$$f(f(1))=\frac{f(1)}{1}=f(1)$$

由于 f 是单射，$f(f(1))$ 的自变量值 $f(1)$ 等于 $f(1)$ 的自变量值 1，即 $f(1)=1$

(3) 再证 f 对乘除运算的可分配性.

令 $x=1$，则 $\quad f(f(y))=\frac{f(1)}{y}=\frac{1}{y}$ ㊺

令 $y=f(t)$，则 $\quad f[x f(f(t))]=\frac{f(x)}{f(t)}$，但 $f(f(y))=\frac{1}{y}$ $\therefore f(f(t))=\frac{1}{t}$，于是

$$f\left(\frac{x}{t}\right)=\frac{f(x)}{f(t)}$$ ㊼

对于乘法，则 $\quad f(xy)=f\left(\frac{x}{\frac{1}{y}}\right)=\frac{f(x)}{f(\frac{1}{y})}=\frac{f(x)}{\frac{f(1)}{f(y)}}=f(x)\cdot f(y)$ ㊽

根据以上推得的 f 的性质，构作映射 f 如下：

设素数集 $p=\{p_1=2,p_2=3,\cdots,p_k=k+1,\cdots\}$，作映射，$g:p\to Q^+$：

$$g(p_k)=\begin{cases}p_{k+1},k\text{ 为奇数}\\ \frac{1}{p_{k-1}},k\text{ 为偶数}\end{cases}$$

容易验证映射 g 满足性质(1)，取 $x\in Q^+$，则

$x=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_t^{\alpha_t}$（$\alpha_i$ 为整数）

构作映射 f：

$f(x)=(g(p_1))^{\alpha_1}\cdot(g(p_2))^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot(g(p_t))^{\alpha_t}$

则 f 满足性质(1)，(2)，(3).

【评注】 这类竞赛题难度较大，先充分讨论函数的特征性质，根据得出的特征设法构作映射.

例 28 是否存在 $f,g:R\to R$，使得满足 $f(g(x))=x^2$，$g(f(x))=x^4$

解：如果上述满足题意要求的 f、g 存在，构造函数 $\varphi\psi$：

$\varphi(x)=\log_2\log_2 f(2^{2^x})$，$(x\in R)$

$\psi(x)=\log_2\log_2 g(2^{2^x})$，$(x\in R)$

经计算可得

$\varphi(\psi(x))=x+1$，$\psi(\varphi(x))=x+2$

令 $\varphi(x)=ax+b$，$\psi(x)=cx+d$，可解得 $a=\frac{1}{2}$，$b=1$，$c=2$，$d=0$

即得 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x+1$，$\psi(x)=2x$

于是

$\frac{1}{2}x+1=\log_2\log_2 f(2^{2^x})$

$$f(2^{2^x}) = 2^{2^{\frac{1}{2}x+1}}$$

$$f(t) = 2^{2^{\frac{1}{2}(\log_2\log_2 t)+1}}(t > 1)$$

于是可算得

$$f(x) = 2^{2\sqrt{\log_2 x}}; g(x) = 2^{(\log_2 x)^2}(x > 1)$$

在(0,1]上补充定义

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (1, +\infty) \\ \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)} & x \in (0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & x \in (1, +\infty) \\ \dfrac{1}{g\left(\dfrac{1}{x}\right)} & x \in (0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

再将函数偶延拓至$(-\infty,0)$，即按偶函数要求补充定义，当 $x \in (-\infty,0)$ 时，

$$f_2(x) = f_1(1 \times 1), g_2(x) = g_1(1 \times 1)$$

最后令

$$f_2(0) = 0, g_2(0) = 0$$

如上定义的 $f_2(x)$ 与 $g_2(x)$ 满足题意要求.

【评注】 对数函数运算能把乘幂降阶为乘积，指数函数运算能把乘法变为指数相加，再利用 $\varphi(\psi(x)) = x + 1, \psi(\varphi(x)) = x + 2$ 有一次函数的解，巧妙地构作了符合题意的函数.

§3.3 函数方程

A组

1. 已知 $f(\sin x) = \cos 2x - 1$，求 $f(x)$

2. 已知 $f\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) = 3x$，求 $f(x)$

3. 解函数方程 $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos y$

4. 试求定义在正整数集 N 上的函数 $f(x)$，使 $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy, f(1) = 1$

5. 已知 $f(1) = 1$，且对任意正整数 n，都有 $f(n + 1) = 3f(n) + 2$，求 $f(n)$

6. 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，求证：$f(x^n)=nf(x)(n\in \mathrm{N}_+)$

7. 设 f 是 $\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 的连续函数，且 $f(x)$ 不恒等于零，解函数方程：$f(x+y)=f(x)f(y)$

8.（第25届全俄数学奥林匹克竞赛题）定义在实数集上的函数 $f(x)$，对于任意的 $a>1$，函数 $f(x)+f(ax)$ 是连续的，证明：在整个实数集上 $f(x)$ 也是连续的.

9.（第12届韩国数学奥林匹克竞赛题）设对满足 $|x|\neq 1$ 的所有实数 x，函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)=x$ 求所有可能的 $f(x)$

10. 设 n 次多项式满足 $f(k)=\frac{k}{k+1}(k=0,1,2\cdots,n)$，试求 $f(n+1)$

11. 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $\overbrace{f\{f[f(\cdots f(x))]\}}^{100\text{次迭代}}=1024x+1023$，求 $f(x)$

12. 函数 f 定义在正整数有序对的集合上，并满足

$f(x,x)=x, f(x,y)=f(y,x)$,

$(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$,

计算 $f(14,52)$

B 组

1.（1980.卢森堡等五国数学竞赛题）试求定义在有理数集并且在有理数集上取值的函数 $f(x)$，设

(1) $f(1)=2$

(2) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$

2. 设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，且满足条件：

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$

求 $f(x)$

3. 有界函数 $f:Z\to Z$,并且有 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)f(n)$ 求 $f(n)$

4.(2000.荷兰数学竞赛题)已知 $A_n=\{1,2,\cdots,n\}(n\geqslant 5)$,$S\subseteq A_n$,若 $x\in S$ 且 $x-1$,$x+1$ 均不属于 S,则称 x 为 S 的一个孤立点,用 $f(n)$ 表示 A_n 的无孤立点的5元子集的个数,求 $f(n)$

5. 设 $f:R_+$(非负实数集)$\to R_+$,a、b 为常数,且对任何 $x\in R_+$,满足方程

$$f[f(x)]+af(x)=b(a+b)x$$

求证:这个函数方程有惟一解.

6.(1989.第四届全国中学生冬令营试题第六题)已知 $f:(1,+\infty)\to(1,+\infty)$,且对任意 $x,y>1$ 及 $u,v>0$,有 $f(x^u y^v)<[f(x)]^{\frac{1}{4u}}[f(y)]^{\frac{1}{4v}}$,试确定所有这样的函数 f

7.(IMO-14-5)设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的实函数,而且对所有 x 和 y 满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$,试证:若 $f(x)\neq 0$,且 $|f(x)|\leqslant 1$,对一切 x 成立,则 $|g(y)|\leqslant 1$ 对一切 y 成立

8.(IMO-17-6)试确定满足下列条件的两个变元 x,y 的多项式 $p(x,y)$:

(1) $p(tx,ty)=t^n p(x,y)$,其中 $t\in R$,n 为某个正整数,即 $p(x,y)$ 为关于 x,y 的 n 次齐次多项式.

(2) 对任意实数 a,b,c 有

$$p(a+b,c)+p(b+c,a)+p(c+a,b)=0$$

(3) $p(1,0)=1$

9.(IMO-22-6)函数 $f(x)$ 满足:

(1) $f(0,y)=y+1$

(2)$f(x+1,0)=f(x,1)$

(3)$f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$

其中 x,y 为非负整数,求 $f(4,1981)$

10.(第39届IMO题)设 N_+ 是全部正整数的集合,f 是从 N_+ 映射到本身的函数,且对于 N_+ 中的任何 s 与 t,皆满足 $f(t^2f(s))=s(f(t))^2$.试在所有的函数 f 中,确定 $f(1998)$ 可能达到的最小值

11.(IMO-27-5)求出所有的函数 f,其定义域为非负实数集合,值域也为非负实数集合,且满足

(1)$f(xf(y))f(y)=f(x+y)$

(2)$f(2)=0$

(3)当 $0\leqslant x<2$ 时,$f(x)\neq 0$

12. 证明:不存在一个从非负整数集 N_+ 到自身的函数 f,对每一个 $n\in N_+$,满足

$f(f(n))=n+1987$

第一章

三角形的心

§1.1 知识、方法、技能

三角形的心是指重心、外心、内心、垂心、旁心和界心.三角形的心是三角形的重要几何点,在奥林匹克数学中,有关三角形的心的几何问题是竞赛的热点问题,因此,我们对三角形的心的几何性质做概括归纳,对有关的证明方法和解题技巧做深入探讨.

1. 重心

设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,AG 的延长线交 BC 于 D,则

(1)$BD = DC$;(2)$AD^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$

(3)$AG : AD = 2 : 3$;(4)$S_{\triangle GBC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$

2. 外心

设 $\odot O(R)$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,$OD \perp BC$ 于 D 交 $\odot O$ 于 E,则

(1)$OA = OB = OC = R$;(2)$\angle BOC = 2\angle A$[或 $2(180° - \angle A)$]

(3)$BD = DC$,$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$;(4)$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$ 或 $R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$

3. 内心

设 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I(r)$ 切边 AB 于 P,AI 的延长线交外接圆于 D,则

(1)$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$;(2)$AP = r \cdot \cot\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b + c - a)$

(3)$DB = DI = DC$;(4)$S_{\triangle ABC} = r \cdot \frac{1}{2}(a + b + c)$ 或 $r = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{a + b + c}$

定理1 (**Euler 定理**)$\triangle ABC$ 中 R 和 r 分别为外接圆和内切圆的半径,O 和 I 分别为其外心和内心,则 $OI^2 = R^2 - 2Rr$

4. 垂心

设 O、G、H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心,重心和垂心,$OD \perp BC$ 于 D,AH 的延长线交外接圆于 H_1,则

(1)$AH = 2OD$;(2)H 与 H_1 关于 BC 成轴对称;

(3)$\odot BCH$ 与 $\odot ABC$ 的半径相等.

定理2 (**三角形的 Euler 线**)$\triangle ABC$ 的重心 G,垂心 H 和外心 O 共线,并且 $GH = 2GO$

5. 旁心

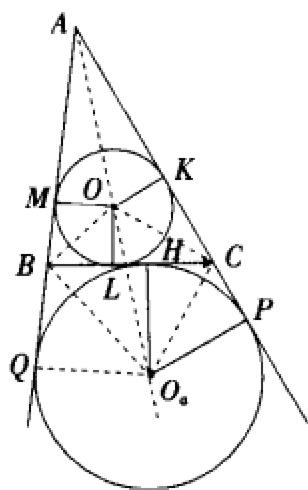
设 $\triangle ABC$ 在 $\angle A$ 内的旁切圆 $\odot I_1(r)$ 与 AB 的延长线切于 P_1,则

(1)$\angle BI_1C = 90° - \frac{1}{2}\angle A$;(2)$AP_1 = r_1\cot\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c)$

(3)$\angle AI_1B = \frac{1}{2}\angle C$;(4)$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r_1(b + c - a)$

6. 三角形中内切圆，旁切圆和外接圆半径的几个关系

如图 Ⅱ - 4 - 1 - 1，在 $\triangle ABC$ 中，内切圆 $\odot O$ 分别与三边相切于点 M、K 和 L，BC 边上的旁切圆 $\odot O_a$ 与 BC 边相切于点 H，且分别与 AB 边和 AC 边的延长线相切于点 Q、点 P. 设三边 BC，CA，AB 分别为 a，b，c，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 分别为 α，β，γ，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，内切圆半径为 r，旁切圆半径分别为 r_a、r_b、r_c，外接圆半径为 R，三角形面积为 $S_\triangle$，则有如下关系式成立（证明略）：



（图 Ⅱ - 4 - 1 - 1）

(1) $AP=p$，$AK=p-a$，$LH=b-c$

(2) $r_a=\frac{rp}{p-a}$

(3) 直角三角形斜边上的旁切圆的半径等于三角形周长的一半

(4) $r_a=\frac{1}{r}(p-b)\cdot(p-c)$

(5) $\frac{1}{r_a}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}$

(6) $r_a=\frac{r}{\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{r}{2}}$

(7) $r_a=\frac{2\cdot S_\triangle}{b+c-a}$ 或 $S_\triangle=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$

(8) $r_a^2=\frac{S_\triangle\cdot\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2}}$

(9) $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{r_a^2}+\frac{\tan\frac{\beta}{2}}{r_b^2}+\frac{\tan\frac{\gamma}{2}}{r_c^2}=\frac{1}{S_\triangle}$

(10) $r_a=4R+r-r_b-r_c$

(11) $r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

7. 界心

如果三角形一边上的一点和这边所对的顶点把三角形的周界分割为两条等长的折线，那么就称这一点为三角形的周界中点. 其中三角形的周界是指由三角形的三边所组成的围线. 由于三角形的任意两边之和大于第三边，可知三角形任一边上的周界中点必介于这边两端点之间.

三角形的顶点与其对边的周界中点的连线，叫做三角形的周界中线（有时也称周界中线所在直线为三角形的周界中线）. 三角形三条周界中线交于一点（证明从略）.

定义：称三角形三条周界中线的交点为三角形的界心.

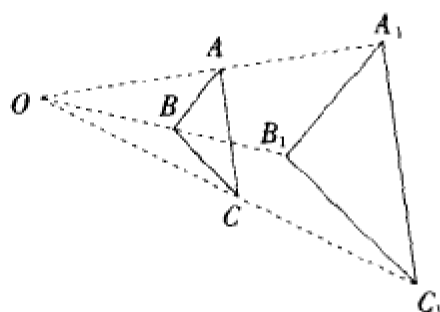
习题中给出界心的两个性质.（B 组，14 题，请参考解答）

8. 位似变换

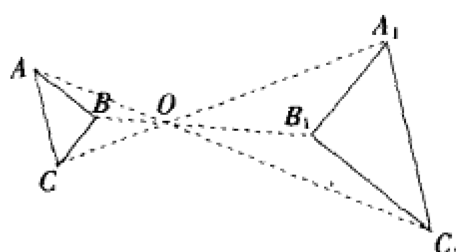
定义：O 为定点，对于任意点 P，如果它的象 P' 在射线 OP（或其反向延长线）上，并且总有 $\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$ $(k\neq 0)$，则这种映射叫作以 O 为中心，k 为位似比的位似变换.

图 Ⅱ - 4 - 1 - 2 和图 Ⅱ - 4 - 1 - 3 给出了位似变换的基本图形，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 关于点 O 位似，点 O 称为位似中心. 图 Ⅱ - 4 - 1 - 2 是一个相似比为 2 的位似变换，而图 Ⅱ - 4 - 1 - 3 给出的是相似比位 - 2 的位似变换. 特别的，中心对称就是一个相似比为 - 1 的位似变换.

位似变换的基本性质主要就是位似的两个三角形对应重心、垂心、外心等比较有特征的点的连线都过位似中心.



（图 Ⅱ－4－1－2）



（图 Ⅱ－4－1－3）

9. 位似旋转变换

设 O 为平面上一定点，k 为常数（$k>0$），θ 为有向角，对于任意一点 p，射线 OP 绕O 旋转角θ，P 映射到 P'，在 OP' 射线上存在一点P''，在$\overrightarrow{OP''}=k\overrightarrow{OP'}$，把内点 P 到点P'' 的变换叫做以 O 为位似旋转中心，旋转角为 θ，位似比为 k 的位似旋转变换，记为 $S(O,\theta,k)$.

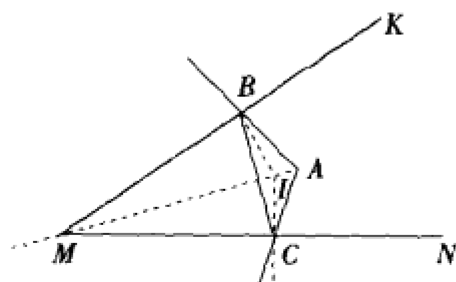
从位似旋转变换的定义可知，一个位似旋转变换实际是位似变换与旋转变换的复合，此时的位似中心与旋转中心相重合.

位似变换和位似旋转变换在有关三角形的心的赛题中有着重要应用，详见例 5，例 6

§1.2　赛 题 精 讲

首先介绍国际数学竞赛的两个题目，以说明关于三角形的心的问题的重要性

例 1　（2001. 世界城际间数学联赛）点 A 在 $\angle KMN$ 内部，点 B 在KM 上，点 C 在MN 上，如果 $\angle CBM=\angle ABK$，$\angle BCM=\angle ACN$，求证：$\triangle BCM$ 的外心在 AM 上.



（图 Ⅱ－4－1－4）

证明：如图 Ⅱ－4－1－4 由对顶角相等及 $\angle CBM=\angle ABK$，知 BM 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线.

同理可证，CM 为 $\triangle ABC$ 的另一外角平分线.

故 M 为 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心.

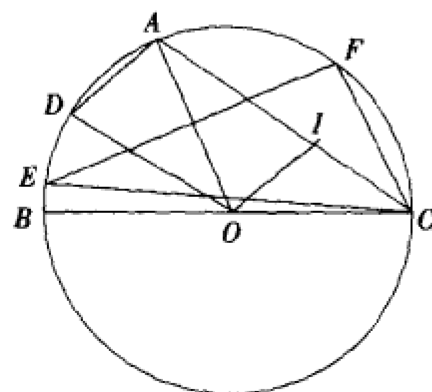
所以，AM 平分 $\angle BAC$.

记 $\triangle ABC$ 的内心为I，易知 I 在AM 上，连结 IB、IC，由 IB 平分 $\angle ABC$ 及 $\angle CBM=\angle ABK$，知 $IB\perp BM$. 同理，有 $IC\perp CM$

所以，I、B、M、C 四点共圆，且 MI 为直径.

因此，$\triangle BCM$ 的外心在MI，即 AM 上.

例 2　（2002. 第 43 届 IMO 试题）BC 为圆Γ 的直径，Γ 的圆心为 O，A 为Γ 上的一点，$0^\circ<\angle AOB<120^\circ$，$D$ 是弧AB（不含 C 的弧）的中点，过 O 平行于DA 的直线交AC 于I，OA 的垂直平分线交Γ 于 E、F. 证明：I 是 $\triangle CEF$ 的内心.



（图 Ⅱ－4－1－5）

证明：如图 Ⅱ－4－1－5 由题设 A 为$\overparen{EAF}$ 的中点，于是，CA 为 $\angle ECF$ 的平分线.

又由于 $OA=OC$

$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle OAC$

则　$OD \parallel IA$，而 $AD \parallel IO$，

所以　$ADOI$ 为平行四边形.

又　$OEAF$ 为菱形，有

$AI = OD = OE = AF$

$\therefore \angle IFE = \angle IFA - \angle EFA$

$= \angle AIF - \angle ECA = \angle AIF - \angle ICF$

$= \angle IFC$

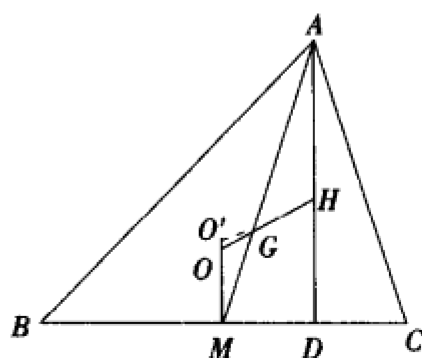
即　IF 为 $\angle EFC$ 的平分线，故 I 是 $\triangle CEF$ 的内心.

【评注】　条件 $\angle AOB < 120°$ 保证点 I 在 $\triangle CEF$ 的内部.

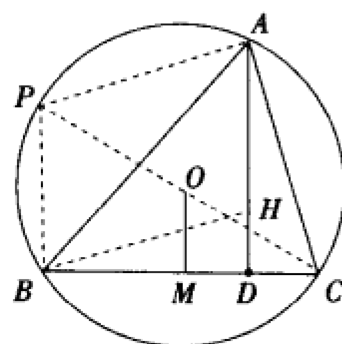
再介绍有关三角形心的经典问题及赛题.

例 3　三角形的 Euler 线. 详见"知识、方法、技能"的定理 2.

【分析】　这是一个经典的定理，由重心的结论(1)有 $AH = 2OM$. 这是一个常常被忽视的结论. 但是它的用处却十分大，图 Ⅱ－4－1－7，给出了一种由此引出的经典辅助线：作直径 CP，那么可以得到 $APHB$ 是平行四边形.



(图 Ⅱ－4－1－6)



(图 Ⅱ－4－1－7)

证明：$\because AH = 2OM$

又延长 HG 交 OM 于点 O'，由 $AD \parallel OM$ 知

$AH = 2O'M$

$\therefore OM = O'M$

$\therefore O$ 和 O' 重合

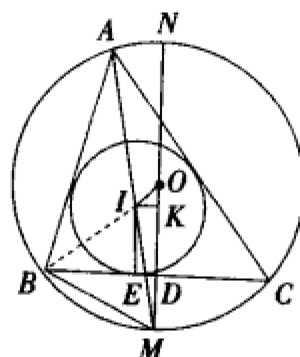
又 $\because \triangle AHG \backsim \triangle MOG$

$\therefore GH = 2OG$

【评注】　这里，直线 OGH 称为 $\triangle ABC$ 的 Euler 线.

例 4　(第 4 届国际数学奥林匹克题 6，由东德提供) 如图 Ⅱ－4－1－8，已知一个等腰三角形，外接圆半径为 R，内切圆半径为 r. 证明：外接圆和内切圆的圆心距离 $d = \sqrt{R(R-2r)}$

【分析】　此题对一般三角形也成立，称为欧拉定理，由此可得出一个重要的几何不等式：$R \geqslant 2r$ 称为欧拉不等式. 这里将对欧拉定理给出证明如下.



(图 Ⅱ－4－1－8)

证明：设 M 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，O 与 I 分别为三角形 ABC 的外接圆和内切圆的圆心，外接圆直径 MN 交 BC 于 D，连 IB、BM、AM 必过 I.

又设 $IE \perp BC$，$IK \perp MN$，E，K 为垂足.

因为 $\angle MIB = \dfrac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \angle IBM$

所以　$MI = MB$

又 $IO^2 = MI^2 + MO^2 - 2MO \cdot MK$

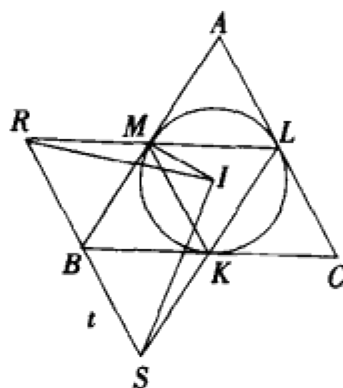
而 $MB^2 = MD \cdot MN = 2R \cdot MD$

所以 $d^2 = 2R \cdot MD + R^2 - 2R \cdot MK$

$= R^2 - 2R \times DK = R^2 - 2Rr$

【评注】 从例2我们看到,对于某些含有"内心"的平面几何命题,如果将"内心"改为"旁心",将会使问题得到推广、演变.这种做法对我们研究问题的内在联系,拓宽证题思路和方法,以期达到触类旁通,得心应手处理竞赛问题的能力将大有裨益.下面我们再将第39届IMO试题5作此类演变、推广,以飨读者.

例5 (第39届IMO试题5)设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,其 $\triangle ABC$ 内切圆切三边 BC、CA 和 AB 于点 K、L、M,过 B 点平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S.求证:$\angle RIS$ 为锐角.(如图Ⅱ-4-1-9)



(图Ⅱ-4-1-9)

证明:为了证 $\angle RIS$ 是锐角.由余弦定理,只要证:

$RI^2 + SI^2 - RS^2 = 2RI \cdot SI\cos\angle RIS > 0$

为此我们来计算 $RI^2 + SI^2 - RS^2$

今 $MK \parallel RS$,考虑 $\triangle BMR$ 及 $\triangle BSK$,于是

$\angle MRB = \angle LMK = \frac{1}{2}(\pi - \angle C)$

同理

$\angle RMB = \angle AML = \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$

而 $\angle MBR = \pi - \angle MRB - \angle RMB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = \frac{1}{2}(\pi - \angle B)$

同理 $\angle KSB = \angle LKM = \frac{1}{2}(\pi - \angle A)$

$\angle SKB = \angle LKC = \frac{1}{2}(\pi - \angle C)$

$\angle KBS = \frac{1}{2}(\pi - \angle B)$

由正弦定理,有

$\frac{BR}{\sin\angle RMB} = \frac{BM}{\sin\angle MRB}, \frac{BK}{\sin\angle KSB} = \frac{BS}{\sin\angle BKS}$

因此 $\frac{BR}{BM} = \frac{\cos\frac{\angle A}{2}}{\cos\frac{\angle C}{2}} = \frac{BK}{BS}$

今 $BI \perp MK$,所以 $BI \perp RS$.又 $MI \perp AB$,所以考虑直角三角形 $\triangle IRB$,$\triangle ISB$,$\triangle BIM$ 有

$IR^2 + IS^2 - RS^2 = (BI^2 + RB^2) + (IB^2 + BS^2) - (BR + BS)^2 = 2(BI)^2 - 2BR \cdot BS$

注意到 $BK = BM$,因此 $BR \cdot BS = BM^2$.所以 $IR^2 + IS^2 - RS^2 = 2[(BI)^2 - (BM)^2] = 2(IM)^2 > 0$

【评注】 现将本题中"内心"改为"旁心",发现其结论仍然成立,这个演变题即为:

演变题:设 I 为 $\triangle ABC$ 的旁心,其 $\triangle ABC$ 旁切圆切边 AC 于点 L、切边 BA 和 BC 的延长线分别于点 M 和 K,过点 B 平行于 MK 的直线分别交直线 LM 和 LK 于点 R 和 S.求证:$\angle RIS$ 为锐角.

证明:如图Ⅱ-4-1-10,连接 BI、MI、KI.

在 $\triangle BKS$ 与 $\triangle LMK$ 中,$\angle LKM = \angle KSB$,$\angle BKS = \angle LMK$.于是 $\triangle BKS \backsim \triangle LMK$,从而 $\frac{KS}{BK} = \frac{LK}{LM}$

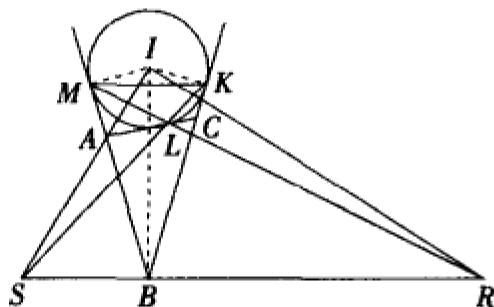
同理可证 $\frac{BR}{BM} = \frac{LM}{LK}$

于是 $BS \cdot BR = BK \cdot BM$

又显然 $BI \perp MK$, $BK = BM$, 从而 $BS \cdot BR = BM^2 < BI^2$, 即 $BS \cdot BR < BI^2$

这表明:在 BI 内存在点 P, 使得 $BR \cdot BS = BP^2$

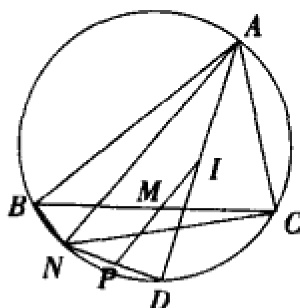
在 $\triangle RPS$ 中,应用射影定理的逆定理,可知 $\angle RPS = 90°$, 于是点 I 在以 RS 为直径的圆的外部,从而 $\angle RIS < 90°$



(图 Ⅱ-4-1-10)

例6 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的平分线与外接圆交于点 D, I 是内心, M 为 BC 的中点, P 为 I 关于 M 的对称点,延长 DP 与外接圆相交于 N. 求证:线段 AN, BN, CN 中有两个的和等于第三个.

【分析一】 这道题有一个经典解法 —— 面积法,此法好似没道理,仿佛天外来客,但是想法确实极为精美巧妙.



(图 Ⅱ-4-1-11)

证明一: 由于 $S_{BND} + S_{CND} = 2S_{MND} = S_{IND}$

而 $S_{BND} = \frac{1}{2} BN \cdot BD \cdot \sin\angle NBD$

$S_{CND} = \frac{1}{2} CN \cdot CD \cdot \sin\angle NCD$

$S_{NID} = \frac{1}{2} AN \cdot ID \cdot \sin\angle NAD$(请关注这个式子,想想为什么)

并且 $BD = ID = CD$

$\therefore BN + CN = AN$

证毕

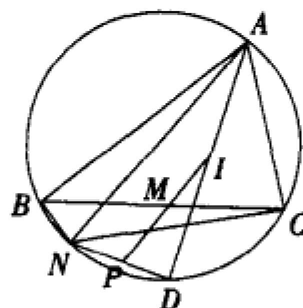
【分析二】 如果说我们的目的不只是去寻求证法的美妙,而是实用,那么可选择一个稳妥一点的方法 —— 三角计算.

证明二: 记 $\alpha = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\beta = \angle NAD$, 外接圆半径为 R

只需证明 $2R\sin(\alpha - \beta) + 2R\sin(\alpha + \beta) = 2R\sin(C + \alpha - \beta)$

即证 $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(C + \alpha - \beta)$. ①

我们来看一看还有什么条件没有用. 我们需要的是一个限定 N 位置的条件,这个就是"M 为 IP 中点". 当然,选择用比例 $\frac{IM}{MP}, \frac{IM}{IP}, \frac{PM}{IP}$ 中的哪个是需要思考一下的. 注意到, DM 和 DI 的长度比较好描述,而 DP 的长度我们无法控制,所以我们选择用 $\frac{PM}{IP} = \frac{1}{2}$ 来使用这个中点的条件.



(图 Ⅱ-4-1-12)

$$\frac{1}{2} = \frac{PM}{IP} = \frac{S_{PDM}}{S_{PDI}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} PD \cdot DM \cdot \sin\angle PDM}{\frac{1}{2} PD \cdot DI \cdot \sin\angle PDI} = \frac{DM \cdot \sin\angle PDM}{DI \cdot \sin\angle PDI}$$

$$= \frac{2R\sin^2\alpha}{2R\sin\alpha} \cdot \frac{\sin[(90° - \alpha) + (\alpha - \beta)]}{\sin(C + \alpha - \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(C + \alpha - \beta)} \quad ①$$

这与 ① 式等价.

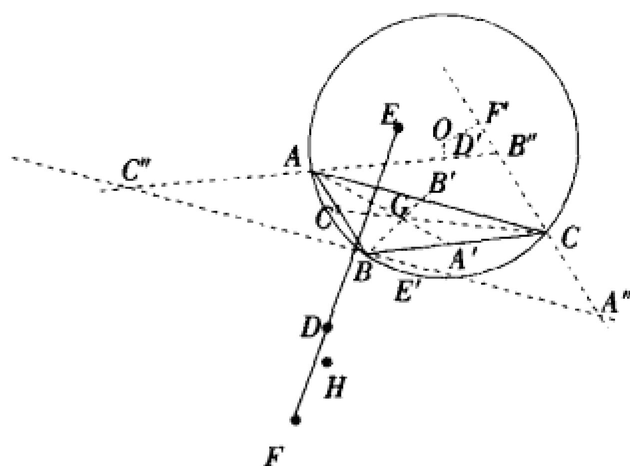
证毕

【评注】 其实读者从证明的过程中应该已经看到了,证明几乎没有用到太多的计算,但是技巧的使用却很多,实用得很.

例7 (1998. IMO预选题)已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 H, 外心为 O, 外接圆半径为 R, 设 A, B, C 分别关于直线 BC、CA、AB 的对称点为 D、E、F, 证明: D、E、F 三点共线的充要条件是 $OH = 2R$

【分析】 若 $OH = 2R$, 过 A, B, C 分别作对边的平行线得 $\triangle A''B''C''$, 则 H 为此三角形的外心,且

外接圆半径为 $2R$，联想到西姆松定理（详见第二讲），O 在 $\triangle A''B''C''$ 三边上的投影共线的充要条件是 O 在 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆上．这样，可以通过"位似变换"把 D、E、F 三点与上述投影点对应起来．



(图 Ⅱ－4－1－13)

证明：设 $\triangle ABC$ 的重心为 G，而 BC，CA，AB 的中点分别为 A'，B'，C'，过 A，B，C 分别作 BC、CA、AB 的平行线，其交点分别为 A''，B''，C''，则 $\triangle A''B''C''$ 的重心为 G，外心为 H，设点 O 在直线 $B''C''$，$C''A''$，$A''B''$ 上的投影分别为 D'，E'，F'，以 G 为位似中心，$-\frac{1}{2}$ 为位似比作位似变换，将 A，B，C，A''，B''，C'' 分别变换为 A'，B'，C'，A，B，C

因为　$A'D' \perp BC$，$AD \perp BC$

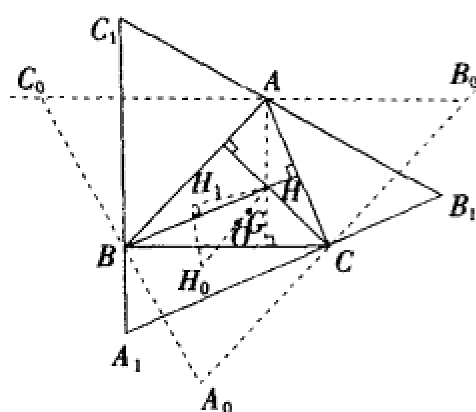
所以　$A'D' \parallel AD$，且 $AD : A'D' = 2 : 1 = GA : GA'$，$\angle DAG = \angle D'A'G$，即有 D 变换为 D'，同理 E，F 分别变换为 E'，F'

因此 D，E，F 三点共线等价于 D'，E'，F' 三点共线．

因 D'，E'，F' 分别是 O 在 $B''C''$，$C''A''$，$A''B''$ 上的投影，由西姆松定理，知 D'，E'，F' 三点共线的充分必要条件是 O 在 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆上，因为 $\triangle A''B''C''$ 的外接圆半径为 $2R$，所以 O 在此圆上的充要条件是 $OH = 2R$

证毕．

例 8　已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A，B，C 分别在 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 B_1C_1，C_1A_1，A_1B_1 上，使得 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$，$\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$，$\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$．证明：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心与 $\triangle ABC$ 的外心一样远．



(图 Ⅱ－4－1－14)

【分析】　设 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，由条件可得 H 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心．作 $\triangle A_0B_0C_0$，使 A、B、C 为其各边中点，则知 H 也为 $\triangle A_0B_0C_0$ 的外心，可知 $\triangle A_0B_0C_0$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似，利用"位似旋转变换"，两三角形的重心通过此变换对应起来，且有 $\angle H_0H_1H = 90°$，另外 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心均为 G，利用"位似变换"及"欧拉线"可推知 $\triangle ABC$ 的外心 O 为 HH_0 的中点，从而在 $R_t\triangle H_1HH_0$ 中，$OH = OH_1$

证明：设 $\triangle ABC$ 的垂心是 H，则 $\angle BHC = 180° - \angle CAB = 180° - \angle C_1A_1B_1$，$H$，$B$，$A_1$，$C$ 四点共圆．

同理 H，C，B_1，A 四点共圆；

H，A，C_1，B 也四点共圆，

所以

$$\begin{aligned}\angle B_1HC_1 &= \angle B_1HA + \angle C_1HA \\ &= \angle B_1CA + \angle C_1BA \\ &= (180° - \angle A_1B_1C_1 - \angle CAB_1) + (180° - \angle A_1C_1B_1 - \angle C_1AB) \\ &= (180° - \angle A_1B_1C_1 - \angle A_1C_1B_1) + (180° - \angle CAB_1 - \angle C_1AB) \\ &= 2\angle B_1A_1C_1\end{aligned}$$

同理　$\angle C_1HA_1 = 2\angle C_1B_1A_1$，$\angle A_1HB_1 = 2\angle A_1C_1B_1$

所以　H 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心．

分别过 $\triangle ABC$ 的顶点作对边的平行线得 $\triangle A_0B_0C_0$，易知 H 也是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的外心．

由 $\angle A_1 = \angle A = \angle A_0$，知 A_1 在以 AEH 为直径的圆上．

设 H_0，H_1 分别是 $\triangle A_0B_0C_0$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心．

以 H 为位似中心作位似旋转变换，使 $\angle A_1B_1C_1$ 变到 $\triangle A_0B_0C_0$，则 $\angle HH_1H_0 = \angle HA_1A_0 = 90°$

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，重心为 G，由欧拉线，有 $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$

以 G 为位似中心，-2 为位似比作位似变换，则 $\triangle ABC$ 变为 $\triangle A_0B_0C_0$. 故有 $\overrightarrow{GH_0} = -2\overrightarrow{GH}$.

从而 $\overrightarrow{OH_0} = -\overrightarrow{OH}$，即 O 为 H_0H 中点.

在 $R_t\triangle H_0H_1H$ 中，O 为斜边 H_0H 的中点.

故 $H_1O = HO$

即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心与 $\triangle ABC$ 的外心一样远.

例 9 (1998. 全国高中数学联赛二试第一题) 如图 Ⅱ－4－1－14，O、I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上，$AB \neq AC$，求证：$\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

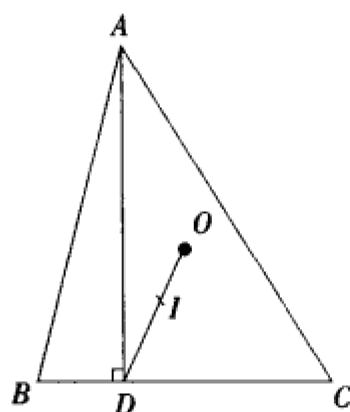


图 Ⅱ－4－1－14

【思路分析】 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆是与边 AB、AC 的延长线以及边 BC 都相切的圆.

证法一： 如图 Ⅱ－4－1－15 所示，记 $AB = c, BC = a, CA = b$，设 AI 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 K 点，则 OK 是 $\odot O$ 的半径，记为 R. 因为 $OK \perp BC$，所以 $OK \parallel AD$

$$\therefore \frac{AI}{IK} = \frac{AD}{OK} = \frac{c \cdot \sin B}{R} = 2\sin B \cdot \sin C \quad ①$$

又 $\angle ABI = \angle IBC = \frac{1}{2}\angle B$，$\angle CBK = \angle CAK = \frac{1}{2}\angle A$

$\angle AKB = \angle ACB = \angle C$，$\angle BAK = \frac{1}{2}\angle A$

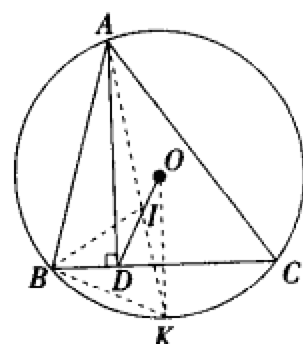


图 Ⅱ－4－1－15

所以
$$\frac{AI}{IK} = \frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BI \cdot \sin\frac{B}{2}}{\frac{1}{2}BK \cdot BI \cdot \sin\frac{A+B}{2}}$$

$$= \frac{AB}{BK} \cdot \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{2\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \quad ②$$

由 ①、② 得

$$2\sin B \cdot \sin C = \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

所以 $4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 1$

设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆半径为 r_a. 则

$$\frac{1}{2}bc \cdot \sin A = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r_a(b+c-a)$$

所以
$$r_a = \frac{bc \cdot \sin A}{b+c-a}$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin A\sin B \cdot \sin C}{\sin B + \sin C - \sin A}$$

$$= 2R \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin\frac{C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}$$

$$= R \cdot \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin\frac{B+C}{2} \cdot 2\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$= R \qquad ③$$

即 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆的半径.

【评注】 上述解答是命题组给出,其证法是采用几何与三角恒等变换相结合的方法,解答要用三角函数和差化积,显得复杂一些.那么不用三角函数和差化积,有没有较简单一点的方法呢?答案是肯定的.

证法二:如图 Ⅱ－4－1－16,设 BC 边的旁切圆半径为 R_A,圆心为 I_A,K 为 AI 与外接圆交点,显然,A、I、K、I_A 共线,且 K 为点 B、I、C、I_A 外接圆圆心.

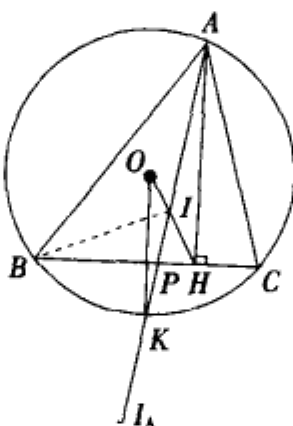


图 Ⅱ－4－1－16

$\because R = OK$,$\therefore \dfrac{R}{AH} = \dfrac{KI}{IA}$,$\dfrac{R_A}{AH} = \dfrac{I_AP}{PA}$

$\therefore$ 要证 $R = R_A \Leftrightarrow \dfrac{KI}{IA} = \dfrac{I_AP}{PA}$

$\because I_AP = I_AK + KP = IK + KP$,$PA = PI + IA$

$\therefore \Leftrightarrow \dfrac{KI}{IA} = \dfrac{IK+KP}{PI+IA}$

$\Leftrightarrow KI\cdot PI = IA\cdot KP$

$\Leftrightarrow \dfrac{PI}{PK} = \dfrac{AI}{IK}$

$\because \dfrac{PI}{PK} = \dfrac{BI\cdot\sin\frac{B}{2}}{BK\cdot\sin\frac{A}{2}}$,$\dfrac{AI}{IK} = \dfrac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle KBI}} = \dfrac{AB\cdot\sin\frac{B}{2}}{BK\cdot\sin\frac{A+B}{2}}$

故 $\dfrac{BI}{\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{AB}{\sin\frac{A+B}{2}}$

在 $\triangle ABC$ 中应用正弦定理即可.

【评注】 不少读者问:有没有纯几何的简单证法?答案是肯定的.

【分析】 如图 Ⅱ－4－1－17,画 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$,延长 AI 交 BC 于 J,交 $\overset{\frown}{BC}$ 于 K,则 K 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点,显然 $OK\perp BC$

设 O' 是与 BC 边相切的 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心,则 O' 在 AI 延长线上,即 A、I、J、K、O' 共线.

作 $O'Y\perp BC$ 于 Y.则 $O'Y$ 是旁切圆 $\odot O'$ 的半径.

要证 $\odot O$ 半径 R 等于 $\odot O'$ 半径 r_a,即要证 $OK = O'Y$,注意到 $OK /\!/ O'Y$,也就是 OK 经过平移可以与 YO' 重合.

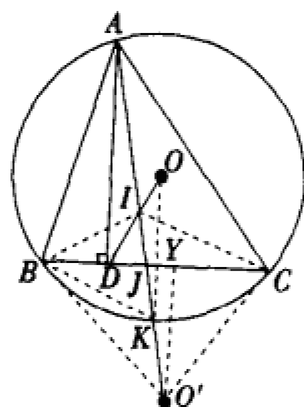


图 Ⅱ－4－1－17

其实,这个平移是由两次位似变换合成的:第一次 OK 经过以 I 为位似心,$\dfrac{IA}{IK}$ 为位似比的位似变换变为 DA;第二次 DA 经过以 J 为位似心,$\dfrac{JO'}{JA}$ 为位似比的位似变换变为 YO'.要这两次位似变换的复合作用是个平移,只须证两个位似比的乘积是 1 就可以了.

也就是证明:$\dfrac{IA}{IK}\cdot\dfrac{JO'}{JA} = 1$ 或者证明 $\dfrac{IA}{IK} = \dfrac{JA}{JO'}$ 即可.而要证明 $\dfrac{IA}{IK} = \dfrac{JA}{JO'}$,只需证 $\dfrac{IA}{IA+IK} = \dfrac{JA}{JA+JO'}$,即 $\dfrac{IA}{AK} = \dfrac{JA}{AO'}$ 即可.

这样,我们用位似变换的思想,分析出了证明的思路,下面即可整理出证明过程.

证法三:$\because AD$、OK、$O'Y$ 都垂直于 BC,

$\therefore AD /\!/ OK /\!/ O'Y$

因此 $\triangle AID \backsim \triangle KIO$

得 $\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AI}{IK}$，即$\dfrac{AD}{R}=\dfrac{AI}{IK}$ ①

又由 $\triangle ADJ \backsim \triangle O'YJ$

得 $\dfrac{AD}{O'Y}=\dfrac{AJ}{JO'}$，即$\dfrac{AD}{r_a}=\dfrac{AJ}{JO'}$ ②

于是，要证 $R=r_a$，只需证$\dfrac{AI}{IK}=\dfrac{AJ}{JO'}$ 即可.

连接 BI、IC、CO'、$O'C$，易知 $\angle IBO'=\angle ICO'=90^\circ$

$\therefore B$、I、C、O' 四点共圆.

因此 $\angle AO'C=\angle IBC=\dfrac{\angle B}{2}=\angle ABI$

又 $\angle BAI=\angle O'AC$

$\therefore \triangle ABI \backsim \triangle AO'C$

$\therefore \dfrac{AB}{AI}=\dfrac{AO'}{AC} \Rightarrow AI\cdot AO'=AB\cdot AC$ ③

连接 BK，

在 $\triangle ABK$ 与 $\triangle AJC$ 中，

$\because \angle BAK=\angle JAC$，$\angle BKA=\angle JCA$

$\therefore \triangle ABK \backsim \triangle AJC$

因此 $\dfrac{AB}{AK}=\dfrac{AJ}{AC}$，即 $AK\cdot AJ=AB\cdot AC$ ④

由 ③、④ 可得 $AI\cdot AO'=AK\cdot AJ$

即 $\dfrac{AK}{AI}=\dfrac{AO'}{AJ}$

由 $\dfrac{AI+IK}{AI}=\dfrac{AJ+JO'}{AJ}$，有$\dfrac{IK}{AI}=\dfrac{JO'}{AJ}$ ⑤

将式 ⑤ 结合 ①、② 可得 $\dfrac{R}{AD}=\dfrac{r_a}{AD}$

因此得证：$R=r_a$

评注 有了上面证法，可以衍生出不同的叙述形式，下面再例举一种比较自然的思路.

【简析】 由 $\triangle AID \backsim \triangle KIO$，有$\dfrac{AD}{OK}=\dfrac{AI}{IK}$，利用合比定理，注意 $OK=R$，得$\dfrac{AD}{AD+R}=\dfrac{AI}{AI+IK}=\dfrac{AI}{AK}$，延长 AD 到H，使 $DH=R$，则$\dfrac{AD}{AH}=\dfrac{AI}{AK}$ ⑥

(如图 Ⅱ－4－1－18).

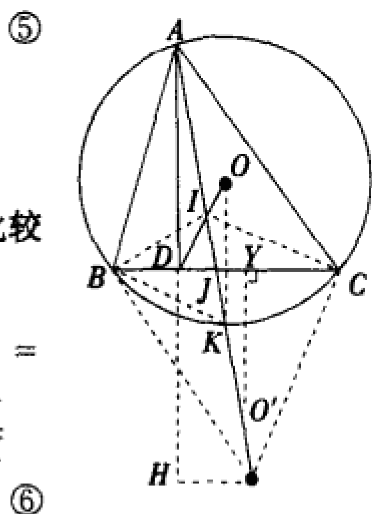


图 Ⅱ－4－1－18

连接 $O'H$，要证 $R=r_a$，只需证 $DH=O'Y$，易知，只需证 $BC /\!/ HO'$ 即可.

亦即只需证$\dfrac{AD}{AH}=\dfrac{AJ}{AO'}$ 即可.

结合式 ⑥ 考虑，只需证$\dfrac{AI}{AK}=\dfrac{AJ}{AO'}$，即可.

这不难由 $\triangle ABI \backsim \triangle AO'C$ 及 $\triangle ABK \backsim \triangle AJC$. 如上述证法 3 中得到 ④，⑤ 两式而推出，详细的证明过程就不赘述了.

【评注】 另外由旁切圆半径与外接圆半径都可以通过三角形三边长来计算. 这样，我们可以通过计算来达到证明的目的.

证法四： 如图 Ⅱ－4－1－19，作 $IE\perp CD$ 于E，作 $OF\perp CD$ 于F. 则 E 为 $\triangle ABC$ 内切圆与BC边的切点，F 为BC 边中点. AO 与圆交于 T.

设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ 则有

$BE=\frac{a+c-b}{2}, BF=\frac{a}{2}$

$BD=c\cdot\cos B, \frac{DE}{EF}=\frac{a+c-b-2c\cdot\cos B}{b-c}$

由 $\angle B=\angle ATC$，得 $\angle BAD=\angle TAC$

所以　$\angle DAI=\angle OAI$

利用 $\triangle ADO$ 中，AI 平分 $\angle DAO$ 可得

$\frac{AD}{AO}=\frac{DI}{IO}=\frac{DE}{EF}$

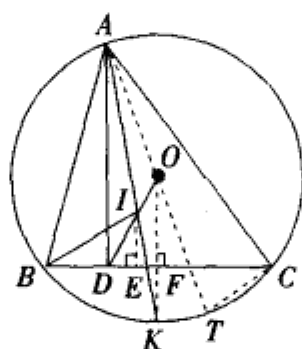


图 Ⅱ－4－1－19

设 $\triangle ABC$ 面积为 S，则 $AD=\frac{2S}{a}$ 代入得

$$\frac{\frac{2S}{a}}{R}=\frac{a+c-b-2c\cdot\cos B}{b-c} \quad ⑦$$

$\because a^2-2ac\cos B=a^2-(a^2+c^2-b^2)=(b-c)(b+c)=(b-c)\cdot(2p-a)$

$\therefore \frac{2p-a}{a}=\frac{a-2c\cdot\cos B}{b-c}$

因此　$\frac{2p-2a}{a}=\frac{a+c-b-2c\cdot\cos B}{b-c}\xlongequal{\text{根据⑦}}\frac{2S}{aR}$

$\therefore (p-a)R=rp$（r 为 $\triangle ABC$ 内切圆半径）.　⑧

另外，由图 Ⅱ－4－1－20(1) 得

$\triangle AIT_1 \backsim \triangle AO'T_2$ 得　$\frac{r}{r_a}=\frac{AT_1}{AT_2}$

但 $AT_1=p-a, AT_2=p$，

$\therefore \frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p}$

即　$(p-a)r_a=rp$　⑨

比较⑧、⑨即可得证 $R=r_a$

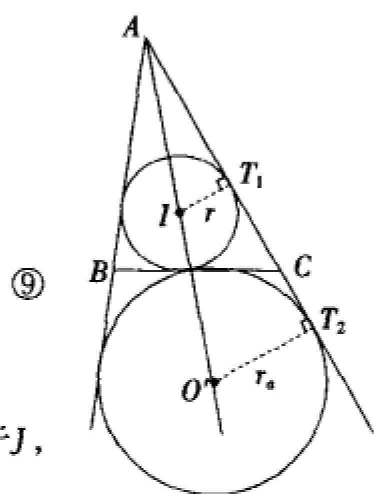


图 Ⅱ－4－1－20(1)

【评注】 回顾证法三的过程，整个证明包括两大部分：

(1) $\triangle ABC$ 中，I 为内心，O' 为与 BC 边相切的旁切圆圆心，AO' 交 BC 于 J，交 $\odot O$ 于 K，则 $\frac{AI}{AK}=\frac{AJ}{AO}$

这是对任意 $\triangle ABC$ 都成立的一般性质.

(2) 当 $\triangle ABC$ 的外心 O，内心 I 与高 AD 的垂足共线时，$\triangle ADI\backsim\triangle KOI$，因此，

$\frac{AD}{R}=\frac{AI}{IK}$，进而有 $\frac{AD}{AD+R}=\frac{AI}{AK}$

这是只有 O,I,D 共线时且 O 不在 AD 上时才生出的特殊性质，容易看出，如果 O 在 AD 上时，将有 $AB=AC$，这时，$\triangle ADI$ 与 $\triangle KOI$ 退化为线段，其确定的比例关系也会消失. 如图 Ⅱ－4－1－20(2)，$AB=AC$，A、O、I、D、O' 共线，明显的有 $R\neq r_a$

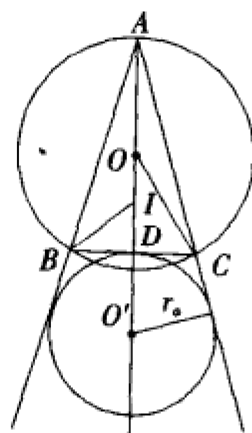


图 Ⅱ－4－1－20(2)

因此问题可一般叙述为：

"O、I 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和内心，AD 是 BC 边上的高，I 在线段 OD 上，如果 $AB\neq AC$，则 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆的半径."

其逆命题可如下表述：

"$\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，O 是外心，I 是内心，AD 是 BC 边上的高. 如果 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上旁切圆半径，则 I 在线段 OD 上."

其证明思路如下：

$\because AB\neq AC$，所以外心 O 不在高 AD 上，(图 Ⅱ－4－1－21)

连接 OD 交 AO' 于 I'，则由 $\triangle ADI' \backsim \triangle KOI'$，$\triangle ADJ \backsim \triangle O'YJ$

得 $\dfrac{AI'}{I'K}=\dfrac{AD}{R}=\dfrac{AD}{r_a}=\dfrac{AJ}{JO}$

$\therefore \dfrac{AI'}{AI'+I'K}=\dfrac{AJ}{AJ+JO'}$

即 $\dfrac{AI'}{AK}=\dfrac{AJ}{AO'}$ ⑩

若 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，则 A,I,J,K,O' 共线，根据前述 $\triangle ABC$ 的一般性质(1)，有：$\dfrac{AI}{AK}=\dfrac{AJ}{AO'}$ ⑪

对照 ⑩ 与 ⑪ 得 $AI'=AI$

所以 I 与 I' 重合，即 D、I、O 共线.

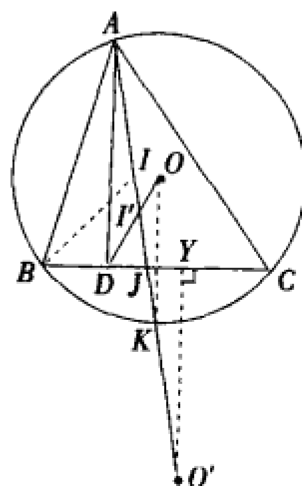


图 Ⅱ - 4 - 1 - 21

例 10 （第 29 届 IMO 试题）在直角三角形 ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高，连接 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内心的直线分别交 AB，AC 于 K、L，$\triangle ABC$ 和 $\triangle AKL$ 的面积分别记为 S 和 T，求证：$S \geqslant 2T$.

证明：如图 Ⅱ - 4 - 1 - 22，将 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内心分别记为 M、N，由于 $\triangle ABD \backsim \triangle CAD$，故有对应线段之比等于相似比，即

$DM : DN = BD : AD$

又 $\angle MDN = \angle BAC = 90^\circ$

故有 $\triangle ABD \backsim \triangle NMD$

从而对应边的交角相等，即

$\angle LKA = \angle BDM = 45^\circ$

这表明，$\triangle ALK$ 是等腰直角三角形

又 $\because \triangle ALK \cong \triangle AMD$

$\therefore AK = AD = AL$

于是得面积

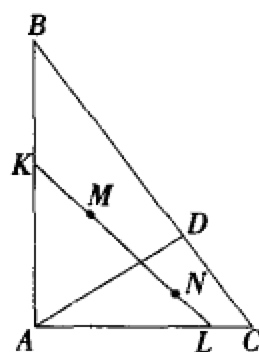


图 Ⅱ - 4 - 1 - 22

$$2T = AK \cdot AL = AD^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{AB^2 + AC^2} \leqslant \frac{AB^2 \cdot AC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = S$$

【评注】 本例是一道平面几何内心的问题，如果把 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心 M、N 都变成其旁心，就演变成为下面的问题. 其证明的关键是利用垂心.

演变题：如图 Ⅱ - 4 - 1 - 23，在 $Rt\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，$\triangle ABD$ 中 AB 边的旁心为 M，$\triangle ACD$ 的旁心为 N，直线 MN 分别交 BA、CA 的延长线于 K、L，$\triangle ABC$，$\triangle AKL$ 的面积分别记为 S、T，求证：$S \geqslant 2T$

证明：如图 Ⅱ - 4 - 1 - 23 添加辅助线，因 M、N 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的旁心，所以 BH、CH 分别为 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的外角平分线，H 为 $\triangle ABC$ 的旁心.

由 $\angle BAD = \angle ACD$ 得 $\angle BAE = \angle ACF$，故 $\angle BAM = \angle ACN$，从而 $\angle MAD = \angle PCD$，A、P、C、D 四点共圆，$\angle APC = 180^\circ - \angle ADC = 90^\circ$，$AP \perp PC$ 即 $MP \perp NH$.

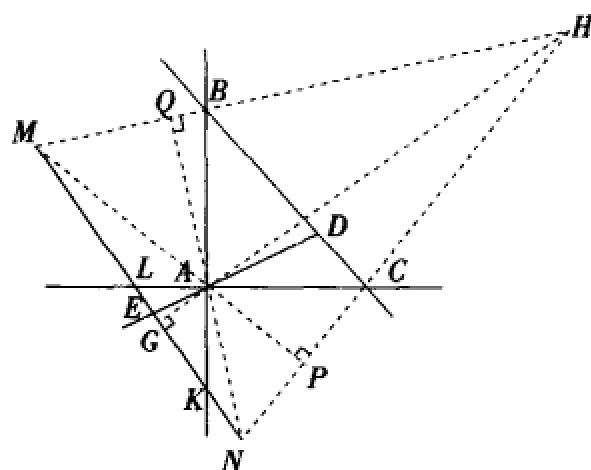


图 Ⅱ - 4 - 1 - 23

同理可证 $NQ \perp MH$，因此 A 为 $\triangle MNH$ 的垂心，$HA \perp MN$，即 $HA \perp LK$，又 $\angle LAG = \angle CAH$，所以 $\angle LAG = \angle KAG = 45^\circ$，进而 $\angle ALK = 45^\circ$，$AK = AL$，另一方面，$\triangle ALN \cong \triangle ADN$，有 $AL = AD$，$S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC$

$$T = \frac{1}{2}AK \cdot AL = \frac{1}{2}AD^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{2(AB^2 + AC^2)}$$

$\therefore \frac{S}{2T}=\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}\geqslant 1$ 即 $S\geqslant 2T$

例 11 设点 M 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上的任一内点，r_1、r_2、r 分别是 $\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$ 的内切圆半径；q_1、q_2、q 分别是这些三角形在 $\angle ACM$、$\angle BCM$、$\angle ACB$ 内的旁切圆半径. 试证：$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$

（注：本题是第 12 届国际数学奥林匹克题 1. 由波兰提供）.

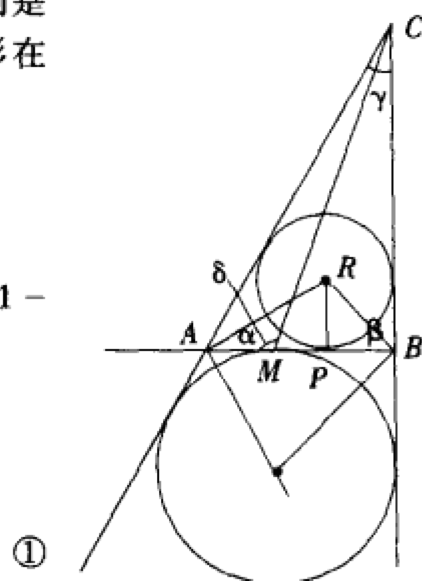


图 Ⅱ－4－1－24

证明：设 $\angle CAB=\alpha,\angle ABC=\beta,\angle BCA=\gamma,\angle AMC=\delta$

又设 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心为 R，且与 AB 切于 P（如图 Ⅱ－4－1－24），于是

$$\angle APR=\angle BPR=\angle\frac{\pi}{2}$$

从而有

$$AB=r\cot\frac{\alpha}{2}+r\cot\frac{\beta}{2}=r\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right) \quad ①$$

由于三角形的角的内、外分角线互相垂直，因而类似地有

$$AB=q\tan\frac{\alpha}{2}+q\tan\frac{\beta}{2}=q\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right) \quad ②$$

由 ① 和 ② 可得

$$\frac{r}{q}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} \quad ③$$

类似的结论对于 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BMC$ 也成立，故有

$$\frac{r_1}{q_1}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2} \quad ④$$

和 $\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\pi-\delta}{2}=\tan\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\delta}{2}$ ⑤

将 ④、⑤ 相乘，并利用 ③ 得

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\delta}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{r}{q}$$

例 12 （1994. 全国高中数学联赛第二试第二题）如图 Ⅱ－4－1－25，设 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的半径为 R，内心为 I，$\angle B=60°$，$\angle A<\angle C$，$\angle A$ 的外角平分线交圆 O 于 E，证明：

(1) $IO=AE$

(2) $2R<IO+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$.

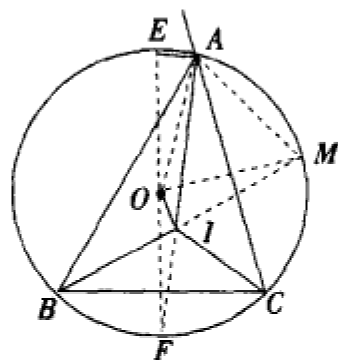


图 Ⅱ－4－1－25

证明：(1) 延长 BI 交外接圆于 M，连接 OA、OM、AM，易知 $\angle AOM=\angle B=60°$，故 $\triangle AOM$ 为正三角形. $\therefore OM=OA=AM=CM$. 易证 $\angle MIA=\angle MAI$，$\therefore MA=MI$

同理，$MC=MI$，即 A、O、I、C 在以 M 为圆心，R 为半径的圆上，$\odot M$ 与 $\odot O$ 为等圆.

设 AI 的延长线交 $\overset{\frown}{BC}$ 于 F，则 AF、AE 分别为 $\angle A$ 的内、外角平分线，$\angle EAF=90°$，即 EF 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle 1=\angle 2=\frac{1}{2}\angle AOE$，

又在 $\odot M$ 中，$\angle 1=\frac{1}{2}\angle OMI$，$\therefore \angle AOE=\angle OMI$，但 $\odot O$ 与 $\odot M$ 为等圆，故 $AE=OI$

(2) 连接 FC，同上易证 $IF=CF$，又 $\angle IFC=\angle ABC=60°$，$\therefore \triangle IFC$ 为等边三角形，$IC=IF$

$\because \angle AFE = \frac{1}{2}\angle AOE = \frac{1}{2}\angle OMI$

$= \frac{1}{2}(\angle AMI - \angle AMO)$

$= \frac{1}{2}(\angle C - 60°)$

记$\angle AFE$为θ

$\therefore IO + IA + IC = AE + IA + IF = AE + AF$

$= 2R\sin\theta + 2R\cos\theta = 2R(\sin\theta + \cos\theta)$

$= 2\sqrt{2}R \cdot \sin(\theta + 45°) = 2\sqrt{2}R \cdot \sin\left(\frac{C}{2} + 15°\right)$

由$\angle A < \angle C$知,$60° < \angle C < 120°$,从而有$30° < \frac{\angle C}{2} < 60°$

即 $45° < \frac{\angle C}{2} + 15° < 75°$

$\therefore 2\sqrt{2}R \cdot \sin45° < IO + IA + IC < 2\sqrt{2}R \cdot \sin75°$

又 $\sin75° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

故 $2R < IO + IA + IC < (1+\sqrt{3})R$

例 13 (1995.日本数学奥林匹克预选试题第3题)锐角$\triangle ABC$的外心为O,线段OA,BC的中点分别为M、N.$\angle ABC = 4\angle OMN$,$\angle ACB = 6\angle OMN$.求$\angle OMN$.

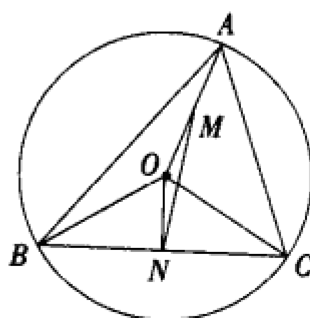


图 Ⅱ-4-1-26

解:如图 Ⅱ-4-1-26,设$\angle OMN = \theta$,则

$\angle ABC = 4\theta$,$\angle ACB = 6\theta$

$\angle BAC = 180° - (4\theta + 6\theta) = 180° - 10\theta$

又$\angle NOC = \angle BOC/2 = \angle BAC = 180° - 10\theta$

$\angle MOC = \angle AOC = 2\angle ABC = 8\theta$

从而$\angle MON = 8\theta + (180° - 10\theta) = 180° - 2\theta$

$\angle ONM = 180° - (\angle MON + \angle OMN)$

$= 180° - (180° - 2\theta + \theta)$

$= \theta = \angle OMN$

即 $\triangle OMN$为等腰三角形,$ON = OM = OA/2 = OC/2$

$\because \angle ONC = 90°$,$\therefore \angle NOC = 60°$

又$\because \angle NOC = 180° - 10\theta$

$\therefore \angle OMC = \theta = 12°$

例 14 (数学通报1996.第7期数学问题1018)设I为$\triangle ABC$内一点,试证:I为$\triangle ABC$内心的充要条件是$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心均在$\triangle ABC$的外接圆上.

证明:必要性:(如图 Ⅱ-4-1-27)设I为$\triangle ABC$内心,AI、BI、CI的延长线分别交$\triangle ABC$的外接圆于A_1、B_1、C_1,连接A_1B、A_1C.

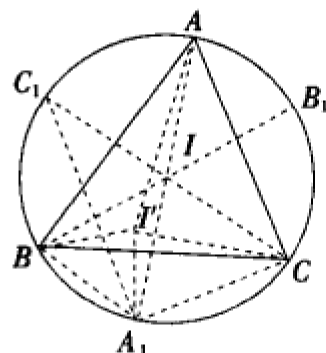


图 Ⅱ-4-1-27

在$\triangle A_1BI$中,$\angle A_1IB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$,$\angle A_1BI = \angle A_1BC + \angle\frac{B}{2}$
$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$,故$A_1B = A_1I$

同理,在$\triangle A_1CI$中,$A_1I = A_1C$.于是

$A_1B = A_1I = A_1C$

因此,A_1是$\triangle IBC$的外心.同理,B_1、C_1分别是$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心.即$\triangle IBC$、$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心均在$\triangle ABC$的外接圆上.

充分性:(如图) 设 I' 为 $\triangle ABC$ 内一点,$\triangle I'BC$、$\triangle I'CA$、$\triangle I'AB$ 的外心 A_2、B_2、C_2 均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上,由 $A_2B = A_2C$,$A_1B = A_1C$,知 A_2、A_1 重合.同理,B_2、B_1 重合,C_2、C_1 重合.

由 A_1、C_1 分别是 $\triangle IBC$、$\triangle IAB$ 的外心,知 A_1C_1 垂直平分线段 BI.则 $A_1(A_2)$、$C_1(C_2)$ 分别是 $\triangle I'BC$,$\triangle I'AB$ 的外心,知 A_1C_1 垂直平分线段 BI'.由此可知 I' 和 I 重合,即 I' 为 $\triangle ABC$ 内心.

【评注】 由上述证明可得出如下结论:

设 I' 为 $\triangle ABC$ 内一点,若 $\triangle I'BC$、$\triangle I'CA$,$\triangle I'AB$ 中有两个三角形外心在 $\triangle ABC$ 的外接圆上,则另一三角形的外心也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

下面我们讨论界心的两个性质.

例 15 设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 边上的周界中点,R、r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径,则(1) $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{r}{2R}$,(2) $S_{DEF} \leqslant \dfrac{1}{4} S_{\triangle abc}$

证明: 设 $BC = a$,$CA = b$,$AB = c$,$2p = a + b + c$,则由题设易知

$$\begin{cases} BD = AE = p - c \\ CD = AF = p - b \\ CE = BF = p - a \end{cases}$$

再由三角形面积比的性质,有

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AC \cdot AB} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

同理 $$\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(p-c)(p-a)}{ca}$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

从而 $$\begin{aligned} \frac{S_{DEF}}{S_{\triangle ABC}} &= 1 - \left(\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}\right) \\ &= 1 - \left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca} + \frac{(p-a)\cdot(p-b)}{ab}\right] \\ &= \frac{-2p^3 + 2(ab+bc+ca)p - 2abc}{abc} \end{aligned}$$

把三角形恒等式

$ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$ 和 $abc = 2pRr$ 代入并整理,得 $\dfrac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{r}{2R}$

由欧拉不等式 $R \geqslant 2r$,得 $S_{\triangle DEF} \leqslant \dfrac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

§1·3 针对性训练

A组

1.(1998.CMO题)在一个非钝角$\triangle ABC$中,$AB > AC$,$\angle B = 45°$,O和I分别是$\triangle ABC$的外心和内心,且$\sqrt{2}OI = AB - AC$.求$\sin A$

2.(第39届IMO题)设I是$\triangle ABC$的内心,并设$\triangle ABC$的内切圆与三边BC、CA、AB分别相切于点K、L、M.过B点平行于MK的直线分别交直线LM及LK于点R和S.证明:$\angle RIS$是锐角.

3.(1994.江苏省赛题5)D、E、F分别为$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上的点,且$\angle FDE = \angle A$,$\angle DEF = \angle B$,又设$\triangle AEF$、$\triangle BDF$、$\triangle CED$均为锐角三角形,它们的垂心依次为H_1、H_2、H_3,求证:

(1)$\angle H_2DH_3 = \angle FH_1E$

(2)$\triangle H_1H_2H_3 \cong \triangle DEF$

4.(第10届即1988.美国数学奥林匹克题4)设I为三角形ABC内心,且A'、B'、C'分别为$\triangle IBC$,$\triangle ICA$、$\triangle IAB$的外心,求证:$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$有相同外心.

5.(第7届即1990.巴尔干地区数学奥林匹克题3)$\triangle A_1B_1C_1$是不等边锐角$\triangle ABC$的垂足三角形,A_2,B_2,C_2是$\triangle A_1B_1C_1$内切圆分别与各边的切点.证明:$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle ABC$的欧拉线重合.

(注:三角形的欧拉线是指垂心和外心的连线)

6.(1990.IMO预选题)若$\triangle XYZ$与$\triangle ABC$相似,且X在BC上,Y在AC上,Z在AB上.求证:$\triangle XYZ$的垂心,就是$\triangle ABC$的外心.

7.(数学奥林匹克高中训练题(45)第二试题一)如图Ⅱ-4-1-28,平行四边形$ABCD$中,E为AD

上任一点,过 E 作 EF 与 AB 的延长线交于 F,连 CE、CF,记 $\triangle CDE$ 的外心为 O_1,$\triangle EAF$ 的外心为 O_2,$\triangle CBF$ 的外接圆半径为 R. 求证:$O_1O_2 = R$

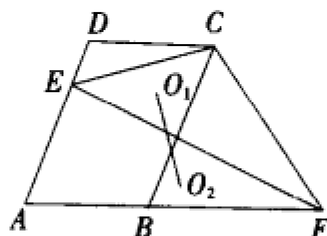


图 Ⅱ - 4 - 1 - 28

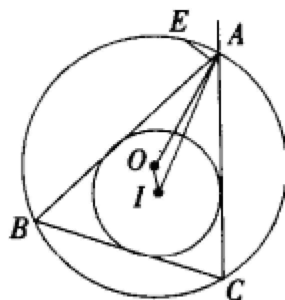


图 Ⅱ - 4 - 1 - 29

8.(1994. 全国高中联赛)如图 Ⅱ - 4 - 1 - 29,设 $\triangle ABC$ 的外接圆 O 的半径为 R,内心为 I,$\angle B = 60°$,$\angle A < \angle C$,$\angle A$ 的平分线交圆 O 于 E,证明:

(1) $IO = AE$

(2) $2R < IO + IA + IC < (1+\sqrt{3})R$

说明:此题作为例题已在前面深入讨论过,但此题还有其他证法,对于提高平面几何证题能力很有好处,因此很值得研究.

B 组

1. $\triangle ABC$ 的内心为 I,内切圆分别切 BC,CA 于点 D、E. 如果 BI 交 DE 于点 G. 求证:$AG \perp BG$

2. 已知 $\odot O$ 内切于 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O'$,并且与 AB、AC 分别相切于 P、Q. 证明:$\triangle ABC$ 的内心 I 平分 PQ

3. 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 与 BC 边切于 D,DE 是 $\odot I$ 的直径,AE 的延长线交 BC 于 F. 求证:$BD = CF$

4. 已知 $\triangle ABC$ 中,高 AD 在其内部,过 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的内心 I_1、I_2 引直线分别交 AB、AC 于 E、F.

(1) 若 $\angle BAC = 90°$,则 $AE = AF$

(2) 若 $AE = AF$,则 $\angle BAC = 90°$ 也成立吗?若成立,请证明;若不成立,请说明理由,并指出不成立的情形.

5.(第二十二届 1996.全俄数学奥林匹克赛题) 在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AC = BC$,O 是它的外心,I 是它的内心,点 D 在 BC 边上,使得 OD 与 BI 垂直.证明:直线 ID 与 AC 平行.

6.(第 39 届 IMO 中国国家队选拔试题四) 如图 Ⅱ - 4 - 1 - 30,锐角 $\triangle ABC$ 中,H 是垂心,O 是外心,I 是内心,已知 $\angle C > \angle B > \angle A$.求证:$I$ 在 $\triangle BOH$ 的内部.

7.(2000.全俄) 锐角 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O,经过 A、O、C 三点的圆心为 K,且与边 AB 和 BC 分别交于点 M 和 N,点 K 关于直线 MN 的对称点为 L.求证:$BL \perp AC$

8.(第 37 届 IMO 预选题第 16 题改编) 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,外接圆圆主为 O,半径为 R,AO 交 BOC 所在的圆于另一点 A',BO 交 COA 所在的圆于另一点 B',CO 交 AOB 所在圆于另一点 C'.证明:$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{R}$

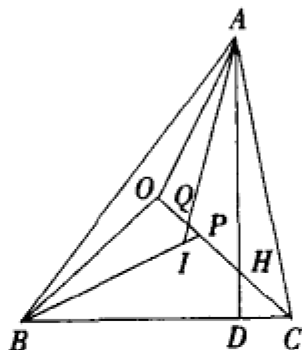


图 Ⅱ - 4 - 1 - 30

9.(第 40 届 IMO 预选题) 已知 $\triangle ABC$ 的内心为 I,$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 分别过 B、C,A、C 和 A、B 且与 $\odot I$ 直交.$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于另一点 C',同理可得点 B' 和点 A'.证明:$\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径等于 $\odot I$ 半径的 $\frac{1}{2}$

10.(2001.保加利亚数学奥林匹克竞赛题) 非等腰 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心为 O,其与 AB、BC 和 CA 分别相切于点 C_1、A_1 和 B_1,AA_1、BB_1 交圆于 A_2、B_2、$\triangle A_1B_1C_1$ 的 $\angle C_1A_1B_1$ 和 $\angle C_1B_1A_1$ 的平分线分别交 B_1C_1 和 A_1C_1 于点 A_3、B_3.证明:

(1) A_2B_3 是 $\angle B_1A_2C_1$ 的平分线

(2) 如果 P 和 Q 是 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的两外接圆交点,则点 O 在直线 PQ 上.

第二章

几个著名定理

§2.1 知识、方法、技能

1. 梅涅劳斯(Menelauss)定理

设 P,Q,R 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC,CA,AB 或其延长线上的点，且有奇数个点在边的延长线上，则 P、Q、R 三点共线(如图 Ⅱ－4－2－1) 的充要条件是 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

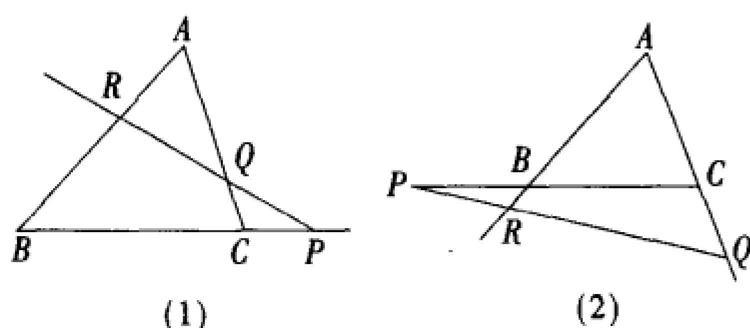


图 Ⅱ－4－2－1

【说明】 (1)“P、Q、R 三点中有奇数个点在边的延长线上”这一条件十分必要，否则梅涅劳斯定理不成立；

(2) 恰当选择三角形的截线或作出截线，是应用梅涅劳斯定理的关键，其逆定理常应用于证明三点共线问题.

2. 塞瓦(Ceva)定理

设 P、Q、R 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC,CA,AB 边或其延长线上的点，且有偶数个点在边的延长线上，则 AP、BQ、CR 三线共点或互相平行(如图 Ⅱ－4－2－2) 的充要条件是 $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

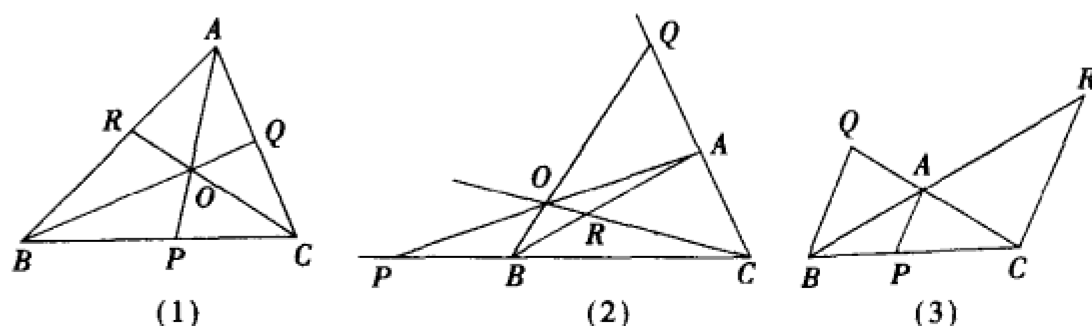


图 Ⅱ－4－2－2

【说明】 (1)“P、Q、R 三点中有偶数个点在边的延长线上”这一条件十分必要，否则塞瓦定理不成立.

(2) 对较复杂的问题，要注意梅涅劳斯定理和塞瓦定理的联合应用.

3. 托勒密(Ptolemy)定理

圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边乘积的和等于它的两条对角线的乘积：

$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

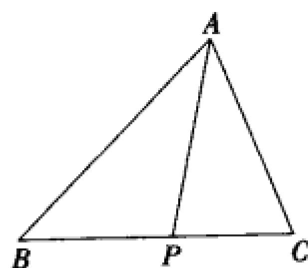
托勒密定理的逆定理也成立.

【说明】 托勒密定理可作如下推广：在凸四边形 $ABCD$ 中，有 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$. 等号成立的充要条件是 $ABCD$ 为圆的内接四边形. 称为广义托勒密定理.

4. 斯德瓦特(Stewart)定理

设 P 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点(如图Ⅱ-4-2-3)，则

$BP \cdot AC^2 + PC \cdot AB^2 = BC \cdot AP^2 + BP \cdot PC \cdot BC$



图Ⅱ-4-2-3

【说明】 如果 $BP : PC = m : n$，则斯德瓦特定理可写成如下形式：

$$mAC^2 + nAB^2 = (m+n)AP^2 + \frac{mn}{m+n}BC^2$$

(1) 特别当 $m = n$，即 P 为 BC 中点时，可得：

$$AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

或 $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$

此即为三角形的中线公式.

(2) 当 AP 为 $\angle A$ 的分角线时，$\frac{m}{n} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$，所以

$$c \cdot b^2 + b \cdot c^2 = (b+c)AP^2 + \frac{bc}{b+c}a^2$$

即 $$AP^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

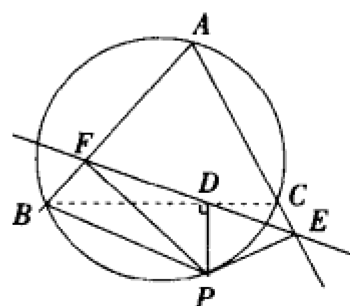
设三角形的周长 $a + b + c = 2p$

则 $$AP = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

此即为三角形内角平分线公式.

5. 西姆松(Simson)定理

在凸四边形 $ABPC$ 中，若 D、E、F 分别是 P 点在 $\triangle ABC$ 的 BC，CA，AB 边或其延长线上的射影(图Ⅱ-4-2-4)，则 D、E、F 三点共线的充要条件是四边形 $ABPC$ 内接于一圆.



图Ⅱ-4-2-4

【说明】 (1) 若 $ABPC$ 内接于一圆，则直线 EDF 称为 $\triangle ABC$ 的关点 P 的西姆松线

【说明】 (2) 利用西姆松定理可证数点共线. 寻找恰当的三角形，使得要证明共线的三点可以看做是三角形外接圆上的一点在该三角形三边所在直线上的射影. 这是应用西姆松定理的关键.

(3) 作为应用，在赛题精讲，我们介绍西姆松定理与托勒密定理的等价性证明.

6. 笛沙格定理

如果两个三角形的对应顶点连线共点，那么它们的对应边交点共线

笛沙格逆定理：

如果两个三角形的对应边交点共线，那么它们的对应顶点连线共点

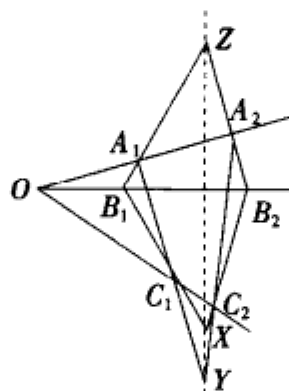
【说明】 作为梅涅劳斯定理的应用，在赛题精讲中的例 1 将对笛沙格定理作出证明.

§2.2 赛题精讲

例1 （笛沙格定理）如图Ⅱ－4－2－5，由 O 引出的三条射线上各有两个点：A_1 和 A_2，B_1 和 B_2，C_1 和 C_2. 直线 B_1C_1 和 B_2C_2 交于点 X；直线 A_1C_1 和 A_2C_2 交于点 Y；直线 A_1B_1 和 A_2B_2 交于点 Z. 求证：X,Y,Z 共线.

【分析】 当然稍微观察一下就会发现这个定理显然将使用梅氏定理来证明，因为题目几乎什么条件都没给，只有直线直线还是直线，所以迫不得已我们只好使用梅氏定理.

看 $\triangle A_1B_1C_1$，XYZ 为梅氏线，只要证明 $\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}=1$ 即可. 关键是这些比例我们都不知道，所以就要想办法转化条件. 注意到 $\frac{A_1Z}{ZB_1}$ 可以看成在 $\triangle OA_1B_1$ 中 ZA_2B_2 为梅氏线时也用到的一个比例，所以，我们考虑这个梅氏定理对应的式子：$\frac{OA_2}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1$. 由此知道 $\frac{A_1Z}{ZB_1}=\frac{A_2A_1}{OA_2}\cdot\frac{B_2O}{B_1B_2}$



图Ⅱ－4－2－5

这时，请读者要注意这样一个事实，就是 ABC 地位的轮换对称性，所以说，我们根本不需要去想剩下两个应该如何去转化，而只需要对上式的 ABC 进行轮换代入即可得到关于另外两个比例的转化式：$\frac{B_1X}{XC_1}=\frac{B_2B_1}{OB_2}\cdot\frac{C_2O}{C_1C_2}$，$\frac{C_1Y}{YA_1}=\frac{C_2C_1}{OC_2}\cdot\frac{A_2O}{A_1A_2}$（即第一个式子中见到 A 就用 B 代替，见到 B 就用 C 代替，见到 Z 就用 X 代替；第二个同理）. 这样可以大大简短思考问题的时间，而且还时刻保持了对称性.

当然在写证明的时候，我们最好还是不要点明的说这些对称性的东西，因为这些很多都是建立在感觉的基础之上的，并不是特别的严格.

证明：在 $\triangle OA_1B_1$ 中，ZA_2B_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$$\frac{OA_2}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1B_2}{B_2O}=1.$$

在 $\triangle OB_1C_1$ 中，ZB_2C_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$$\frac{OB_2}{B_2B_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1C_2}{C_2O}=1$$

在 $\triangle OC_1A_1$ 中，ZC_2A_2 为梅氏线，由梅氏定理得：

$$\frac{OC_2}{C_2C_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}\cdot\frac{A_1A_2}{A_2O}=1$$

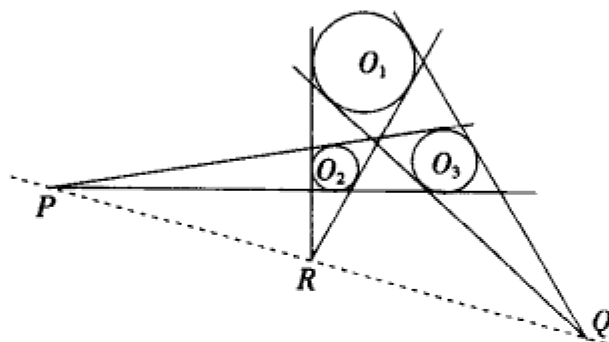
将以上三式相乘得到：$\frac{A_1Z}{ZB_1}\cdot\frac{B_1X}{XC_1}\cdot\frac{C_1Y}{YA_1}=1$

由梅氏逆定理得 X,Y,Z 共线.

证毕.

【说明】 这个证明的基本想法就是利用梅氏定理转化线段比例，但最重要的是要时刻保持点的轮换对称性，这样给出的证明就显得很漂亮和干净.

例2 如图Ⅱ－4－2－6，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 和 $\odot O_3$ 两两的外公切线分别交于点 P,Q 和 R. 求证：P,Q,R 三点共线.



图Ⅱ－4－2－6

【分析一】 我先说一个解法，这是一种感觉带来的，因为这道题目太让人产生联想了. 笔者第一次拿到题目就有一个反应，是不是可以用笛沙格定理啊？在经过几组试验之后就给出了下面的解法.

证法一:考察标出的点组 A,B,C 和 O_1,O_2,O_3

易见,AO_1,BO_2,CO_3 是 $\triangle ABC$ 的三条角分线,所以共点是自然的.

由笛沙格定理,P,Q,R 三点共线.(P 是 BC 和 O_2O_3 的交点;Q 是 CA 和 O_3O_1 的交点;R 是 AB 和 O_1O_2 的交点).

证毕.

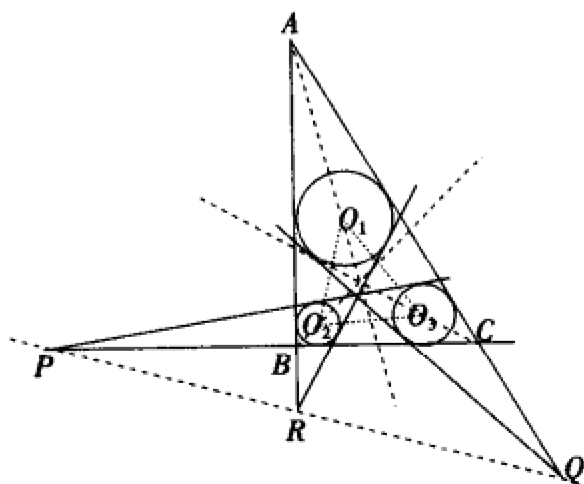


图 Ⅱ-4-2-6

【评注】 不知道读者有什么感想,觉得很玄妙吧!我觉得这更多是一种经验,我前面写到想到使用笛沙格定理的原因是一种感觉.你看到的是一种比较简练的图形,尽管它所包括的条件很多,但是就好像看一幅速写画一样,用很少的几条直线就勾勒出来.所以,会让人联想到笛沙格定理,作为这道题目,选择笛沙格是显然的.

【分析二】 其实我们完全不必去回忆刚才的那个解法,因为它需要太多的经验和技巧.我们来回到我们惯用的思路,首先我们要看看要讨论问题主要涉及的 P,Q,R 三个点有什么性质.事实上,如果你随便看一下就会发现 O_1,O_2,R;O_2,O_3,P;O_3,O_1,Q 分别共线.由此我们自然会想到要用梅氏逆定理,去证明$\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=1$.这个证明简直易如反掌,简直不需要什么计算.

证法二:设三个圆半径分别为 r_1,r_2,r_3

易见 RO_1 和 RO_2 都是角 R 的平分线,所以 O_1,O_2,R 共线.

同理,O_2,O_3,P 和 O_3,O_1,Q 分别共线.

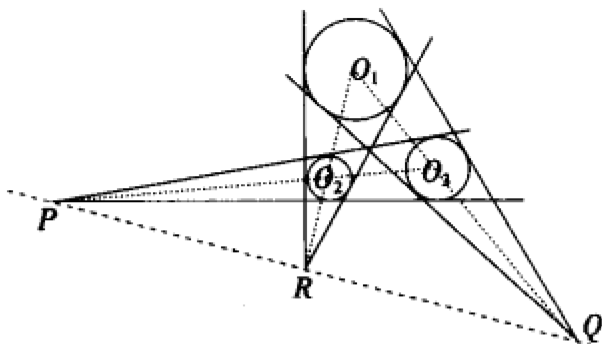


图 Ⅱ-4-2-6

为证明 P,Q,R 三点共线,只要证明:$\frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=1$

事实上,由相似易知$\frac{O_1R}{RO_2}=\frac{r_1}{r_2},\frac{O_2P}{PO_3}=\frac{r_2}{r_3},\frac{O_3Q}{QO_1}=\frac{r_3}{r_1}$

$$\therefore\quad \frac{O_1R}{RO_2}\cdot\frac{O_2P}{PO_3}\cdot\frac{O_3Q}{QO_1}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1$$

由梅氏逆定理知 P,Q,R 三点共线.

证毕.

例 3 (1996.全国高中数学联赛二试题三)如图 Ⅱ-4-2-7,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 和 $\triangle ABC$ 的三边所在的 3 条直线都相切,E、F、G、H 为切点,直线 EG 与 FH 交于点 P.求证:$PA\perp BC$.

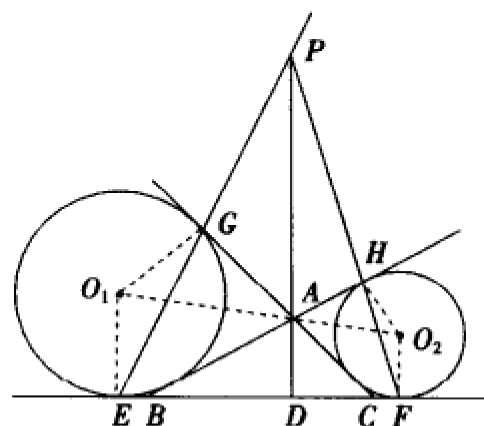


图 Ⅱ-4-2-7

【注】 如下给出的方法不同于命题组给出的方法.

证明:过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,延长 DA 交直线 HF 于点 P',由梅涅劳斯定理有

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=1$$

$\because BF=BH,\therefore\quad \frac{AH}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=1$

$\because\quad O_1E\,/\!/\,AD\,/\!/\,O_2F,\triangle AGO_1\backsim\triangle AHO_2$

$\therefore \quad \frac{DE}{DF}=\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{AG}{AH} \quad \therefore \quad \frac{AH}{DF}=\frac{AG}{DE}$

又 $\because \quad CE=CG$

$\therefore \quad 1=\frac{AH}{DF}\cdot\frac{DP'}{AP'}=\frac{AG}{DE}\cdot\frac{DP'}{AP'}=\frac{DP'}{AP'}\cdot\frac{AG}{CG}\cdot\frac{CE}{DE}$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 P'、G、E 三点共线,即 P' 为直线 EG 与 FH 的交点.

因此,点 P' 与 P 重合.

$\therefore \quad AP \perp BC$.

【评注】 这个证明中所连的辅助线与命题组给出的答案相同,但论证方法和推导过程要比命题组答案巧妙和简捷!

例 4 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 内的旁切圆切 $\angle A$ 的两边于 A_1 和 A_2,直线 A_1A_2 与直线 BC 交于 A_3;相仿地定义 B_1、B_2、B_3 和 C_1、C_2、C_3,求证:A_3、B_3、C_3 共线.

证明:如图 Ⅱ-4-2-8,由梅氏定理有:

$$\frac{AC_3}{BC_3}\cdot\frac{BC_2}{CC_2}\cdot\frac{CC_1}{AC_1}=1$$

$$\frac{BA_3}{CA_3}\cdot\frac{CA_2}{AA_2}\cdot\frac{AA_1}{BA_1}=1$$

$$\frac{CB_3}{AB_3}\cdot\frac{AB_2}{BB_2}\cdot\frac{BB_1}{CB_1}=1$$

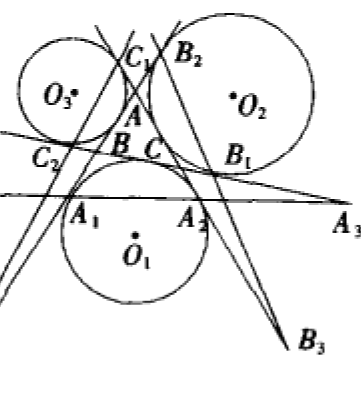


图 Ⅱ-4-2-8

注意到有,$AA_1=AA_2$,$BB_1=BB_2$,$CC_1=CC_2$,故由上述三式可分别得到:

$$\frac{AC_3}{BC_3}=\frac{AC_1}{BC_2};\frac{BA_3}{CA_3}=\frac{BA_1}{CA_2};\frac{CB_3}{AB_3}=\frac{CB_1}{AB_2}$$

再将此三式相乘有:

$$\frac{AC_3}{BC_3}\cdot\frac{BA_3}{CA_3}\cdot\frac{CB_3}{AB_3}=\frac{AC_1}{BC_2}\cdot\frac{BA_1}{CA_2}\cdot\frac{CB_1}{AB_2} \qquad (*)$$

记 AB 与 $\odot O_3$ 的切点为 K,AC 与 $\odot O_2$ 的切点为 L,则由 $BB_1=BB_2$,可得 $BC_2=BK=\frac{1}{2}(B_1C_2-KB_2)$,同理 $CB_1=CL=\frac{1}{2}(B_1C_2-L_1C_1)$,再由两内公切线 $LC_1=KB_2$,便有 $BC_2=CB_1$,同理可证 $CA_2=AC_1$,$AB_2=BA_1$,代入($*$)中便有$\frac{AC_3}{BC_3}\cdot\frac{BA_3}{CA_3}\cdot\frac{CB_3}{AB_3}=1$,故由梅氏定理的逆定理知三点 A_3,B_3,C_3 共线.

【评注】 在例 4 的证明的开始,就三次使用梅氏定理,这就是梅氏定理的选用.例 4 本是一个较复杂的问题,但由于选用梅氏定理,再注意等量代换,很快由梅氏定理的逆定理使问题得到证明.

下面的例 5 是二次曲线蝴蝶定理的推论,是一道难题,但选用梅涅劳斯定理则可简洁获证.

例 5 任意四边形 $ABCD$ 的一组对边 BA 与 CD 交于 M,过 M 作割线交另一组对边所在直线于 H,L,交对角线所在直线于 H'、L'.求证:$\frac{1}{MH}+\frac{1}{ML}=\frac{1}{MH'}+\frac{1}{ML'}$

证明:如图 Ⅱ-4-2-9,设 $AD \not\parallel BC$,而是相交于 O,$\triangle BML$、$\triangle CML$ 被直线 AO 所截,则由梅氏定理得:

$$\frac{BA}{AM}=\frac{HL}{MH}\cdot\frac{OB}{LO} \qquad ①$$

$$\frac{CD}{DM}=\frac{HL}{MH}\cdot\frac{OC}{LO} \qquad ②$$

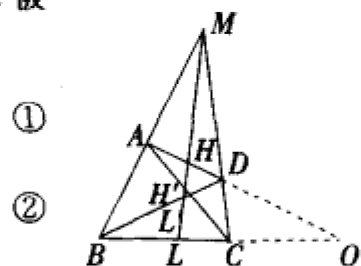


图 Ⅱ-4-2-9

① $\times LC+$ ② $\times BL$,得

$$LC \cdot \frac{BA}{AM} + BL \cdot \frac{CD}{DM} = \frac{HL}{MH} \cdot \frac{OB \cdot LC + OC \cdot BL}{LO} \quad ③$$

但 $OB \cdot LC + OC \cdot BL = BC \cdot LO$,③ 变为

$$LC \cdot \frac{BA}{AM} + BL \cdot \frac{CD}{DM} = BC \cdot \frac{HL}{MH} \quad ④$$

如 $AD \parallel BC$,④ 式显然.

又由 BD 截 $\triangle LCM$ 和 AC 截 $\triangle LBM$ 得

$$BC \cdot \frac{LL'}{L'M} = BL \cdot \frac{DC}{MD} \quad ⑤$$

$$BC \cdot \frac{LH'}{H'M} = LC \cdot \frac{AB}{AM} \quad ⑥$$

将 ⑤、⑥ 代入 ④ 整理,即可得欲证.

例 6 (1996.中国集训队选拔赛试题)以 $\triangle ABC$ 的底边 BC 为直径作半圆,分别与边 AB、AC 交于点 D 和 E,分别过点 D、E 作 BC 的垂线,垂足依次为 F、G,线段 DG 和 EF 交于点 M.求证:$AM \perp BC$

证法一:如图 Ⅱ－4－2－10,记直线 AM 与 BC 交于点 M,连接 BE、CD.有 $\angle BEC = BDC = 90°$.直线 FME 与 $\triangle AHC$ 相截,直线 GMD 与 $\triangle ABH$ 相截,由梅涅劳斯定理有

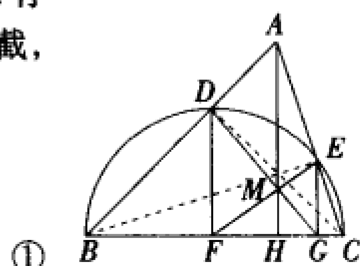


图 Ⅱ－4－2－10

$$\frac{AM}{MH} \cdot \frac{HF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1, \frac{AM}{MH} \cdot \frac{HG}{GB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{FH}{HG} = \frac{CF \cdot AE \cdot BD}{CE \cdot BG \cdot AD} \quad ①$$

在直角 $\triangle DBC$ 与 $\triangle EBC$ 中应用射影定理有

$$CD^2 = BC \cdot FC, BE^2 = BC \cdot BG$$

$$\therefore \quad \frac{CF}{BG} = \frac{CD^2}{BE^2} \quad ②$$

将 ② 代入 ①,得

$$\frac{FH}{HG} = \frac{CD^2 \cdot AE \cdot BD}{BE^2 \cdot CE \cdot AD} \quad ③$$

$$\because \triangle ABE \backsim \triangle ACD \quad \therefore \quad \frac{CD}{BE} = \frac{AD}{AE} \quad ④$$

将 ④ 代入 ③,得

$$\frac{FH}{HG} = \frac{CD \cdot BD}{BE \cdot CE} = \frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}} = \frac{DF}{EG} = \frac{DM}{MG}$$

$\therefore \quad MH \parallel DF$

$\because \quad DF \perp BC \therefore \quad MH \perp BC$

$\therefore \quad AM \perp BC$

证法二:作高 AH,连接 BE,CD.于是 $\angle BDC = 90° = \angle BEC$

$\therefore \quad DF = BD \cdot \sin B = BC \cdot \cos B \cdot \sin B, \quad EG = BC \cdot \cos C \cdot \sin C$

$$\therefore \quad \frac{GM}{MD} = \frac{EG}{FD} = \frac{\cos C \cdot \sin C}{\cos B \cdot \sin B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\cos C}{\cos B}$$

$\because \quad BH = AB \cdot \cos B, \quad HG = AE \cdot \cos C$

$$\therefore \quad \frac{BH}{HG} = \frac{AB \cdot \cos B}{AE \cdot \cos C} = \frac{AC \cdot \cos B}{AD \cdot \cos C}. \quad \therefore \quad \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GM}{MD} = \frac{AB}{AD}$$

$$\therefore \quad \frac{BH}{HG} \cdot \frac{GM}{MD} \cdot \frac{DA}{AB} = 1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 H、M、A 三点共线.

$\because \quad AH \perp BC \quad \therefore \quad AM \perp BC$

对例 6,我们再给出将梅涅劳斯定理与塞瓦定理联合使用证明的一种方法如下.

证法三:作高 AH,连接 BE,CD.则 AH、BE、CD 交于一点,即 $\triangle ABC$ 的垂心.由塞瓦定理有

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

$\because\ EG\parallel DF$,$\therefore\ \triangle MDE\backsim\triangle MGE$

$$\therefore\ \frac{GM}{MD}=\frac{EG}{DF}=\frac{S_{\triangle EBC}}{S_{\triangle DBC}}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$$

$\because\ AH\parallel EG$,$\therefore\ \frac{HG}{AE}=\frac{CH}{AC}$

$$\therefore\ \frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH\cdot AC}{AE\cdot CH}\cdot\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$$

$\because\ AB\cdot CD=2S_{\triangle ABC}=AC\cdot BE$

$$\therefore\ \frac{AD}{AB}\cdot\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 A、M、H 三点共线,

$\therefore\ AM\perp BC$

【评注】 使用梅涅劳斯和塞瓦定理证明本题,还可找到一些不同的方法,但限于篇幅,不再一一列举,留给读者去思考,相信读者还会找到更好的证法.

例 7 (第 37 届即 1996. IMO 预选题)设 $\triangle ABC$ 是等边三角形,P 是其内部一点,线段 AP、BP、CP 依次交三边 BC、CA、AB 于 A_1、B_1、C_1 三点.证明:$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geqslant A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$

证明:如图 Ⅱ-4-2-11,由余弦定理

$$\begin{aligned}A_1B_1^2&=A_1C^2+B_1C^2-A_1C\cdot B_1C\\&\geqslant 2A_1C\cdot B_1C-A_1C\cdot B_1C\\&=A_1C\cdot B_1C.\end{aligned}$$

同理 $B_1C_1^2\geqslant B_1A\cdot C_1A$,$C_1A_1^2\geqslant C_1B\cdot A_1B$

由塞瓦定理得

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}=1.$$

图 Ⅱ-4-2-11

所以 $A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1$

$$\begin{aligned}&\geqslant\sqrt{A_1C\cdot B_1C\cdot B_1A\cdot C_1A\cdot C_1B\cdot A_1B}\\&=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A\cdot\sqrt{\frac{A_1C\cdot B_1A\cdot C_1B}{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}}\\&=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A\end{aligned}$$

【评注】 从例 7 证明过程可看出,塞瓦定理的应用起着关键的枢纽作用,沟通了余弦定理与要证结论的联系.

例 8 设 P 为 $\triangle ABC$ 内任一点,在三角形内作射线 AL、BM、CN,使得 $\angle CAL=\angle PAB$,$\angle MBC=\angle PBA$,$\angle NCA=\angle BCP$.求证:AL、BM、CN 三线共点.

【分析】 将射线 AL、BM、CN 画到与对边相交,则恰好出现塞瓦定理的图形,且若把 AP、BP、CP 延长到与对边相交,则得到另一个塞瓦定理的标准图形.所以此题证明宜用塞瓦定理进行.

证法一:如图 Ⅱ-4-2-12(1),记 $AL\cap BC=L$,$BM\cap CA=M$,$CN\cap AB=N$,由正弦定理有:

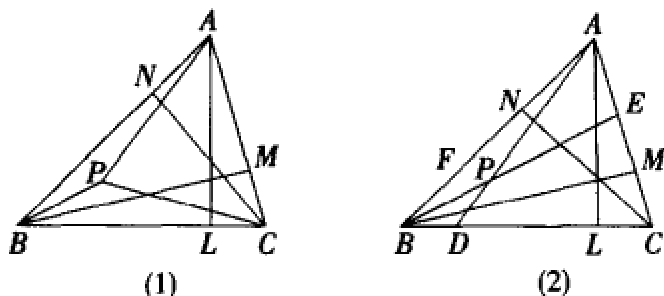


图 Ⅱ-4-2-12

$$\frac{BL}{LC}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAL}{AC\cdot\sin\angle CAL}=\frac{AB\cdot\sin\angle PAC}{AC\cdot\sin\angle PAB}$$

同理可证:

$\frac{CM}{MA}=\frac{BC\cdot\sin\angle PBA}{AB\cdot\sin\angle PBC},\frac{AN}{NB}=\frac{AC\cdot\sin\angle PCB}{BC\cdot\sin\angle PCA}$

将上述三式相乘,再由正弦定理即得

$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{\sin\angle PAC\cdot\sin\angle PBA\cdot\sin\angle PCB}{\sin\angle PCA\cdot\sin\angle PAB\cdot\sin\angle PBC}=\frac{PC}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}=1$

由塞瓦定理的逆定理知 AL、BM、CN 三线共点.

证法二: 如图 Ⅱ－4－2－12(2),记 $AL\cap BC=L,BM\cap AC=M,CN\cap AB=N,AP\cap BC=D,BP\cap AC=E,CP\cap AB=F$,由塞瓦定理有

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \quad ①$$

在 $\triangle ABL$ 和 $\triangle ACL$ 中应用正弦定理,有

$$\frac{BL}{LC}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AL}{LC}=\frac{\sin\angle BAL}{\sin B}\cdot\frac{\sin C}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}$$

$$=\frac{\sin\angle PAC}{\sin C}\cdot\frac{\sin B}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin^2B}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin^2B}$$

$$=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin^2B} \quad ②$$

同理可证

$$\frac{CM}{MA}=\frac{AE}{EC}\cdot\frac{\sin^2A}{\sin^2C} \quad ③$$

$$\frac{AN}{NB}=\frac{BF}{FA}\cdot\frac{\sin^2B}{\sin^2A} \quad ④$$

将 ②、③、④ 连乘并由 ① 即得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{AE}{EC}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

由塞瓦定理的逆定理知 AL、BM、CN 三线共点.

【评注】 例 8 证明过程可见,在使用塞瓦定理的逆定理证题的过程中,正弦定理起着重要的作用,这不是偶然的,因为二者结论和条件都是比例式而导致的必然联系.实际上,在这类证明过程中,还经常用梅涅劳斯定理、平分角线定理、切割线定理及其他的结论中含有比例式的定理.请看例 9 的证法 2 和证法 3.

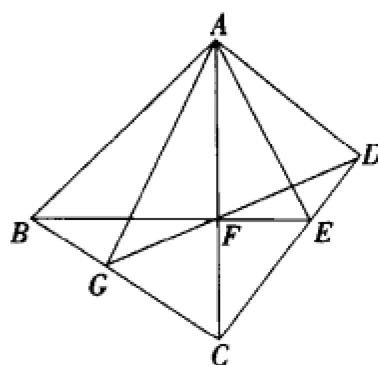


图 Ⅱ－4－2－13

例 9 (1999.全国高中数学联赛二试题一)如图 Ⅱ－4－2－13,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 平分 $\angle BAD$.在 CD 上取一点 E,BE 与 AC 相交于 F,延长 DF 交 BC 于 G.

求证:$\angle GAC=\angle EAC$

证法一:(命题组给出的方法)如图 Ⅱ－4－2－14,连接 BD 交 AC 于 H.对 $\triangle BCD$ 用塞瓦定理,可得

$$\frac{CG}{GB}\cdot\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{BC}=1$$

因为 AH 是 $\angle BAD$ 的平分线,由角平分线定理,

可得 $\frac{BH}{HD}=\frac{AB}{AD}$

故 $\frac{CG}{GB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DE}{EC}=1$

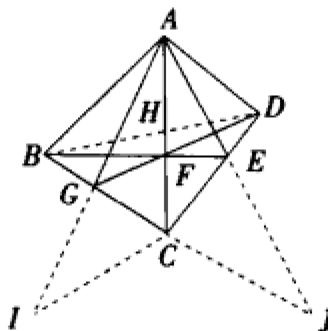


图 Ⅱ－4－2－14

过点 C 作 AB 的平行线交 AG 的延长线于 I ,过点 C 作 AD 的平行线交 AE 的延长线于 J.

则 $\frac{CG}{GB}=\frac{CI}{AB},\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{CJ}$

所以 $\frac{CI}{AB}\cdot\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AD}{CJ}=1$

从而 $CI=CJ$

又因为 $CI\parallel AB, CJ\parallel AD$

故 $\angle ACI=\pi-\angle BAC=\pi-\angle DAC=\angle ACJ$

因此 $\triangle ACI\cong\triangle ACJ$

从而 $\angle IAC=\angle JAC$

即 $\angle GAC=\angle EAC$

证法二:设$\angle BAC=\angle CAD=\delta,\angle GAC=\alpha,\angle EAC=\beta$,(如图 Ⅱ-4-2-15)

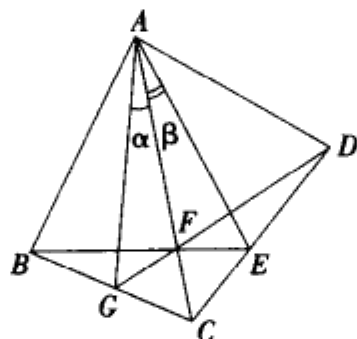


图 Ⅱ-4-2-15

在 $\triangle BCE$ 中,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=1$$

另一方面易知

$$\frac{BG}{GC}=\frac{AB\sin(\delta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha}$$

$$\frac{CD}{DE}=\frac{AC\cdot\sin\delta}{AE\sin(\delta-\beta)},\frac{EF}{FB}=\frac{AE\cdot\sin\beta}{AB\cdot\sin\delta}$$

$$\therefore\ \frac{AB\cdot\sin(\delta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{AC\cdot\sin\delta}{AE\cdot\sin(\delta-\beta)}\cdot\frac{AE\cdot\sin\beta}{AB\cdot\sin\delta}=1$$

即 $\sin(\delta-\alpha)\sin\beta=\sin\alpha\cdot\sin(\delta-\beta)$

$\therefore\ \cos(\delta-\alpha+\beta)-\cos(\delta-\alpha-\beta)$

$\quad=\cos(\alpha+\delta-\beta)-\cos(\alpha-\delta+\beta)$

即 $\cos(\delta-\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\delta-\beta)$

$\because\ \delta-\alpha+\beta,\alpha+\delta-\beta\in(0,\pi)$

$\therefore\ \delta-\alpha+\beta=\alpha+\delta-\beta$

$\therefore\ \alpha=\beta$

故 $\angle GAC=\angle EAC$

证法三:如图 Ⅱ-4-2-16,连接 BD 交 AC 于 H. 设 $\angle DAE=\alpha$, $\angle CAE=\beta$,作 $\angle CAG'=\beta$,交 BC 于 G',连接 DG',则 $\angle BAG'=\alpha$

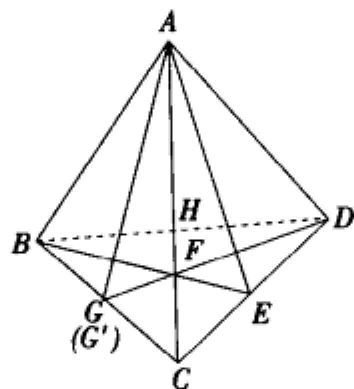


图 Ⅱ-4-2-16

$\because$ AC 平分 $\angle BAD$

$$\therefore\ \frac{DH}{HB}=\frac{AD}{AB}$$

另一方面易知

$$\frac{BG'}{G'C}=\frac{AB\cdot\sin\alpha}{AC\cdot\sin\beta}$$

$$\frac{CE}{ED}=\frac{AC\cdot\sin\beta}{AD\cdot\sin\alpha}$$

$$\therefore\ \frac{BG'}{G'C}\cdot\frac{CE}{ED}\cdot\frac{DH}{HB}=1$$

在 $\triangle BCD$ 中,由塞瓦定理的逆定理知,BE、CH、DG' 共点.

又 BE,CH 交于 F 点,故 D、F、G' 共线,即 G' 是 DF 与 BC 的交点,所以 G 与 G' 重合,从而 $\angle EAC=\angle GAC$

【评注】 本题还可以用解析法证.这里不做介绍,望读者自己研究.

例 10 (1997.中国数学奥林匹克)四边形 $ABCD$ 内接于圆,其边 AB、DC 的延长线交于点P,AD 和 BC 的延长线交于点Q,过 Q 作该圆的两条切线,切点分别为 E、F.求证:P、E、F 三点共线.

证法一:先证一个引理.

引理：过 $\odot O$ 外一点 Q 作 $\odot O$ 的两条切线 QE、QF 和一条割线 QDA. 线段 EF 和 AD 交于点 M（如图 Ⅱ－4－2－17），则 $\frac{AM}{DM}=\frac{AQ}{DQ}$

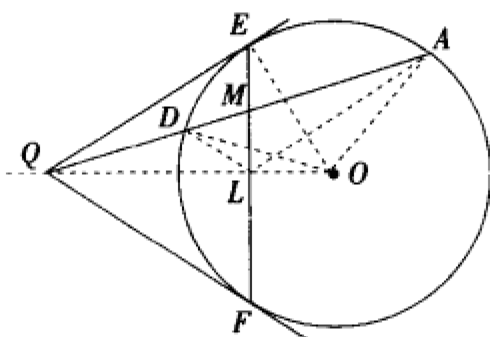


图 Ⅱ－4－2－17

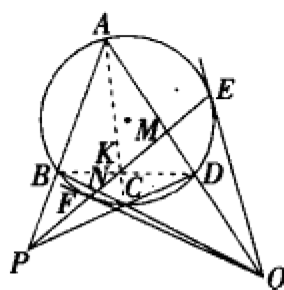


图 Ⅱ－4－2－18

证：连辅助线如图 Ⅱ－4－2－17 所示，由切割线定理和射影定理有：

$QD\cdot QA=QE^2=QL\cdot QO$

$\therefore$ D、L、O、A 四点共圆.

$\therefore$ $\angle QLD=\angle DAO=\angle ODA=\angle OLA$

即 QL 为 $\triangle LAD$ 的内角 $\angle ALD$ 的外角平分线.

$\because$ $EF\perp OQ$，$\therefore$ EL 平分 $\angle ALD$

$\therefore$ $\frac{AM}{DM}=\frac{AL}{DL}=\frac{AQ}{DQ}$

引理得证.

再来证明本题，如图 Ⅱ－4－2－18 所示.

连接对角线 AC 与 BD 交于点 K，连接 PK 并延长分别交 AD、BC 于点 M、N. 由塞瓦定理有：

$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DM}{AM}=1$

直线 QCB 与 $\triangle APD$ 相截，由梅涅劳斯定理有

$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PC}{CD}\cdot\frac{DQ}{AQ}=1$

$\therefore$ $\frac{DM}{AM}=\frac{DQ}{AQ}$

另一方面，连接 EF 交 AD 于点 M'，由引理有：

$\frac{DM'}{AM'}=\frac{DQ}{AQ}$

$\therefore$ $\frac{DM'}{AM'}=\frac{DM}{AM}$

故点 M' 与 M 重合.

于是，点 M 在直线 EF 上，同理，点 N 也在 EF 上，

从而，直线 PMN 与 EF 重合.

因此，P、E、F 三点共线.

证法二：连接 EF 分别交 AD、BC 于点 M、N. 由证法 1 中的引理有：

$\frac{DM}{AM}=\frac{DQ}{AQ}$，$\frac{CN}{BN}=\frac{CQ}{BQ}$

$\therefore$ $\frac{DM}{DQ}=\frac{AM}{AQ}=\frac{AD}{DQ+AQ}$，$\frac{CN}{CQ}=\frac{BN}{BQ}=\frac{BC}{BQ+CQ}$

$\therefore$ $\frac{MQ}{DM}=1+\frac{DQ}{DM}=1+\frac{DQ+QA}{AD}=\frac{2AQ}{AD}$

$\frac{QN}{CN}=\frac{2QB}{BC}$

直线 PBA 与 $\triangle QCD$ 的三边延长线都相交，由梅涅劳斯定理有：

$$1=\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DA}{AQ}\cdot\frac{QB}{BC}=\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DM}{MQ}\cdot\frac{QN}{CN}$$

由梅涅劳斯定理的逆定理可知 P、M、N 三点共线，所以 P、E、F 三点共线.

西姆松定理和托勒密定理，在一般人看来是两个独立定理，实则两个定理是等价的，下面的例 11 就是证明这两个定理的等价性的.

例 11 证明：西姆松定理与托勒密定理等价.

西姆松定理：三角形外接圆上任一点在三边所在直线上的射影共线.

托勒密定理：若四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，则 $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$

证明：(1) 用西姆松定理证明托勒密定理.

$ABCD$ 是任一圆内接四边形，连接 AC，如图 Ⅱ－4－2－19，过 D 向 $\triangle ABC$ 各边作垂线，垂足分别为 C_1、A_1、B_1，连接 C_1B_1，B_1A_1，由西姆松定理得：

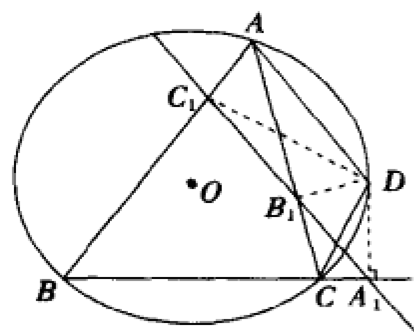


图 Ⅱ－4－2－19

$$C_1B_1+B_1A_1=C_1A_1 \qquad (*)$$

由 A、C_1、B_1、D 四点共圆、且 AD 是该圆的直径及正弦定理：

$$C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1DB_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1$$

$\sin\angle BAC=\frac{BC}{2R}$（$R$ 为圆 O 的半径）

$$\therefore\quad C_1B_1=\frac{AD\cdot BC}{2R}$$

同理 $B_1A_1=\frac{CD\cdot AB}{2R}$，$C_1A_1=\frac{AC\cdot BD}{2R}$

将以上三式代入上 ① 式得：

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=AC\cdot BD$$

(2) 用托勒密定理证明西姆松定理.

由四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，根据托勒密定理可得：

$$AD\cdot BC+AB\cdot CD=BD\cdot AC \qquad ②$$

$\because\quad DC_1\perp AB$，$DB_1\perp AC$

$\therefore\quad A$、C_1、B_1、D 四点共圆，且 AD 是该圆的直径，由正弦定理：

$$\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1DB_1}=\frac{C_1B_1}{\sin\angle C_1AB_1}=AD$$

$$\therefore\quad C_1B_1=AD\cdot\sin\angle C_1AB_1$$

而 $\sin\angle C_1AB_1=\frac{BC}{2R}$（$R$ 为圆 O 的半径）

则 $AD\cdot BC=2R\cdot C_1B_1$

同理 $AB\cdot CD=2R\cdot A_1B_1$，$AC\cdot BD=2R\cdot A_1C_1$

把以上三式代入 ② 得：

$$2R\cdot C_1B_1+2R\cdot A_1B_1=2R\cdot A_1C_1$$

即 $C_1B_1+A_1B_1=A_1C_1$

$\therefore\quad A_1$、B_1、C_1 三点在一条直线上.

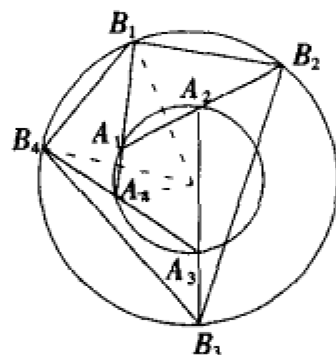


图 Ⅱ－4－2－20

例 12 设 C_1，C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆 C_1，A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1；A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2；A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3；A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4. 试证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长 $\geqslant 2$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长.

证明：对 O，A_4，B_4，B_1 用 Ptolemy 不等式得

$$B_1B_4\cdot OA_4+A_4B_4\cdot OB_1\geqslant A_4B_1\cdot OB_4$$

$B_1B_4+2A_4B_4\geqslant 2A_4B_1$.（这里用到 C_2 的半径是 C_1 的 2 倍）

于是 $B_1B_4 + 2A_4B_4 \geqslant 2(A_4A_1 + A_1B_1)$

同理 $B_2B_1 + 2A_1B_1 \geqslant 2(A_1A_2 + A_2B_2)$

$B_3B_2 + 2A_2B_2 \geqslant 2(A_2A_3 + A_3B_3)$

$B_4B_3 + 2A_3B_3 \geqslant 2(A_3A_4 + A_4B_4)$

将以上四式相加，即得四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长 $\geqslant 2$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长.

证毕.

【评注】 Ptolemy 定理总是给人一种轻灵的感觉，从一个很不起眼的四边形入手却得到极为有用的结论. 但是真正的感觉还需要各位细细去寻找.

例 13 （第38届 IMO预选题）设 $ABCDEF$ 是凸六边形，且 $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. 证明：$\frac{BC}{EB} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2}$，并指出等号成立条件.

证明：如图 Ⅱ－4－2－21 所示，记 $AC = a, CE = b, AE = c$. 对四边形 $ACEF$ 运用托勒密不等式，得

$$AC \cdot EF + CE \cdot AF \geqslant AE \cdot CF$$

因为 $EF = AF$，即 $\frac{FA}{FC} \geqslant \frac{c}{a+b}$

同样地，有

$$\frac{DE}{DA} \geqslant \frac{b}{c+a}, \frac{BC}{BE} \geqslant \frac{a}{b+c}$$

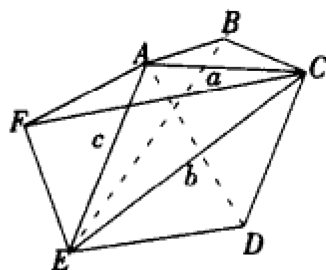


图 Ⅱ－4－2－21

$$\therefore \frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \quad ①$$

要等式成立，必须 ① 是一个等式，即每次应用托勒密不等式时也要等式成立. 从而 $ACEF$、$ABCE$、$ACDE$ 都是圆内接四边形，所以 $ABCDEF$ 是圆内接六边形，且 $a = b = c$ 时，① 式是等式.

因此，当且仅当六边形是正六边形时，等式成立.

【评注】 不等式 ① 是熟知的，如果不知道，也没有什么困难. 例如，在代入 $x = a + b, y = c + a, z = b + c$ 后不等式具有形式：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 3\right) \geqslant \frac{3}{2}$$

这是显然的.

例 14 （第35届 IMO预选题）如图 Ⅱ－4－2－22 所示，一条直线 l 与 $\odot O$ 不相交，E 是 l 上一点，$OE \perp l$，M 是 l 上任意异于 E 的点，从 M 作圆的两条切线分别切圆于 A 和 B，点 C 是 MA 上的点，使得 $EC \perp MA$，D 是 MB 上的点，使得 $ED \perp MB$，直线 CD 交 OE 于 F. 求证：F 的位置不依赖于 M 的位置.

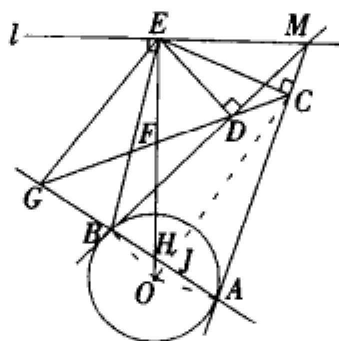


图 Ⅱ－4－2－22

证明：设 $EM = x, OE = a$，圆半径为 R，连接 OM. 设 OM 交 AB 于 J，OE 交 AB 于 H，则易知 $OJ \perp AB$，从则 $\angle AJM = \angle OEM = 90°$，$J$、$M$、$E$、$H$ 四点共圆.

$$\therefore OH \cdot OE = OJ \cdot OM = OA^2$$

即 $OH = \frac{R^2}{a}, EH = OE - OH = \frac{a^2 - R^2}{a}$

设 E 在 AB 上的射影为 G，由于 E、A、B 都在以 OM 为直径的圆上，对这个圆的内接三角形 MAB，点 E 的西姆松线 CD 通过点 G.

连 EB，由 E、G、B、D 共圆，$\angle EGD = \angle EBD$，由 E、B、O、M 共圆，$\angle EBD = \angle EOM = 90° - \angle GHE$，所以 $\angle FGH = 90° - \angle EGD = \angle GHE$. 从而 F 是直角三角形 EGH 斜边的中点. $EF = \frac{1}{2}$

$EH=\dfrac{a^2-R^2}{2a}$ 为定值,故 F 为定点,它的位置与点 M 的位置无关.

例 15 $\triangle ABC$ 中,$AC>BC$,F 是 AB 的中点,过 F 作它的外接圆的直径 DE,使 C 和 E 在 AB 的同一侧.又过 C 作 AB 的平行线交 DE 于 L,求证:$(AC+BC)^2=4DL\cdot EF$

证明:如图 Ⅱ - 4 - 2 - 23 从 D 向 AC,CB 的延长线作垂线 DH,DJ,垂足分别为 H,J,则由西姆松定理知 H,F,J 三点共线.

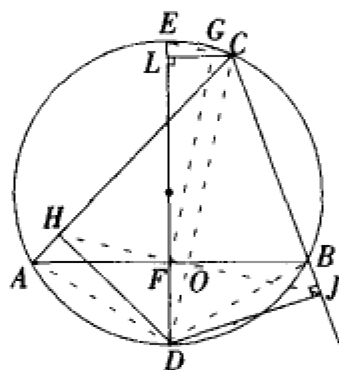


图 Ⅱ - 4 - 2 - 23

连接 DC 交 HJ 于 O,过 F 作 $FG\parallel DC$,交 CE 于 G,则由 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点知,DC 平分 $\angle ACB$

连接 AD、BD,易证

$\text{Rt}\triangle CDH\cong\text{Rt}\triangle CDJ$

$\text{Rt}\triangle ADH\cong\text{Rt}\triangle BDJ$

即有 $CH=CJ$,$AH=BJ$

$\therefore\ CH=\dfrac{1}{2}(AC+BC)$ ①

又 $DC\perp HJ$,而 $DC\perp CE$

$\therefore\ EC\parallel HJ$

因此 $CH^2=CO\cdot CD=GF\cdot CD$ ②

但 $\text{Rt}\triangle DCL\cong\text{Rt}\triangle FEG$

$\therefore\ DC:DL=FE:FG$

即 $GF\cdot DC=DL\cdot EF$ ③

故由 ①、②、③,得 $(AC+BC)^2=4DL\cdot EF$

例 16 (第 34 届 IMO 预选试题)已知 $\triangle ABC$ 的外接圆 k 的圆心为 O,半径为 R,内切圆的圆心为 I,半径为 r.另一个圆 k_0 与边 CA,CB 分别切于点 D,E,且与圆 k 内切.求证内心 I 是线段 DE 的中点.

证明:(如图 Ⅱ - 4 - 2 - 24),设圆 k_0 的圆心为 O_1,半径为 ρ

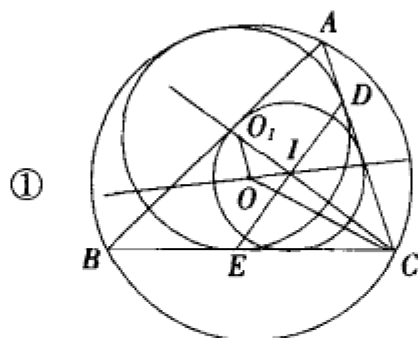


图 Ⅱ - 4 - 2 - 24

于是 $CI=\dfrac{r}{\sin\frac{C}{2}}$,$CO_1=\dfrac{\rho}{\sin\frac{C}{2}}$,$IO_1=\dfrac{\rho-r}{\sin\frac{C}{2}}$

因而有 $\dfrac{IO_1}{CO_1}=\dfrac{\rho-r}{\rho}=1-\dfrac{r}{\rho}$ ①

对于 $\triangle COO_1$ 和塞瓦线 OI,应用斯德瓦特定理,有

$OO_1^2\cdot CI+OC^2\cdot IO_1=OI^2\cdot CO_1+CI\cdot CO_1\cdot IO_1$

将 $OO_1=R-\rho$,$OI^2=R(R-2r)$,$OC=R$ 代入上式,得到

$\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\rho-r}{\rho}=1-\dfrac{r}{\rho}$ ②

由 ① 和 ② 得到

$\dfrac{IO_1}{CO_1}=\sin^2\dfrac{C}{2}=\left(\dfrac{\rho}{CO_1}\right)^2$

$IO_1\cdot CO_1=\rho^2=O_1E^2$ ③

因为 $O_1E\perp CE$,$CO_1\perp DE$ 且平分 DE,记 DE 中点为 I',由射影定理有

$I'O_1\cdot CO_1=O_1E^2$ ④

比较 ③ 和 ④ 即知 I 与 I' 重合.

即,I 为 DE 中点.

§2.3 针对性训练

A组

1.(1984.希腊数学奥林匹克题) 如图 Ⅱ-4-2-25,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=\frac{5\pi}{8}$,$\angle B=\frac{\pi}{8}$,求证它的内角平分线 CF、中线 BE 和高 AD 三线共点.

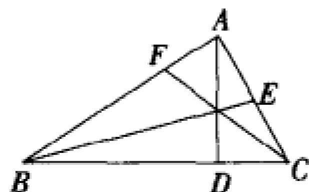


图 Ⅱ-4-2-25

2.(1992.日本数学奥林匹克预选题6) 在正 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 上有内分点 D、E、F 将边分成 $3:(n-6)(n>6)$.线段 AD、BE、CF 相交所成的三角形面积是正三角形面积的 4/49 时,求 n 的值.

3.(1990.第29届IMO预选题) 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=12$,$AC=16$,M 是 BC 中点,E、F 分别在 AB、AC 上,EF 交 AM 于 G,$AE=2AF$,求比值 $\frac{EG}{GF}$

4.(1996.江苏省竞赛题3) 在 $\triangle ABC$ 中,AM 是 A 到 $\angle C$ 的平分线所作的垂线,M 为垂足;AN、CL 分别是 A、C 到 $\angle B$ 的平分线所作的垂线,N、L 为垂足,MN 的延长线交 AC 于 F,BF 的延长线交 CL 于 E,BL 交 AC 于 D.求证:$DE \parallel MN$

5.(1994.加拿大奥林匹克数学试题5) $\triangle ABC$ 为锐角三角形,AD 为 BC 边的高,H 为 AD 内一点.直线 BH、CH 分别交 AC、AB 于 E、F,证明:$\angle EDH=\angle FDH$

6.$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,P 是内心,射线 AP 交 $\odot O$ 于 D.求证:AB、BC、CA 成等差数列的充要条件是 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle DBC}$

7.(第 14 届爱尔兰数学奥林匹克竞赛题) 三角形 ABC 为锐角三角形，AD 为该三角形的一条高. 设 P 为线段 AD 上一点，直线 BP、CP 分别交 AC、AB 于点 E、F，证明：AD 平分 $\angle EDF$

8. 如图 Ⅱ－4－2－26，设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，AP，BP，CP 分别与边 BC，CA，AB 交于 D、E、F，过 D、E、F 三点作圆，与三边又交于 D'、E'、F'，求证：AD'、BE'、CF' 三线交于一点.

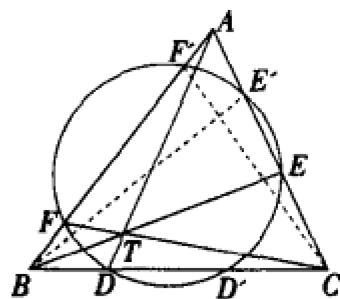


图 Ⅱ－4－2－26

9. 在梯形 $ABCD$ 中，腰 $AB = CD$，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 转过一个角度，得到 $\triangle A'B'C$. 证明：$A'D$，BC 和 $B'C$ 三线段的中点共线.

10. PA、PC 是圆的切线，A、C 是切点，PBD 是圆的割线，与圆交于 B、D，求证：$AC \cdot BD = 2AB \cdot CD$

11.(第 3 届 CMO 试题) 设 C_1、C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的半径的 2 倍. 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1，将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1，将 A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2，将 A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3，将 A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4，试证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长 $\geqslant 2 \times$ 四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长，并确定等号成立的条件.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，D 是斜边 AB 上一点，求证：$(AB \cdot CD)^2 = (AC \cdot BD)^2 + (BC \cdot AD)^2$

B 组

1.(1998. IMO 预选题) 设 M、N 是 $\triangle ABC$ 内部的两个点，且满足 $\angle MAB = \angle NAC$，$\angle MBA = \angle NBC$. 证明：$\dfrac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \dfrac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \dfrac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$

2. 设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点，且满足条件：$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$. 试确定 D 点的几何位置，并证明你的结论.

3. 给定七个圆，六个小圆在一个大圆内，每个小圆与大圆相切，且与相邻两个小圆相切，若六个小圆与大圆切点依次为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. 证明：$A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1$

4.（第 36 届 IMO 预选题）$\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F，点 X 是 $\triangle ABC$ 的一个内点，$\triangle XBC$ 的内切圆也在 D 点与 BC 边相切，并与 CX、XB 分别相切于点 Y、Z，证明：$EFZY$ 是圆内接四边形.

5.（第 38 届 IMO 预选题）设 $\triangle A_1A_2A_3$ 为非等腰三角形，内心为 I，$C_i(i = 1,2,3)$ 为过 I 与 A_iA_{i+1} 和 A_iA_{i+2} 相切的小圆（增加的角标作模 3 同余），$B_i = (i = 1,2,3)$ 为圆 C_{i+1} 和 C_{i+2} 的另一交点. 证明：$\triangle A_1B_1I$、$\triangle A_2B_2I$、$\triangle A_3B_3I$ 的外心共线.

6. 设 D、E、F 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 边上的点，若 AD、BE、CF 相交于一点，试证：$S_{\triangle DEF} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$，并说明等号成立的条件.

7. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内任一点，在形内作射线 AL、BM、CN，使得 $\angle LAB = \angle PAC$，$\angle MBC = \angle PBA$，$\angle NCA = \angle PCB$. 求证：AL、BM、CN 三点共线.

8.（史坦纳定理）设 $\triangle ABC$ 垂心为 H，其外接圆上任意一点 P，则 $\triangle ABC$ 关于 P 点的西姆松线过线段 PH 的中点.

9. 设 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 分别是共线的三点 A、B、C 对于 $\odot O$ 所作切线的长，求证：

$$a \cdot BC + c \cdot AB - b \cdot AC = BC \cdot AC \cdot AB$$

10.（第 35 届 IMO 预选题）在一条直线 l 的一侧画一个半圆 Γ，C、D 是 Γ 上的两点，Γ 上过 C 和 D 的切线分别交 l 于 B 和 A，半圆的圆心在线段 BA 上，E 是线段 AC 和 BD 的交点，F 是 l 上的点，EF 垂直 l，求证：EF 平分 $\angle CFD$

11.（第 36 届 IMO 试题）设 $ABCDEF$ 是凸六边形，满足 $AB = BC = CD$，$DE = EF = FA$，$\angle BCD = \angle EFA = 60°$. 设 G 和 H 是这六边形内部的两点，使得 $\angle AGB = \angle DHF = 120°$，试证：$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$

12.（2000. IMO 中国国家集训队选拔考试题）如图 Ⅱ－4－2－27，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，线段 AB 上有一点 D，线段 AC 延长线上有一点 E，使得 $DE = AC$. 线段 DE 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 T，P 是线段 AT 的延长线上的一点. 证明：点 P 满足 $PD + PE = AT$ 的充分必要条件是点 P 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

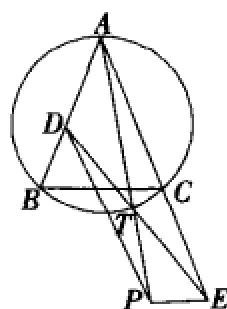


图 Ⅱ－4－2－27

13.（第 39 届 IMO 预选题）设 M、N 是 $\triangle ABC$ 内部的两个点，且满足 $\angle MAB = \angle NAC$，$\angle MBA = \angle NBC$. 证明：$\frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$

14. 如图 Ⅱ－4－2－28，四边形 $ABCD$ 内接于圆，AB，DC 延长线交于 E，AD，BC 延长线交于 F，P 为圆上任一点，PE，PF 分别交圆于 R，S，若对角线 AC 与 BD 相于 T. 求证：R、T、S 三点共线.

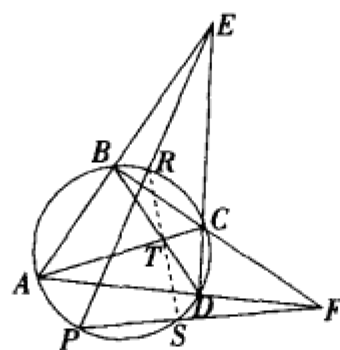


图 Ⅱ－4－2－28

第三章

共圆，共线，共点

§3.1 知识、方法、技能

本讲中共圆是指"点共圆"，共线是指"点共线"，共点是指"线共点"．这三个问题是典型的几何问题，同时又是综合几何问题的基础，因此，我们来研究这三类问题的解题方法．

Ⅰ．点共圆问题

证明四点共圆的方法有：

1．利用圆的定义

即要证 A、B、C、D 四点共圆，只须找到一点 P，证得 $PA = PB = PC = PD$ 即可．

2．利用圆内接四边形性质定理的逆定理

(1) 若四边形的两个对角互补，则四顶点共圆；

(2) 若四边形的一个外角等于它的内对角，则四顶点共圆．

3．利用圆周角定理的逆定理，即

两三角形有公共底边，且在公共底边同侧又有相等的顶角，则四顶点共圆．

4．利用圆幂定理的逆定理，即

(1) 若二线段 AB 和 CD 相交于 E，且 $AE \cdot EB = CE \cdot ED$，则 A、B、C、D 四点共圆；

(2) 若相交于 P 点的二线段 PB、PD 上各有一点 A、C，且 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆．

5．利用托勒密定理的逆定理，即

如果四边形 $ABCD$ 的两组对边乘积的和等于它的两条对角线的乘积：$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$，则 A、B、C、D 四点共圆．

6．利用位似变换

如果两个几何图形 F 和 F' 的任意一对对应点 A 和 A' 的连线都通过同一定点 O，且 $OA' = K \cdot OA$（其中 K 是常数），那么这两个图形叫做位似图形．O 点叫做位似中心，K 叫做位似系数．通常把从图形 F 到 F' 的变换叫做位似变换．如通过位似变换，图形 F 中共线的点在图形 F' 中仍然共线，反之亦成立．

7．利用画图法（平庸中见真谛）

画图的原则是

(1) 图形性质中漂亮的东西先画；

(2) 画图的关键问题：注意先后次序；

(3) 画图必须精确．

8．多点共圆

(1) 通常先证其中四点共圆，再证其余点中一一与共圆四点组中的三点共圆；

(2) 利用位似变换．

Ⅱ. 点共线问题

在同一直线上的若干个点称为共线点，或称为这些点共线. 多点共线的问题一般转化成三点共线的问题来解决. 证明三点共线的方法一般有：

1. 利用射线定义，平角定义或对顶角逆定理

即要证 A、B、C 三点共线，可证

(1) $\angle ABC = 180°$[如图 Ⅱ－4－3－1(1)]

(2) $\angle DAB = \angle DAC$ 或 $\angle DAB + \angle EAC = 180°$[图 Ⅱ－4－3－1(2)]

(3) $\angle DAC = \angle BAE$ 或 $\angle DAC + \angle DAB = 180°$[图 Ⅱ－4－3－1(3)]

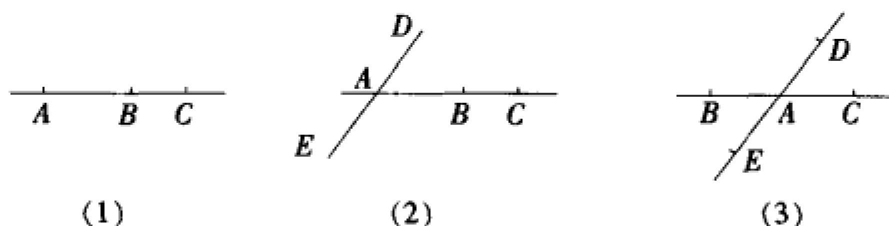


图 Ⅱ－4－3－1

2. 利用平行关系或垂直关系

(1) 要证明 A、B、C 三点共线，只需证 $AB \parallel BC$；

(2) 要证明 A、B、C 三点共线，只需证 AB、AC 与同一条直线垂直.

3. 利用面积

这是一种处理三点共线的有效方法. 我们的思路是：不共线三点组成三角形，则这个三角形的面积不为零；反之，如果三点所组成的三角形面积为零，则这三点就不能不共线.

4. 利用同一法

要证明 A、B、C 三点共线，只要在 AC 上找到一点 B'，并证明 B 和 B' 重合即可.

同一法的两个实用技巧实线"等线段比"和"等面积比"

如图Ⅱ－4－3－2(1) 希望证明 AB，P_1Q_1，P_2Q_2 共线. 这里重要的一点请记住，是 P_1Q_1 和 P_2Q_2 在地位上是对称的，而 AB 和它们在地位上是不对称的. 我们的想法是先假设 P_1Q_1 和 P_2Q_2 分别与 AB 交于点 R_1 和 R_2，那么我们关心的是由 P_1Q_1 引入 R_1 和由 P_2Q_2 引入 R_2 有什么区别. 我们于是选择用 $\frac{AR}{RB}$ 来描述，所以我们要证明的就是 $\frac{AR_1}{R_1B} = \frac{AR_2}{R_2B}$. 如果对面积法比较习惯的话，可以转化为证明 $\frac{S_{AP_1Q_1}}{S_{BP_1Q_1}} = \frac{S_{AP_2Q_2}}{S_{BP_2Q_2}}$，这样的好处是，不需要对点 R_1 和 R_2 进行讨论，省掉很多的麻烦. 最后，提醒读者们注意这里，P_1Q_1 和 P_2Q_2 依然是对称的，这是同一法的一个基本原则.

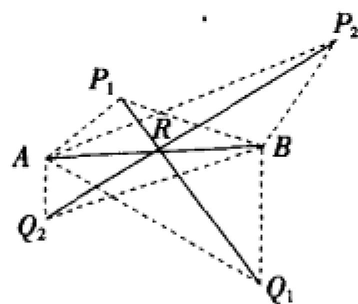


图 Ⅱ－4－3－2

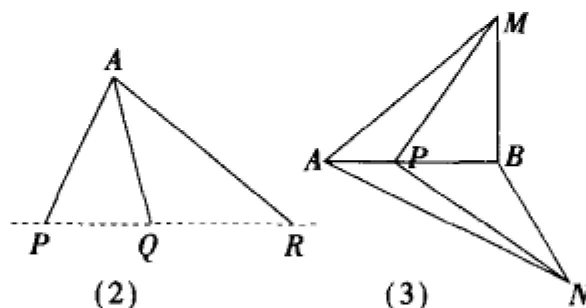


图 Ⅱ－4－3－3

5. 证三点共线的两个等价条件

定理：如图 Ⅱ－4－3－3(1)，P，Q，R 共线 $\Leftrightarrow$ $\frac{\sin\angle PAR}{AQ} = \frac{\sin\angle PAQ}{AR} + \frac{\sin\angle QAR}{AP}$

【注】 称此定理为张角定理.

定理:如图 Ⅱ－4－3－(2)A,P,B 共线 $\Leftrightarrow \frac{MA\cdot\sin\angle AMP}{MB\cdot\sin\angle BMP}=\frac{NA\cdot\sin\angle ANP}{NB\cdot\sin\angle BNP}$

6. 利用定理法

例如(1) 梅涅劳斯定理和其逆定理,(2) 西姆松线等等.

7. 利用位似变换

8. 利用解析法

将要证共线的三点 A、B、C 置于平面直角坐标系中,得三点坐标 $A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$、$C(x_C,y_C)$,则 A、B、C 三点共线 $\Leftrightarrow \frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}$

9. 笛沙格定理

(见第二讲:知识,方法,技能中 Ⅵ)

10. 巴斯加(Pascal)定理:

内接于一个非退化二阶曲线的简单六点形的三对对边的交点共线;这条直线称为巴斯加直线

Ⅲ. 线共点问题

通过同一点的若干条直线称为共点线,或称为这些直线共点.证明三条或三条以上直线共点的方法有:

1. 利用特殊点的惟一性

(1) 利用已知线段中点,内定比分点,外定比分点的惟一性.

(2) 利用已知四边形对角线交点的惟一性.

(3) 利用三角形各心的惟一性.

2. 利用三点共线证明三线共点

从一般的意义来说,证明三条直线 AB、CD、EF 交于一点的问题,可转化为证明 AB 和 CD 的交点 P 和点 F、E 三点共线.

3. 利用同一法

要证 AB、CD、EF 三条直线共点,可设 AB 与 EF 交于 M,CD 与 EF 交于 N,如果证明 M 和 N 重合,则 AB、CD、EF 三线共点.

4. 利用塞瓦定理的逆定理

5. 利用位似图形

如果能证明两个图形是位似图形,那么对应点的连线共点.

6. 利用笛沙格定理的逆定理

(见第二讲:知识、方法、技能中 Ⅵ)

7. 利用"布列安桑"定理

外切于一个非退化的二阶曲线的简单六点形的三对对顶点的连线交于同一点,这个点称为布列安桑点.

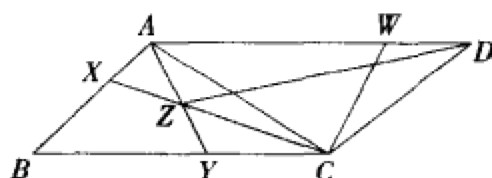
§3.2　赛 题 精 讲

例1　(2000.世界城际间数学联赛(高中试题))$\triangle ABC$ 中,X 是 AB 上的一点,Y 是 BC 上的一点,线段 AY 和 CX 相交于 Z,假如 $AY=YC$ 及 $AB=ZC$,求证:B、X、Z、Y 四点共圆.

证明:首先,注意到 $CY = AY < CZ = AB$

假设 $AY \perp BC$,要不然 $\angle AYB$,$\angle AYC$ 中有一个是钝角.

在前一情形下,$AB > AY$,在后一情形下,$CZ > CY$,(如图Ⅱ-4-3-4)



图Ⅱ-4-3-4

构造平行四边形 $ABCD$,并在 AD 边上取一点 W,使得 $\angle WCY = \angle AYC$,则

$CY = CW, CZ = AB = CD$

且 $\angle AYC = \angle WCY = \angle DWC$

∵ $AB > AY, \triangle ZYC \cong \triangle DWC$

所以 $\angle AYC = \angle WCY = \angle DCZ$

于是 $\triangle YAC \backsim \triangle DZC$

∴ $\angle ZAC = \angle ZDC$

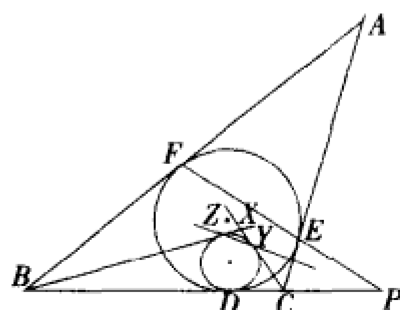
∴ A、D、C、Z 四点共圆

故 $\angle XBY + \angle XZY = \angle ADC + \angle AZC = 180°$

∴ B, X, Z, Y 四点共圆

【评注】 证明过程中两次共圆,分别利用"圆周角定理的逆定理"和"圆内接四边形性质定理的逆定理;而构造 ▱$ABCD$,并在 AD 边上取一点 W,使 $\angle WCY = \angle AYC$,是证明的关键.

例 2 (第 36 届 IMO 预选题)如图Ⅱ-4-3-5所示,$\triangle ABC$ 的内切圆分别切三边 BC、CA、AB 于点 D、E、F,点 X 是 $\triangle ABC$ 的一个内点,$\triangle XBC$ 的内切圆也在 D 点与 BC 边相切,并与 CX、XB 分别相切于点 Y、Z. 证明:$EFZY$ 是圆内接四边形.



图Ⅱ-4-3-5

证明:如果 EF 平行于 BC,则 $AB = AC$,AD 是 $EFZY$ 的对称轴,因而四边形是圆内接四边形.

如 EF 不平行 BC,设 BC 与 FE 的延长线相交于 P,直线 FEP 截 $\triangle ABC$,由梅涅劳斯定理,有

$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$. 又 $AF = AE$ 即

$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{FB} = 1$

又 ∵ $BZ = BD = BF, CY = CD = CE$

∴ $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CY}{BZ} = 1$,又 $ZX = XY$

即 $\frac{XZ}{BZ} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CY}{YX} = 1$

由梅涅劳斯逆定理,知 Z、Y、P 三点共线于是

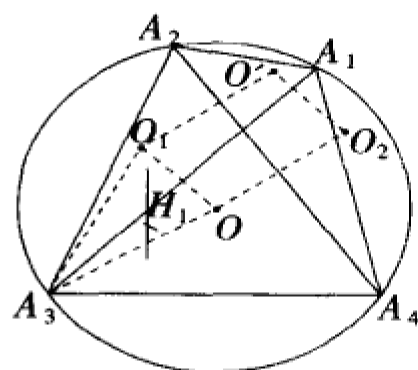
$PE \cdot PF = PD^2 = PY \cdot PZ$

即 $PE \cdot PF = PY \cdot PZ$

由割线定理的逆定理,有 E、F、Z、Y 四点共圆.

证毕

【评注】 本题是用圆幂定理的逆定理求证四点共圆的.



图Ⅱ-4-3-6

例 3 (1992. 全国联赛二试题 1)如图Ⅱ-4-3-6,设 $A_1A_2A_3A_4$ 为 $\odot O$ 内接四边形,H_1、H_2、H_3、H_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证:H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆,并确定该圆圆心的位置.

证明:作 O 点关于 A_1A_3 的对称点 O_1,关于 A_2A_1 的对称点 O_2,完成平行四边形 $OO_1O'O_2$,连 A_3O_1,A_3O,则易知

$A_3H_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} OO_2 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} O_1O'$,从而 $A_3H_1O'O_1$ 是平行四边形,故 $O'H_1 = A_3O_1 = A_3O = R$

同理可证 $O'H_2 = O'H_3 = O'H_4 = R$

故 H_1、H_2、H_3、H_4 共圆,圆心为 O'

【评注】 此题是应用圆的定义证明四点共圆的.

例 4 如图 Ⅱ-4-3-7,已知点 D 是 $\triangle ABC$ 形内一点,满足 $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$,把 $\triangle ADC$ 沿 CB 方向平移至 $\triangle A_1D_1B$,求证:A、D、B、D_1、A_1 五点共圆.

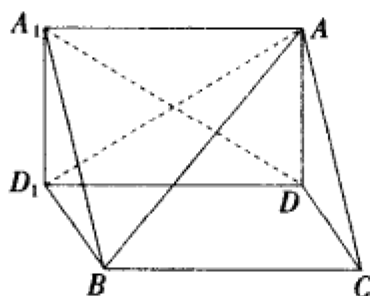


图 Ⅱ-4-3-7

证明:连接 A_1D、AD_1

$\because$ $AA_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DD_1 \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} CB$

$\therefore$ $D_1A_1 = DA, D_1B = DC, A_1B = AC$

在四边形 A_1D_1BA 中,由广义的托勒密定理,有

$D_1A_1 \cdot BA + BD_1 \cdot AA_1 \geqslant A_1B \cdot D_1A$

即 $DA \cdot BA + CD \cdot BC \geqslant AC \cdot D_1A$ ①

在四边形 AD_1BD 中,由广义的托勒密定理,有

$BD_1 \cdot DA + BD \cdot D_1A \geqslant D_1D \cdot AB$

即 $DC \cdot DA + BD \cdot D_1A \geqslant AB \cdot BC$ ②

由 ① $\times DB +$ ② $\times AC$,有

$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DA \cdot DC \cdot AC + AC \cdot BD \cdot D_1A \geqslant AC \cdot BD \cdot D_1A + AB \cdot BC \cdot AC$

即 $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DA \cdot DC \cdot AC \geqslant AB \cdot BC \cdot AC$ ③

由已知条件知,不等式 ③ 取到等号,从而不等式 ①、② 必须同时取到等号

即 $D_1A_1 \cdot BA + BD_1 \cdot AA_1 = A_1B \cdot D_1A$

且 $BD_1 + DA + BD \cdot D_1A = D_1D \cdot AB$

由托勒密定理的逆定理,知:

四边形 A_1D_1BA 是圆内接四边形,且四边形 AD_1BD 是圆内接四边形.

故 A、D、B、D_1、A_1 五点共圆.

【评注】 本例是通过托勒密定理的逆定理证明四点共圆,从而证明五点共圆的.

例 5 (三角形九点圆的性质)$\triangle ABC$ 中各边中点,三条高的垂足,各顶点和垂心连线的中点,这九点共圆,圆心记为 K,则 K 在三角形的 Euler 线上,并且 $OK = KH$

【分析】 这是一个经典的定理,我们将给出一个完全利用位似的证明.事实上,我们将证明,九点圆和外接圆以垂心为位似中心,且相似比为 $1:2$

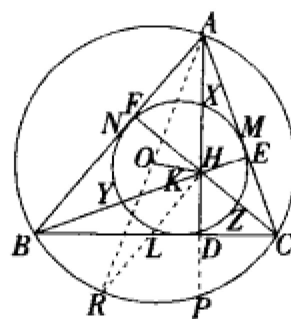


图 Ⅱ-4-3-8

证明:我们讨论外接圆以点 H 为位似中心的相似比为 $\frac{1}{2}$ 的位似图像,它是一个圆,圆心设为 K,$OK = KH$.我们的目标是证明题目所述的九个点都在这个圆上.

首先,X,Y,Z 分别是 AH,BH,CH 的中点,所以位似变换将点 A,B,C 变到了点 X,Y,Z.所以,X,Y,Z 在 $\odot K$ 上.

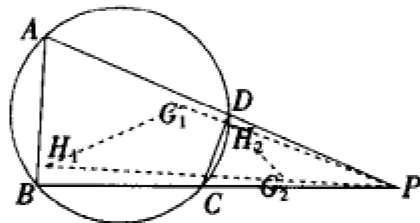
然后考虑延长 AD 交外接圆于点 P,由我们熟知的结论 $HD = DP$,所以位似变换将点 P 变到了点 D.所以,D 也在 $\odot K$ 上.同理,E,F 都在 $\odot K$ 上.

最后来看点 L,作外接圆的直径 AR,由于 $OL = \frac{1}{2}AH$,可见 H,L,R 共线,并且 $HL = LR$.这说明位似变换将点 R 变到了点 L,所以,L 也在 $\odot K$ 上.同理,M,N 都在 $\odot K$ 上.

证毕.

【评析】 由本题的结论和上题Euler线的定理可以得到如下的结论.三角形中,外心O,重心G,九点圆圆心K,垂心H共线,并且$OG:GK:KH=2:1:3$.

例6 如图Ⅱ-4-3-9,圆内接四边形$ABCD$的边AD和BC的延长线交于点P,G_1,G_2为$\triangle PAB$和$\triangle PCD$的外接圆圆心,H_1,H_2为$\triangle PAB$和$\triangle PCD$的垂心.求证:H_1,H_2,G_1,G_2共圆.



图Ⅱ-4-3-9

【分析】 这是笔者当年参加市里集训的测验题目,笔者在考试的时候没有仔细的画图,结果感到题目好像一头雾水,没有什么好的方法.

如果你用尺子和圆规(不是尺规作图,一定要记住尺子上还有刻度呢!)把图精确一点画出来,你就会发现P,H_2,G_1和P,H_1,G_2居然是共线的!这个共线结论的证明是显然的,然而它的发现却是这道题目的考点所在.

以下的证明就非常容易了,利用$\triangle PH_1G_1$和$\triangle PH_2G_2$相似就可以得到共圆的结论了.我举出这道题目的目的就是为了让读者亲身体验一下精确作图的必要性.事实上,在考试的时候作图的时间是非常少的,然而带来的作用却是巨大的,所以请读者在以后做题的时候一定要画精确的图.

略证:容易计算得到$\angle G_1PA=90°-\angle B$,而$\angle PH_2D=90°-\angle PDC$

$\therefore\ \angle G_1PA=\angle PH_2D$

从而P,H_2,G_1共线.

同理,P、H_1,G_2共线.

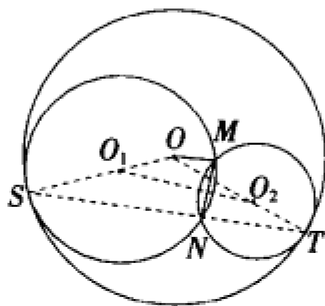
而由$\triangle PAB$和$\triangle PCD$相似,易知$\triangle PH_1G_1\backsim\triangle PH_2G_2$

所以,H_1,H_2,G_1,G_2共圆必然.

证毕.

注:本题及分析,证法是由当年金牌得主现为北大肖良同志得出的

例7 (1997.全国高中联赛二试题1)如图Ⅱ-4-3-10,已知两个半径不相等的$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于M、N两点,且$\odot O_1$、$\odot O_2$与$\odot O$内切于S、T两点.求证:$OM\perp MN$的充分必要条件是S、N、T三点共线.



图Ⅱ-4-3-10

证明:如图Ⅱ-4-3-10,由题设,知O、O_1、S共线,O、O_2、T共线.连接OS、OT、SN、NT、O_1M、O_1N、O_2M、O_2N,则有$OS=OT$.

(1)充分性.

设S、N、T三点共线,则$\angle S=\angle T$.因$\triangle O_1SN$、$\triangle O_2NT$都是等腰三角形

故 $\angle S=\angle O_1NS=\angle T=\angle O_2NT$

从而 $O_2N\parallel OS$,$O_1N\parallel OT$

OO_1NO_2为平行四边形,故$OO_1=O_2N=O_2M$

$OO_2=O_1N=O_1M$

所以 $\triangle O_1MO\cong\triangle O_2OM$,则

$S_{\triangle O_1MO}=S_{\triangle O_2OM}\Rightarrow O_1O_2\parallel OM$

又由于$O_1O_2\perp MN$,故$OM\perp MN$

(2)必要性.

设$OM\perp MN$,由图Ⅱ-4-3-10知

$OO_2-OO_1=(OT-O_2T)-(OS-O_1S)=O_1S-O_2T=MO_1-MO_2$(定值).

所以,O_1M分别在以O_1、O_2为焦点的双曲线的(左、右)两支上,由$OM\perp MN$,$O_1O_2\perp MN$知$OM\parallel O_1O_2$

又由双曲线对称性,知O_1O_2MO是等腰梯形.

所以　$OO_2 = O_1M = O_1N, OO_1 = MO_2 = O_2N$

从而　OO_1NO_2 是平行四边形

所以　$2\angle O_1NS + 2\angle O_2NT + 2\angle O_1NO_2 = (\angle O_1NS + \angle S + \angle SO_1N) + (\angle O_2NT + \angle T + \angle NO_2T) = 360°$

$\angle O_1NS + \angle O_2NT + \angle O_1NO_2 = 180°$

∴　S、N、T 三点共线.

例 8　(1997.中国数学奥林匹克)如图 Ⅱ－4－3－11,四边形 $ABCD$ 内接于圆,其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P,AD 与 BC 的延长线交于点 Q,由 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF,切点分别为 E 和 F.证明:P、E、F 三点共线.

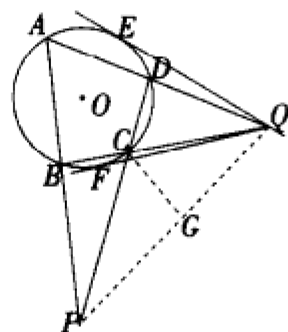


图 Ⅱ－4－3－11

证明:在线 PQ 上取一点 G,使 P、B、C、G 四点共圆,则 $\angle CGP = \angle CBA = \angle CDQ$,因此 D、C、G、Q 四点共圆.

∵　$QE^2 = QC \cdot QB = QG \cdot QP$

∴　$QP^2 - QE^2 = QP^2 - QG \cdot QP = QP \cdot GP$

又　∵　$OP^2 - OE^2 = (OP + OE) \cdot (OP - OE)$

$= PC \cdot PD = PG \cdot PQ$

∴　$QP^2 - QE^2 = OP^2 - OE^2$

∴　$PE \perp OQ$,又 $EF \perp OQ$

∴　P、E、F 三点共线.

【评注】　本题证法是利用"垂直关系".

例 9　四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于形内一点 O,已知 $AO = CO$,$DO = 3BO$,分别在 AC、CD 上取点 M、N,使 $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$(如图 Ⅱ－4－3－12).求证:$B$、$M$、$N$ 在一条直线上.

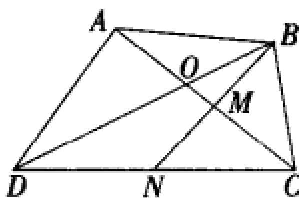


图 Ⅱ－4－3－12

证明:如图 Ⅱ－4－3－12,设 $\triangle ACD$ 的面积为 S,于是

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}S$

$\frac{S_{\triangle BCM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CM}{AC} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

所以　$S_{\triangle BCM} = \frac{3-\sqrt{3}}{9}S$　①

又　$\frac{S_{\triangle BCN}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{CN}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,所以　$S_{\triangle BCN} = \frac{\sqrt{3}}{3}S_{\triangle BCD}$

注意到　$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2}S, S_{\triangle BCD} = \frac{4}{3}S_{\triangle DOC} = \frac{2}{3}S$

所以 $S_{\triangle BCN} = \frac{2\sqrt{3}}{9}S$　②

$\frac{S_{\triangle CNM}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{CM \cdot CN}{AC \cdot CD} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

所以　$S_{\triangle CNM} = \frac{3\sqrt{3}-3}{9}S$　③

由 ①、②、③ 得

$S_{\triangle BCN} = S_{\triangle CNM} + S_{\triangle BCM}$

即　$S_{\triangle BMN} = 0$

∴　B、M、N 三点共线.

【评注】　由 $S_{\triangle BMN} = 0$ 得 B、M、N 三点共线,思路巧妙,十分奏效,注意运用.

例 10　如图 Ⅱ－4－3－13 所示,$\triangle ABC$ 中 BD 和 CE 是高,CG 和 BF 是角平分线,I 是内心,O 是

外心. 如果 D,I,E 三点共线,求证:G,O,F 三点共线.

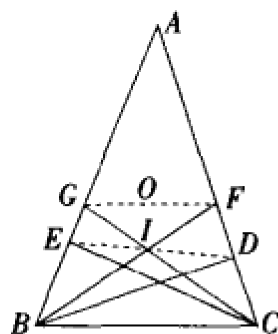


图 Ⅱ - 4 - 3 - 13

【分析】 这两个共线都比较奇怪,至少不是常规类型的共线,也没有什么特殊的性质. 所以,我们只能去考虑使用张角定理来转化条件. 在这道题目中,恰好那个等价条件中的变量都是很容易求出的,所以使用这个定理已经成为必然了.

在证明过程中不可避免的会用到一些计算,有的同学会觉得很野蛮的样子,但是有的时候面对一道没有办法的题目也只好如此了.

证明:连接 AO,AI.

由 D,I,E 三点共线 $\Rightarrow \dfrac{\sin A}{AI}=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{AE}+\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{AD}$

于是 $\dfrac{\sin A}{r/\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{2R\cos A\sin B}+\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{2R\cos A\sin C}$

即 $r(\sin B+\sin C)=2R\sin A\sin B\sin C\cos A$ ①

$r(\sin B+\sin C)=S\cos A/R$

$R(\sin B+\sin C)=\dfrac{a+b+c}{2}\cos A$

$b+c=(a+b+c)\cos A$ ②

这头算到这里就可以了,再算下去没什么太大的意义,因为我们根本不知道我们需要的是什么,盲目的把 $\cos A$ 打开可能有百害而无一利,其实得到 ① 本来就应该结束了,但是我们总是讨厌内切圆半径 r,所以我们趁着右边正好有一个面积的机会先把它搞定. 这时应该去看看证明需要什么,从结论走一走.

G,O,F 三点共线 $\Leftrightarrow \dfrac{\sin A}{AO}=\dfrac{\cos B}{AG}+\dfrac{\cos C}{AF}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin A}{R}=\dfrac{\cos B}{c\cdot\dfrac{b}{a+b}}+\dfrac{\cos C}{b\cdot\dfrac{c}{a+c}}$

$\Leftrightarrow bc\sin A=R[(a+b)\cos B+(a+c)\cos C]$

这时有一个眼力的问题,你要知道 $b\cos B+c\cos C$ 也是一个可以变化的东西.

$\therefore$ 上式等价于

$bc\sin A=Ra(\cos B+\cos C)+R^2(\sin 2B+\sin 2C)$

$\Leftrightarrow bc\sin A=2R^2[\sin A(\cos B+\cos C)+\sin(B+C)\cos(B-C)]$

$\Leftrightarrow bc=2R^2[\cos B+\cos C+\cos(B-C)]$ ③

这时我们看到 ③ 和 ② 似乎关系比较隐讳,所以只好去寻求一些三角变形的帮助.

③ $\Leftrightarrow 4R^2\sin B\sin C=2R^2[\cos B+\cos C+\cos(B-C)$

$\Leftrightarrow \cos(B-C)-\cos(B+C)=\cos B+\cos C+\cos(B-C)$

$\Leftrightarrow \cos A=\cos B+\cos C$ ④

现在再看我们的已知和求证好像依然没有什么关系,但是似乎还是有一点进展的. 因为现在剩下的只是三个角的余弦,我们总是可以用边把它表示的,那样将必然得到两个恒等式,否则题目就不正确了.

② $\Leftrightarrow b+c=(a+b+c)\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Leftrightarrow 2b^2c+2bc^2=ab^2+ac^2-a^3+b^3+bc^2-a^2b+cb^2+c^3-a^2c$

而另一方面

④ $\Leftrightarrow \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$

$\Leftrightarrow ab^2+ac^2-a^3=ba^2+bc^2-b^3+b^2c+a^2c-c^3$

请读者自己验证一下上面两式的等价性.(事实上,只要移项整理即可)

证毕.

【评注】 当然笔者不知道此题是否还有高明的解法,但是我想对于这个很不着边际的条件和结论,张角定理是最好的以暴治暴的手段了.

另外,我要提的一点是证明的计算.证明中没有用到什么特别高明的技巧,只是闷着头苦算,但是我们要学习的是对得到的式子恒等变形时应该往哪个方向去走,一定要思考什么情况下要往三角方向转,什么情况下要考虑直接化为边的关系.这是计算中要万分注意的,否则就会陷入苦算,永远也得不到最后的结果.

(上述证法是肖良同志得出的)

例 11 (第 11 届全国中学生数学冬令营试题 1,1996) 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心,由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP、AQ,切点分别为 P、Q.求证:P、H、Q 三点共线.

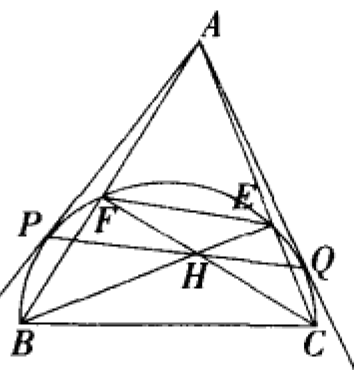


图 Ⅱ-4-3-14

【分析】 此题可引用平角定义即可证明,这里不再重述.读者证起来不会有太多的困难,这里我们着重讨论的是此题可以推广.

如图 Ⅱ-4-3-14,令 AB、AC 分别交圆于 F、E,连 BE、CF.因 BC 是直径,则 $BE\perp AC$,$CF\perp AB$,因此,BE 与 CF 的交点即为 $\triangle ABC$ 的垂心 H,因此,上述命题的结论可以改述为圆内接四边形 $BCEF$ 的对角线 BE 与 CF 的交点 H 与 P、Q 共线.

下面将此题推广到一般情形,即为 97 年冬令营训练题,将给出四种证法.

推广命题:如图 Ⅱ-4-3-15,四边形 $BCEF$ 内接于 $\odot O$,其边 CE 与 BF 的延长线交于点 A,由 A 作 $\odot O$ 的两条切线 AP 与 AQ,切点分别为 P、Q,BE 与 CF 的交点为 H,求证:P、H、Q 三点共线.

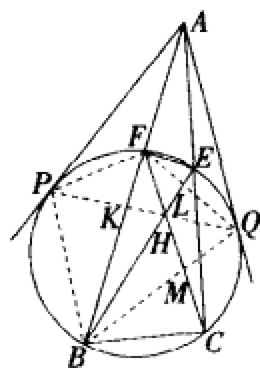


图 Ⅱ-4-3-15

证法一:连接 BP、PF、EQ、QC,连 PQ 交 BF 于点 K,连 FQ 交 BE 于 L,连 BQ 交 FC 于 M.

$\because$ $\triangle BPK$ 和 $\triangle KPF$ 共边

$$\therefore \frac{BK}{KF}=\frac{S_{\triangle BPK}}{S_{\triangle KPF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot PB\cdot PK\cdot\sin\angle BPK}{\frac{1}{2}\cdot PF\cdot PK\cdot\sin\angle FPK}=\frac{PB\cdot\sin\angle BPK}{PF\cdot\sin\angle FPK}$$

同理 $\dfrac{FL}{LQ}=\dfrac{EF\cdot\sin\angle FEB}{EQ\cdot\sin\angle BEQ}$,$\dfrac{QM}{MB}=\dfrac{QC\cdot\sin\angle QCF}{CB\cdot\sin\angle FCB}$

$\because$ $\angle PAF=\angle PAB$,$\angle APF=\angle ABP$

$\therefore$ $\triangle APF\backsim\triangle ABP$

$\therefore$ $\dfrac{BP}{PF}=\dfrac{AP}{AF}$,同理,$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AF}{AC}$,$\dfrac{QC}{EQ}=\dfrac{AC}{AQ}$

又 $\because$ $\angle BPK=\angle BEQ$,$\angle FEB=\angle FCB$,$\angle QCF=\angle FPK$,且 $AP=AQ$

$\therefore$ $\dfrac{BK}{KF}\cdot\dfrac{FL}{LQ}\cdot\dfrac{QM}{MB}=1$

由塞瓦定理的逆定理知,PQ、BE、CF 相交于一点 H,即 P、Q、H 三点共线.

【评注】 塞瓦定理的逆定理是证明三线共点的根据,但有时我们可以把三点共线的问题化为三线共点的问题来处理,证法一就是一个典型的例子.

证法二:如图 Ⅱ-4-3-16,在射线 AH 上取一点 M,使 $AH\cdot AM=AB\cdot AF$,从而 B、H、M、F

四点共圆，C、H、M、E 四点共圆，故

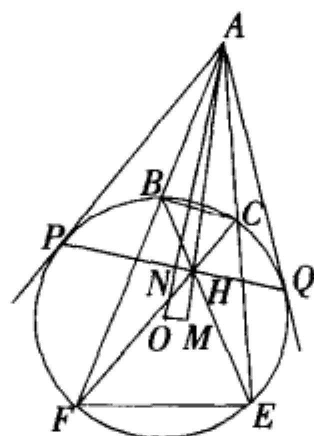


图 Ⅱ－4－3－16

$$\angle FME = 360^\circ - \angle FMH - \angle EMH$$
$$= (180^\circ - \angle FMH) + (180^\circ - \angle EMH)$$
$$= \angle FBE + \angle FCE = 2\angle FBE = \angle FOE$$

从而 F、O、M、E 共圆.

$$\therefore\ \angle AMO = 360^\circ - \angle AME - \angle OME$$
$$= (180^\circ - \angle AME) + (180^\circ - \angle OME)$$
$$= \angle FCE + \angle OFE = 90^\circ$$

连 PQ 交 AO 于 N，交 AM 于 H'

则 $AN \cdot AQ = AP^2 = AB \cdot AF = AH \cdot AM$

又 $\angle H'NO = 90^\circ = \angle H'MO$，有 N、H'、M、O 共圆

则 $AN \cdot AO = AH' \cdot AM$

因此 $AH \cdot AM = AH' \cdot AM$

即 $AH = AH'$，且 H、H' 均在射线 AM 上，

故 H 与 H' 重合，H、P、Q 三点共线.

【评注】 证法二用的就是"同一法". 下面我们再给出一种同一法即证法三. 虽然都是同一法，但是归纳的方式确是不一样的. 通过比较，认真体会，大家证明三点共线运用同一法就可以机动灵活了.

证法三：如图 Ⅱ－4－3－17，连接 BP、BQ、CP、CQ、EP、EQ、FP、FQ.

设 BE 交 PQ 于点 H_1，则 H_1 分 PQ 所成的比为

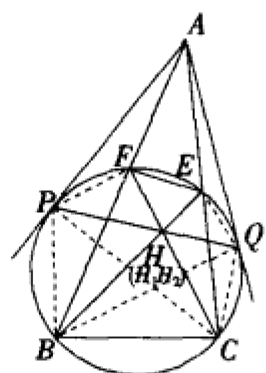


图 Ⅱ－4－3－17

$$\frac{PH_1}{H_1Q} = \frac{S_{\triangle BPH_1}}{S_{\triangle BQH_1}}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}BP \cdot BH_1 \cdot \sin\angle PBH_1}{\frac{1}{2}BQ \cdot BH_1 \cdot \sin\angle QBH_1}$$
$$= \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{\sin\angle PBH_1}{\sin\angle QBH_1}$$

$\because\ \dfrac{PE}{\sin\angle PBH_1} = 2R, \dfrac{QE}{\sin\angle QBH_1} = 2R$（$R$ 为 $\odot O$ 半径）

$$\therefore\ \frac{PH_1}{H_1Q} = \frac{BP}{BQ} \cdot \frac{PE}{QE} \quad ①$$

设 CF 交 PQ 于点 H_2. 同理，H_2 分 PQ 所成的比为：$\dfrac{PH_2}{H_2Q} = \dfrac{CP}{CQ} \cdot \dfrac{PF}{QF}$ ②

由 $\triangle APB \backsim \triangle AFP$，得 $\dfrac{BP}{PF} = \dfrac{AP}{AF}$ ③

由 $\triangle AQB \backsim \triangle AFQ$，得 $\dfrac{BQ}{QF} = \dfrac{AQ}{AF}$ ④

由 ③、④ 及 $AP = AQ$，得 $\dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{PF}{QF}$ ⑤

同理 $\dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{PE}{QE}$ ⑥

由 ⑤、⑥ 可得 ① = ②，故 H_1、H_2 分 PQ 所成的比相等，从而 H_1 与 H_2 重合.

$\therefore\ PQ$、BE、CF 交于一点 H

因此，P、H、Q 三点共线.

【分析】 有一位高手给出了一个极具思想性的证明，首先 A 作为 BF 和 CE 延长线的交点出现就显得很被动，所以为提高 A 的地位，而把题目叙述成："A 是 $\odot O$ 外一点，AP，AQ 是 $\odot O$ 的两条切线，P、Q 为切点，任作两条割线 AFB，AEC. FC 与 BE 交于 H. 求证：H 在直线 PQ 上."

(1) 请读者仔细品味和原题的区别. 改动后使我们看到面对的问题是多么的诡异，居然你随意作两

条割线就会使得对应的交线在直线 **PQ** 上，这位高手的思想就是既然任给两条割线都有这样好的性质，那么我们不妨先把其中之一取成直径！！如图 Ⅱ－4－3－18，EB 就是 $\odot O$ 的直径，于是就算 FC，EB 与 PQ 的交点呗，再不济，用解析几何算也不会超过 15 分钟.

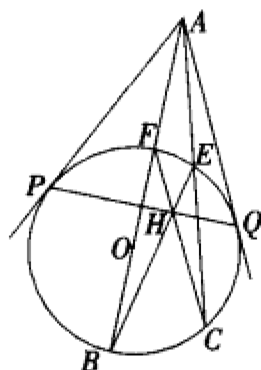


图 Ⅱ－4－3－18

(2) 真正的困难在你现在只是证明了一个特例，关键是如何把这个证明应用到原题呢？

注意到，在原题中如果作 $\odot O$ 的直径 AST，则由前面证明的结论有 FT 和 SB 的交点 X，SC 和 ET 的交点 Y 都在直线 PQ 上，那么怎么证明 FC 和 BE 的交点 H 也在 PQ 上呢？证明这个问题的有力工具就是 Pascal 定理.

证法四：过 A 作 $\odot O$ 的直径 AST，设 X 和 Y 分别为 FT 与 BS，ET 与 CS 的交点.

先证明 X 在直线 PQ 上，见图 Ⅱ－4－3－19

以圆心为原点，TA 为 y 轴建立直角坐标系

记 $\odot O$ 半径为 r，$\angle BAP = \theta$

于是 $\odot O$ 的方程为 $x^2 + y^2 = r^2$，点 A 坐标为 $(0, r/\cos\theta)$

设割线 AFB 的方程为 $x = k(y - r/\cos\theta)$

则　直线 AFB 和 AST 的方程就是

$$f_1 = x[x - k(y - r/\cos\theta)] = 0$$

记　$f_2 = x^2 + y^2 - r^2$　（$\odot O$ 的方程）

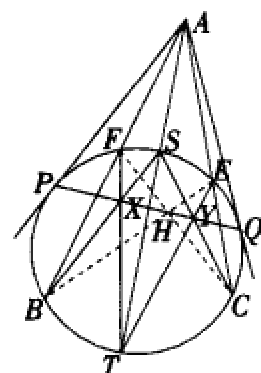


图 Ⅱ－4－3－19

则 FT 和 BS 的方程就是 f_1 和 f_2 的线性组合.

又 ∵　FT 和 BS 的方程是 $(y - k_1x + r)(y - k_2x - r) = 0$

∴　把二者写成等式样子：

$$\lambda\left(x^2 - kxy + \frac{kxr}{\cos\theta}\right) + (x^2 - y^2 - r^2) = (y - k_1x + r)(y - k_2x - r)$$

要证点 X 在直线 PQ 上，即证 X 点的纵坐标为 $r\cos\theta$，那么由 FT 和 BS 的方程不难解得点 X 的纵坐标为 $\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \cdot r$

注意到 xy 项的系数对应于 $k_1 + k_2$，而 x 项系数对应于 $k_1 - k_2$

比较系数有　$k_1 + k_2 = k\lambda$，$r(k_1 - k_2) = \lambda\frac{kr}{\cos\theta}$

两式相除易见　$\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \cdot r = r\cos\theta$

故 X 在直线 PQ 上，

同理，Y 在直线 PQ 上.

最后由 Pascal 定理知道，X，Y，H 共线，

∴ P，H，Q 共线.

证毕.

【评注】 (1) 这个解答是极具哲理的证明，基本思想是特殊点的原则，特殊向一般转化.

(2) 特殊向一般转化的关键是 Pascal 定理的应用.

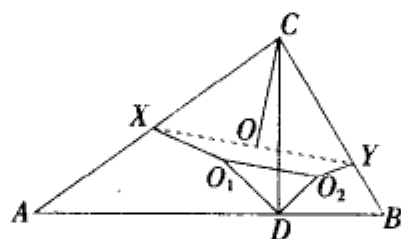
(3) 本例给出了 Pascal 定理的一种用法.

（证法四是肖良同志得出的！）

例 12　如图 Ⅱ－4－3－20，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$CD \perp AB$ 于 D. O_1 和 O_2 分别是 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 的内心，O_1X 和 O_2Y 分别是 $\triangle DO_1O_2$ 的角平分线的反向延长线，X 和 Y 为与 AC 和 BC 的交点. 若 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，求证：X，O，Y 共线.

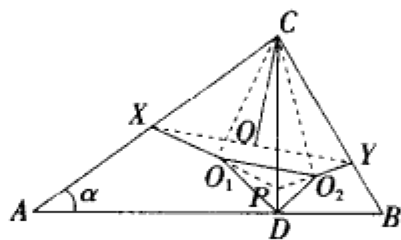
【分析】　初拿到题目感觉就是要证明这个结论确实很有难度，关键是我们对点 X 和 Y 几乎没有任

何的了解，而要证明关于它们的共线显然很不现实，所以从实用的角度来讲采用张角定理是一个很好的选择.



图Ⅱ-4-3-20

先来看看张角定理的条件还差什么，三个角度还是很容易知道的，CO 是一个很容易知道的东西，差的一点就是 CX 和 CY 的长. 当然求一个就够了，另一个显然是同理的. 和 X 相关的只有 O_1X，所以我们就只关心 O_1X 了.



图Ⅱ-4-3-21

这道题目因为一个很出人意料的小结论而变得简单许多，这个结论就是 $\triangle DO_1O_2$ 的内心 P 就在线段 CD 上！这就是说我们可以通过 PO_1 和 PO_2 来确定 X 和 Y 的位置，喜欢计算的同学现在一定欣喜若狂，因为现在已经可以开始用解析几何来计算了.（请读者自己用脑子过一下大概需要计算的东西，会发现这确实并不是一件很困难的事情）笔者认为如果可以得到这样的算法，可以说已经是很不错的结果了. 但是其实还有一个稍微好一些的方法，就是你要敏锐的猜测隐藏结论：$\triangle DO_1O_2 \backsim \triangle CAB$ 和 $CX = CP = CY$！当然还有一些中间结论，如 $\angle CO_1P = \angle CO_2P = 90°$

于是我们不用太多的计算，而用纯几何的方法就可以将此题搞定(但请读者一定要在脑袋里面过一下，如果你迫不得已要去计算，你应该如何计算.）

证明：设 $\triangle DO_1O_2$ 的内心为 P，连接 CO_2. 由条件易知 $\angle O_2DC = \angle O_1DC = 45°$

$\therefore$ P 在线段 CD 上

记 $\angle CAB = \alpha$

由于 $\triangle ACD \backsim \triangle CBD$，且相似比为 $\dfrac{AC}{BC}$

所以 $\dfrac{DO_1}{DO_2} = \dfrac{AC}{BC}$

于是，可以得 $\triangle DO_1O_2 \backsim \triangle CAB$

$\therefore$ $\angle DO_1O_2 = \alpha$

进而有 $\angle DO_1P = \dfrac{\alpha}{2}$

又由 O_1 是 $\triangle ACD$ 的内心这个性质得到 $\angle CO_1D = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$，于是，$\angle CO_1P = 90°$

又 CO_1 是 $\angle ACD$ 的角分线，所以知 $CX = CP, PO_1 = O_1X$

同理 $CY = CP, PO_2 = O_2Y$

下面就要证明 X, O, Y 共线了，先计算 XY 的长

由 $PO_1 = O_1X$ 和 $PO_2 = O_2Y$ 知 O_1O_2 是 $\triangle PXY$ 的中位线

所以 $XY = 2O_1O_2$

而 $O_1O_2 = AB \cdot \dfrac{DO_1}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}(AD + DC - AC)}{2\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}(AC + BC - AB)}{2}$

$= CO$（这个式子中小跳了几步，请读者自己补全）

于是 $XY = 2CO$

易见，X, O, Y 共线.（请读者想想为什么）

证毕.

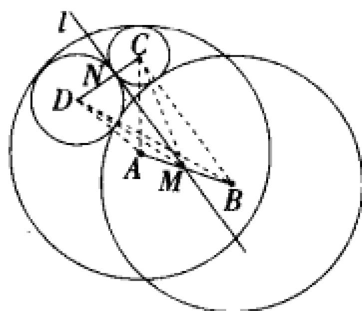
【评注】 关于整个解法我不想再说什么了，因为这个解法很多都是依靠观察而得到一些中介的结论，最后进行很少的计算得到结果.

以上是三点共线问题，下面我们讨论三条或多条直线的共点问题.

例 13 $\odot A$ 与 $\odot B$ 相等且相交，画两个外切的 $\odot C$ 与 $\odot D$，使它们既同时与 $\odot A$ 内切，又同时与 $\odot B$ 外切，记 $\odot C, \odot D$ 的内公切线为 l. 显然符合条件的 $\odot C, \odot D$ 可以画出无数组. 证明：无数条内公

切线相交于一点.

【分析】 如图Ⅱ－4－3－22,设⊙C,⊙D外切于点N,取AB中点M,证明直线MN就是内公切线l.关键是证明$MN\perp CD$



图Ⅱ－4－3－22

证明:记⊙A,⊙B的半径为R,⊙C,⊙D的半径各为c,d,连接AC,BC,MC;AD,BD,MD

利用三角形中线公式,有

$AC^2+BC^2=2\cdot CM^2+2\cdot AM^2$

$AD^2+BD^2=2\cdot DM^2+2\cdot AM^2$

两式相减,得

$2(CM^2-DM^2)$

$=(AC^2+BC^2)-(AD^2+BD^2)$

$=(R-c)^2+(R+c)^2-(R-d)^2-(R+d)^2$

$=2(c^2-d^2)=2(CN^2-DN^2)$.

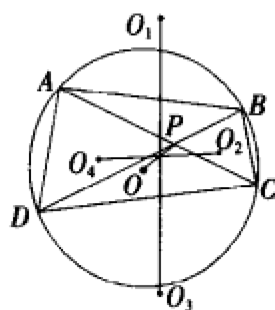
故 $CM^2-DM^2=CN^2-DN^2$

由此式易推得$MN\perp CD$.从而证明了⊙C,⊙D的内公切线l通过已知线段AB的中点M

【评注】 符合条件的⊙C,⊙D不论画出多少组,所得到的不论多少条内公切线,都可证明通过AB的中点M.由于AB的中点具有惟一性,从而证明了无数组相外切的两圆内公切线相交于一点.

例14 (1990.全国高中数学联赛二试题1)四边形$ABCD$内接于⊙O,对角线AC与BD交于P,如图Ⅱ－4－3－23,设△ABP、△BCP、△CDP,△DAP的外心分别为O_1、O_2、O_3、O_4.求证:OP、O_1O_3、O_2O_4三线共点.

证明:∵ CD为⊙O与⊙O_3的公共弦,∴ $OO_3\perp CD$



图Ⅱ－4－3－23

又 $\because \angle APO_1+PCD=\angle APO_1+\angle PBA=\angle APO_1+\frac{1}{2}\angle AO_1P=90°$

∴ $O_1P\perp CD$

从而 $OO_3 /\!/ O_1P$

∵ AB为⊙O与⊙O_1的公共弦

∴ $OO_1\perp AB$

又∵ $\angle CPO_3+\angle PAB=\angle CPO_3+\angle PDC$

$$=\angle CPO_3+\frac{1}{2}\angle PO_3C=90°$$

∴ $O_3P\perp AB$

从而 $OO_1 /\!/ O_3P$

故 四边形O_1PO_3O为平行四边形.

从而 O_1O_3与OP互相平分.

即 O_1O_3过线段OP的中点.

依上类似地可证明,O_2O_4过线段OP的中点,因此,OP、O_1O_3、O_2O_4三线共点.

【评注】 例13选定的特殊点是AB的中点,例14选定的特殊点是OP的中点,当然例14也可以是线段O_1O_3或O_2O_4的中点.利用直线经过特殊点是证明线共点的重要方法.

例15 如图Ⅱ－4－3－24,已知凸四边形$ABCD$内接于圆O,对角线AC、BD相交于Q,过Q分别作直线AB、BC、CD、DA的垂线,垂足分别是E、F、G、H.求证:EH、BD、FG三直线共点或互相平行.

证明:设 EH 与 BD 相交时,交点为 P,直线 EHP 截 $\triangle ABD$,由梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$$

记 $\angle BAC=\angle BDC=\theta$,$\angle DBC=\angle CAD=\beta$,$\angle ABD=\angle DCA=\gamma$,$\angle ADB=\angle ACB=\alpha$,有

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{DH}{HA}=\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}\cdot\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\quad \frac{CF}{FB}\cdot\frac{DC}{GC}=\frac{\tan B}{\tan\alpha}\cdot\frac{\tan\gamma}{\tan\theta}$$

$\therefore\ \frac{CF}{FB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DG}{GC}=1$,由梅涅劳斯定理,$F$、$G$、$P$ 三点共线,即 EH、BD、FG 三线共点.

图 Ⅱ-4-3-24

设 $EH\parallel BD$,用反证法,假设 FG 与 BD 相交,则由上面的证明可知,EH 与 BD 相交于同一点,矛盾.故 $FG\parallel BD$

例 16 (第 36 届 IMO 预选题,1995 年.哥伦比亚)设 ABC 是个三角形,一个过 B、C 两点的圆分别与边 AB、AC 相交于 C'、B'.证明:BB'、CC'、HH' 三线共点,其中 H 与 H' 分别是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 的垂心.

证明:如图 Ⅱ-4-3-25,由 $\angle AB'C'=\angle ABC$,知 $\triangle AB'C'$ 与 $\triangle ABC$ 是相似三角形.同样,$\triangle H'B'C'$ 与 $\triangle HBC$ 也相似(利用垂心性质及 $\triangle ABC\backsim\triangle AB'C'$).

设 BB' 与 CC' 相交于 P

由 $\angle BB'C=\angle CC'B$,知 $\angle PBH=\angle PCH$ ①

由 $\angle PB'C=\angle PCB$ 知 $\triangle PB'C\backsim\triangle PCB$

作平行四边形 $BPCD$,则 $\triangle DBC$ 与 $\triangle PCB$ 全等.因而,$\triangle DBC$ 也与 $\triangle PB'C'$ 相似.由此可知 $BHCD$ 与 $B'H'C'P$ 相似.于是,$\triangle BHD$ 与 $B'H'P$ 相似

因而 $\angle HDB=\angle H'PB'$ ②

图 Ⅱ-4-3-25

作平行四边形 $HPCE$,则 $\angle PCH=\angle CHE$ ③

注意到 $BHED$ 也是平行四边形,因而 $\angle DHE=\angle HDB$ ④

于是,$\triangle BPH\cong\triangle DCE$,由此知 $\angle CDE=\angle PBH$ $\angle BPH=\angle DCE$ ⑤⑥

利用 ⑤,① 与 ③,可知 $\angle CDE=\angle CHE$

故 $HCED$ 是圆内接四边形.由此可知 $\angle DCE=\angle DHE$ ⑦

再由 ⑥,⑦,④ 与 ②,知 $\angle BPH=\angle H'PB'$.

因此,HH' 也通过 P 点.

【评注】 例 15 和例 16 是利用证三点共线来证明三线共点的,一般意义上来说,证明三条直线 AB、CD、EF 交于一点的问题,可转化为证明 AB 与 CD 的交点 P 和点 F、E 三点共线.

下面我们研究同一法证明三线共点问题.

例 17 (1996.第 37 届 IMO 第 2 题)如图 Ⅱ-4-3-26 所示,设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点,$\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$,又设 D、E 分别是 $\triangle APB$ 及 $\triangle APC$ 的内心,证明:AP、BC、CE 交于一点.

证法一:延长 AP 交 BC 于点 K,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 F,连 BF、CF

$$\begin{aligned}\angle APC-\angle ABC&=\angle AKC+\angle PCK-\angle ABC\\&=\angle PCK+\angle KCF\\&=\angle PCF\end{aligned}$$

同理 $\angle APB-\angle ACB=\angle PBF$

由假设,有 $\angle PCF=\angle PBF$

由正弦定理,有

图 Ⅱ-4-3-26

$$\frac{PB}{\sin\angle PFB}=\frac{PF}{\sin\angle PBF}=\frac{PF}{\sin\angle PCF}=\frac{PC}{\sin\angle PFC}$$

所以 $\frac{PB}{PC}=\frac{\sin\angle PFB}{\sin\angle PFC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}$

即 $\frac{PB}{AB}=\frac{PC}{AC}$

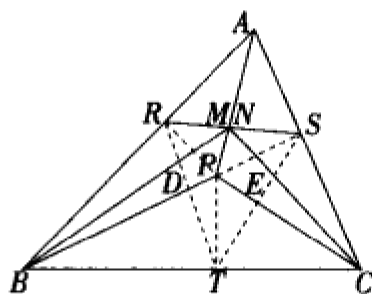
记 BD 与 AP 的交点为 M，由于 BD 是 $\angle ABP$ 的平分线，$\frac{PM}{MA}=\frac{PB}{AB}$

记 CE 与 AP 的交点为 N，由于 CE 是 $\angle ACP$ 的平分线，$\frac{PN}{NA}=\frac{PC}{AC}$

$\therefore \frac{PM}{MA}=\frac{PN}{NA}$，即 M 与 N 重合.

于是，AP、BD、CE 交于一点.

证法二：过 P 向三边作垂线，如图Ⅱ-4-3-27所示，垂足分别为 R、S、T



图Ⅱ-4-3-27

连接 RS、ST、TR，易知，P、R、A、S；P、T、B、R；P、S、C、T 分别四点共圆，则

$\angle APB-\angle ACB=\angle PAC+\angle PBC=\angle PRS+\angle PRT=\angle SRT$

同理 $\angle APC-\angle ABC=\angle RST$

由条件 $\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$

有 $\angle SRT=\angle RST, RT=ST$

由 $RT=PB\cdot\sin B, ST=PC\cdot\sin C$ 知.

$PB\cdot\sin B=PC\cdot\sin C$

即 $\frac{PB}{AB}=\frac{PC}{AC}$

设 BD 交 AP 于 M，CE 交 AP 于 N，则 $\frac{AN}{NP}=\frac{AC}{PC}=\frac{AB}{PB}=\frac{AM}{MP}$

故 M、N 重合，即 AP、BD、CE 交于一点.

【评注】 (1) 两种证法都是用同一法，经证 $\frac{AM}{MP}=\frac{AN}{NP}$ 从而得到 M、N 重合. (*)

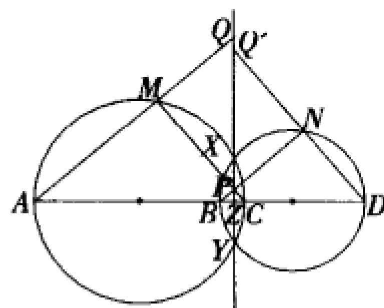
(2) 证明的关键是把证明(*)式转化成证明 $\frac{PB}{AB}=\frac{PC}{AC}$

(3) 例17中证明三线共点的问题转化成证明两点重合问题；而应用同一法归纳两点重合的方式是多种多样的. 为了说明这一点，再以第36届IMO试题1为例用几种不同方式归纳两点重合.

例18 (1995.第36届IMO试题1) 设 A、B、C、D 是一条直线上依次排列的四个不同的点. 分别以 AC，BD 为直径的两圆相交于 X 和 Y；直线 XY 交 BC 于 Z. 若 P 为直线 XY 上异于 Z 的一点，直线 CP 与以 AC 为直径的圆相交于 C 及 M，直线 BP 与以 BD 为直径的圆相交于 B 及 N. 试证：AM，DN 和 XY 三直线共点.

【说明】 题中的 P 点可以在 XY 线段或其延长线上. 完整的证明必须包括这两种情形，但对大多数证明方法而言，两种情形的证明很类似. 限于篇幅，这里只着重介绍其中一种情形.

证法一：设 P 点在线段 XY 上(如图Ⅱ-4-3-28)，并设直线 AM 与直线 XY 交于 Q 点，直线 DN 与直线 XY 交于 Q' 点，证明：Q 和 Q' 重合.



图Ⅱ-4-3-28

因为 $\angle QMC=\angle QZC=90°$，所以 Q、M、Z、C 四点共圆. 根据相交弦定理，应有

$QP\cdot PZ=MP\cdot PC=XP\cdot PY$

同理 $Q'P\cdot PZ=NP\cdot PB=XP\cdot PY$

因此 $QP=Q'P, QZ=Q'Z$

又因为 Q 和 Q' 都在直线 XY 上，并且在直线 AD 的同一侧，所以 Q 点与 Q' 点重合.

证法二：基本约定同证法 ①，因为 $\triangle QAZ \backsim \triangle CPZ$

所以 $QZ = \dfrac{CZ \cdot ZA}{ZP} = \dfrac{XZ \cdot ZY}{ZP}$,

同理 $Q'Z = \dfrac{BZ \cdot ZD}{ZP} = \dfrac{XZ \cdot ZY}{ZP}$

所以 Q 点和 Q' 点重合.

证法三：基本约定同前，连线段 MX 和 MY（如图 Ⅱ－4－3－29 所示）. 作为夹相等弧的圆周角，$\angle XMP = \angle PMY$. 因而 MP 是 $\angle XMY$ 的平分线，又因为 $MP \perp MQ$，所以 MQ 是 $\angle XMY$ 的外角平分线，依据内外角平分线的性质，我们得到

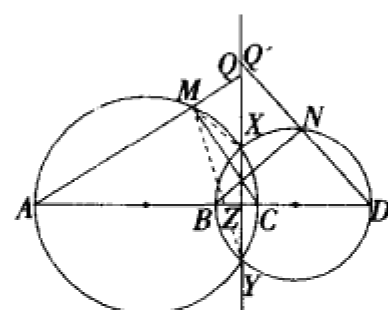


图 Ⅱ－4－3－29

$XQ : YQ = XP : YP$

同样道理 $XQ' : YQ' = XP : YP$

不妨设 $ZQ' \geqslant ZQ$（如图 Ⅱ－4－3－29 所示），约定 $\delta = QQ'(\geqslant 0)$，则有

$XQ : YQ = (XQ + \delta) : (YQ + \delta)$

$\delta \cdot XY = 0$

由此得知 $\delta = 0$，即 Q 点和 Q' 点重合.

证法四：仍设 P 点在线段 XY 上，过 A 点作 $AE \parallel BN$ 交直线 XY 于 E. 过 D 点作 $DE' \parallel CM$ 交直线 XY 于 E'（如图 Ⅱ－4－3－30 所示）. 容易看出：

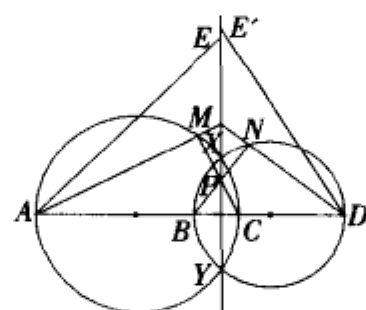


图 Ⅱ－4－3－30

$ZE : ZP = ZA : ZB$

$ZE' : ZP = ZD : ZC$

根据相交弦定理

$ZA \cdot ZC = ZX \cdot ZY = ZB \cdot ZD$

由此得知

$ZE : ZP = ZE' : ZP$

所以 E 点与 E' 点重合.

因为 $\triangle ADE$ 的三条高分别在直线 AM，直线 DN 和直线 XY 上，所以这三条直线交于一点——$\triangle ADE$ 的垂心.

下面一个例子是1988年前苏联提供的一道IMO预选题经过改造，所得到的一个题目，很有趣，值得一读.

例 19 如图 Ⅱ－4－3－31，给定七个圆，六个小圆在一个大圆内，每个小圆与大圆相切，且与相邻两个小圆相切. 若六个圆与大圆切点依次为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. 证明：$A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6$ 三线共点.

引理 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 有公共底边 BC，连接 AD 交 BC（或其延长线）于 E. 则：$AE : DE = AB\sin\angle ABC : BD\sin\angle CBD$.

证明：如图 Ⅱ－4－3－32，过 A、D 分别作 $AF \perp BC$ 于 F，$DG \perp BC$ 于 G，由 $\angle AEF = \angle DEG$ 得 $Rt\triangle AEF \backsim Rt\triangle DEG$，

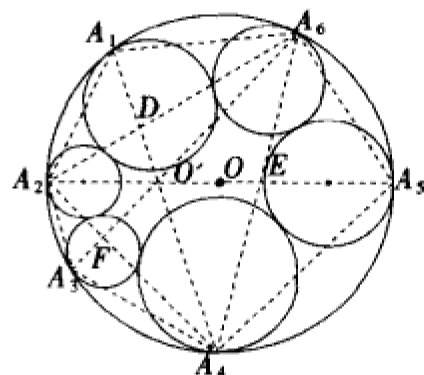


图 Ⅱ－4－3－31

$\therefore AE : DE = AF : DG$,

$\therefore AB \cdot \sin\angle ABC : BD \cdot \sin\angle CBD$

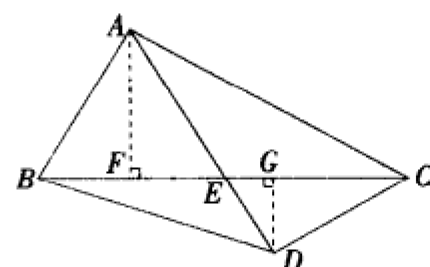
$= AF : DG$

$= AE : DE$.

引理得证.

下面运用引理来证明 A_1A_4、A_2A_5、A_3A_6 三线共点.

证明:如图Ⅱ-4-3-32,在$\triangle A_2A_3A_6$与$\triangle A_4A_3A_6$中,运用引理得:



图Ⅱ-4-3-32

$A_2F : A_4F = A_2A_3 \cdot \sin\angle A_2A_3A_6 : A_3A_4\sin\angle A_4A_3A_6$

同理可证:

$A_4E : A_6E = A_4A_5\sin\angle A_2A_5A_4 : A_5A_6\sin\angle A_2A_5A_6$

$A_6D : A_2D = A_6A_1 \cdot \sin\angle A_4A_1A_6 : A_1A_2\sin\angle A_4A_1A_2$

$\because \angle A_2A_3A_6 = \angle A_2A_5A_6,$

$\angle A_4A_3A_6 = \angle A_4A_1A_6$

$\angle A_4A_1A_2 = \angle A_2A_5A_1$

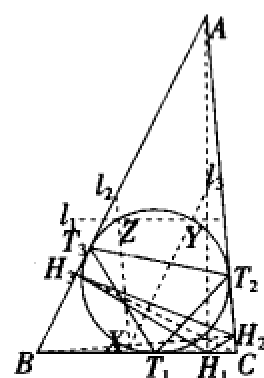
$\therefore A_1A_2 \times A_3A_4 \times A_5A_6 = A_2A_3 \times A_4A_5 \times A_6A_1$

$\therefore \dfrac{A_2F}{A_4F} \cdot \dfrac{A_4E}{A_6E} \cdot \dfrac{A_6D}{A_2D} = 1$

由塞瓦定理的逆定理得A_2E、A_4D、A_6F三线共点,即A_1A_4、A_2A_5、A_3A_6三线共点.

本讲最后一个例子是一个经典的题目,它是41届IMO的第6题,在历届IMO试题中,几何题目出现在3、6题,是极为少见的,可见这个题目的难度是空前的.

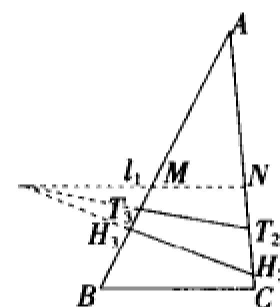
例20 (IMO41-6)设AH_1,BH_2,CH_3是锐角$\triangle ABC$的三条高线,$\triangle ABC$的内切圆与边BC,CA,AB分别相切于点T_1,T_2,T_3.设直线l_1,l_2,l_3分别是直线H_2H_3,H_3H_1,H_1H_2关于直线T_2T_3,T_3T_1,T_1T_2的对称直线.证明:l_1,l_2,l_3所确定的三角形,其顶点都在$\triangle ABC$的内切圆上.



图Ⅱ-4-3-33

【分析一】 首先,无论如何我们都要先画一个精确的图,因为题目的条件都比较经典,所以其中很可能有隐含条件,尤其是我们要知道一下l_1,l_2,l_3所确定的三角形是个什么东西.见图Ⅱ-4-3-33,我们不难看到我们关心的$\triangle XYZ$好像各边平行于$\triangle ABC$的各边,或者说两个三角形似位似的.这个证明简单算一下角就可以知道,请读者自己完成.

于是我们的想法变了,因为你去确定一下两条直线的交点总是很困难的一件事,所以我们不妨使用同一法,先给出$\triangle XYZ$,然后再证明直线的对称性.接下来就要想了,证明对称性需要证明哪些东西呢?当然你只需要证明一组就行了,其余同理.我们要证明两件事,一是直线l_1,T_2T_3,H_2H_3共点;二是在它们共点的情况下,要证明对交点而言,T_2T_3是角分线.读者一定看出第二条是很容易的,只需要倒角就行了,直正的难点在于第一条如何证明.



图Ⅱ-4-3-34

下面介绍一种笔者的方法,未必最佳,但是起码值得借鉴吧.基于的想法就是要去计算,因为我是先知道是一道难题,去赌博纯几何解法没有什么意义.我的想法就是现在我们对l_1,T_2T_3,H_2H_3和$\triangle ABC$的关系已经很清楚了,我们既然要计算,那么留着内切圆没有任何意义,于是我就可以重新画一个图.

看一下我们可以算出什么,设l_1与AB,AC分别交于点M和N,我们可以算出的是AT_2和AT_3,AH_2和AH_3,AM和AN而要证明的是这三线共点.显然了,这一定和梅氏定理有关,我们不妨把这个作为一个引理.

证法一:先证明一个引理.

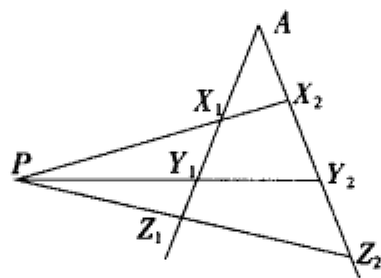
引理:如图Ⅱ-4-3-35,记$AX_i = x_i, AY_i = y_i, AZ_i = z_i, i = 1,2$. X_1X_2,Y_1Y_2,Z_1Z_2不两两平行,则X_1X_2,Y_1Y_2,Z_1Z_2三线共点的充要条件是

$$\frac{1}{x_1y_2}+\frac{1}{y_1z_2}+\frac{1}{z_1x_2}=\frac{1}{x_2y_1}+\frac{1}{y_2z_1}+\frac{1}{z_2x_1}$$

引理的证明:设直线X_1X_2和Y_1Y_2交于点P_1,直线Z_1Z_2和Y_1Y_2交于点P_2

$\therefore X_1X_2,Y_1Y_2,Z_1Z_2$ 三线共点 $\Leftrightarrow \dfrac{P_1Y_1}{Y_2P_1}=\dfrac{P_2Y_1}{Y_2P_2}$

由梅氏定理有 $\dfrac{P_1Y_1}{Y_2P_1}=\dfrac{X_1Y_1}{AX_1}\cdot\dfrac{X_2A}{Y_2X_2},\dfrac{P_2Y_1}{Y_2P_2}=\dfrac{Z_1Y_1}{AZ_1}\cdot\dfrac{Z_2A}{Y_2Z_2}$



图Ⅱ-4-3-35

所以命题等价于证明

$$\frac{X_1Y_1}{AX_1}\cdot\frac{X_2A}{Y_2X_2}=\frac{Z_1Y_1}{AZ_1}\cdot\frac{Z_2A}{Y_2Z_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_1-x_1}{x_1}\cdot\frac{x_2}{y_2-x_2}=\frac{z_1-y_1}{z_1}\cdot\frac{z_2}{z_2-y_2}$$

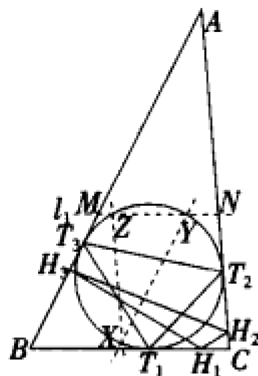
这个就等价于

$$\frac{1}{x_1y_2}+\frac{1}{y_1z_2}+\frac{1}{z_1x_2}=\frac{1}{x_2y_1}+\frac{1}{y_2z_1}+\frac{1}{z_2x_1}$$

(读者作为一个锻炼可以试着自己把过程写一下).

引理证毕.

下面来看原题.



图Ⅱ-4-3-36

这里,一些常用的约定的符号就不再重复设定了.

记 $\triangle XYZ$ 为内接于 $\triangle ABC$ 内切圆且与 $\triangle ABC$ 反向位似的那个三角形,XY 交 AB 和 AC 于点 M 和 N

我们依然使用引理中符号记 $AM=x_1,AN=x_2,AT_3=y_1,AT_2=y_2,AH_3=z_1,AH_2=z_2$

我们将要证明 $\triangle XYZ$ 就是 l_1,l_2,l_3 所确定的三角形.

只要证明直线 MN 和直线 H_2H_3 关于直线 T_2T_3 对称,其余的同理.

利用倒角易看出直线 T_2T_3 和直线 MN 的夹角为 $\frac{1}{2}(C-B)$,而直线 H_2H_3 和直线 MN 的夹角为 $C-B$,当然,如果三线平行就对应 $B=C$(请读者自己完成这段证明)

我们先来计算一下我们关心的那些量.

$$AM=AB\cdot\frac{d(A,MN)}{h_a}$$(这里,h_a 是 BC 边上的高的长,$d(A,MN)$ 表示 A 到 MN 的距离.)

$$=c\cdot\frac{h_a-r(1+\cos A)}{h_a}$$

$$=2R\sin C\cdot\lambda.\left(\text{其中 }\lambda=\frac{h_a-r(1+\cos A)}{h_a}\right)$$

同理　$AN=2R\sin B\cdot\lambda$

$$AT_2=AT_3=\frac{b+c-a}{2}$$

$$AH_2=AB\cos A=2R\sin C\cos A,AH_3=2R\sin B\cos A$$

再进行下一步之前可以先算一下 λ

$$\lambda=\frac{h_a-r(1+\cos A)}{h_a}=\frac{\frac{2S}{a}-\frac{2S}{a+b+c}(1+\cos A)}{\frac{2S}{a}}$$

$$=\frac{a+b+c-a(1+\cos A)}{a+b+c}=\frac{b+c-a\cos A}{a+b+c}$$

下面就要证明那三条线对称的结论了.

情况 1:$B=C=\alpha$ 即三线平行.

这时,需要证明 $x_1+z_1=2y_1$

$$\Leftrightarrow 2R\sin C\cdot\lambda+2R\sin B\cos A=2\cdot\frac{b+c-a}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2R\sin\alpha\left(\frac{b+c-a\cos A}{a+b+c}+\cos A\right)=b+c-a$$

$$\Leftrightarrow 2R\sin\alpha\,\frac{b+c}{a+b+c}(1+\cos A)=b+c-a$$

$$\Leftrightarrow 2R\sin\alpha\,\frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}(1-\cos2\alpha)=2R(2\sin\alpha-\sin2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\,\frac{1}{1+\cos\alpha}\cdot 2\sin^2\alpha=2\sin\alpha(1-\cos\alpha).$$（易见，这是一个显然成立的式子）

所以，情况 1 的问题就解决了.

情况 2：$B\neq C$，这就要用到前面提到的引理.

由引理知我们只要证明 $\frac{1}{x_1y_2}+\frac{1}{y_1z_2}+\frac{1}{z_1x_2}=\frac{1}{x_2y_1}+\frac{1}{y_2z_1}+\frac{1}{z_2x_1}$ ①

$$\frac{1}{x_1y_2}+\frac{1}{y_1z_2}+\frac{1}{z_1x_2}$$

$$=\frac{1}{2R\lambda\sin C\cdot\frac{b+c-a}{2}}+\frac{1}{\frac{b+c-a}{2}\cdot 2R\cos A\sin C}+\frac{1}{2R\cos A\sin B\cdot 2R\lambda\sin B}$$

$$=\frac{1}{R(b+c-a)\sin C}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\cos A}\right)+\frac{1}{\sin^2B}\cdot\frac{1}{4R^2\lambda\cos A}$$

注意到在①式中左右的差别就是角标上 1 和 2 的互换，而 1 和 2 就对应着 B 和 C 的互换. 所以右边的式子就是在上式中将 B 和 C 的互换.

所以只要证明：

$$\frac{1}{R(b+c-a)\sin C}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\cos A}\right)+\frac{1}{\sin^2B}\cdot\frac{1}{4R^2\lambda\cos A}$$

$$=\frac{1}{R(b+c-a)\sin B}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\cos A}\right)+\frac{1}{\sin^2C}\cdot\frac{1}{4R^2\lambda\cos A}$$

这等价于证明：

$$\frac{\sin B-\sin C}{\sin B\sin C}\cdot\frac{1}{R(b+c-a)}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\cos A}\right)=\frac{\sin^2B-\sin^2C}{\sin^2B\sin^2C}\cdot\frac{1}{4R^2\lambda\cos A}$$

由于 $B\neq C$，所以上式两边可以约去 $\sin B-\sin C$，只需证明：

$$\frac{1}{b+c-a}\cdot\frac{\lambda+\cos A}{\lambda\cos A}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin B\sin C}\cdot\frac{1}{4R\lambda\cos A}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{b+c-a}\cdot(\lambda+\cos A)=\frac{b+c}{2bc}$$

注意到，上式是关于 B 和 C 对称的一个式子并且几乎只与 λ 有关. 感觉是我们的希望来了，只要硬着头皮再算两步就应该差不多了.

由前面得到的结论 $\lambda=\frac{b+c-a\cos A}{a+b+c}$，可以得到：

$$\frac{1}{b+c-a}\cdot(\lambda+\cos A)=\frac{1}{b+c-a}\cdot\left(\frac{b+c-a\cos A}{a+b+c}+\cos A\right)$$

$$=\frac{1}{b+c-a}\,\frac{(b+c)(1+\cos A)}{a+b+c}$$

$$=\frac{b+c}{(b+c-a)(a+b+c)}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$=\frac{b+c}{(a+b-c)(a+b+c)}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{b+c}{2bc}$$

于是情况 2 下结论也成立.

证毕.

【评注】 我们居然就这样幸运的把这道题目坚持的算完了，我们好像什么几何思想也没有使用，

除了猜到 l_1,l_2,l_3 所确定的三角形是个什么东西之外就没什么和我们原来所接触的所谓平几有关的了.然而就是最朴素的计算却可以在没有办法的时候硬生生的砍出一条路来,虽然其中布满了一些荆棘(计算中可能出现的错误以及迷失计算方向的可能),但是我想不论怎样,这始终还是一条必须要经历的路.笔者做这道题目一共用了1个小时多一些(包括计算方式的策划等,但不包括写解答的时间),在计算过程中两次算错,甚至怀疑题目的正确性.然而这在IMO第六题上就不算什么了,因为我们往往可以保留2个小时的时间给最后一题,可以达到这样的效率就已经满意了.

(上述方法是肖良同志给出的)

【分析二】 令 M_1 为关于 $\angle A$ 的平分线的对称点,M_2 和 M_3 分别为 T_2 和 T_3 关于 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线的对称点,由于 M_1,M_2,M_3 在 $\triangle ABC$ 的内切圆上,只需证明它们恰好是题目中所求证的三角形的三个顶点.

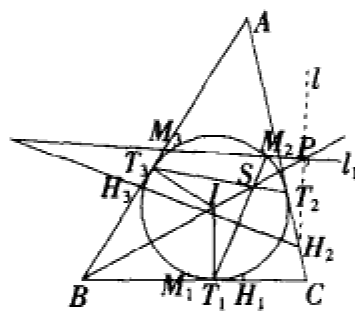
由对称性,只需证明 H_2H_3 关于直线 T_2T_3 的对称直线 l_1 经过 M_2 即可.

证法二: 令 M_1 为 T_1 关于 $\angle A$ 的平分线的对称点,M_2 为 T_2 关于 $\angle B$ 的平分线的对称点,M_3 为 T_3 关于 $\angle C$ 的角平分线的对称点,设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,注意 T_2 和 H_2 总在 BI 的同一侧,且 T_2 和 H_2 距离 BI 更近,如图Ⅱ-4-3-37,我们只考虑点 C 也在 BI 同一侧情形(如果 C 和 T_2,H_2 分别位于 BI 的两侧,证明需要稍加改动).

设 $\angle A=2\alpha,\angle B=2\beta,\angle C=2\gamma$

引理 H_2 关于 T_2T_3 的对称点位于直线 BI 上.

证: 过 H_2 作直线 l 与 T_2T_3 垂直,记 P 为 l 与 BI 的交点,S 为 BI 与 T_2T_3 的交点,则 S 既在线段 BP 上,也在线段 T_2T_3 上,只需证明.



图Ⅱ-4-3-37

$\angle PSH_2=2\angle PST_2$

首先,有 $\angle PST_2=\angle BST_3$

又由外角定理知

$\angle PST_2=\angle AT_3S-\angle T_3BS=(90^\circ-\alpha)-\beta=\gamma$

再由关于 BI 的对称性可知

$\angle BST_1=\angle BST_3=\gamma$

因为 $\angle BT_1S=90^\circ+\alpha>90^\circ$

所以,点 C 和点 S 在 IT_1 同一侧

由 $\angle IST_1=\angle ICT_1=\gamma$ 可得 S、T_1、C、I 四点共圆,于是 $\angle ISC=\angle IT_1C=90^\circ$

因为 $\angle BH_2C=90^\circ$

所以 B,C,H_2,S 四点共圆.

这意味着 $\angle PSH_2=\angle C=2\gamma=2\angle PST_2$

引理得证.

注意到在引理的证明中,因为 B,C,H_2,S 四点圆以及关于 T_2T_3 的对称性,可以得到

$\angle BPT_2=\angle SH_2T_2=\beta$

又由于 M_2 是 T_2 关于 BI 的对称像,有 $\angle BPM_2=\angle BPT_2=\beta=\angle CBP$

因此 $PM_2\parallel BC$

要证明 M_2 位于 l_1 上,只需证 l_1 也平行于 BC

假设 $\beta\neq\gamma$,设直线 BC 与 H_2H_3 和 T_2T_3 分别相交于点 D 和点 E,注意到点 D 和点 E 位于直线 BC 上线段 BC 的同一侧,易证

$\angle BDH_3=2|\beta-\gamma|,\angle BET_3=|\beta-\gamma|$

故 $l_1\parallel BC$

则 M_2 位于 l_1 上

则 l_1,l_2,l_3 所确定的三角形为 $\triangle M_1M_2M_3$

而 $\triangle M_1M_2M_3$ 在 $\triangle ABC$ 内切圆上,则原命题得证.

分析三　证法1的手段是用三角的大量运算，解法2是几何的综合法，我们下面用三角知识和解析法的综合运用给出一个较法1简单的方法；

解题关键是，设直线 T_2T_3，H_2H_3 交于 P，直线 H_2H_1，T_2T_1 交于 Q，直线 l_1，l_3 交于 M_2，l_1 交 AB 于 R，l_3 交 BC 于 S，则可得 T_1H_1，ST_1，T_3H_3，RT_3，从而有 BR，得 S，R 的坐标及 M_2S 与 M_2P 的方程，解得 M_2，计算 M_2I，同理推之.

证法三：设直线 T_2T_3，H_2H_3 交于 P，直线 H_2H_1，T_2T_1 交于 Q，直线 l_1，l_3 交于 M_2，l_1 交 AB 于 R，l_3 交 BC 于 S，$\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 分别为 a，b，c，外接圆和内切圆的半径分别为 R，r，内心为 I，并建立如图 Ⅱ－4－3－38 所示的直角坐标系.

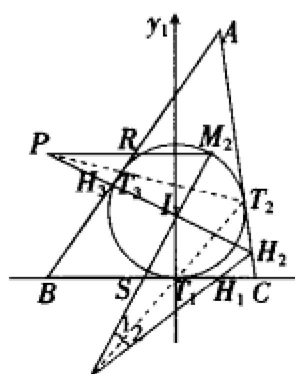


图 Ⅱ－4－3－38

$$\angle M_2SC = \angle 1 + \angle ST_1Q = \angle 2 + \angle T_2T_1C.$$
$$= (\angle T_2T_1C - \angle 3) + \angle T_2T_1C$$
$$= 2\angle T_2T_1C - \angle A$$
$$= (180^\circ - \angle C) - \angle A$$
$$= \angle B$$

$\therefore$　$M_2S \parallel AB$，同理，$M_2R \parallel BC$

$$T_1C = \frac{r\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$
$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$
$$H_1C = b\cos C = 2R\sin B\cos C$$
$$\therefore T_1H_1 = T_1C - H_1C_1$$
$$= 4R\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\cdot\cos C\right)$$
$$= 4R\sin\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A+C}{2}\cos C\right)$$
$$= 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{C-B}{2}$$
$$= \frac{r\sin\frac{C-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

由三角形角平分线性质，有

$$\frac{ST_1}{T_1H_1} = \frac{SQ}{QH_1} = \frac{\sin\angle QH_1S}{\sin\angle QSH_1} = \frac{\sin A}{\sin B}$$
$$\therefore ST_1 = \frac{\sin A}{\sin B}\cdot T_1H_1 = \frac{2r\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C-B}{2}}{\sin B}$$

同理　$T_3H_3 = \dfrac{r\sin\frac{B-A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

$$RT_3 = \frac{2r\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{\sin B}$$
$$\therefore BR = BT_3 + RT_3$$
$$= \frac{r\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{2r\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{\sin B}$$

$$= \frac{2r}{\sin B}\left(\cos^2\frac{B}{2} + \sin\frac{B+A}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}\right)$$

$$= \frac{2r}{\sin B}\cos^2\frac{A}{2}$$

则知 $S\left(-\frac{2r\cos\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}}{\sin B},\quad 0\right), R\left(0,\quad 2r\cos^2\frac{A}{2}\right)$

把直线 M_2S 和直线 M_2P 的方程联立：

$$\begin{cases} y = \frac{\sin B}{\cos B}\cdot\left(x + \frac{2r\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C-B}{2}}{\sin B}\right) \\ y = 2r\cos^2\frac{A}{2} \end{cases}$$

解得 $M_2\left(r\sin A, 2r\cos^2\frac{A}{2}\right)$，则有

$$M_2T^2 = (r\sin A)^2 + \left(2r\cos^2\frac{A}{2} - r\right)^2 = r^2$$

此表明 M_2 在 QI 上.

同理可知其他，则知原命题成立.

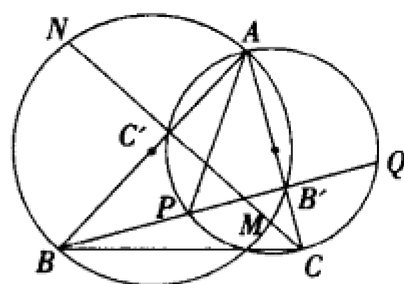
§3.3　针对性训练

A组

1.(1993.第22届美国数学奥林匹克)设凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 互相垂直,垂足为 E,证明:点 E 关于 AB、BC、CD、DA 的对称点共圆.

2. 若过一点的三个圆的三个不同的交点共线,则这三个圆的圆心和它们的公共点共圆.

3.(第19届美国数学竞赛)如图Ⅱ-4-3-39,给出平面上锐角 $\triangle ABC$,以 AB 为直径的圆与 AB 边上的高 CC' 及其延长线交于 M、N,以 AC 为直径的圆与 AC 边上的高 BB' 及其延长线交于 P、Q.求证 M、P、N、Q 共圆.



图Ⅱ-4-3-39

4.(1993.第19届全俄数学奥林匹克十年级试题2)两个等圆彼此相交,从它们的对称中心引出两条射线交圆周于不在同一条直线上的四个点.试证:这四点必在同一个圆上.

5.(1981.IMO试题)三个等圆相交于 K 点,并且都在已知三角形内,每一个圆都与三角形的两边相切,求证:三角形的内心 I,外心 O 与 K 点共线.

6. 已知 CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高,O、O_1、O_2、O_3 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle CBD$、$\triangle O_1O_2D$ 的内心,连接 O_3O_1、O_3O_2 并延长分别交 AC、BC 于点 E、F.求证:E、O、F 三点共线.

7.(*Newton* 定理)设四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot O$,对角线 AC 和 BD 的中点分别为 M、N,则 M、N、O 共线.

8.（simson 定理）在圆上任取三点 A、B、C. 求证：由圆上任一点 M 向直线 AB、BC 及 CA 所作垂线的垂足在一直线上.

9. 梯形 $ABCD$ 的两底 $DC:AB=1:3$，延长两腰 AD、BC 得交点 P，作 n 条线段 $X_iY_i(i=1,2,\cdots,n)$，使得 P 是 X_iY_i 的中点，取 AX_i 的中点 M_i，BY_i 的中点 N_i. 试证：n 条直线 M_iN_i 共点.

10.（1999. 美国）已知等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，又 $\triangle BCD$ 的内切圆切 CD 于 E，F 是 $\angle DAC$ 的角平分线上一点，且 $EF \perp CD$，$\triangle ACF$ 的外接圆交 CD 于 G. 证明：$\triangle AFG$ 是等腰三角形.

11.（1989. 新加坡数学奥林匹克）如图 Ⅱ－4－3－40，$\triangle ABC$，X、Y、Z 分别是边 BC、CA 和 AB 延长线上的点，又 XA、YB 和 ZC 是 $\triangle ABC$ 外接圆的切线. 证明：X、Y、Z 共线.

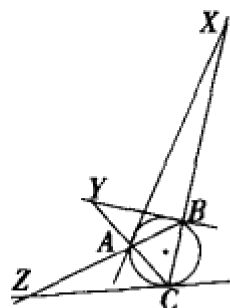


图 Ⅱ－4－3－40

12. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的内角平分线为 AT，$|BD|=|CE|$，D、E 分别在 AB、AC 上，B、C 在 $\angle A$ 外角平分线上的射影分别为 P、Q，DE、BC 的中点分别是 M、N，求证：(1) $MN \parallel AT$；(2) BQ、CP、AT 交于一点.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=70^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$，P、Q 为形内两点，$\angle QBC=\angle QCB=10^\circ$，$\angle PBQ=\angle PCB=20^\circ$，求证：$A$、$P$、$Q$ 三点共线.

14.（1997. IMO 预选题）过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 的三个高分别交其对边于点 D、E、F，过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC，AB 于点 Q 和 R，EF 交 BC 于 P，BC 中点是 M. 证明：P、Q、R、M 四点共圆.

15. I 为 $\triangle ABC$ 的内心，M、N 分别为内切圆与 AB、BC 的切点，D、E 分别为 BC、CA 的中点. 证明：AI，MN，ED 三线共点

16. $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$AD \perp BC$ 于 D，以 AD 为直径作圆 S_A，S_A 分别交边 AB、AC 于 M、N，过 A 作直线 l_A 垂直于 MN，类似地作出 l_B，l_C. 证明：l_A、l_B、l_C 共点.

17.（第24届(1995)美国数学奥林匹克题3）设 $\triangle ABC$ 是非等腰非直角三角形，设 O 是它的外接圆圆心，并且设 A_1、B_1 和 C_1 分别是边 BC、CA 和 AB 的中点，点 A_2 在射线 OA_1 上，使得 $\triangle OAA_1 \backsim \triangle OA_2A$. 点 B_2 和 C_2 分别在射线 OB_1 和 OC_1 上，使得 $\triangle OBB_1 \backsim \triangle OB_2B$ 和 $\triangle OCC_1 \backsim \triangle OC_2C$. 证明：直线 AA_2、BB_2 和 CC_2 共点.

18.（2000. 全俄）在 $\triangle ABC$ 的中线 CD 上取一 E，$\odot O_1$ 经过点 E，且与直线 AB 相切于点 A，交 AC 于点 M，$\odot O_2$ 也经过点 E，与直线 AB 相切于点 B，交 BC 于点 N. 求证：$\triangle CMN$ 的外接圆与 OO_1 和 OO_2 都相切.

B 组

1.（第25届全俄中学数学奥林匹克竞赛题）在 $\triangle ABC$ 的 AC 边上取点 D、E，使得 $AD = AB$，$BE = EC$（E 在 A 与 D 之间），F 是 $\triangle ABC$ 外接圆上（不含 A 点的）$\overset{\frown}{BC}$ 的中点. 证明：B、E、D、F 四点共圆.

2.（第26届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题）在非等腰锐角三角形 ABC 中，高 AA_1 和 CC_1 夹成的锐角的平分线分别与边 AB 和 BC 相交于 P 和 Q，$\angle B$ 的平分线同连结 $\triangle ABC$ 的垂心和边 AC 之中点的线段相交于点 R. 证明：P、B、Q、R 四点共圆.

3.（第20届(1994)全俄数学奥林匹克十年级题3）圆 O 内切于四边形 $ABCD$，与不平行的两边 BC、

AD 分别切于 E、F 点，设直线 AD 与线段 EF 相交于 K 点，直线 DO 与线段 EF 相交于 N 点，直线 BK 与直线 CN 相交于 M 点. 证明：O、K、M 和 N 四点共圆.

4.（第 39 届 IMO 试题 1）在凸四边形 $ABCD$ 中，两对角线 AC 与 BD 互相垂直，两对边 AB 与 CD 不平行，点 P 为线段 AB 及 CD 的垂直平分线的交点，且 P 在四边形 $ABCD$ 的内部，证明：$ABCD$ 为圆内接四边形的充分必要条件是 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 的面积相等.

5.（第 36 届 IMO 预选题，由乌克兰提供）给定锐角 $\triangle ABC$，在 BC 边上取点 A_1，A_2（A_2 位于 A_1 与 C 之间），在 AC 边上取点 B_1，B_2（B_2 位于 B_1 与 A 之间），使得 $\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1 = \angle BB_1B_2 = \angle BB_2B_1 = \angle CC_1C_2 = \angle CC_2C_1$，直线 AA_1，BB_1 与 CC_1 可构成一个三角形，直线 AA_2，BB_2 与 CC_2 可构成另一个三角形. 证明：这两个三角形的六个顶点共圆.

6.（第 38 届 IMO，预选题）设 $ABCD$ 是凸四边形，O 是对角线 AC 和 BD 的交点，如 $OA\sin A + OC\sin C = OB\sin B + OD\sin D$. 证明：$ABCD$ 是圆内接四边形.

7.（第 40 届 IMO 预选题）点 A、B、C 分 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的圆周为三段弧，设 x 是 AB 弧上的一个动点，I_1，I_2 为 $\triangle CAX$ 和 $\triangle CBX$ 的内心. 证明：$\triangle XI_1I_2$ 的外接圆与 $\odot O$ 交于 x 之外的一个定点.

8. 如图 Ⅱ－4－3－41，四边形 $ABCD$ 内接于圆，AB、DC 延长线交于 E，AD、BC 延长线交于 F，P 为圆上任一点，PE、PF 分别交圆于 R、S. 若对角线 AC 与 BD 相交于 T. 求证：R、T、S 三点共线.

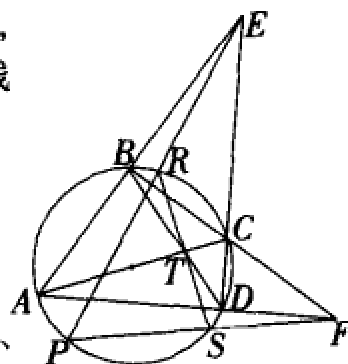


图 Ⅱ－4－3－41

9.（第 26 届（1997）美国数学奥林匹克题 2）分别以 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 为底向外作等腰三角形 BCD、CAE、ABF. 证明：分别过 A、B、C 作 EF、FD、DE 的垂线，这三条垂线共点.

10. 如图 Ⅱ－4－3－42 所示，菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=120°$，$\odot O$ 为过 A、B、C 三点的圆，M 为菱形外的一点，连接 MC 交 AB 于 E，AM 交 CB 延长线于 F. 求证：D、E、F 三点共线的充要条件是点 M 在 $\odot O$ 上.

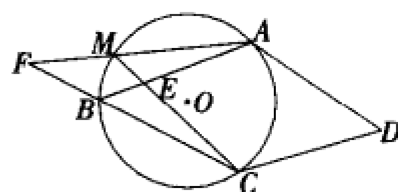


图 Ⅱ－4－3－42

11.（1982. 第 23 届 IMO 试题 2）如图 Ⅱ－4－3－43，$\triangle A_1A_2A_3$ 是一个非等腰三角形，它的边分别为 a_1、a_2、a_3，其中 a_i 是 A_i 的对边（$i=1,2,3$），M_i 是边 a_i 的中点，$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆 $\odot I$ 切边 a_i 于 T_i 点，S_i 是 T_i 关于 $\angle A_i$ 角平分线的对称点. 求证：M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 三线共点.

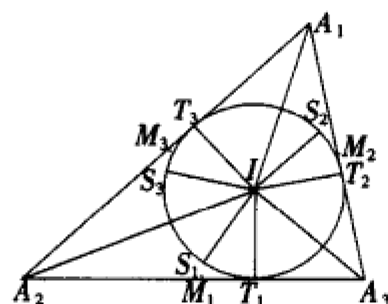


图 Ⅱ－4－3－43

12. 已知锐角 $\triangle ABC$，以 $\sin A$、$\sin B$、$\sin C$ 为三边作一 $\triangle A'B'C'$，以 A'、B'、C' 为圆心，分别以 $\cos A$、$\cos B$、$\cos C$ 为半径作圆，则此三圆必交于一点 H，且 H 恰是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心. 试证之.

13. 如图 Ⅱ－4－3－44，$\odot O$ 半径为 R，$\odot O_1$ 的半径为 $r(R>r)$，两圆外切于 A，OD 切 $\odot O_1$ 于 D，O_1E 切 $\odot O$ 于 E，B、C 分别为 OE、O_1D 的中点.

(1) 证明：B、A、C 三点不共线.

(2) 若 $R=6$，$r=3$，B 为 OE 的中点，连 BA 并延长交 O_1D 于 C，求 O_1C 之长.

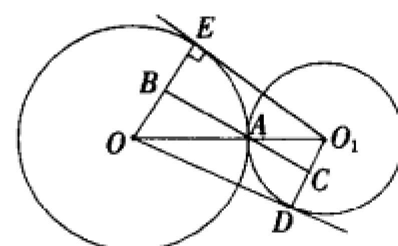


图 Ⅱ－4－3－44

14.（第 26 届俄罗斯数学奥林匹克，十一年级决赛试题 7）四边形 $ABCD$ 外切于圆 W，边 AB 和 CD 所在的直线相交于点 O，圆 W_1 与 BC 边相切于点 K，且与边 AB 和 CD 所在的直线相切；圆 W_2 与边 AD 相切于点 L，且亦与边 AB 和 CD 所在的直线都相切. 现知点 O、K、L 共线. 证明：边 BC 和 AD 的中点以及圆 W 的圆心三点共线.

15. 圆外切四边形 $ABCD$ 中，AB、BC、CD、DA 边上的切点分别为 P、Q、R、S. AB 与 DC 延长线相交于点 E，AD 与 BC 延长线相交于 F.

求证：(1) AC、BD、PR、QS 四线共点，

(2) AC、EF、PQ、RS 四线共点.

(3) BD、EF、PS、QR 四线共点.

16. 在 $\triangle ABC$ 内三点 D、E、F 满足 $\angle BAE=\angle CAF$，$\angle ABD=\angle CBF$，且 AD、BE、CF 三线共点 P，则 $\angle ACD=\angle BCE$. 反之，若 $\angle ACD=\angle BCF$，则 AD、BE、CF 三线共点.

17. 如图 Ⅱ－4－3－45，$\triangle ABC$ 在 $\triangle A'B'C'$ 内部，AB 的延长线分别交 $A'C'$、$B'C'$ 于 P_5、P_1，AC 的延长线分别交 $B'A'$、$B'C'$ 于 P_3、P_4，BC 的延长线分别交 $A'B'$、$A'C'$ 于 P_6、P_2，$AP_1=AP_4=BP_2=BP_5=CP_3=CP_6=BP_1+CP_2+AP_3$. 求证：三线段 AA'、BB'、CC' 所在直线相交于一点.

（注：本题解法丰富多彩，我们给出三个解法，仅供参考）

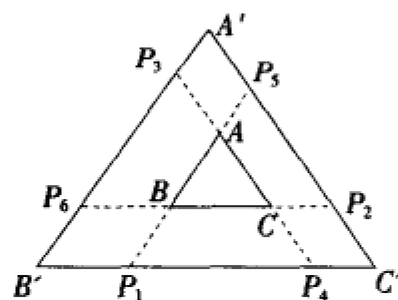


图 Ⅱ－4－3－45

直线型

§4.1 知识、方法、技能

线段与角是直线形的"基本元素".

在直线形中我们重点研究三角形,四边形,多边形的有关问题.

Ⅰ. 三角形.

直线形中最单纯同时也是最为丰富多彩的图形是三角形,有关三角形的问题特别多.

三角形的基础知识包括:三角形全等,三角形相似,三角形中的比例线段,正弦定理,余弦定理,三角形面积定理,海伦公式,勾股定理,直角三角形中的射影定理.

在此基础上,我们再给出两类图形变换、一个作图技巧、四个定理

1. 两类图形变换

(1) 平移变换

图 Ⅱ - 4 - 4 - 1 给出了一种抽象平移,$\triangle ABC$ 被平移到了 $\triangle A'B'C'$.(应用见例 1)

图 Ⅱ - 4 - 4 - 2 给出了一种强行平移,对于相交二线段 AB 和 CD,为得到它们之间的关系,将 CD 平移到 AP.(应用见例 2)

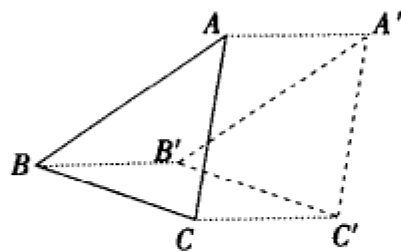


图 Ⅱ - 4 - 4 - 1

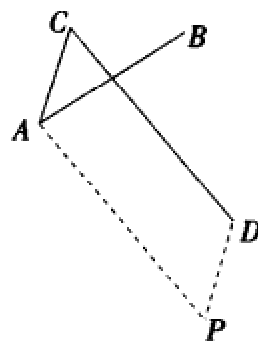


图 Ⅱ - 4 - 4 - 2

(2) 相似三角形之间的一类转换

如图 Ⅱ - 4 - 4 - 3,如果有 $\triangle OAB \backsim \triangle OCD$,那么必有 $\triangle OAC \backsim \triangle OBD$.(应用见例 3,例 4)

2. 作图技巧 —— 据特点,作正三角形(见例 5)

3. 四个定理

定理 1 (中线长定理) 设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c, AD 为边 BC 上的中线,则 $AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + c^2 - \frac{1}{4}a^2$(证明略)

定理 2 若 D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的内分点,则$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \sin\angle BAD}{AC \cdot \sin\angle DAC}$

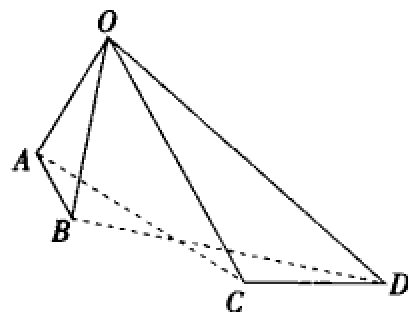


图 Ⅱ - 4 - 4 - 3

【注 1】 当 $\angle BAD = \angle DAC$ 时,定理 2 即为三角形内角平分线定理.

【注 2】 定理 2 容易从三角形面积得证明.

定理 3 （二倍角三角形的一个性质）三角形中，如果有一个角是另一个角的二倍，那么这个角所对边的平方等于另一个角所对边的平方加上另一个角的对边与第三边的积.

定理 4 （“定差幂线”轨迹）

一动点 P 和二定点 A、B 距离的平方差等于定值 K^2，那么它的轨迹是过 AB 上的定点 C 或 C' 的一条垂线，(如图 Ⅱ－4－4－4). 这 C 或 C' 距 AB 的中点 M 是定长 $\frac{K^2}{2AB}$；在 $PA > PB$ 时，这垂线过 MB 上的 C 点，$PB > PA$ 时，过 MA 上的 C' 点.（证明从略）

【注】“定差幂线”轨迹是证两线垂直的理论根基之一.

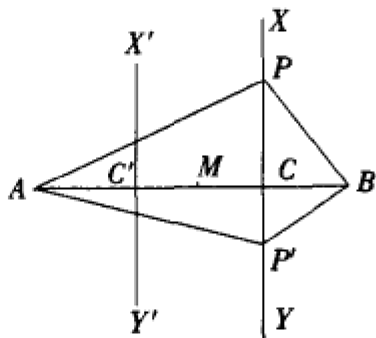


图 Ⅱ－4－4－4

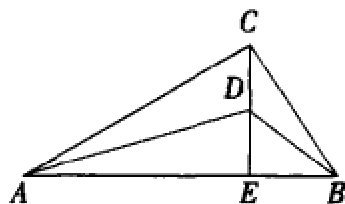


图 Ⅱ－4－4－5

如图 Ⅱ－4－4－5，由“等差幂线”轨迹可知：$CD \perp AB$ 的充要条件是 $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$

Ⅱ. 正方形

1. 正方形是一类完美的四边形，具有中心对称性和轴对称性，它有一系列特殊的线段和角度，因而使平面几何的很多著名问题，由于正方形的参与而显得格外美妙有趣. 在国内国外各类数学竞赛中，蕴含正方形及其美妙结论的试题也举不胜举.

2. 一个图形的应用

如图 Ⅱ－4－4－6 所示，$ABCD$ 为一正方形，$AP \perp BP$，$BQ \perp CQ$，于是 $\triangle APB \cong \triangle BQC$

在赛题精讲中，我们将给出这个图形应用的实例，还要以国际国内赛题为背景，深入研究一些问题的解决方法.

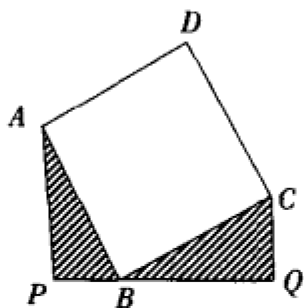


图 Ⅱ－4－4－6

Ⅲ. 多边形

特别是五边形、六边形的边角关系问题，历来为人们所关注，因而常常出现在各类竞赛问题中，纵观这类竞赛问题，大致分为四类：

(1) 证明角相等

(2) 证明边相等(或线段相等)

(3) 面积问题

(4) 杂例(与边、角、面积等有关)

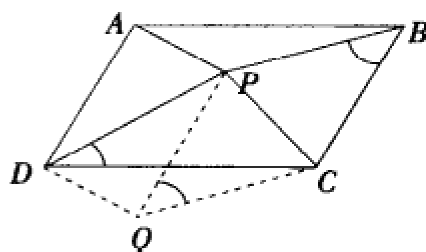
在赛题精讲部分，我们将分别研究有关问题的解法.

Ⅳ. 位似变换与位似旋转变换

见第一讲“知识、方法、技能”中 Ⅷ 和 Ⅸ.

§4.2 赛题精讲

Ⅰ.和三角形相关的赛题



图Ⅱ-4-4-7

例1 如图Ⅱ-4-4-7,P 为平行四边形 $ABCD$ 中一点,使得 $\angle APB + \angle CPD = 180°$,求证:$\angle PDC = \angle PBC$

【分析】 题目的信号很明显,可以说题目只有一个条件,就是 $\angle APB + \angle CPD = 180°$.那么所证明的东西从哪里来呢?首先要排除直接利用全等相似的想法,因为题目极少涉及边的关系,所以贸然使用全等或相似只能是给自己找麻烦.直接用倒角得出题目答案显然不现实,否则这就是初二的课内练习了,所以我们只能寄希望于四点共圆.事实上,两角之和为 180° 就不得不使人有这方面的遐想了.

问题现在变为如何找到这个四点共圆了.其实一想就应该明白,共圆的四点有对角互补的性质,摆明了是要将 $\angle APB$ 和 $\angle CPD$ 移到对角的位置上去.为此,把 $\triangle APB$ 平移到 $\triangle DQC$,于是 C,P,D,Q 就四点共圆了.

证明:在平行四边形 $ABCD$ 外部作 $\angle QCD$ 和 $\angle QDC$,使得 $\angle QCD = \angle PBA$,$\angle QDC = \angle PAB$,CQ 与 DQ 交于点 Q.连接 PQ

于是在 $\triangle APB$ 和 $\triangle DQC$ 中,$AB = DC$,$\angle PAB = \angle QDC$,$\angle PBA = \angle QCD$

从而 $\triangle APB \cong \triangle DQC$

于是 $\angle APB = \angle DQC$,$BP = CQ$

所以由已知 $\angle APB + \angle CPD = 180°$ 得到 $\angle DQC + \angle CPD = 180°$

所以,C,P,D,Q 四点共圆

于是,$\angle PDC = \angle PQC$

剩下只需证明四边形 $CBPQ$ 是平行四边形

这是因为 $\angle QCD = \angle PBA$,$\angle ABC + \angle BCD = 180°$

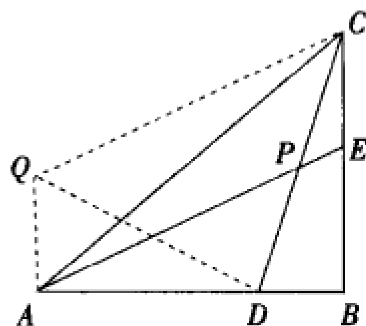
所以,$(\angle ABC - \angle PBA) + (\angle BCD + \angle QCD) = 180°$

即 $\angle PBC + \angle BCQ = 180°$

从而 $BP /\!/ CQ$

又 $BP = CQ$ 已证,所以四边形 $CBPQ$ 是平行四边形,故命题成立.

证毕.



图Ⅱ-4-4-8

例2 如图Ⅱ-4-4-8,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle B = 90°$.D 为边 AB 上一点使得 $AD = BC$;E 为 BC 上一点使得 $EC = BD$.线段 CD 和 AE 交于点 P,求:$\angle APD$

【分析】 如果读者把图画得精准一些不难猜到题目答案就是 45°.当然这对题目并没有很大的帮助,至于有的读者认为这是等腰直角三角形的一个提示,笔者认为有些牵强,但还是有一定道理的.

我们从平移的角度来分析这道题目,题目要求的东西很刁钻,因为引入的点 P 是一个很难把握的点,所以用高一点的观点来看,题目所求的是直线 AE 和 CD 的交角.可这两条直线几乎没有任何的联系,所以无奈之下只好使用上面介绍的强行平移的方法.

解:过点 C 作 AE 的平行线,过点 A 作 BC 的平行线,两线交于点 Q.连接 QD.

于是四边形 $AECQ$ 是平行四边形.

$\therefore AQ = CE = BD$,$\angle QAD = 90°$

再加上条件 $AD = BC$,我们有 $\triangle QAD \cong \triangle DBC$

$\therefore QD = DC, \angle QDA = \angle DCB = 90° - \angle CDB$

$\therefore \angle QDC = 90°$

于是 $\triangle QDC$ 是等腰直角三角形

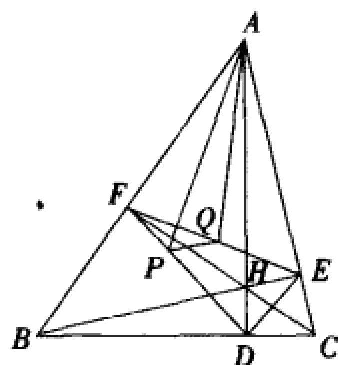
故 $\angle QCD = 45°$

又由于四边形 $AECQ$ 是平行四边形,所以 $CQ \parallel AE$

所以 $\angle APD = \angle QCD = 45°$

【评析】 此题亦可以平移 CD 使 C 与 E 重合,这二种解法是等价的.

例3 如图Ⅱ－4－4－9,$\triangle ABC$ 中 AD, BE, CF 是三条高,点 P 和 Q 分别在 DF 和 EF 上,使得 $\angle PAQ = \angle CAD$.求证:AP 是 $\angle FPQ$ 的平分线.

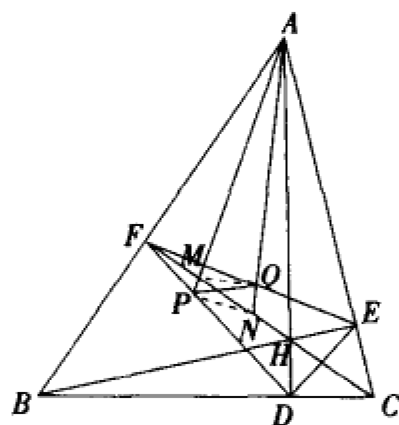


图Ⅱ－4－4－9

【分析】 首先角的关系是重点中的重点,与 $\angle CAD$ 相等的角有很多,不妨标出来可知,$\angle EBC = \angle DFC = \angle CFE = \angle CAD$ 是我们熟悉的结论.但要和 $\angle PAQ$ 相结合中间的两个就比较合适很有一些四点共圆的味道,为此要引入两个新的点,即 AP 和 AD 与 CF 的交点 M 和 N,这时你会发现一个由四点共圆提供的惊人的结论,$MQ \perp AQ, NP \perp AP$.因此,M,Q,N,P 四点共圆是必然的事了.

那么要证 $\angle APF = \angle APQ$,利用四点共圆的结论 $\angle ANM = \angle APQ$,只要证明 $\angle APF = \angle ANM$ 即可.

证明:设直线 AP 和 AQ 分别交 CF 于点 M 和 N.连接 MQ 和 NP、如图Ⅱ－4－4－10



图Ⅱ－4－4－10

由我们熟知的结论:$\angle DFC = \angle CFE = \angle CAD$

有 $\angle PAQ = \angle DFC, \angle PAQ = \angle EFC$

于是,A,F,M,Q 和 A,F,N,P 分别四点共圆.

所以 $\angle MFA = \angle MQA = \angle NPA = 90°$

$\therefore M,Q,N,P$ 四点共圆.

于是 $\angle APQ = \angle ANM$

所以我们只需证明 $\angle APF = \angle ANM$ 即可.

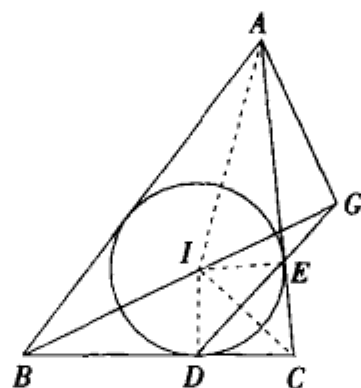
这由 $\angle APF = \angle ADP + \angle PAD = \angle ANC + \angle NAC = \angle ANM$ 易见其正确性.

故原命题成立.

证毕.

【评注】 证明过程中虽然没有使用相似转换,但是这个图形中却蕴涵了许多“知识、方法、技能”中所提到的相似三角形的局部转换.

注意到 A,F,M,Q 四点共圆带来 $\angle MQA = 90°$ 之后,我就急匆匆的把思路引向下一个四点共圆了,而略去了这里暗藏的一个相似:$\triangle AMQ \backsim \triangle AHE$,这正好验证了我看是提出的一个感觉,总是想利用条件 $\angle PAQ = \angle CAD$ 直接构造一个相似。而相似的转换呢就是对应于相似:$\triangle AMH \backsim \triangle AQE$.当然对称的我们可以从 $\triangle APN \backsim \triangle ADC$ 直接转化出 $\triangle APD \backsim \triangle ANC$ 来.



图Ⅱ－4－4－11

例4 (1994.印度)$\triangle ABC$ 的内心为 I,内切圆分别切 BC, CA 于点 D, E.如果 BI 交 DE 于点 G,求证:$AG \perp BG$

【分析】 要证明.$AG \perp BG$,只要证明 $\angle BAG + \angle ABG = 90°$,若连接 ID,则只要证明 $\angle BAG = \angle BID$.因而只要证明 $\triangle ABG \backsim \triangle IBD$,继而只要证明 $\triangle ABI \backsim \triangle GBD$,以下思路不难探寻.

证明:连结 IA,ID,IC,IE,

因为 $ID \perp BC, IE \perp CA$

所以 I,D,C,E 四点共圆.

故 $\angle IDE = \angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$

$\angle BDG = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$

因为 $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$

所以 $\angle AIB = \angle BDG, \angle ABI = \angle GBD$

从而 $\triangle ABI \backsim \triangle GBD$

故 $\frac{AB}{BI} = \frac{BG}{BD}$

于是 $\triangle ABG \backsim \triangle IBD, \angle BAG = \angle BID$

因此 $\angle BAG + \angle ABG = \angle BID + \angle IBD = 90°$

故 $AG \perp BC$

下面是根据图形特点,作辅助图形"正三角形"的例子

例5 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC = 60°, \angle ACB = 20°$,$CP$ 平分 $\angle ACB$,P 在形内,$\angle PAC = 30°$,求:$\angle PBC$

解:延长 CA 到 D,使 $CD = CB$

延长 BD 到 F,使 $BF = BC$

作正 $\triangle ABE$(见图 Ⅱ-4-4-12)E 在 BC 上,连结 DE,FC,AF,FE

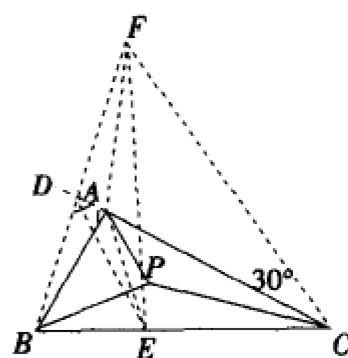


图 Ⅱ-4-4-12

$\triangle CDB$ 中 $\angle CDB = \angle CBD = 80°$

$\triangle BAD$ 中 $\angle BAD = \angle BDA = 80°$

$\therefore BA = BD = BE$

$\angle ABD = 20°$

$\because BE = BD, BC = BF \quad \therefore DE \parallel CF$

CP 是 BD 中垂线

$\because \triangle FBE \cong \triangle CBD(SAS)$

FA 是 BE 中垂线

$\therefore \angle FBE = 80°$

$\therefore \angle BFC = \angle BCF = \frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$

$\because \angle ACF = 50° - 20° = 30° = \angle PAC$

$\therefore AP \parallel CF$

$\therefore \angle AFC = \angle PCF = 40°$

$\therefore APCF$ 为等腰梯形

$\therefore \triangle PBC \cong \triangle ABF$

$\therefore \angle PBC = \angle ABF = 20°$

例6 (2000.第31届西班牙数学奥林匹克第3题)$\triangle ABC$ 三边长的平方与数1,2,3成比例.

(1) 证明:$\triangle ABC$ 的中线所成的角等于 $\triangle ABC$ 的角,

(2) 证明:边长为 $\triangle ABC$ 的中线的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.

证明:先证(2)

$\because a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$

即 $a^2 = t, b^2 = 2t, c^2 = 3t$

令 m_a, m_b, m_c 分别表示经过 A,B,C 的中线,则由定理1知

$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 9t$

$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 6t$

$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 3t$

于是　$m_c^2 : m_b^2 : m_a^2 = 1 : 2 : 3 = a^2 : b^2 : c^2$

因此　$m_c : m_b : m_a = a : b : c$

$\therefore$(2) 得证.

再证(1) 设 A', B', C' 为 BC, AC, AB 的中点, G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 延长 GC 到 H 使得 $GC' = C'H$, 则 $AG = \frac{2}{3}m_a, AH = BG = \frac{2}{3}m_b, GH = \frac{2}{3}m_c$, 因此由(2) 的证明有 $\triangle ABC \backsim \triangle AGH$

$\therefore \angle GAH = \angle BAC \equiv \alpha, \angle HGA = \angle CBA \equiv \beta, \angle AHG = \angle ACB \equiv \gamma$. 如图 Ⅱ - 4 - 4 - 13 所示,(1) 得证.

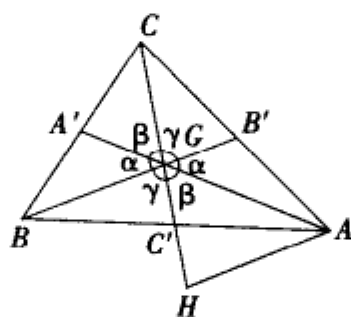


图 Ⅱ - 4 - 4 - 13

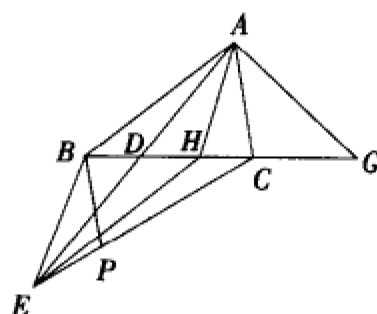


图 Ⅱ - 4 - 4 - 14

例 7 (1999.第 40 届 IMO 备选题) 已知 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ACB = 2\angle ABC$, 设 D 是 BC 边上一点, 且 $CD = 2BD$, 延长线段 AD 至 E, 使 $AD = DE$. 证明: $\angle ECB + 180° = 2\angle EBC$

证明: 如图 Ⅱ - 4 - 4 - 14, 设 CD 的中点为 H, 则 $ABEH$ 是平行四边形. 延长 BC 至 G, 使 $CG = CA$, 设 $BD = DH = HC = \frac{a}{3}, CA = b, AB = c, BE = AH = x, AD = DE = y, CE = z$

$\because 2\angle ABC = \angle ACB = \angle CGA + \angle CAG$

$= 2\angle CGA = 2\angle CAG$

$\therefore \triangle ABG \backsim \triangle CAG$

于是有 $\frac{AB}{BG} = \frac{CA}{AG}$ 或 $c^2 = b(a + b)$　①

在 $\triangle ACD, \triangle ABH, \triangle CDE$ 中分别应用中线公式, 得

$$b^2 + y^2 = 2x^2 + \frac{2a^2}{9} \quad ②$$

$$x^2 + c^2 = 2y^2 + \frac{2a^2}{9} \quad ③$$

$$y^2 + z^2 = 2c^2 + \frac{2a^2}{9} \quad ④$$

从式 ②, ③ 中消去 y, 有

$$x^2 + c^2 + 2b^2 = 4x^2 + \frac{2a^2}{3}$$

将式 ① 代人得

$$x^2 = \left(b + \frac{2a}{3}\right)\left(b - \frac{a}{3}\right) \quad ⑤$$

从式 ③, ④ 中消去 y, 有

$$x^2 + c^2 + 2z^2 = 4c^2 + \frac{2a^2}{3}$$

将式 ①、⑤ 代人, 可得 $z = b + \frac{2a}{3}$. 从而, 式 ⑤ 化为

$$x^2 = z(z-a)$$

或 $BE^2 = CE(CE - BC) = CE \cdot EP$

这里 P 是 CE 上一点,且满足 $CP = BC$

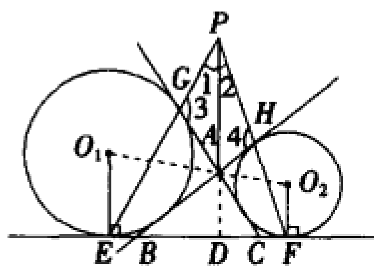
故 $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{EP}{BE}$

$\because \angle BEP = \angle CEB$

$\therefore \triangle BEP \backsim \triangle CEB$

从而 $\angle ECB = \angle EBP = \angle EBC - \dfrac{1}{2}(180^\circ - \angle ECB)$ 化简后即得

$\angle ECB + 180^\circ = 2\angle EBC$



图Ⅱ-4-4-15

例 8 (1996.全国高中数学联赛二试第一题)如图Ⅱ-4-4-15,圆 O_1 和圆 O_2 与 $\triangle ABC$ 的三边所在的直线都相切,E、F、G、H 为切点,并且 EG,FH 的延长线交于点 P.求证:直线 PA 与 BC 垂直.

分析与证明:延长 PA 交 BC 于 D,连接 O_1O_2,则 O_1O_2 过 A 点,注意到 $O_1E \perp BC$,$O_2F \perp BC$,要证 $PA \perp BC$,只要证 $PA \parallel O_1E \parallel O_2F$

即 $\dfrac{ED}{DF} = \dfrac{O_1A}{AO_2}$

由定理 2 知,

$\dfrac{ED}{DF} = \dfrac{PE\sin\angle 1}{PF\sin\angle 2}$

在 $\triangle PEF$ 中,由正弦定理

$\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{\sin\angle PFE}{\sin\angle PEF}$,$\therefore \dfrac{ED}{DF} = \dfrac{\sin\angle PFE \cdot \sin\angle 1}{\sin\angle PEF \cdot \sin\angle 2}$

又显然 $\triangle O_1GA \backsim \triangle O_2HA$

$$\therefore \frac{O_1A}{AO_2} = \frac{AG}{AH} = \frac{\dfrac{PA}{\sin\angle 3} \cdot \sin\angle 1}{\dfrac{PA}{\sin\angle 1} \cdot \sin\angle 2} = \frac{\sin\angle 4 \cdot \sin\angle 1}{\sin\angle 3 \cdot \sin\angle 2}$$

再注意到

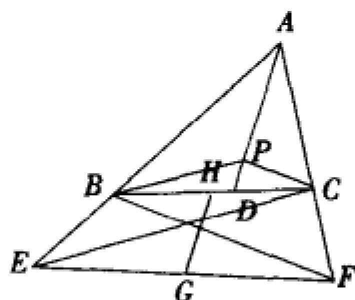
$\angle 3 + \angle PEF = \angle 3 + \angle CGE = 180^\circ$

$\angle PFE + \angle 4 = \angle BHF + \angle 4 = 180^\circ$

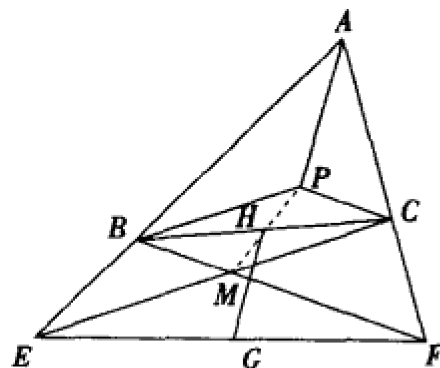
$\therefore \dfrac{O_1A}{AO_2} = \dfrac{\sin\angle PFE \cdot \sin\angle 1}{\sin\angle PEF \cdot \sin\angle 2}$

$\therefore \dfrac{ED}{DF} = \dfrac{O_1A}{AO_2}$ $\therefore$ 命题得证.

例 9 (1996.国家集训队测验题)如图Ⅱ-4-4-16,设 P 为 $\triangle ABC$ 中角 A 的平分线 AD 上任意一点,过 C 作 $CE \parallel PB$ 交 AB 的延长线于点 E,过 B 作 $BF \parallel PC$ 交 AC 的延长线于点 F,过 EF 的中点 G 作 $GH \parallel DA$ 交 BC 于点 H.求证:H 为 BC 中点.



图Ⅱ-4-4-16



图Ⅱ-4-4-17

【分析】 其一,感觉上 G 和 H 这两个中点地位好象是对称的,所以无论如何知道两个中点去证明平行,并且 D 点是根本没有实际价值的交点,所以以下讨论中 D 点将不出现.

其二,解决题目的时候,在主线思路的同时,应该看周围的一些结论,能否对主线思路提供一些线索,读者应看到两组平行线,对其产生的平行四边形有点想法,设 BF 和 CE 交于点 M,连接 PM 就过点 H,而且 H 是 PM 中点.主观感觉这个东西是一个很漂亮的结论.

其三,进入本题最难的一个坎,注意到 G 和 H 的地位并不完全对称!!直觉中 BC 和 EF 地位差不多是对等的,但在前面使用的辅助线可知,G 和 H 的使用有着很大的不同,H 的特性被充分利用,而 G 则显得孤立.于是,在这个不对称的引导下,就作了如图 Ⅱ-4-4-18 的辅助线:过点 E 作 BF 的平行线,过点 F 作 CE 的平行线,两线交于 N.于是 G 和 H 的对称性被补全了.至此豁然开朗,因为得到了一个显然而强大的结论:$HG \parallel PN$

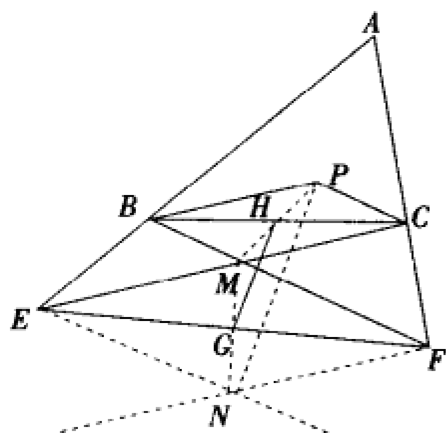


图 Ⅱ-4-4-18

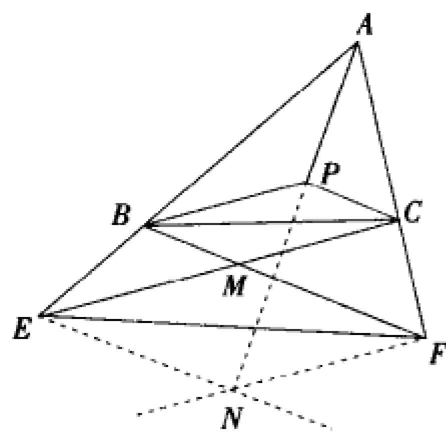


图 Ⅱ-4-4-19

其四,剩下的问题就是要证明 A、P、N 共线了,这个结论要简单得多,因为在这个结论中,点 H 和点 G 都可以从图中删掉了!!又得到重新画的图 Ⅱ-4-4-19 所证的结论显然应该变为 AP 和 AN 重合,即 AN 也是角平分线,这需要用到正弦定理.

证明:取 BC 中点 H',过 E 作 BF 的平行线,过 F 作 EC 的平行线,两线交于点 N.

欲证 H 为 BC 中点,只要证明 H 与 H' 重合,这等价于证明 $H'G \parallel AP$ 如图 Ⅱ-4-4-20.

由 $BP \parallel CE$, $CP \parallel BF$ 知道四边形 $BPCM$ 是平行四边形;由 $FN \parallel CE$, $EN \parallel BF$ 知道四边形 $EMFN$ 是平行四边形.

而又由于 H' 为 BC 中点,G 为 EF 中点,所以得到 P,H',M 共线,M,G,N 共线,并且 H' 为 PM 中点,G 为 MN 中点.

所以,$H'G \parallel NP$

于是只需要证明 A,P,N 共线即可.

由于 $\dfrac{PB}{\sin\angle PAB}=\dfrac{AP}{\sin\angle ABP}$, $\dfrac{PC}{\sin\angle PAC}=\dfrac{AP}{\sin\angle ACP}$

所以 $\dfrac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}=\dfrac{PB}{PC}\cdot\dfrac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}$

同理 $\dfrac{\sin\angle NAB}{\sin\angle NAC}=\dfrac{NE}{NF}\cdot\dfrac{\sin\angle AEN}{\sin\angle AFN}$(这是由在上式中用 N 代替 P,E 代替 B,F 代替 C 得到的).

所以只要证明 $\dfrac{PB}{PC}\cdot\dfrac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ACP}=\dfrac{NE}{NF}\cdot\dfrac{\sin\angle AEN}{\sin\angle AFN}$ 即可.

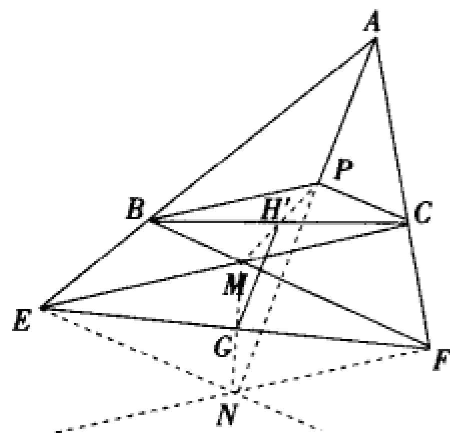


图 Ⅱ-4-4-20

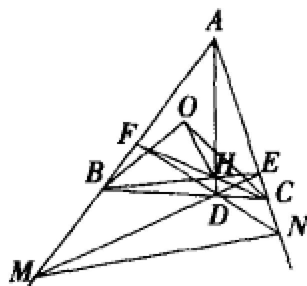
注意到 $\angle ABP=\angle AEC$, $\angle ACP=\angle AFB$, $\angle AEN=\angle ABF$, $\angle AFN=\angle ACE$,并且 $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{MC}{MB}$, $\dfrac{NE}{NF}=\dfrac{MF}{ME}$

所以只要证明$\frac{MC}{MB}\cdot\frac{\sin\angle AEC}{\sin\angle AFB}=\frac{MF}{ME}\cdot\frac{\sin\angle ABF}{\sin\angle ACE}$

这个由正弦定理：$\frac{MB}{ME}=\frac{\sin\angle MEB}{\sin\angle MBE}$和$\frac{MF}{MC}=\frac{\sin\angle MCF}{\sin\angle MFC}$相乘可以得到.(请读者验证)

证毕.

例 10 (2001.全国高中数学联合竞赛加试题一)如图Ⅱ-4-4-21，$\triangle ABC$中，O为外心，三条高AD、BE、CF交于点H，直线ED和AB交于点M，FD和AC交于点N.求证：(1)$OB\perp DF$，$OC\perp DE$.(2)$OH\perp MN$.



图Ⅱ-4-4-21

证法一：(1)$\because A$、C、D、F四点共圆，

$\therefore\ \angle BDF=\angle BAC$

又$\because\angle OBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BOC)=90^\circ-\angle BAC$

$\therefore OB\perp DF$

同理　$OC\perp DE$

【分析】 (2)要证$OH\perp MN$，由定理4("定差幂线"轨迹)的评述可知，只须证明

$$MO^2-MH^2=NO^2-NH^2 \quad (*)$$

而要证(*)式只须用题设条件中的垂直和证(1)中的垂直，根据定理4的评述，得到与(*)类似的等式，将这些等式组合即可得(*).

(2)$\because CF\perp MA$

$\therefore MC^2-MH^2=AC^2-AH^2$ ①

$\because BE\perp NA$

$\therefore NB^2-NH^2=AB^2-AH^2$ ②

$\because DA\perp BC$

$\therefore BD^2-CD^2=BA^2-AC^2$ ③

$\because OB\perp DF$

$\therefore BN^2-BD^2=ON^2-OD^2$ ④

$\because OC\perp DE$

$\therefore CM^2-CD^2=OM^2-OD^2$ ⑤

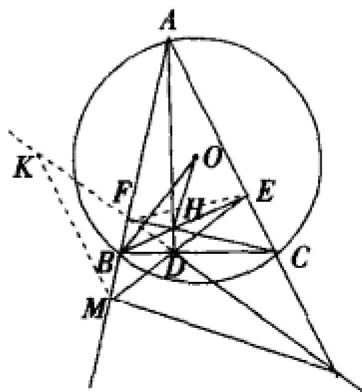
①-②+③+④-⑤，得

$NH^2-MH^2=ON^2-OM^2$

$MO^2-MH^2=NO^2-NH^2$

$\because OH\perp MN$

证法二：如图Ⅱ-4-4-22，过M作$MK\,/\!/\,AC$，交DF延长线于点K，下证$\triangle OBH\backsim\triangle NKM$



图Ⅱ-4-4-22

$\because\ \frac{MK}{\sin\angle MFK}=\frac{KF}{\sin\angle KMA}$

又　$\angle KMA=\angle BAC$

$\therefore\frac{MK}{\sin C}=\frac{KF}{\sin A}$

连接EF.

$\because\ \frac{MF}{\sin(180^\circ-2B)}=\frac{FE}{\sin(B-A)}$

又　$\frac{MA}{\sin B}=\frac{FE}{\sin(B-A)}$

$\therefore\frac{MF}{MA}=\frac{FE}{AE}\cdot\frac{\sin 2B}{\sin B}$

又　$\frac{AE}{\sin C}=\frac{EF}{\sin A}$

$\therefore \dfrac{MF}{MA} = 2\cos B \cdot \dfrac{\sin A}{\sin C}$

$\because MK \parallel AC, \therefore \dfrac{KF}{KN} = \dfrac{MF}{MA}$

$\therefore KF = KN \cdot 2\cos B \cdot \dfrac{\sin A}{\sin C}$

$\therefore \dfrac{MK}{\sin C} = \dfrac{KF}{\sin A} = KN \cdot \dfrac{2\cos B}{\sin C}$

于是 $\dfrac{MK}{KN} = 2\cos B$

又 $\dfrac{BH}{OB} = \dfrac{2R \cdot \cos B}{R} = 2\cos B$

$\therefore \dfrac{BH}{OB} = \dfrac{MK}{KN}$

又 $\angle MKN = \angle FNA = \angle C - \angle A$

$\angle OBH = (90^\circ - A) - (90^\circ - C) = \angle C - \angle A$

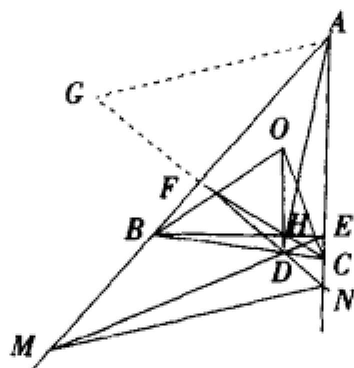
$\therefore \angle MKN = \angle OBH$

因此 $\triangle OBH \backsim \triangle NKM$

又 $OB \perp KN, BH \perp KM$

$\therefore OH \perp MN$

证法三 如图Ⅱ－4－4－23，过 A 作 $AG \parallel MN$，交 NF 延长线于点 G.



图Ⅱ－4－4－23

$\because \angle FDB = \angle BAE = \angle EDC = \angle BDM$

$\therefore BD$ 为 $\angle MDF$ 的内角平分线

$\therefore \dfrac{FA}{MA} = \dfrac{FD}{DM} = \dfrac{BF}{MB} \Rightarrow \dfrac{AE}{MA} = \dfrac{AF - BF}{AB}$

$\therefore MA = \dfrac{AB \cdot AF}{AF - BF}$

$MF = MA - AF = \dfrac{2AF \cdot BF}{AF - BF}$

$\therefore \dfrac{MF}{MA} = \dfrac{2BF}{AB} = \dfrac{FN}{NG}(\because AG \parallel MN)$

$\because \angle DFC = \angle DAE$

$\therefore \triangle FNC \backsim \triangle AND$

有 $\dfrac{AD}{FC} = \dfrac{AN}{FN}$

于是 $\dfrac{AN}{NG} = \dfrac{2BF \cdot AD}{AB \cdot FC} = 2\sin B \cdot \cot B = 2\cos B$

而 $\dfrac{BH}{\sin\angle BCF} = \dfrac{BC}{\sin\angle BHC} = \dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = 2BD$

则 $\dfrac{BH}{BO} = 2\sin\angle BCF = 2\cos B$

从而 $\dfrac{BH}{BO} = \dfrac{AN}{NG}$

又 $\angle OBH = \angle ABC - \angle ABO - \angle CBE = \angle ABC - \left(\dfrac{\pi}{2} - \angle ACB\right) - \left(\dfrac{\pi}{2} - \angle ACB\right)$

$= \angle ACB - \angle BAC$

则 $\angle ANG = \angle ACB - \angle NDC = \angle ACB - \angle BAC = \angle OBH$

故 $\triangle BOH \backsim \triangle NGA$

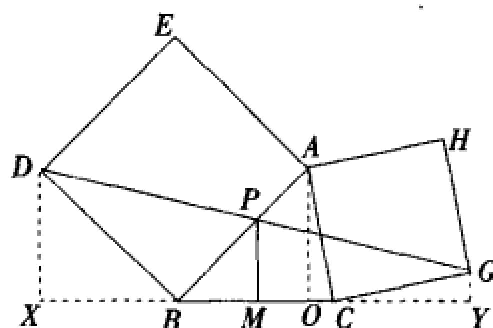
$\because OB \perp FN, BH \perp AN, \therefore OH \perp AG$，则 $OH \perp MN$.

【注】 * 关于解析法，向量法，请看第二章！

Ⅱ.与正方形有关的赛题精讲

首先给出“知识,方法,技能”中“一个图形应用的实例”

例 11 如图Ⅱ-4-4-24以$\triangle ABC$的边AB和AC为边向外作正方形$ABDE$,$ACGH$.P为DG中点,M为BC的中点.求证:$PM \perp BC$



图Ⅱ-4-4-24

【分析】 当然了不论如何这道题目用向量或者复数都可以算一算就搞定.但是我还是要介绍一个纯几何的解法,开拓一下大家的视野,找找感觉吧.

证明:分别过D和G作直线BC的垂线,垂足分别为X和Y.再作$AO \perp BC$于O

由我们的那个基本图形可以知道:$\triangle AOC \cong \triangle CYG$,$\triangle AOB \cong \triangle BXD$

$\therefore BX = AO = CY$

进而知M是XY的中点.

于是,PM就是梯形$DXYG$的中位线.

显然有$PM \perp BC$.

证毕.

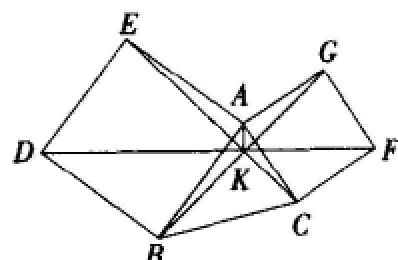
然后我们以国内外赛题为背景研究有关正方形的赛题命题规律.

例 12 如图Ⅱ-4-4-25,正方形$AEDB$,$ACFG$共顶点A,则

(1)BG和CE垂直且相等;

(2)BG、CE、DF三线共点;

(3)设BG、CE、DF交于K,则$AK \perp DF$.



图Ⅱ-4-4-25

证明:如图Ⅱ-4-4-25.

(1)将$\triangle ABG$线A点顺时针方向旋转90°后,与$\triangle AEC$重合,由此即得证结论.

(2)设BG、CE交于K,连AK及KD,KF,由$\angle AGK = \angle ACK$,知A、K、C、G共圆,从而,$\angle AKG = \angle ACG = 45^\circ$,又$BG \perp CE$,则$\angle AKC = 135^\circ$.而$\angle AFC = 45^\circ$,则$K$、$C$、$F$、$A$共圆,故$\angle AKF = \angle ACF = 90^\circ$

同理 $\angle AKD = 90^\circ$

于是 D、K、F三点共线.

故BG、CE、DF三线共点.

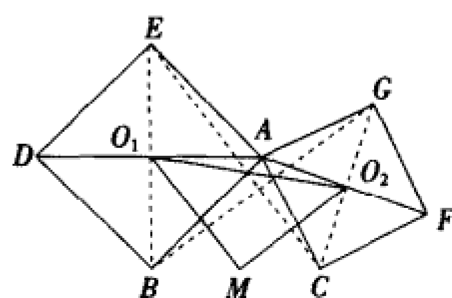
(3)由(2)的证明知$AK \perp DF$

【评注】 例12的结论(2)可直接得第29届IMO加拿大训练题:

“正方形$ABCD$与$AB_1C_1D_1$同向,B与B_1不重合.证明:BB_1、CC_1、DD_1共点.”

例 13 如图Ⅱ-4-4-26,若正方形$AEDB$,$ACFG$共顶点A,取AD、BC、AF的中点O_1、M、O_2,则$\triangle O_1MO_2$为等腰直角三角形,且M为直角顶点.

证明:连BE、CG,则O_1必在BE上,O_2必在CG上,连BG,CE,则$O_1M \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}CE$,$O_2M \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BG$.由例7(1)即证.



图Ⅱ-4-4-26

【评注】 以例12为背景材料,可得第7届全俄数学奥林匹克题:

“正方形$AEDB$,$ACFG$共顶点A,O、M、O_2、N分别为AD、BC、AF、EG的中点.求证:O_1MO_2N是正方形.”

例 14 如图Ⅱ-4-4-27,正方形$ADEF$,$AGCB$共顶点A,EC的中点为M,则$\triangle BMD$,$\triangle FMG$均为等腰直角三角形,且M为直角顶点.

证明:取AE中点O_1,AC中点O_2,则$MO_2 = \frac{1}{2}AE = DO_1$,$MO_1 = \frac{1}{2} \cdot AC = BO_2$,$\angle AO_1M = \angle MO_2A$,于是,$\triangle DO_1M \cong \triangle MO_2B$,故$DM = BM$,且$\angle O_1DM = \angle O_2MB$,$\angle O_1MD = \angle O_2BM$

又 $\angle O_1MO_2 = \angle O_1MD + \angle DMB + \angle BMO_2$

$= \angle DMB + \angle MBO_2 + \angle BMO_2$

$= \angle DMB + (90^\circ - \angle AO_2M)$

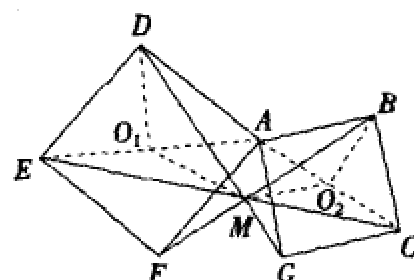
$= \angle DMB + [90^\circ - (180^\circ - \angle O_1AO_2)]$

$= \angle DMB + \angle O_1AO_2 - 90^\circ$

$= \angle O_1AO_2$

即 $\angle DMB = 90^\circ$

$\therefore \triangle DMB$ 为等腰直角三角形.



图Ⅱ-4-4-27

同理可证 $\triangle FMG$ 为等腰直角三角形.

【评注】 以例14为背景材料,可得1987年全国高中联赛题:

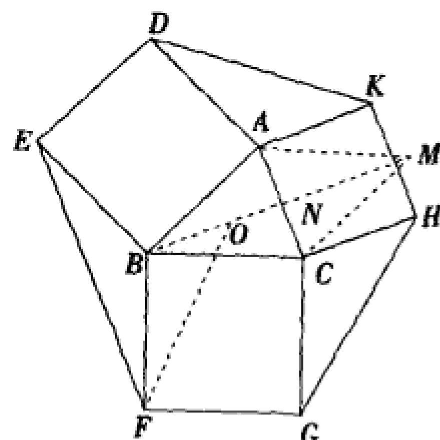
"$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形,现固定 $\triangle ABC$,而将 $\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转.试证:不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置,线段 EC 上必存在点 M,使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形."

例15 如图Ⅱ-4-4-28,正方形 $ABED$、$BFGC$、$ACHK$ 共顶点 A、B、C,且均在 $\triangle ABC$ 处侧.

(1) 记 $AB = a, AC = b$,则 $S_{\triangle AKD} + S_{\triangle BEF} + S_{\triangle CGH}$ 的最大值为 $\frac{3}{2}ab$

(2) DK、EF、GH 分别是 $\triangle ABC$ 的 BC、AC、AB 边上的中线长的两倍;

(3) 顶点 D、E、F、G、H、K 共圆的充要条件是 $\triangle ABC$ 或为等腰直角三角形,或为等边三角形.



图Ⅱ-4-4-28

证明:(1) 略;

(2) 过 C 作 $CM \underline{\mathbin{/\!/}} BA$,连 BM 交 AC 于 N,则 BN 为 AC 边上的中线,由 $\triangle EBF \cong \triangle MCB$,有 $EF = 2BN$.同理,可证其余结论.

(3) D、E、F、G、H、K 共圆 $\Leftrightarrow DE$、FG、HK 的中垂线共点 O' 与 $\triangle ABC$ 的外心 O 重合.

设 r 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径.

$OF^2 = (r\sin A)^2 + (r\cos A + 2r\sin A)^2$

$= r^2[3 - 2\sqrt{2}\cos(45^\circ + 2A)]$

O' 与 O 重合 $\Leftrightarrow OF^2 = OH^2 = OD^2$

即 $\cos(45^\circ + 2\angle A) = \cos(45^\circ + 2\angle B) = \cos(45^\circ + 2C) \Leftrightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ 或 $(45^\circ + 2\angle A) + (45^\circ + 2\angle B) = 360^\circ$

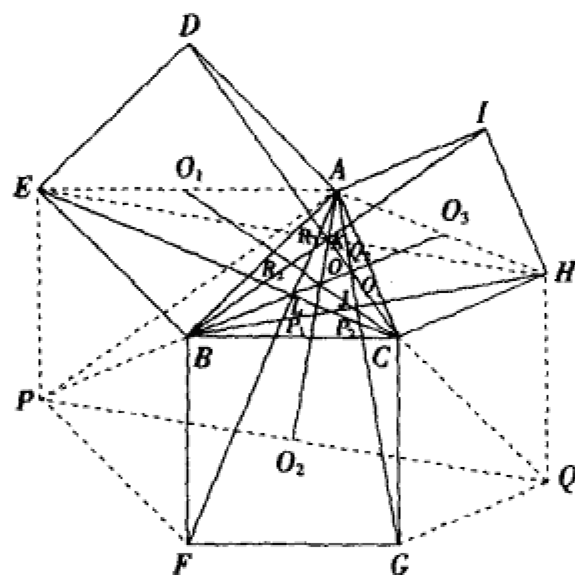
即 $\angle C = 45^\circ = \angle A$,或 $\angle C = 45^\circ = \angle B$

【评注】 例15结论(2)即为1959年美国数学竞赛题.

例16 如图Ⅱ-4-4-29,正方形 $ADEB$, $BFGC$, $CHIA$ 共顶点 A、B、C,且均在 $\triangle ABC$ 外侧,其中心分别为 O_1、O_2、O_3

(1) 设 $AG \cap BH = J$, $CD \cap BI = K$, $AF \cap CE = L$,则 A、K、O_2;B、L、O_3;C、J、O_1 分别共线,且这三直线共点

(2) 设 $AF \cap BH = P_1$, $BH \cap CD = Q_1$, $CD \cap AF = R_1$, $AG \cap CE = P_2$, $BI \cap AG = Q_2$, $CE \cap BI = R_2$,则 $\triangle P_1Q_1R_1 \cong \triangle P_2Q_2R_2$



图Ⅱ-4-4-29

证明:(1) 设 P、Q 分别为 $\square FBEP$、$\square HCGQ$ 的顶点,连 PB、AP、CQ、AQ,对 $\triangle APB$ 和 $\triangle QAC$,易知 $PB \underline{\mathbin{/\!/}} AI$,

故 $AP \underline{\underline{/\!/}} IB$. 同理，$AQ \underline{\underline{/\!/}} DC$，再由例 8(1)，知 $AP \underline{\underline{/\!/}} AQ$.

连 PQ，则 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形.

由于 $\triangle BPF \cong \triangle CAB \cong \triangle GQC$，推知 $BPGQ$ 为平行四边形，从而推知 Q_2 在 PQ 上且为其中点，故知 $AQ_2 \perp PQ$

连 EH、AE、AH，则 O_1、O_2 分别在 AE、AH 上，且 $O_1O_3 /\!/ EH$，又 $EP \underline{\underline{/\!/}} HQ$，知 $EH /\!/ PQ$. 故 $AQ_2 \perp O_1O_3$，$AQ_2 \perp EH$

又由例 12(3)，$AK \perp EH$. 故 A、K、O_2 三点共线，且此线与 O_1O_2 垂直.

同理，B、L、O_3 共线，且此线与 O_1O_2 垂直；C、J、O_1 共线，且此线与 O_2O_3 垂直，故这三线共点于 $\triangle O_1O_2O_3$ 的垂心 O.

(2) 由(1) 知 AK，BL，CJ 共点于 O，由 $BI \perp DC$，知 A、K、C、I 四点共圆，从而 $\angle AKI = 45°$，$\angle R_2KO = 45°$

同理，$\angle R_1LO = 45°$，则 $\angle R_2LO = 135°$. 从而，R_2、L、O、K 共圆，又易证 R_2、L、K、R_1 共圆. 故 K、O、L、R_2、R_1 五点共圆，由 $\angle R_2R_1O = \angle R_2KO = 45° = \angle R_1LO = \angle R_1R_2O$，知 $\triangle R_1OR_2$ 为等腰直角三角形.

同理，$\triangle Q_1OQ$ 也为等腰直角三角形，从而，$\triangle R_1OQ \cong \triangle R_2OQ_2$，有 $R_1Q_1 = R_2Q_2$，同理，$P_1Q_1 = P_2Q_2$，$R_1P_1 = R_2P_2$，故 $\triangle P_1Q_1R_1 \cong \triangle P_2QR_2$.

【评注】 例 16(2) 为我国第 4 届国家集训队选拔试题.

Ⅲ. 与多边形有关的赛题

例 17 (1998.CMO 试题) 设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点，且满足条件：$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$ 试确定 D 点的几何位置，并证明你的结论.

【分析】 本题涉及到平移变换，平行四边形，矩形，圆内接四边形，圆内接五边形. 先用托勒密定理证明一个加强命题，然后从等号成立的条件原命题得证.

证明：我们改证一个加强命题：

设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点. 求证：

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA \quad (*)$$

并且等号当且仅当 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心时才成立.

如图 Ⅱ－4－4－30，作 $ED \underline{\underline{/\!/}} BC$，$FA \underline{\underline{/\!/}} ED$，则 $BCDE$ 和 $ADEF$ 均是平行四边形.

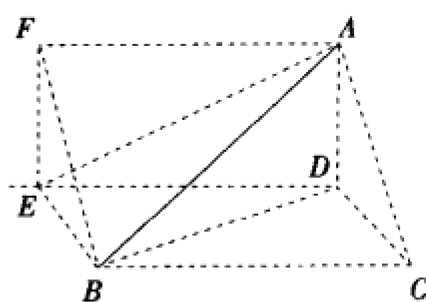


图 Ⅱ－4－4－30

连结 BF 和 AE，显然 $BCAF$ 也是平行四边形. 于是 $AF = ED = BC$，$EF = AD$，$EB = CD$，$BF = AC$.

在四边形 $ABEF$ 和 $AEBD$ 中，由 Ptolemy 不等式，

得 $AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot BF$，$BD \cdot AE + AD \cdot BE \geqslant AB \cdot ED$

即 $AB \cdot AD + BC \cdot CD \geqslant AE \cdot AC$ ①

$BD \cdot AE + AD \cdot CD \geqslant AB \cdot BC$ ②

于是，由 ①，② 两式，可得

$$\begin{aligned}
&DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \\
&= DB(AB \cdot AD + BC \cdot CD) + DC \cdot DA \cdot CA \\
&\geqslant DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot AC \\
&= AC \cdot (DB \cdot AE + DC \cdot AD) \\
&\geqslant AC \cdot BC \cdot AB
\end{aligned}$$

故(*)式得证，且等号成立的充分必要条件是 ① 和 ② 的等号同时成立，即等号当且仅当 $ABEF$ 和 $AEBD$ 都是圆内接四边形时成立，亦即 $AFEBD$ 是圆内接五边形时等号成立.

由于 $AFED$ 为平行四边形，所以条件等价于 $AFED$ 为矩形(即 $AD \perp BC$ 且 $\angle ABE = \angle ADE =$

90°,亦等价于 $AD \perp BC$ 且 $CD \perp AB$),所以(*)式等号成立的充分必要条件是 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

例 18 (1992.英国数学奥林匹克)圆内接五边形 $ABCDE$ 中,若 $AC /\!/ DE, BD /\!/ EA, CE /\!/ AB, DA /\!/ BC, EB /\!/ CD$.试证:$ABCDE$ 为正五边形.

证明:如图 Ⅱ-4-4-31,由 $ABCDE$ 内接于圆有:$\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 5, \angle 3 = \angle 7$,又 $AB /\!/ CE$,有 $\angle 6 = \angle 7$ 故 $\angle 3 = \angle 6$

于是 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$

即 $\angle A = \angle B$

同理可证,$\angle B = \angle C, \angle C = \angle D, \cdots, \angle E = \angle A$

从而,$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

由 $EC /\!/ AB, ED /\!/ AC$ 知 $\angle 3 = \angle 9, \angle 9 = \angle 8$

故 $\angle 3 = \angle 9 = \angle 8$

$\therefore$ $BC = CD = AE$

类似地有,$DC = ED = AB$

$\therefore$ $AB = BC = CD = DE = EA$

即 $ABCDE$ 是正五边形.

图 Ⅱ-4-4-31

【评注】 应当注意的是:内角全部相等的圆内接多边形不一定是正多边形,但对奇数多边形来说结论肯定.

例 19 (第 40 届 IMO 预选题)设 M 是凸四边 $ABCD$ 内一点,使得 $MA = MC, \angle AMB = \angle MAD + \angle MCD, \angle CMD = \angle MCB + \angle MAB$.证明:$AB \cdot CM = BC \cdot MD, BM \cdot AD = MA \cdot CD$

【分析】 关键是构造一个凸四边形 $PQRS$,使其满足如下条件,而变成平行四边形.满足的条件是,在凸四边形 $PQRS$ 内作点 T,使 $\triangle PTQ \cong \triangle AMB, \triangle QTR \backsim \triangle AMD, \triangle PTS \backsim \triangle CMD$,有 $\triangle RTS \backsim \triangle BMC$.于是由平行四边形 $PQRS$ 得到 $AB = \dfrac{BC \cdot MD}{MC}, CD = \dfrac{AD \cdot BM}{AM}$

证明:构造凸四边形 $PQRS$ 和其内一点 T,使 $\triangle PTQ \cong \triangle AMB, \triangle QTR \backsim \triangle AMD, \triangle PTS \backsim \triangle CMD$,如图 Ⅱ-4-4-32 和 Ⅱ-4-4-33.

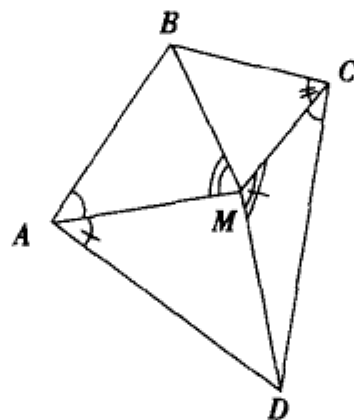


图 Ⅱ-4-4-32

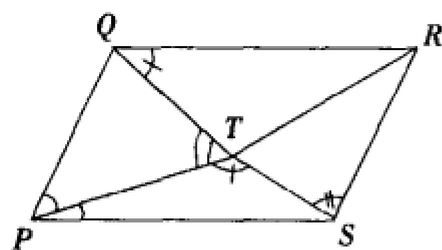


图 Ⅱ-4-4-33

$\because PT = MA = MC$

$\therefore TS = \dfrac{MD \cdot PT}{MC} = MD$

又 $\because \dfrac{TR}{MD} = \dfrac{TQ}{AM}$ 及 $TQ = MB$

$\therefore$ $\dfrac{TR}{TS} = \dfrac{MD \cdot TQ}{AM \cdot MD} = \dfrac{MB}{MC}$

$\because \angle STR = \angle BMC$

$\therefore \triangle RTS \backsim \triangle BMC$

故 $\angle QPS + \angle RSP$

$= \angle QPT + \angle TPS + \angle TSP + \angle TSR$

$= \angle MAB + \angle MCB + \angle TPS + \angle TSP$

$= \angle CMD + \angle TPS + \angle TSP$

$= \angle PTS + \angle TPS + \angle TSP = 180^\circ$

同理 $\angle RQP + \angle SPQ = 180^\circ$

$\therefore$ 四边形 $PQRS$ 是平行四边形.

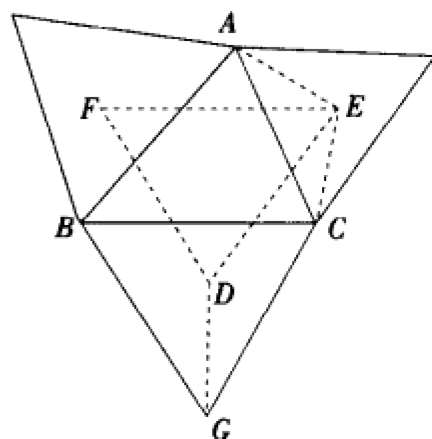
于是 $PQ = RS, QR = PS$,即得

$$AB = PQ = RS = \frac{BC \cdot TS}{MC} = \frac{BC \cdot MD}{MC}$$

$$CD = \frac{CD \cdot TS}{MD} = PS = QR = \frac{AD \cdot QT}{AM} = \frac{AD \cdot BM}{AM}$$

Ⅳ. 利用位似旋转变换证明有关直线形的几何问题

例 20 (拿破仑定理)如图Ⅱ-4-4-34,若在任意三角形的各边向外作正三角形,则它们的中心构成一个正三角形,此三角形为拿破仑三角形.



图Ⅱ-4-4-34

证明: 如图Ⅱ-4-4-34,设以$\triangle ABC$三边向外侧所作正三角形的中心分别为D、E、F,以BC为边所作的正三角形的另一顶点为G,则DE经位似旋转变换$S(C,30^\circ,\sqrt{3})$变为GA,再经位似旋转变换$S(B,30^\circ,\frac{1}{\sqrt{3}})$变为$DF$,则

$$\angle EDF = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

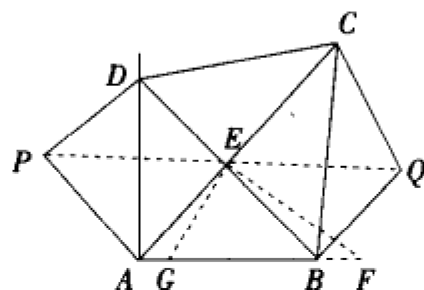
$$EF = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} DE = DE$$

故$\triangle DEF$为正三角形.

例 21 如图Ⅱ-4-4-35,已知$\angle PAD = \angle EAB$,$\angle ABE = \angle CBQ$,$\angle QCB = \angle ECD$,$\angle CDE = \angle ADP$,$\angle AEB = \angle CED$

求证:(1)P,E,Q三点共线;

(2)$PE : EQ = \sin\theta : \sin P$



图Ⅱ-4-4-35

证明: 设$\angle PAD = \alpha$,$\angle ABE = \beta$,$\angle QCB = \gamma$,$\angle CDE = \delta$,$\angle AEB = \theta$. 则PE经位似旋转变换$S\left(E, -\alpha, \frac{\sin P}{\sin\delta}\right)$变为$DF$,且$\angle EFA = \delta$,其中$F$在直线$AB$上,$DF$经$S\left(E, -\theta, \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\right)$变为$CG$,且$\angle FGE = \gamma$,其中$G$在直线$AB$上,$CG$经$S\left(B, -\beta, \frac{\sin\gamma}{\sin\theta}\right)$变为$QE$

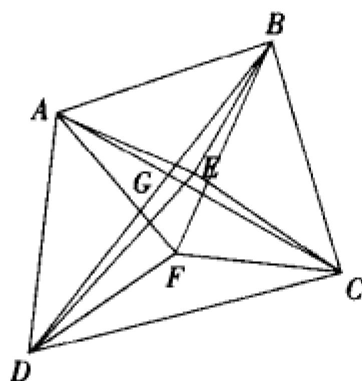
由于$\angle PEQ = \alpha + \theta + \beta = 180^\circ$,且

$$\frac{EQ}{PE} = \frac{\sin P}{\sin\delta} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\theta} = \frac{\sin P}{\sin Q}$$

$\therefore \quad PE : EQ = \sin Q : \sin P$

例 22 (2001. IMO国家集训队选拔考试题)平面上给定凸四边形$ABCD$及其内点E和F,适合$AE = BE$,$CE = DE$,$\angle AEB = \angle CED$,$AF = DF$,$BF = CF$,$\angle AFD = \angle BFC$.

求证:$\angle AFD + \angle AEB = \pi$



图Ⅱ-4-4-36

证明: 如图Ⅱ-4-4-36,设凸四边形对角线AC与BD的交点记为G,并记

$$\angle EAB = \angle ABE = \theta$$

$$\angle FAD = \angle ADF = \varphi$$

因为 $\triangle AEC$ 可通过绕 E 点的旋转与 $\triangle BDE$ 重合，所以 $\angle GAE = \angle GBE$，有 A、B、E、G 四点共圆.

又因为 $\triangle AFC$ 可通过绕 F 点的旋转与 $\triangle BDF$ 重合，所以 $\angle GAF = \angle GDF$，有 A、D、F、G 四点共圆.

依据圆内接四边形的等角关系可知

$\angle EGB = \angle EAB = \theta$

$\angle FGD = \angle FAD = \varphi$

$\angle EGC = \angle ABE = \theta$

$\angle FGC = \angle ADF = \varphi$

又 $\because \quad \angle EGB + \angle EGC + \angle FGC + \angle FGD = \pi$

$\therefore \quad 2\theta + 2\varphi = \pi$

于是 $\quad (\pi - 2\theta) + (\pi - 2\varphi) = \pi$

即 $\quad \angle AFD + \angle AEB = \pi$

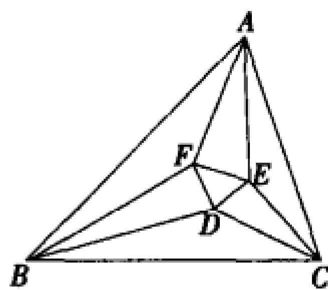
§4.3　针对性训练

A组

1.(第20届1994.全俄数学奥林匹克赛题)在梯形$ABCD(AB\parallel CD)$中,两腰AD,BC上分别有点P,Q满足$\angle APB=\angle CPD,\angle AQB=\angle CQD$.证明:点$P$和$Q$到梯形对角线交点$O$的距离相等.

2.(1982.上海市数学竞赛二试题6)如图Ⅱ-4-4-37,AE和AF、BF和BD、CD和CE分别是$\triangle ABC$中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的三等分线,求证:$\triangle DEF$是等边三角形.

(注:这结果是*F.Morley*在1899年发现的,故称为*Morley*定理).

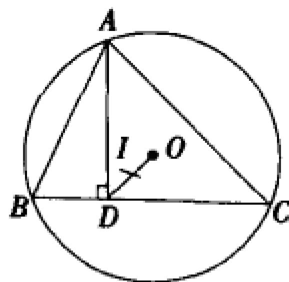


图Ⅱ-4-4-37

3.(第2届IMO试题)已知Rt$\triangle ABC$的斜边BC被分成n等份,其中n是奇数,从A看包含BC中点的那一份的视角为α,设直角三角形的高为h,斜边为α,求证:$\tan\alpha=\dfrac{4nh}{(n^2-1)\alpha}$

4.设P是$\triangle ABC$所在平面上任一点,G是它的垂心,则,$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3PG^2$

5.(第3届IMO试题)已知$\triangle ABC$的边长a,b,c及面积S,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S$



图Ⅱ-4-4-38

6.如图Ⅱ-4-4-38,O,I分别为$\triangle ABC$的外心和内心,AD是BC上的高,I在线段OD上.求证:$\triangle ABC$的外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径.

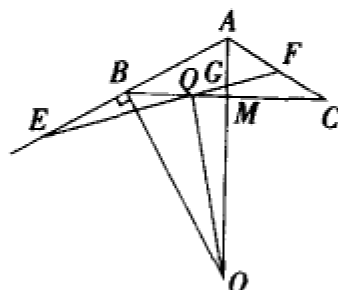
7.（第35届IMO试题）如图Ⅱ-4-4-39，$\triangle ABC$是等腰三角形，$AB = AC$，假如：

(1)M是BC的中点，O在直线AM上，使得OB垂直于AB；

(2)Q是线段BC上不同于B和C的一任意点；

(3)E在直线AB上，F在直线AC上，使得E、Q、F是不同的和共线的.

求证：$OQ \perp EF$　当且仅当$QE = QF$.



图Ⅱ-4-4-39

8.$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a,b,c且$B = 2A$.求证：$\frac{c}{3} < b - a < \frac{c}{2}$

9.（1985.新加坡数学竞赛题）设ABC是一个三角形，$\angle A = 4\angle C$，$\angle B = 2\angle C$.求证：$(BC + AC) \cdot AB = BC \cdot AC$

10.（1982.苏联数学竞赛题）在凸五边形$ABCDE$中，顶点B、E处的角是直角，又$\angle BAC = \angle EAD$.证明：如果对角线BD和CE交于点O，则直线AO与BE垂直.

11.四边形$ABCD$中，$\angle ABC = \angle BAC = 80^\circ$，$\angle DBC = 40^\circ$，$\angle DCB = 30^\circ$.求证：$AD \parallel BC$

12.（第29届IMO加拿大训练题）正方形$ABCD$与$A_1B_1C_1D_1$同向，B与B_1不重合.证明：BB_1、CC_1、DD_1共点.

13.（第7届全俄数学奥林匹克题）正方形$AEDB$、$ACFG$共顶点A，O_1、M、O_2、N分别为AD、BC、

AF、EG 的中点.求证:O_1MO_2N 是正方形.

14.(第35届莫斯科数学奥林匹克赛题)边长相等的凸五边形各内角均小于120°.证明,它的内角皆为钝角.

15.(1953.匈牙利数学奥林匹克)在等边凸六边形 $ABCDEF$ 中,$\angle A+\angle C+\angle E=\angle B+\angle D+\angle F$.证明:$\angle A=\angle D,\angle B=\angle E,\angle C=\angle F$

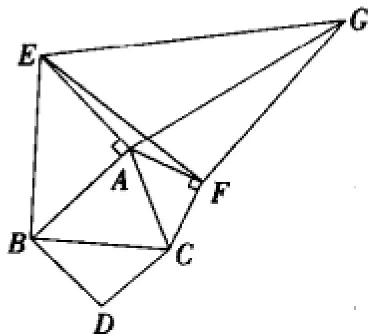
16.(第1届美国数学奥林匹克试题)一个给定的五边形 $ABCDE$ 具有下面的性质:五个三角形 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEA$、$\triangle EAB$ 中的每一个面积均为1.证明:每个有上述性质的五边形都等积,且有无穷多个这样的不全等的五边形.

17.(1994.上海市高三数学竞赛试题)如图Ⅱ-4-4-40,设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,在 $\triangle ABC$ 外分别作等腰 Rt$\triangle BCD$、Rt$\triangle ABE$、Rt$\triangle CAF$,在这三个三角形中,$\angle BDC$、$\angle BAE$、$\angle CFA$ 是直角,又在四边形 $BCFE$ 外作等腰直角 $\triangle EFG$,$\angle EFG$ 是直角.求证:

(1)$GA=\sqrt{2}AD$

(2)$\angle GAD=135°$

18.(第31届IMO预选题)若 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 相似,且 X 在 BC 上,Y 在 AC 上,Z 在 AB 上.求证:$\triangle XYZ$ 的垂心就是 $\triangle ABC$ 的外心.



图Ⅱ-4-4-40

B组

1. 锐角$\triangle ABC$中，H是垂心，O是外心，I是内心．已知$\angle C > \angle B > \angle A$．求证：$I$在$\triangle BOH$的内部．

2.（1987．第19届加拿大数学竞赛题）设$ABCD$是平行四边形，E是直线BC上位于B和C之间的点，若三角形DEC、BED和BAD都是等腰三角形，则$\angle DAB$有哪些可能的值？

3.（第45届莫斯科数学奥林匹克）凸五边形的每一条对角线都平行于它的一条边．证明：每条对角线与相应边的比都是$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. $\triangle ABC$中，$AB = AC$，$\angle A = 80^\circ$，P为形内一点，$\angle PBC = 10^\circ$，$\angle BCP = 20^\circ$．求：$\angle PAC$的度数．

5.（1993．澳门数学奥林匹克第二轮题4）在正方形$ABCD$的AB、AD边各取点K、N，使得$AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$．线段$CK$，$CN$各交对角线$BD$于$L$、$M$．试证：$\angle BLK = \angle DNC = \angle BAM$

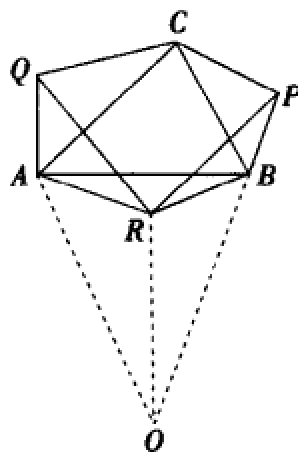
6.（第16届美国数学竞赛试题）设AD、BE与CF为$\triangle ABC$的内角平分线，如果$\angle EDF = 90^\circ$，求$\angle BAC$的所有可能值．

7. 直线上有四个点A、B、C、D，$AB : BC : CD = 2:1:3$，分别以AC、BD为直径作$\odot O_1$、$\odot O_2$，两圆交于E、F．求：$ED : EA$

8.(第17届IMO试题)如图Ⅱ－4－4－41,在任意$\triangle ABC$的边上向外作$\triangle BPC$,$\triangle QAC$,$\triangle ARB$,使得$\angle PBC=\angle CAQ=45°$,$\angle BCP=\angle QCA=30°$,$\angle ABR=\angle BAR=15°$.试证:

(1)$\angle QRP=90°$

(2)$QR=RP$



图Ⅱ－4－4－41

9.(第30届IMO预选题)平面上有一凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$,面积为S,又有一点M,M绕A_i旋转α角后得点$M_i(i=1,2,\cdots,n)$,求n边形$M_1M_2\cdots M_n$的面积.

10.(第9届全苏数学奥林匹克)(1)把$\triangle ABC$绕着外接圆圆心旋转小于180°的某一角度得到$\triangle A_1B_1C_1$,彼此对应的线段AB和A_1B_1相交于点C_2,BC和B_1C_1相交于A_2,CA和C_1A_1相交于点B_2.证明:$\triangle A_2B_2C_2$相似于$\triangle ABC$.

(2)四边形$ABCD$是圆内接四边形,把它绕着外接圆的圆心旋转小于180°的某一角度得到四边形$A_1B_1C_1D_1$.证明:彼此对应的直线AB和A_1B_1、BC和B_1C_1、CD和C_1D_1、DA和D_1A_1的四个交点是平行四边形的顶点.

第五章

圆

§5.1 知识、方法、技能

如果没有圆，平面几何将黯然失色.

圆是一种特殊的几何图形，应当掌握圆的基本性质，垂线定理，直线与圆的位置关系，和圆有关的角，切线长定理，圆幂定理，圆和圆的位置关系，多边形与圆的位置关系.

圆的几何问题不是独立的，它与直线形结合起来，将构成许多丰富多彩的、漂亮的几何问题，前面四讲所研究过的“三角形的心”，“几个著名定理”，“共圆、共线、共点”，“直线形”将构成本讲所研究的圆的综合问题的基础内容.

本讲中我们将着重研究下面几类问题：

1. 角的相等及其和、差、倍、分；
2. 线段的相等及其和、差、倍、分；
3. 二直线的平行、垂直；
4. 线段的比例式或等积式；
5. 直线与圆相切；
6. 竞赛数学中几何命题的等价性.

譬如说2003年中国数学奥林匹克第一大题.

“设点 I、H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心，点 B_1，C_1 分别为边 AC，AB 的中点，已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$，射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2，B_2C_2 与 BC 相交于 K，A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心. 试证：A、I、A_1 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.”

首先这个题目是三角形的心，直线形，共圆、共线、共点，圆，面积等的综合问题.

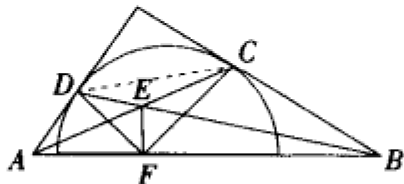
更重要的是这个题目的题设条件分别与两个结论“A、I、A_1 三点共线”和“$\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等”构成了两个命题，那么这个题目也就是要证明这两个命题的等价性.

有关证明两个命题等价的几何问题，其综合性程度高，技巧性程度强，为命题者所青睐. 在全国高中数学联赛，冬令营，国家队选拔赛，世界城市际联赛，国际IMO竞赛中经常出现. 为此，对这类问题作出专门研究.

§5.2 赛题精讲

Ⅰ. 角的相等及其和，差，倍，分

例1 在一条直线 l 的一侧面画一个半圆 Γ，C 和 D 是 Γ 上两个点，Γ 上过 C 和 D 的切线各自交 l 于 B 和 A，半圆的圆心在线段 AB 上. E 是线段 AC 和 BD 的交点，F 是 l 上点，EF 垂直于 l. 求证：EF 平分 $\angle CFD$.



图Ⅱ－4－5－1

【分析】 此题是35届IMO的预选题，你会发现这是一道很阴险的题目，你必须有一张很好的图，然后发现 P，E，F 居然是共线的!!然后，不难发现 P，C，D，F，O 五点共圆，题目就迎刃而解了. 由此可见画图的精确性是极为重要的.

证明:(1) 我们先证明 P,E,F 共线.

作 $PH \perp AB$,设 $\angle DOA = \theta_1, \angle BOC = \theta_2$. 只要证明 PH,BD,AC 共点即可.

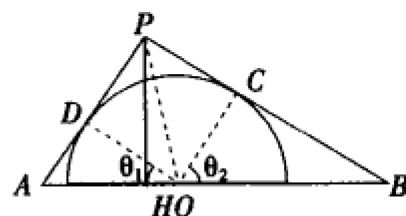


图 Ⅱ -4-5-2

即证 $\frac{AD}{DP} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BH}{HA} = 1$

我们记 Γ 的半径为 r.

下面我们来分别计算其中的每一项.

①$AD = r\tan\theta_1, CB = r\tan\theta_2$

② 由 PO 平分 $\angle COD$,且 $\angle COD = 180° - \theta_1 - \theta_2$

故得到 $PD = PC = r\tan\frac{180° - \theta_1 - \theta_2}{2} = r\cot\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

③ $\frac{BH}{HA} = \frac{BH}{PH} \cdot \frac{PH}{HA} = \tan\theta_2 \cdot \cot\theta_1$

将上面得到的各式相乘即可得到$\frac{AD}{DP} \cdot \frac{PC}{CB} \cdot \frac{BH}{HA} = 1$

故 P,E,F 共线.(F 和 H 重合)

(2) 由 $PH \perp AB, OD \perp PA, OC \perp PB$

$\therefore P,C,D,O,H$ 五点共圆.

$\therefore \angle PHD = \angle POD = \angle POC = \angle PHC$

即 EF 平分 $\angle CFD$

证毕.

例2 (1992.澳大利亚奥林匹克题5)如图Ⅱ-4-5-3,延长线段 AB 至 D,以 AD 为直径作半圆,圆心为 H,G 是半圆上一点,$\angle ABG$ 为锐角. E 在线段 BH 上,Z 在半圆上,$EZ // BG$,且 $EH \cdot ED = EZ^2$. $BT // HZ$.证明:$\angle TBG = \frac{1}{3}\angle ABG$

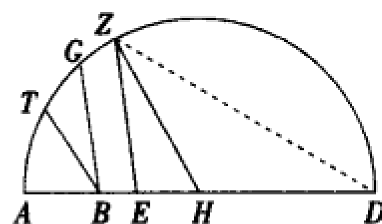


图 Ⅱ -4-5-3

证明:由 $EH \cdot ED = EZ^2$,知 $\triangle HEZ \backsim \triangle ZED$

所以 $\angle EZH = \angle EDZ = \angle DZH$

于是 $\angle AEZ = 3\angle EZH$

又 $BT // HZ, BG // EZ$

$\therefore \angle TBG = \angle EZH = \frac{1}{3}\angle AEZ = \frac{1}{3}\angle ABG$

例3 (2000.第41届IMO预选题)设 $ABCD$ 是凸四边形,且 AB 不平行于CD,若 X 是四边形$ABCD$ 内一点,并满足 $\angle ADX = \angle BCX < 90°, \angle DAX = \angle CBX < 90°$,设 AB,CD 的中垂线的交点为 Y,证明:$\angle AYB = 2\angle ADX$

证明:设 Z 是$\triangle ADX$ 和$\triangle BCX$ 的外接圆的第二个交点,分别记为 Γ_1,Γ_2,圆心分别为 O_1,O_2;设W 是$\triangle ABZ$ 和 $\triangle CDZ$ 的外接圆的第二个交点,分别记为 Γ_3,Γ_4,圆心分别为 O_3,O_4,下面先证明点 W 与点 Y 重合.

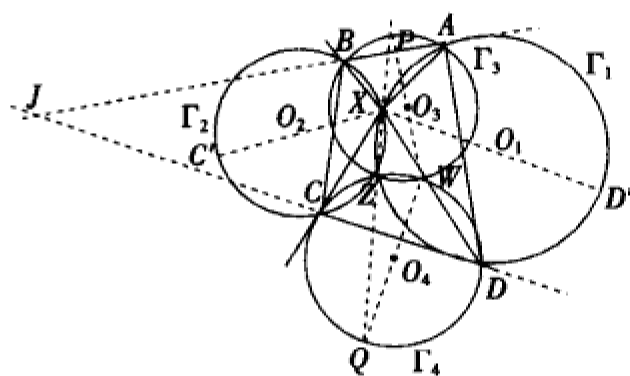


图 Ⅱ -4-5-4

设直线 AB,CD 的延长线交于点J,若 X 比Z 更靠近直线 AB(如图 Ⅱ-4-5-4),则 Z 与CD 在AB 的同侧,设 XC' 和XD' 分别是Γ_2 和 Γ_1 的直径,则 C',Z,D' 三点共线,又因为$\angle DAX$ 和$\angle CBX$ 均为锐角,所以点 C、D 与 X 在直线$C'D'$ 的两侧,从而线段 $C'D'$ 上的一点Z 在区域 AJD 内.

对于 X,Z 哪一个更靠近AB,分别有

$\angle BZX = \angle BCX, \angle AZX = \angle ADX$ ①

或 $\angle BZX + \angle BCX = 180° = \angle AZX + \angle ADX$ ②

但无论哪种情况，均有 $\angle BZX = \angle AZX$，即直线 ZX 平分 $\angle AZB$

同理，直线 ZX 也平分 $\angle CZD$

因此，直线 XZ 交 $\odot \Gamma_3$ 和 $\odot \Gamma_4$ 分别于 AB，CD 弧的中点，且在区域 AJD 的外部，分别设为 P、Q. 要证明 W 与 Y 重合，只要证明 $WA = WB$，$WC = WD$，这等价于证明 WP 和 WQ 分别是 $\odot \Gamma_3$ 和 $\odot \Gamma_4$ 的直径，即证明 $WZ \perp XZ$，因为 $XZ \perp O_1O_2$，$WZ \perp O_3O_4$，所以只要证明 $O_1O_2 \perp O_3O_4$

由于 $AZ \perp O_1O_3$，$XZ \perp O_1O_2$，则 $\angle O_2O_1O_3$ 与 $\angle AZX$ 要么相等，要么互补.

同理 $\angle O_1O_2O_3$ 与 $\angle BZX$ 有同样的结论.

因为 $\angle AZX = \angle BZX$，则 $\angle O_2O_1O_3$ 与 $\angle O_1O_2O_3$ 要么相等，要么互补.

又由于 A、B 是不同的点，则 $\triangle O_1O_2O_3$ 是一个非退化的三角形，因此，有 $\angle O_2O_1O_3 = \angle O_1O_2O_3$，所以，$O_1O_3 = O_2O_3$

同理 $O_1O_4 = O_2O_4$

故 $O_1O_2 \perp O_3O_4$，于是 $W = Y$

由于 P、Q 在区域 AJD 外部，Z 在区域 AJD 内部，PW、QW 分别垂直于 JA，JD，所以，W 也在区域 AJD 内部. 另一方面，点 Z 和 W 在 AB 同侧，也在 CD 同侧，由 ①，② 及 $\odot \Gamma_3$、$\odot \Gamma_1$、$\odot \Gamma_2$ 中内接角的性质，有

$\angle AWB = \angle AZB = \angle AZX + \angle BZX = \angle ADX + \angle BCX$

$= 2\angle ADX$，或 $\angle AWB = \angle AZB = 360° - (\angle AZX + \angle BZX)$

$= \angle ADX + \angle BCX = 2\angle ADX$

由于 $W = Y$，故结论成立.

Ⅱ. 线段相等及其和，差，倍，分

例 4 （2000. 第 41 届 IMO试题 1）圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N. 设 l 是圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的那条公切线，l 与圆 Γ_1 相切于点 A，与圆 Γ_2 相切于点 B，设经过点 M 且与 l 平行的直线与圆 Γ_1 还相交于点 C，与圆 Γ_2 还相交于点 D，直线 CA 和 DB 相交于点 E，直线 AN 和 CD 相交于点 P，直线 BN 和 CD 相交于点 Q. 证明：$EP = EQ$

【分析】 MN 为两圆的公共弦，若令 K 为 MN 与 AB 的交点，根据圆幂定理，$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$，则 K 为 AB 中点. 可推知 M 为 PQ 中点. 若 $EP = EQ$，则 EM 为 PQ 的中垂线，则只须证 $EM \perp PQ$.

证明：设 K 为 MN 与 AB 交点，如图 Ⅱ－4－5－5，连 EM，因为 $CD \parallel AB$，则 A 是 $\overset{\frown}{CM}$ 中点，B 是 $\overset{\frown}{MD}$ 中点，于是，$\triangle ACM$ 和 $\triangle BMD$ 为等腰三角形，则有

$$\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$$

$$\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$$

故 $EM \perp AB$，因为 $AB \parallel CD$，则 $EM \perp PQ$，而 $AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$，可得 $AK = KB$，则 K 为 AB 中点，则 M 为 PQ 中点，又已证 $EM \perp PQ$，则 $EQ = EP$ 得证.

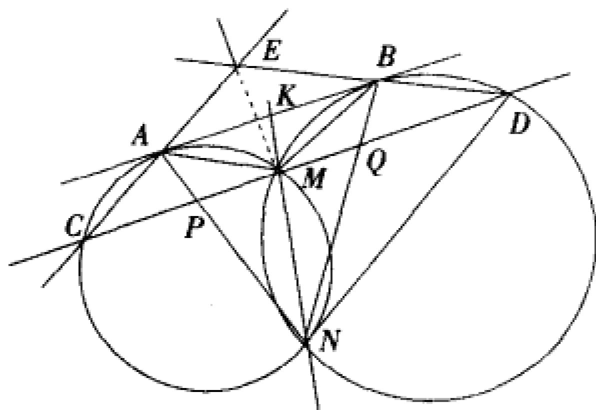


图 Ⅱ－4－5－5

例 5 （2000. 第 52 届波兰数学奥林匹克）等腰直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，点 D 和 E 为边 BC 上的点，且 $\angle DAE = 45°$，$\triangle ADE$ 的外接圆分别交边 AB 和 AC 于点 P 和 Q. 求证：$BP + CQ = PQ$.

证明：如图 Ⅱ－4－5－6，设 $CE = x$，$DE = y$，$BD = z$，则 $AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y + z)$

由于 PQ 所对的圆周角为 $\angle QAP = 90°$，所以，PQ 为 $\triangle ADE$ 的外接圆的一条直径. 由正弦定理，可知 $DE = PQ \cdot \sin 45°$，于是 $PQ = \sqrt{2}y$

另一方面，利用割线定理，可知

$$BP=\frac{BD\cdot BE}{AB}=\frac{\sqrt{2}(y+z)z}{x+y+z},$$

$$CQ=\frac{CE\cdot CD}{AC}=\frac{\sqrt{2}(x+y)x}{x+y+z}.$$

于是要证 $BP+CQ=PQ$,只需证明

$(y+z)z+(x+y)x=(x+y+z)y.$

即　只要证明 $x^2+z^2=y^2$

为此,我们将 $\triangle BAD$ 绕顶点 A 逆时针旋转 $90°$,则 B 转至 C,设 D 转至 D',可知 $\angle D'CE=\angle B+\angle ACE=90°$,所以 $X^2+Z^2=D'E^2$,而在 $\triangle AD'E$ 与 $\triangle ADE$ 中,易知 $\angle D'AE=\angle DAB+\angle CAE=90°-\angle DAE=45°=\angle DAE$,且 $AD=AD'$,$AE=AE$,故 $\triangle AD'E\cong\triangle ADE$,所以 $DE=D'E$,因此 $x^2+z^2=y^2$.

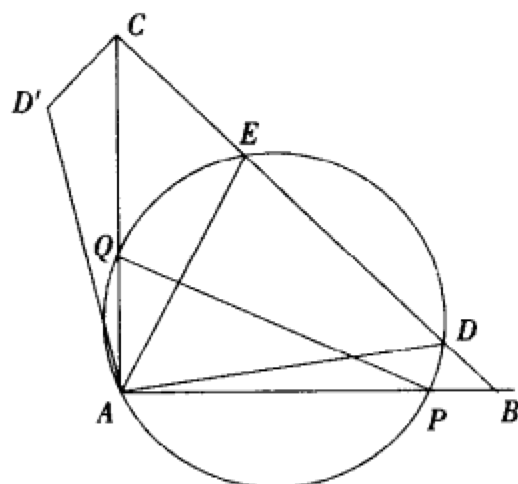


图 Ⅱ－4－5－6

综上,命题获证.

例 6　(第 38 届 IMO 试题 2) 设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 中最小的内角,点 B 和 C 将这个三角形的外接圆分成两段弧,U 是落在不含 A 的那段弧上且不等于 B 与 C 的一个点,线段 AB 和 AC 的垂直平分线分别交线段 AU 于 V 和 W,直线 BV 和 CW 相交于 T.证明:$AU=TB+TC$.

【分析】　这是证明一条线段等于两线段和的题目.我们给出命题组委会的解法,再给出我们自己的证法;最后对原命题(例 6) 进行一些拓广.

证法一:(原解法) 如图 Ⅱ－4－5－7,因为点 V 在线段 AB 的垂直平分线上,

所以　$\angle VAB=\angle VBA$

又因 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最小内角,且 $\angle VAB=\angle UAB<\angle CAB$

故　$\angle VBA=\angle VAB<\angle CAB\leqslant\angle CBA$

即　V 在 $\angle ABC$ 内部.同理,W 在 $\angle ACB$ 内部

设 $\angle UAB=\alpha$,则 $\angle VBA=\alpha$,下面用 A、B、C 分别表示 $\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$

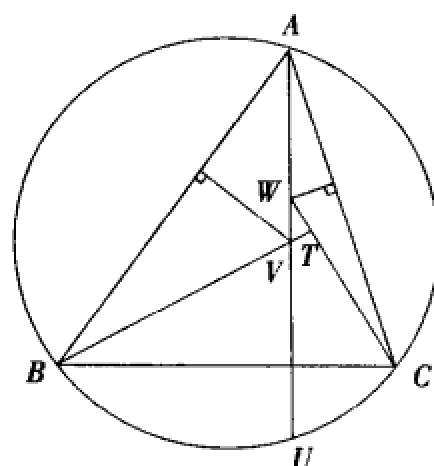


图 Ⅱ－4－5－7

则有　$\angle CAV=A-\alpha$,$\angle CBT=B-\alpha$

因为 W 在线段 AC 的垂直平分线上,所以

$\angle ACW=\angle CAW=A-\alpha$.　$\angle BCT=C-\angle ACT=C+\alpha-A$

于是,$\angle BTC=180°-(B-\alpha)-(C+\alpha-A)$

$\qquad\qquad=180°-B-C+A=2A$

在 $\triangle BCT$ 中使用正弦定理,有

$$\frac{BC}{\sin\angle BTC}=\frac{TB}{\sin\angle TCB}=\frac{TC}{\sin\angle TBC}$$

注意到 $B-\alpha=180°-(C+\alpha+A)$,有

$$\begin{aligned}&TB+TC\\&=\frac{BC}{\sin\angle BTC}(\sin\angle TCB+\sin\angle TBC)\\&=\frac{BC}{\sin2A}[\sin(C+\alpha-A)+\sin(B-\alpha)]\\&=\frac{BC}{\sin2A}[\sin(C+\alpha-A)+\sin(C+\alpha+A)]\\&=\frac{BC}{\sin2A}\cdot2\sin(C+\alpha)\cos A\\&=\frac{BC}{\sin A}\cdot\sin(C+\alpha)\end{aligned}$$

设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R,则由正弦定理知:$\frac{BC}{\sin A}=2R$,故得

$$TB + TC = 2R\sin(C + \alpha) \quad ①$$

连接 CU,由 A、B、U、C 四点共圆可知,$\angle BCU = \angle BAU = \alpha$

故 $\angle ACU = C + \alpha$

在 $\triangle ACU$ 中使用正弦定理,有 $AU = 2R\sin(C + \alpha)$

结合 ① 式即得 $AU = TB + TC$

下面我们给一种非常简捷的证法.

证法二:如图 Ⅱ - 4 - 5 - 8,设直线 BT、CT 分别交 $\odot O$ 于 X 和 Y,连 CX.由条件有

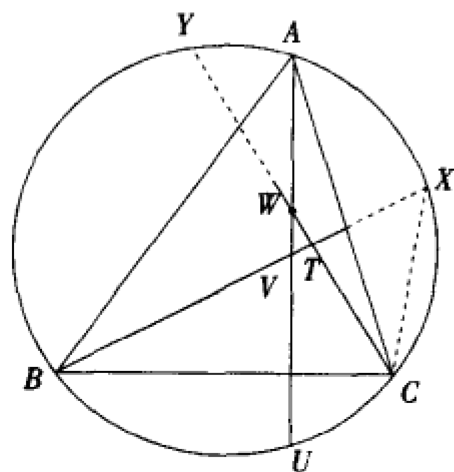


图 Ⅱ - 4 - 5 - 8

$BV = AV, CW = AW$

由相交弦定理可得

$VU = VX, WY = WU$

于是 $BX = CY = AU$

又易知 $\angle ABX = \angle BAU, \angle ACY = \angle CAU$

故 $\angle X = \angle BAC = \angle BAU + \angle CAU$

$= \angle ABX + \angle ACY$

$= \angle ACX + \angle ACY = \angle TCX$

所以 $TC = TX$

从而 $TB + TC = TB + TX = BX = AU$

【分析】 由证法2容易知道,起关键作用的是 $BX = CY = AU$,而此时圆心到此三弦之距必相等,从而 O 必为 $\triangle VWT$ 的内心或旁心.反之,无论 O 为 $\triangle VWT$ 的内心或旁心,以 O 为圆心的圆在 $\triangle VWT$ 的三边所在直线上所截得的线段总相等,且后一结论与 $\triangle VWT$ 的形状无关.故可考虑将原题中的限制条件"$\angle A$ 为最小内角"及"U 落在不含 A 的那段弧上"取消而对原题进行如下拓广.

"拓广":设 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$,$\angle A \neq 90°$,U 为 $\odot O$ 上异于 A、B、C 的点,AU 不过圆心且不垂直于 AB 和 AC,线段 AB 和 AC 的垂直平分线分别交直线 AU 于 V 和 W,直线 BV 和 CW 交于点 T.则

(1) 直线 BV、CW 被 $\odot O$ 所截得的线段长相等,且都等于弦 AU 的长;

(2) O 为 $\triangle VWT$ 的内心或旁心;

(3) 当 T 在 $\odot O$ 内时,$TB + TC = AU$

当 T 在 $\odot O$ 外时,$|TB - TC| = AU$

当 T 在 $\odot O$ 上时,必重合于 B 或 C,从而二式均成立.

证明:(1) 分别记 BV、CW 与 $\odot O$ 的另一交点为 X 和 Y,由条件有 $VB = VA$.当 V 在 $\odot O$ 内时,如原题已有 $BX = AU$;当 V 在 $\odot O$ 上时,U、V、X 三点重合,亦有 $BX = AU$;当 V 在 $\odot O$ 外时,由切割线定理及 $VB = VA$ 可得 $VX = VU$,从而,$BX = AU$.总之必有 $BX = AU$.

同理可得 $CY = AU$.

(2) 是(1) 的直接推论.

(3) 若 T 在 $\odot O$ 上且不重合于 B 和 C,则由(1) 证明中所设知必有 T、X、Y 重合,故 $TB = TC$.从而 OT 垂直平分 BC.又 V 为 AB 的垂直平分线与 BT 的交点,而 W 为 AC 的垂直平分线与 CT 的交点,连 OV、OW、VW.

① 若 T、A 在 BC 同侧时,(如图 Ⅱ - 4 - 5 - 9),由 $OV \perp AB$,$OW \perp AC$ 得

$\angle VOW = 180° - \angle A$

又 $\angle VTW = \angle A$

所以,T、V、O、W 共圆.

故 $\angle BVO + \angle CWO = 180°$

但由(2) 知 $\angle BVO = \angle OVW$,$\angle CWO = \angle OWV$

于是,$\angle BVW + \angle CWV = 360°$,矛盾.

②T、A 在 BC 的两侧时,(如图 Ⅱ - 4 - 5 - 9),类似地可证 O、T、V、W 共圆并利用(2) 而导致矛盾.

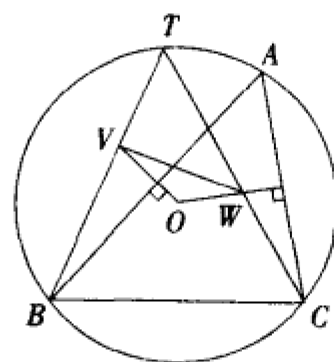


图 Ⅱ - 4 - 5 - 9

综上所述,当 T 在 $\odot O$ 上时,必与 B、C 之一重合.(3) 中的其他论断是(1) 的直接推论.

例 7 (1989.全国高中联赛第二试试题) 已知在 $\triangle ABC$ 中,$AB > AC$,$\angle A$ 的一个外角的平分线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 E,过 E 作 $EF \perp AB$,垂足为 F.求证:$2AF = AB - AC$

证明:如图 Ⅱ - 4 - 5 - 10,在 FB 上取点 D,使 $FD = FA$,连 ED 延长交圆于 G,连 AG,EC,EB 则

$\angle ACE = \angle AGD$

又 $\angle ADG = \pi - \angle ADE = \pi - \angle EAH = \angle EAC$

所以,$\triangle ADG \backsim \triangle EAC$,故 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AG}$,即 $BC = AG$,于是,$AD = \dfrac{AE \cdot BC}{EC}$,故 $2AF = \dfrac{AE \cdot BC}{EC}$ ①

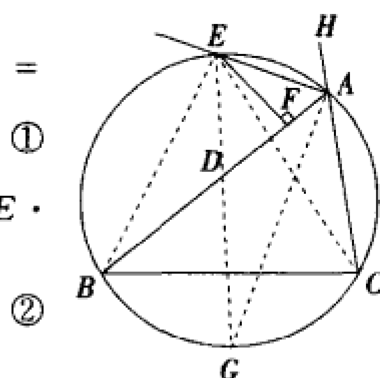


图 Ⅱ - 4 - 5 - 10

连 EB,在圆内接四边形 $AEBC$ 中,由托勒密定理得 $AB \cdot EC = AE \cdot BC + AC \cdot BE$

故 $AE \cdot BC = AB \cdot EC - AC \cdot BE$ ②

将 ② 代入 ①,得

$$2AF = \frac{AB \cdot EC - BE \cdot AC}{EC}$$

又 $\angle EBC = \angle EAH = \angle EAB$,所以,$BE = EC$

即 $2AF = AB - AC$

Ⅲ. 两直线的平行、垂直

例 8 如图Ⅱ - 4 - 5 - 11,$\triangle ABC$,I 为内心,外接圆为 $\odot O$,点 B 关于 $\odot O$ 的对径点为 K.在 AB 的延长线上取点 N,在 BC 的延长线上取点 M,使得 $MC = NA = s$,s 为 $\triangle ABC$ 的半周长.证明:$IK \perp MN$

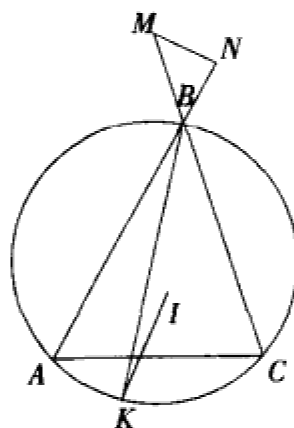


图 Ⅱ - 4 - 5 - 11

【分析】 接过题目,我们首先感到束手无策,线段 MN 让人摸不着头脑,K 的出现也很诡异,平常几何题中极少看到对径点是个什么东西,更不要说线段 IK 了.怎么办?!

第四讲的"知识、方法、技能"中我们给出了定理 4——"定差幂线"轨迹."定差幂线"轨迹是证明两线垂直的有力工具.

首先是 IM^2,注意到内切圆在 BC 边上的切点 E 有很好的性质,从此垂直关系有,$IM^2 = IE^2 + ME^2$,其次 KM^2,注意到对径点 K 和 B 提供了一个垂直,即 $MC \perp KC$,从而 $KM^2 = KC^2 + MC^2$.于是本题可证.

证明:设内切圆在边 BC 和 BA 上的切点为 D 和 E.连接 ID,IE,IM,IN,KM,KN,AK,CK.

我们只要证明 $IM^2 - IN^2 = KM^2 - KN^2$

由 $ID \perp AN \Rightarrow IN^2 = ID^2 + ND^2$;$IE \perp CM \Rightarrow IM^2 = IE^2 + EM^2$

$KA \perp AN \Rightarrow KN^2 = KA^2 + AN^2$;$KC \perp CM \Rightarrow KM^2 = KC^2 + CM^2$

将以上四式代入我们要证明的式子中得到:

只要证明 $ME^2 - ND^2 = KC^2 - KA^2$

当然,这个时候如果直接硬算下去的话也是可以的,但是确实有一个好些的方法.

注意到 $ME = AB$,$ND = CB$.

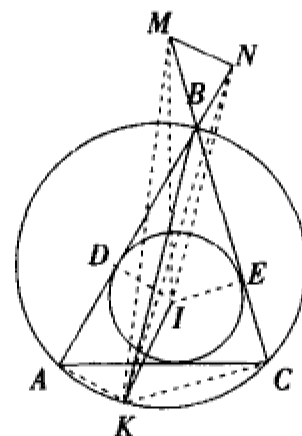


图 Ⅱ - 4 - 5 - 12

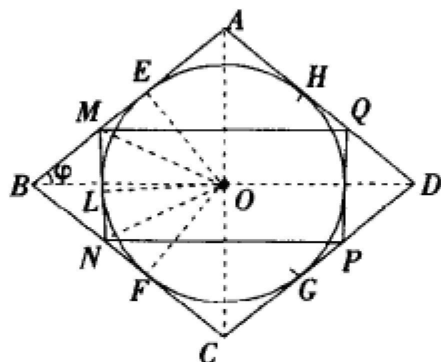
所以只需证明 $AB^2+KA^2=BC^2+KC^2$.

这个是显然成立的,因为都等于直径的平方.

证毕.

【评注】 这是笔者见过的中等数学上的一道题目,原解答很复杂,用三角计算了很长的篇幅.但是使用了定差幂线轨迹就显得轻巧许多,而且也很自然.

例9 (1995.全国联赛二试第三题)如图Ⅱ-4-5-13,菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别切于 E、F、G、H,在 $\overset{\frown}{EF}$ 与 $\overset{\frown}{GH}$ 上分别作 $\odot O$ 切线交 AB 于 M,交 BC 于 N,交 CD 于 P,交 DA 于 D.求证:$MQ\parallel NP$



图Ⅱ-4-5-13

证法一:(平面几何方法)如图Ⅱ-4-5-13,分别连接 AC、BD,其交点为内切圆圆心 O.

设 MN 与 $\odot O$ 切于 L,分别连接 OE,OM,OL,ON,OF,并设 $\angle MOL=\alpha$,$\angle LON=\beta$,$\angle ABO=\varphi$

则易知 $\angle EOM=\alpha$,$\angle FON=\beta$,$\angle EOF=2\alpha+2\beta=180^\circ-2\varphi$

$\therefore\quad \angle BON=90^\circ-\varphi-\beta=\alpha$

$\quad\quad \angle CNO=NBO+\angle BON=\varphi+\alpha=\angle AOM$

又 $\angle OCN=\angle MAO$,有 $\triangle OCN\backsim\triangle MAO$

于是 $\quad AM\cdot CN=CO\cdot AO$

同理 $\quad AQ\cdot CP=CO\cdot AO$

$\therefore AM\cdot CN=AQ\cdot CP$

又 $\quad \angle MAQ=\angle PCN$,有 $\triangle AMQ\backsim\triangle CPN$

$\therefore\quad \angle AMQ=\angle CPN$.从而,$MQ\parallel NP$

证法二:(平面几何方法)设 $AE=a$,$BE=b$,$ME=m$,$NF=n$,$GP=s$,$QH=t$,则

$CF=CG=AH=AE=a$

$DG=DH=BF=BE=b$

$MN=ME+NF=m+n$

$PQ=PG+QH=s+t$

$BM=BE-ME=b-m$

$BN=BF-NF=b-n$

$MQ\parallel NP\Leftrightarrow\angle AMQ=\angle CPN$

$\Leftrightarrow\triangle AMQ\backsim\triangle CPN$

$\Leftrightarrow\dfrac{AM}{AQ}=\dfrac{CP}{CN}$

$\Leftrightarrow(a+m)(a+n)=(a+s)(a+t)$

$\Leftrightarrow a(m+n)+mn=a(s+t)+st \quad ③$

另一方面,设 $\odot O$ 的半径为 r,

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}(a+b)^2\sin\angle ABC=r(a+b)$

即 $\quad \sin\angle ABC=\dfrac{2r}{a+b}$

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AMO}+S_{\triangle MNO}+S_{\triangle NCO}+S_{\triangle BMN}$$
$$=\frac{r}{2}(a+m)+\frac{r}{2}(m+n)+\frac{r}{2}(a+n)+\frac{1}{2}(b-m)(b-n)\sin\angle ABC$$
$$=r\left[(a+m+n)+\frac{(b-m)(b-n)}{a+b}\right]$$

同理可得

$$S_{\triangle CDA}=r\left[(a+s+t)+\frac{(b-s)(b-t)}{a+b}\right]$$

从而 $(a+m+n)+\dfrac{b^2-bm-bn+mn}{a+b}$

$=(a+s+t)+\dfrac{b^2-bs-bt+st}{a+b}$

$\Leftrightarrow a(m+n)+b(m+n)+b^2-bm-bn+mn$

$=a(s+t)+b(s+t)+b^2-bs-bt+st$

$\Leftrightarrow a(m+n)+mn$

$=a(s+t)+st$

③ 式成立,故原命题成立.

【注】 本题还有解析几何的方法,请见第九讲.

例 10 (1996.第 37 届 IMO 预选题)设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,P 为该三角形外接圆上的一点,E 是高 BH 的垂足,并设 $PAQB$ 与 $PARC$ 都是平行四边形,AQ 与 HR 交于 x.证明:$EX \parallel AP$

证明:如图 Ⅱ-4-5-14,连 PR 交 AC 于 M,则 M 为 AC 中点,也是 PR 中点,作 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 BD,连 DA、DC、HA、HC.

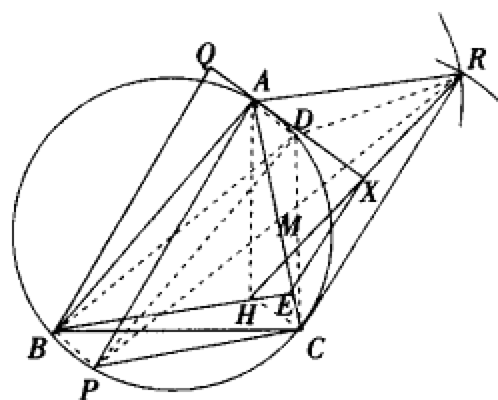


图 Ⅱ-4-5-14

$\because\ DA\perp AB, HC\perp AB$

$\therefore\ DA\parallel HC$

同理 $DC\parallel HA$

故四边形 $AHCD$ 为平行四边形,M 为 DH 的中点,于是四边形 $HRDP$ 为平行四边形,故 $HR\parallel DP$.

$\because AX\parallel BP, BP\perp DP$

$\therefore HR\perp QX, \angle AXH=90^\circ$

又 $\because \angle AEH=90^\circ$

$\therefore A$、H、E、X 四点共圆.

$\therefore \angle AXE+\angle AHE=180^\circ$

而 $\angle AHE=\angle ACB=\angle APB=\angle PAX$

故 $\angle AXE+\angle PAX=180^\circ$

$\therefore EX\parallel AP$

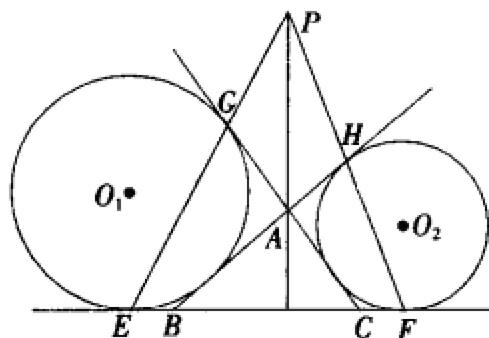


图 Ⅱ-4-5-15

例 11 (1996.全国高中联赛二试第 3 题)如图 Ⅱ-4-5-15,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 与 $\triangle ABC$ 的三边所在直线都相切,E、F、G、H 为切点,并且 EG、FH 的延长线交于 P 点.求证:直线 PA 与 BC 垂直.

【分析】 这题非常典型,有许多种证法,但都属于前面所说的二类,即平面几何方法和解析几何方法.下面纯平面几何的方法将给出四种方法,解析几何将给出两种方法.开阔思路.

证法一:如图 Ⅱ-4-5-16,延长 PA 交 BC 于点 D.直线 PHF 与 $\triangle ABD$ 的三边延长线都相交,直线 PGE 与 $\triangle ADC$ 的三边延长线都相交,由梅涅劳斯定理,有

$$\frac{AH}{BH}\cdot\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DP}{AP}=1$$

$$\frac{DP}{AP}\cdot\frac{AG}{CG}\cdot\frac{CE}{DE}=1$$

于是 $\dfrac{AH}{BH}\cdot\dfrac{BF}{DF}=\dfrac{AG}{CG}\cdot\dfrac{CE}{DE}$

$\because\ BH=BF, CE=CG$

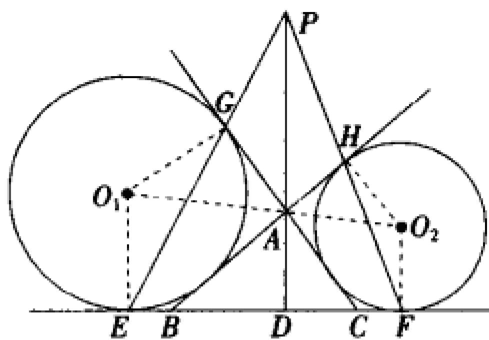


图 Ⅱ-4-5-16

$\therefore \quad \dfrac{AH}{DF} = \dfrac{AG}{DE}$

连接 $O_1G, O_1E, O_1A, O_2A, O_2H, O_2F$. 则 O_1AO_2 为一条直线，且

$O_1G \perp GC, O_2H \perp BH$

$\because \triangle O_1AG \backsim \triangle O_2AH$

$\therefore \dfrac{O_1A}{O_2H} = \dfrac{AG}{AH} = \dfrac{DE}{DF}$

于是 $\quad AD \parallel O_1E$

故 $\quad AD \perp EF$, 即 $PA \perp BC$

证法二：如图 Ⅱ－4－5－17，连接 O_1O_2，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 是两个旁切圆，显然 O_1O_2 过 A 点. 设 O_1O_2 与 EG 交于点 D，连接 O_1E、O_1B、BD、DH、O_2H、O_2F，设 $\triangle ABC$ 的内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$\odot O_1$ 是旁切圆，显然 $CE = CG$，$\angle CEG = 90° - \dfrac{\angle C}{2}$. 同理，$\angle BHF = 90° - \dfrac{\angle B}{2}$

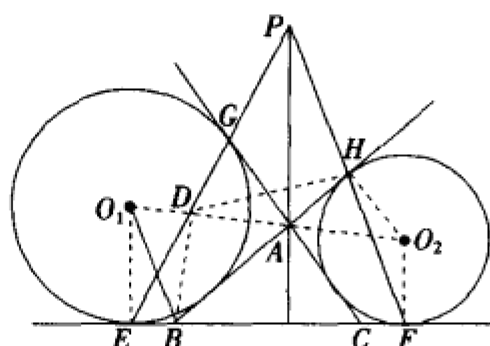


图 Ⅱ－4－5－17

$$\begin{aligned}\angle O_1DE &= 180° - \angle ADE \\ &= 180° - (360° - \angle DAB - \angle ABE - \angle BED) \\ &= -180° + (90° - \frac{\angle A}{2}) + (180° - \angle B) + (90° - \frac{\angle C}{2}) \\ &= 90° - \frac{\angle B}{2} \\ &= \angle O_1BE\end{aligned}$$

故 O_1、E、B、D 四点共圆，有

$\angle O_1DB = 180° - \angle O_1EB = 90°$

$\angle PDA = \angle O_1DE = 90° - \dfrac{\angle B}{2} = \angle BHF$

因此，A、H、P、D 四点共圆，有

$\angle APH_1 = \angle ADM$

$\angle O_2HB = \angle O_2FB = \angle O_2DB = 90°$

故 B、D、H、O_2、F 五点共圆，有

$\angle ADH = \angle O_2FH$

由 $\angle APH = \angle O_2FH$ 可得 $PA \parallel O_2F$

显然 $\quad O_2F \perp BC$

故 $\quad PA \perp BC$

如下的证法三和证法四采用的都是同一法但是归纳的着眼点是不同的，而且各有新意，介绍如下：

证法三：如图 Ⅱ－4－5－18，作 $PM \perp BC$，$AN \perp BC$，M、N 分别为垂足，则原命题等价于：M、N 两点重合，记 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，三边长分别为 a、b、c

$\odot O_1$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，故

$CE = CG = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$\angle E = 90° - \dfrac{\angle C}{2}$

同理 $\quad BF = BH = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$

$\quad\quad \angle F = 90° - \dfrac{1}{2}\angle B.$

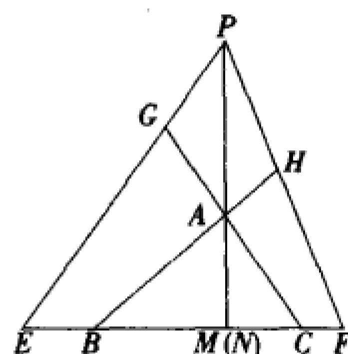


图 Ⅱ－4－5－18

$\triangle PEF$ 中，$\angle EPF = 180° - \angle E - \angle F = 90° - \frac{\angle A}{2}$，且

$EF = EC + BF - BC = b + c$

由正弦定理得

$$\frac{PE}{\sin F} = \frac{EF}{\sin\angle EPC}$$

故 $$EM = PE \cdot \cos E = (b + c)\frac{\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$ ·

设 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$$\begin{aligned}BM &= EM - EB = EM - (EC - BC)\\ &= 2R(\sin B + \sin C)\cdot\frac{\sin\frac{C+B}{2} + \sin\frac{C-B}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} - \frac{b+c-a}{2}\\ &= 2R\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cdot\frac{\sin\frac{C+B}{2} + \sin\frac{C-B}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}} - \frac{b+c-a}{2}\\ &= 2R\cdot[\sin B + \sin C + \sin(C-B)] - \frac{b+c-a}{2}\\ &= R[\sin(C-B) - \sin(C+B)]\\ &= 2R\sin C\cdot\cos B\\ &= c\cdot\cos B = BN\end{aligned}$$

故 M、N 两点重合，$\therefore PA \perp BC$

证法四：如图 Ⅱ－4－5－19所示，作 $AD \perp BC$，设直线 DA 分别与 EG、FH 交于点 P_1、P_2，连 O_1C，O_1C 与 EG 交于点 M，则我们只须证明 P_1、P_2 的两点重合，即 $DP_1 = DP_2$

CE、CG 是 $\odot O_1$ 的两条切线，$\angle CMG = 90° = \angle CDP_1$，故 C、D、M、P_1 四点共圆，$\angle DP_1E = DCO_1 = \frac{1}{2}\angle ACB$

另一方面，设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，$\odot O_1$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，故

$$CE = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$$

$$\begin{aligned}DE &= CE - CD = s - b\cos C\\ &= s - b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ &= \frac{(s-b)(b+c)}{a}\end{aligned}$$

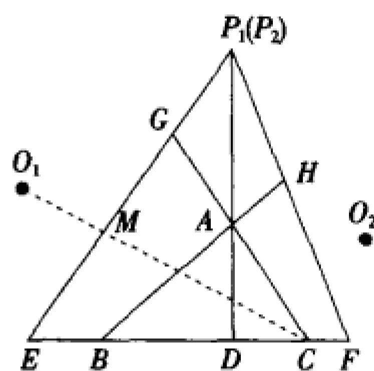


图 Ⅱ－4－5－19

因此

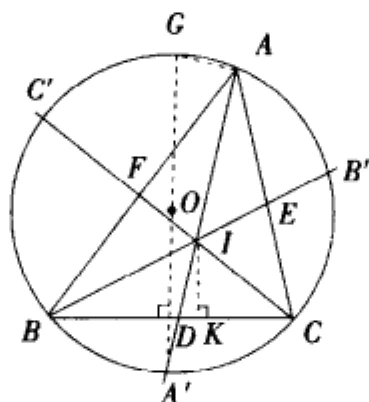
$$\begin{aligned}DP_1 &= \frac{DE}{\tan\angle DP_1E} = \frac{\frac{(s-b)\cdot(b+c)}{a}}{\tan\frac{\angle ACB}{2}}\\ &= \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DP_2 &= \frac{DF}{\tan\angle DP_2F} = \frac{\frac{(s-c)(b+c)}{a}}{\tan\frac{\angle ABC}{2}}\\ &= \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}\end{aligned}$$

故 $DP_1 = DP_2$, P_1 与 P_2 两点重合，有 $PA \perp BC$

【注】 本题还有两种解析法，请见第九讲.

Ⅳ. 线段的比例式或等积式



图Ⅱ-4-5-20

例 12 如图Ⅱ-4-5-20. ⊙O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，点 I 是它的内心，射线 AI, BI, CI 各交对边于点 D、E、F，射线 AD、BE、CF 各交 ⊙O 于点 A'、B'、C'.

求证: $AA' \cdot ID = BB' \cdot IE = CC' \cdot IF$

证明: 如图Ⅱ-4-5-20 作 ⊙O 直径 $A'G$, $IK \perp BC$ 于点 K，设 ⊙O 半径为 R，$\triangle ABC$ 内切圆半径为 r，则 $A'G = 2R$, $IK = r$

$\because I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心

$\therefore \angle BAA' = \angle CAA'$

$\Rightarrow \overset{\frown}{A'B} = \overset{\frown}{A'C} \Rightarrow A'G \perp BC$

又 $IK \perp BC$, $\therefore IK \parallel A'G$

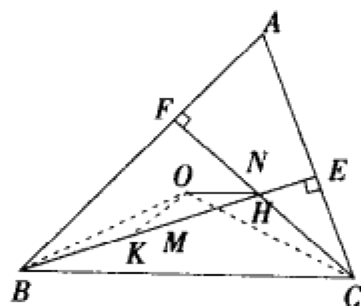
从而可知，$\mathrm{Rt}\triangle IDK \backsim \mathrm{Rt}\triangle A'GA$

$\Rightarrow \frac{ID}{A'G} = \frac{IK}{AA'} \Rightarrow AA' \cdot ID = A'G \cdot IK = 2Rr$

同理可证 $BB' \cdot IE = 2Rr$, $CC' \cdot IF = 2Rr$

故 $AA' \cdot IB = BB' \cdot IE = CC' \cdot IF$

(找此题的本原证法(*))



图Ⅱ-4-5-21

例 13 (2002. 全国高中数学联赛加试题一) 如图Ⅱ-4-5-21 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 60°$, $AB > AC$，点 O 是外心，高 BE, CF 交于点 H，点 M、N 分别在线段 BH, HF 上，且满足 $BM = CN$，求 $\frac{MH + NH}{OH}$ 的值.

解: 如图Ⅱ-4-5-21，在 BE 上取 $BK = CH$，连结 OB, OC, OK. 由三角形外心的性质知 $\angle BOC = 2\angle A = 120°$，由三角形垂心的性质知 $\angle BHC = 180° - \angle A = 120°$

于是 $\angle BOC = \angle BHC$

故 B、C、H、O 四点共圆.

从而，$\angle OBH = \angle OCH$

又 $OB = OC$, $BK = CH$，有 $\triangle BOK \cong \triangle COH$

$\because$ $\angle BOK = \angle COH$, $OK = OH$

$\therefore$ $\angle KOH = \angle BOC = 120°$, $\angle OKH = \angle OHK = 30°$

观察 $\triangle OKH$, $\frac{KH}{\sin 120°} = \frac{OH}{\sin 30°}$，则 $KH = \sqrt{3} OH$

又 $BH = CN$, $BK = CH$，则 $KH = NH$

$\therefore$ $MH + NH = MH + KM = KH = \sqrt{3} OH$

故 $\frac{MH + NH}{OH} = \sqrt{3}$

例 14 (2001. 加拿大数学竞赛集训队试题) 设 P、Q 是 $\triangle ABC$ 内两点，$\angle PAB = \angle QAC$, $\angle PBC = \angle QBA$, $\angle PCB = \angle QCA$, R, $S_\triangle$ 表示 $\triangle ABC$ 外接圆半径和面积，求证:

$AP \cdot AQ \cdot BC + BP \cdot BQ \cdot AC + CP \cdot CQ \cdot AB = 4R \cdot S_\triangle$

【注】 首先给出一个概念: 满足题设条件的两点 P, Q 称为 $\triangle ABC$ 的等角共轭点.

证明: 如图Ⅱ-4-5-22 设 D 是射线 AQ 上的点，且使得 $\angle ACD = \angle APB$，又因为 $\angle APB > \angle ACB$，则有点 D 必在 $\triangle ABC$ 的外部.

$\because$ $\angle PAB = \angle CAD$

$\therefore \quad \triangle APB \backsim \triangle ACD$

故 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{BP}{CD}$ ①

由 $\angle QAB=\angle PAC, \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AP}{AC}$ 可知：

$\triangle ABD \backsim \triangle APC$

则 $\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{BD}{CP}$ ②

因为 $\angle CDA=\angle PBA=\angle QBD$

所以，B、Q、C、D 四点共圆.

由托勒密(Ptolemy)定理，有

$BC \cdot DQ = BQ \cdot CD + BD \cdot CQ$

即 $BC \cdot (AD-AQ)=BQ \cdot CD+BD \cdot CQ$ ③

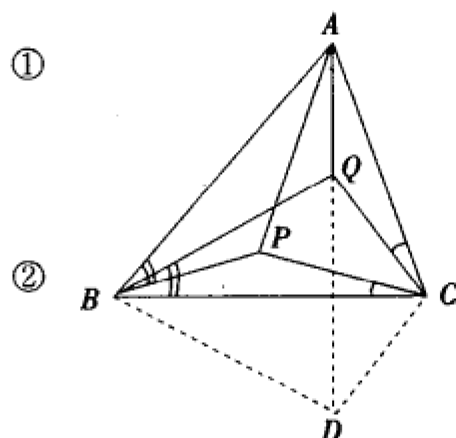


图 Ⅱ－4－5－22

由 ①、② 有

$CD=\dfrac{BP \cdot AC}{AP}, BD=\dfrac{CP \cdot AB}{AP}$

$AD=\dfrac{AB \cdot AC}{AP}$ ④

将 ④ 中各式代入 ③，得

$BC \cdot \left(\dfrac{AB \cdot AC}{AP}-AQ\right)=\dfrac{BP \cdot BQ \cdot AC}{AP}+\dfrac{CP \cdot CQ \cdot AB}{AP}$

即 $AP \cdot AQ \cdot BC + BP \cdot BQ \cdot AC + CP \cdot CQ \cdot AB = AB \cdot BC \cdot CA$

由于 $S_{\triangle}=\dfrac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$

故题设结论成立.

例 15 （第 34 届 IMO 预选题）设点 D 和 E 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点，使得 $\angle BAD=\angle CAE$. 又设 M 和 N 分别是 $\triangle ABD$、$\triangle ACE$ 的内切圆与 BC 的切点. 求证：$\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MD}=\dfrac{1}{NC}+\dfrac{1}{NE}$

证明：如图 Ⅱ－4－5－23，因：$\dfrac{1}{MB}+\dfrac{1}{MD}=\dfrac{BD}{MB \cdot MD}, \dfrac{1}{NC}+\dfrac{1}{NE}=\dfrac{CE}{NC \cdot NE}$ 故只须证明：

$BD \cdot NE \cdot NC = CE \cdot MB \cdot MD$ ①

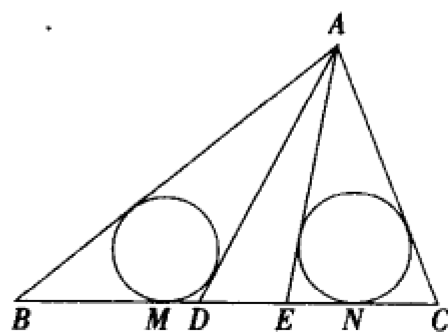


图 Ⅱ－4－5－23

因为 M 和 N 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle ACE$ 的内切圆与 BC 的切点，故有

$MD=\dfrac{1}{2}(AD+BD-c)$

$MB=\dfrac{1}{2}(c+BD-AD)$

$NC=\dfrac{1}{2}(b+CE-AE)$

$NE=\dfrac{1}{2}(AE+CE-b)$

② 式代入 ① 式得

$BD \cdot (AE+CE-b) \cdot (b+CE-AE)=CE \cdot (c+BD-AD) \cdot (AD+BD-c)$，即

$BD(CE^2-b^2-AE^2+2b \cdot AE)=CE(BD^2-c^2-AD^2+2c \cdot AO)$ ②

记 $\angle BAD=\angle CAE=\alpha$，在 $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ 中运用正弦定理得.

$\dfrac{BD}{\sin\alpha}=\dfrac{AD}{\sin B}, \dfrac{CE}{\sin\alpha}=\dfrac{AE}{\sin C}$，故

$BD \cdot AE\sin B - CE \cdot AD \cdot \sin C, b \cdot BD \cdot AE = c \cdot CE \cdot AD$ ③

将③代入②式可知只须证明：

$BD(CE^2-b^2-AE^2)=CE(BD^2-c^2-AD^2)$ ④

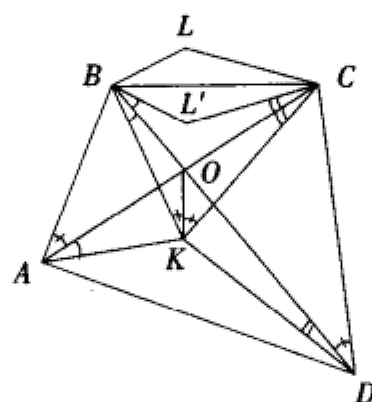
在 $\triangle ABD$，$\triangle ACE$ 中运用正弦定理有

$$\frac{CE^2-b^2-AE^2}{b\cdot AE}=-2\cos\alpha=\frac{BD^2-c^2-AD^2}{c\cdot AD} \quad ⑤$$

③×⑤即得④式.

Ⅴ. 直线与圆相切

例16 （2002年4月21日至29日，第28届俄罗斯数学奥林匹克十一年级第6题）设 $ABCD$ 为圆内接四边形，它的两条对角线 AC 和 BD 相交于点 O，而 $\triangle ABO$ 的外接圆与 $\triangle COD$ 的外接圆相交于点 K，已知点 L 使得 $\triangle BLC$ 与 $\triangle AKD$ 对应相似. 证明，如果 $BLCK$ 为凸四边形，那么，它必为圆外切四边形.



图Ⅱ-4-5-24

证明： 如图Ⅱ-4-5-24. 假设点 K 位于 $\triangle AOD$ 内部（其余情形类似可证），设 L' 是 L 关于 BC 的对称点，则有 $\angle L'BO=\angle OBC-\angle L'BC=\angle OBC-\angle LBC$

但 $ABCD$ 为圆内接四边形，有 $\angle OBC=\angle OAD$，又 $ABOK$ 为圆内接四边形，则

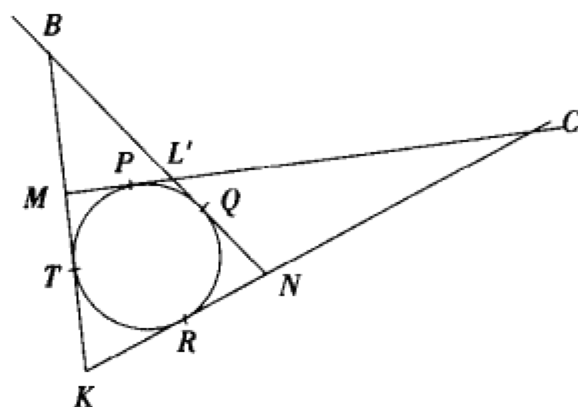
$\angle L'BO=\angle OAD-\angle KAD=\angle OBK$

同理可证 $\angle L'CO=\angle OCK$

又因 $CDKO$ 为圆内接四边形，则有

$\angle BKO=\angle BAO=\angle CDO=\angle CKO$

如图Ⅱ-4-5-25观察四边形 $BL'CK$，设 BL' 与 CK 相交于点 N，BK 与 CL' 相交于点 M，由于 CO 是 $\angle MCK$ 的平分线，而点 O 到四边形 $ML'NK$ 四边的距离相等，故为其内切圆圆心. 设其内切圆分别与边 ML'，$L'N$，NK，KM 相切于点 P，Q，R，T，则有



图Ⅱ-4-5-25

$$\begin{aligned}CK+BL'&=(CR+KR)+(BQ-L'Q)\\&=CP+KT+BT-L'P\\&=(KT+BT)+(CP-L'P)\\&=KB+CL'\end{aligned}$$

这表明 $CK+BL=KB+CL$

故知 $BLCK$ 为圆外切四边形.

【评注】 (1) 此题最后用到定理：对边和相等的凸四边形必为圆外切四边形.

(2) 这个定理是"圆外切四边形对边和相等"的逆定理.

例17 （第39届IMO预选题8）设 $\triangle ABC$ 满足 $\angle A=90°$，$\angle B<\angle C$，过 A 作 $\triangle ABC$ 外接圆 W 的切线，交直线 BC 于 D. 设 A 关于直线 BC 的对称点为 E，由 A 到 BE 所作垂线的垂足为 X，AX 的中点为 Y，BY 与 W 交于 Z 点. 证明直线 BD 为 $\triangle ADZ$ 外接圆的切线.

证明一： 如图Ⅱ-4-5-26所示，设 GA 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，H 为 AE 与 BD 的交点. 因 $\angle B<\angle C$，故 B、G 在 AE 的同侧.

由于 $\angle AEG=90°=\angle AXB$，$\angle AGE=\angle ABE=\angle ABX$，则 $\triangle AGE\backsim\triangle ABX$

故 $\angle GAE=\angle BAX$，$\dfrac{GA}{BA}=\dfrac{AE}{AX}$

因为 H、Y 分别为 AE、AX 的中点，则

$\dfrac{AE}{AX}=\dfrac{AH}{AY}$，所以 $\triangle AGH\backsim\triangle ABY$

故　$\angle AGH=\angle ABY$

设 GH 交 W 于 Z'，则

$\angle ABZ'=\angle AGZ'=\angle ABY=\angle ABZ$

故 Z 与 Z' 重合，从而 G、H、Z 三点共线.

因为 $\angle AZH=\angle AZG=90^\circ$，$AD$、$DE$ 是 W 的切线，所以

$\angle DAZ=\angle AEZ$，$\angle DEZ=\angle EAZ$

$\angle DHZ=90^\circ-\angle AHZ=\angle EAZ=\angle DEZ$

故 $ZHED$ 是圆内接四边形.

有 $\angle ZDH=\angle ZEA=\angle DAZ$

从而，DB 为 $\triangle ADZ$ 外接圆的切线.

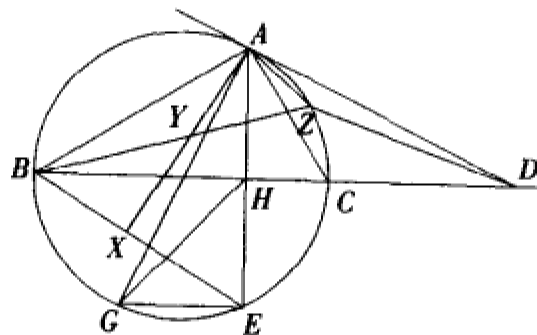


图 Ⅱ－4－5－26

证法二：如图 Ⅱ－4－5－27 所示，连 AE 交 BZ 于 M，连 ZE、ZC，在 $\triangle AXE$ 中，由梅涅劳斯定理得

$\frac{EB}{BX}\cdot\frac{XY}{YA}\cdot\frac{AM}{ME}=1$

因 Y 为 AX 中点，$XY=YA$，所以

$\frac{BX}{EB}=\frac{AM}{ME}$

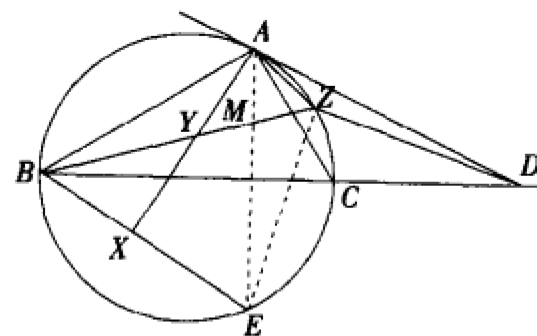


图 Ⅱ－4－5－27

设 $\angle ABC=\angle EBC=\theta$，则 $\frac{BX}{EB}=\frac{BX}{AB}=\cos2\theta$

即　$\frac{AM}{ME}=\cos2\theta$

由托勒密定理知

$AZ\cdot BE+AB\cdot EZ=AE\cdot BZ$

因 $AE=2AB\sin\theta=2BE\sin\theta$，代入上式得

$AZ+EZ=2BZ\sin\theta$　　①

又 $\angle AZM=\angle EZM$，由角平分线定理得

$\frac{AZ}{EZ}=\frac{AM}{ME}=\cos2\theta$

将上式代入 ①，可得 $\frac{AZ}{BZ}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$

由 $\angle ABC=\theta$，可得 $\angle CAD=\theta$，$\angle ADC=90^\circ-2\theta$

于是　$\frac{AC}{CD}=\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}$

又 $AC=BC\sin\theta$，从而，$\frac{AC}{BD}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$

所以　$\frac{AC}{BD}=\frac{AZ}{BZ}$，$\frac{AC}{AZ}=\frac{BD}{BZ}$　　②

由 $\angle ZBD=\angle CAZ$ 及 ② 知，$\triangle ZBD\backsim\triangle ZAC$

于是　$\angle ZCA=\angle ZDB$

又 $\angle ZCA=\angle ABZ=\angle ZAD$，所以，$\angle ZAD=\angle ZDC$

从而命题得证.

例 18　（第 40 届 IMO 试题 5）两个圆 Γ_1 和 Γ_2 被包含在圆 Γ 内，且分别与圆 Γ 相切于两个不同的点 M 和 N. Γ_1 经过 Γ_2 的圆心. 经过 Γ_1 和 Γ_2 的两个交点的直线与 Γ 相交于点 A 和 B，直线 MA 和 MB 分别与 Γ_1 相交于点 C 和 D.

证明：CD 与 Γ_2 相切.

证法一：(1) 先证明一个引理.

引理　已知圆 Γ_1 被包含在圆 Γ 内且与 Γ 相切于 U 点，Γ 的一条弦 PQ 与 Γ_1 相切于 V 点. 设 W 为

Γ 上不包含 U 点的弧$\overset{\frown}{PQ}$ 的中点．则 U、V、W 三点共线，且有 $WU \cdot WV = WP^2$

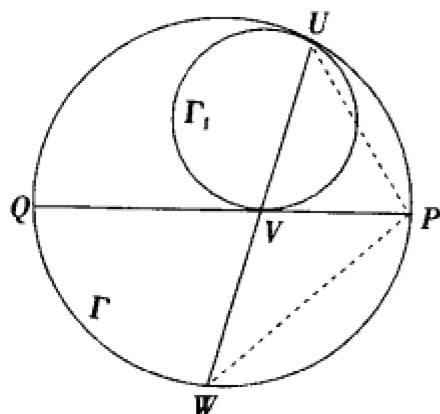


图 Ⅱ－4－5－28

引理的证明：如图 Ⅱ－4－5－28 所示，以 U 点为位似中心，将圆 Γ_1 变为圆 Γ 的位似变换把 PQ 变成 Γ 的一条平行于 PQ 的切线，就是经过 W 点的切线．因此，U、V、W 三点共线．

又因 $\angle QPW = \angle WUP$，故 $\triangle UWP \backsim \triangle PWV$．于是 $WU \cdot WV = WP^2$

(2) 例18的证明：如图Ⅱ－4－5－28(1) 所示，设 O_1、O_2 分别为圆 Γ_1、Γ_2 的圆心，t_1 和 t_2 为它们的两条公切线．设 α、β 分别为圆 Γ 上如同引理那样被 t_1、t_2 截出的弧．

根据引理，弧 α、β 的中点关于圆 Γ_1、Γ_2 的幂相等，所以它们落在 Γ_1、Γ_2 的根轴上．这说明点 A 和 B 分别是弧 α 和 β 的中点．又由引理可知 C、D 分别为 t_1 和 t_2 在 Γ_1 上的切点．

令 H 是以 M 为位似中心，将 Γ_1 变成 Γ 的位似变换，则 H 把 CD 变成 AB．于是 $AB \parallel CD$，这说明 $CD \perp O_1O_2$ 且 O_2 是 Γ_1 上某一段 CD 弧的中点．

记 X 为 t_1 在 Γ_1 上的切点，则 $\angle XCO_2 = \frac{1}{2}\angle CO_1O_2 = \angle DCO_2$．因此 O_2 在 $\angle XCD$ 的角平分线上，进而证得 CD 与 Γ_2 相切．

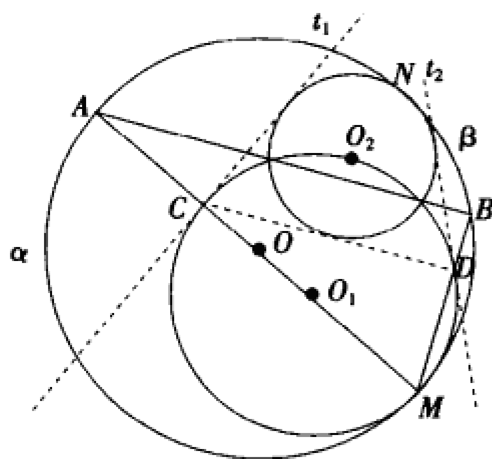


图 Ⅱ－4－5－28(1)

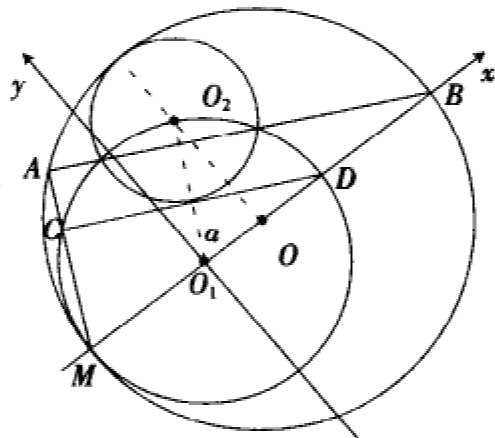


图 Ⅱ－4－5－28(2)

证法二：如图 Ⅱ－4－5－28(2) 所示．设圆 O、圆 O_1、圆 O_2 的半径分别为 r、r_1、r_2，$\angle O_2O_1O = \alpha$，则

圆 O_1 的方程为 $x^2 + y^2 = r_1^2$

圆 O_2 的方程为$(x - r_1\cos\alpha)^2 + (y - r_1\sin\alpha)^2 = r_2^2$．所以，圆 O_1 与 O_2 的根轴 AB 的方程为$x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - r_1\cos\alpha)^2 + (y - r_1\sin\alpha)^2 - r_2^2$

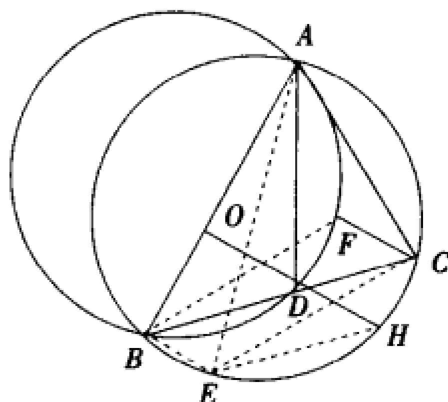
即 $\quad 2r_1(\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y) + r_2^2 - 2r_1^2 = 0$

又圆 O 与圆 O_1 关于 M 点成位似图形$\left(位似比为\dfrac{r}{r_1}\right)$，且 $M(-r_1, 0)$，所以 CD 的方程可由 AB 方程中的 $x + r_1$，y 分别换成$\dfrac{r(x + r_1)}{r_1}$，$\dfrac{ry}{r_1}$得到，即$2r[\cos\alpha \cdot (x + r_1) + \sin\alpha \cdot y] + r_2^2 - 2r_1^2 - 2r_1^2\cos\alpha = 0$亦即

$$2r(\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y) + r_2^2 - 2r_1^2 + 2rr_1\cos\alpha - 2r_1^2\cos\alpha = 0. \qquad ①$$

在 $\triangle OO_1O_2$ 中，$2r_1(r - r_1)\cos\alpha = r_1^2 + (r - r_1)^2 - (r - r_2)^2 = 2r_1^2 - r_2^2 + 2rr_2 - 2rr_1$．代入①得 CD 方程：$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y + r_2 - r_1 = 0$，则 O_2 到 CD 距离为$d = r_2$，即 CD 与圆 O_2 相切．

Ⅵ. 竞赛数学中几何命题的等价性



图Ⅱ－4－5－29

例19 (1999. 中国数学冬令营联赛试题一)如图Ⅱ－4－5－29,在锐角$\triangle ABC$中,$\angle C>\angle B$,点D是边BC上一点,使得$\angle ADB$是钝角,H是$\triangle ABD$的垂心,点F在$\triangle ABC$的内部且在$\triangle ABD$的外接圆周上.求证点F是$\triangle ABC$的垂心的充要条件是:$HD\parallel CF$且H在$\triangle ABC$的外接圆周上.

证明:首先指出一个简单有用的结论:设在$\triangle UVW$中,$\angle UVW$和$\angle VWU$均是锐角,则

"点P是$\triangle UVW$的垂心$\Leftrightarrow UP\perp VW$,并且$\angle VPW=\pi-\angle VUW$".

下面用此结论证明本题.

(1) 先证必要性,已知$HD\parallel CF$,而H为$\triangle ABD$垂心,则$DH\perp AB$,所以$CF\perp AB$,即H在$\triangle ABC$的外接圆上.

$\angle AFB=\angle ADB=\pi-\angle AHB=\pi-\angle ACB$

所以,点F是$\triangle ABC$的垂心.

(2) 再证充分性.因为F是$\triangle ABC$的垂心,所以$CF\perp AB$,而$DH\perp AB$,所以$HD\parallel CF$,且有

$\angle ACB=\pi-\angle AFB=\pi-\angle ADB=\angle AHB$

所以,A、B、C、D共圆.

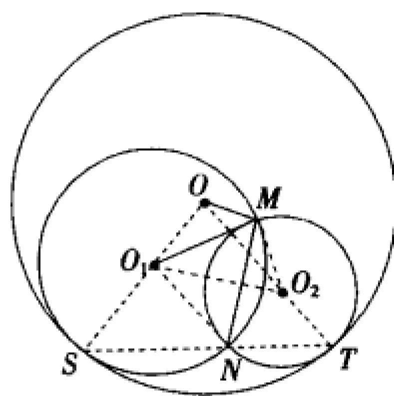
由(1),(2)得,本题结论成立.

【评注】 本题结论可以加强为:"F是$\triangle ABC$垂心的充要条件是:$HD\underline{\underline{\parallel}}CF$且$H$在$\triangle ABC$的外接圆上".

证明:必要性的证明没有变化,只需证明充分性.

设$\triangle ABC$外接圆为$\odot O$,连AO并延长交$\odot O$于E,连BE、CE、EH、BF,则$BE\perp AB$,$EH\perp AH$,$EC\perp AC$,而$CF\perp AB$,$BD\perp AH$,$BF\perp AC$,$HD\perp AB$,所以$BE\parallel CF\parallel DH$,$CE\parallel BF$,$BD\parallel EH$,所以$BECF$,$BEHD$均为平行四边形,所以$BE\underline{\underline{\parallel}}DH\underline{\underline{\parallel}}CF$,由原题的充分性证明知:$H$在$\triangle ABC$的外接圆上,所以加强命题的充分性成立,所以加强命题成立.

例20 (1997. 全国高中联赛二试题1)如图Ⅱ－4－5－30,已知两个半径不相等的$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于M、N两点,且$\odot O_1$、$\odot O_2$分别与$\odot O$内切于S、T两点.求证:$OM\perp MN$的充分必要条件是S、N、T三点共线.



图Ⅱ－4－5－30

证法1:如图Ⅱ－4－5－30,设$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O$的半径分别为r_1、r_2、r.由条件知O、O_1S三点共线,O、O_2、T三点共线,且$OS=OT=r$.连接OS、OT、SN、NT、O_1M、O_1N、O_2M、O_2N、O_1O_2.

充分性,设S、N、T三点共线,则$\angle S=\angle T$.又$\triangle O_1SN$与$\triangle O_2NT$均为等腰三角形.故$\angle S=\angle O_1NS$.$\angle T=\angle O_2NT$

于是　$\angle S=\angle O_2NT$,$\angle T=\angle O_1NS$

从而　$O_2N\parallel OS$,$O_1N\parallel OT$

故四边形OO_1NO_2为平行四边形.

因此得出:

$OO_1=O_2N=r_2=MO_2$,$OO_2=O_1N=r_1=MO_1$

故　$\triangle O_1MO\cong\triangle O_2OM$

从而　$S_{\triangle O_1MO}=S_{\triangle O_2OM}$　由此得$O_1O_2\parallel OM$

又由于$O_1O_2\perp MN$,故$OM\perp MN$

必要性,若 $OM \perp MN, O_1O_2 \perp MN$,有 $O_1O_2 \parallel OM$.从而,$S_{\triangle O_1MO} = S_{\triangle O_2OM}$.

设 $OM = a$,由 $O_1M = r_1, O_1O = r - r_1, O_2O = r - r_2, O_1M = r_2$,知 $\triangle O_1MO$ 与 $\triangle O_2OM$ 的周长都等于 $a + r$,记 $p = \frac{a+r}{2}$

由三角面积的海伦公式,有

$$S_{\triangle O_1MO} = \sqrt{p(p-r_1)(p-r+r_1)(p-a)}$$
$$= \sqrt{p(p-r_2)(p-r+r_2)(p-a)}$$
$$= S_{\triangle O_2OM}$$

化简得 $(r_1 - r_2)(r - r_1 - r_2) = 0$

又已知 $r_1 \neq r_2$,有 $r = r_1 + r_2$

故 $O_1O = r - r_1 = r_2 = O_2N, O_2O = r - r_2 = r_1 = O_1N$

所以,OO_1NO_2 为平行四边形.

$\angle O_2NS + \angle S = 180° = \angle O_1NT + \angle T$

又 $\triangle O_1SN$ 与 $\triangle O_2NT$ 均为等腰三角形,$\angle T = \angle O_2NT, \angle S = \angle O_2NS$

$\therefore \angle O_1NO_2 + 2\angle S = \angle O_2NS + \angle S = \angle O_1NT + \angle T = \angle O_1NO_2 + 2\angle T$

即 $\angle S = \angle T$

于是 $\angle O_1NS = \angle O_2NT$

故 $\angle O_1NS + \angle O_1NO_2 + \angle O_2NT = \angle SNO_2 + \angle S = 180°$

所以,S、N、T 三点共线.

证法二:如图 Ⅱ-4-5-31 所示,由已知条件 O、O_1、S 三点共线,O、O_2、T 三点共线.延长 MN 交 $\odot O$ 于 K、P,过 S 作 $\odot O_1$ 的切线 SQ,过 T 作 $\odot O_2$ 的切线 TQ,由蒙日定理三条根轴交于一点 Q,即 M、N、Q 三点共线.

充分性:若 S、N、T 三点共线

$\because$ QS、QT 为切线

$\therefore$ $\angle TSQ = \angle STQ$

$\because$ $OS \perp SQ, OT \perp TQ$

$\therefore$ O、S、Q、T 共圆

$\therefore$ $\angle TSQ = \angle TOQ$

又 $\because$ $\angle STQ = \angle TMQ$

$\therefore$ O、M、T、Q 共圆

$\therefore$ $OT \perp TQ$

$\therefore$ $\angle OMN = 90°$

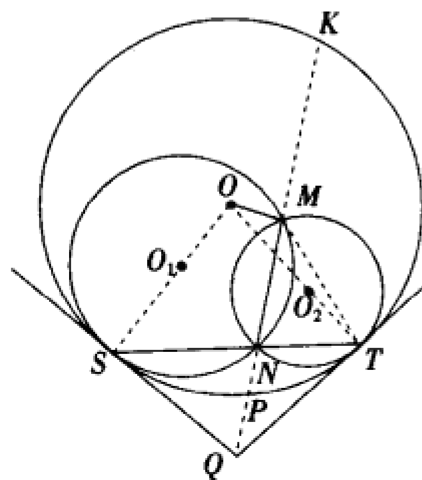


图 Ⅱ-4-5-31

必要性:若 $\angle OMN = 90°$

$\because$ $OS \perp SQ, OT \perp TQ$

$\therefore$ $\angle OSQ = \angle OTQ = \angle OMQ = 90°$

$\therefore$ O、M、T、Q、S 五点共圆

延长 TN 交 $\odot O$ 于 S_1,交 $OMTQS$ 所确定的圆于 S_2,则

$S_1N \cdot NT = PN \cdot KN, S_2N \cdot NT = MN \cdot QN$

$\because$ $\angle OMN = 90°$

$\therefore$ $OM \perp KP$,从而有 $MK = MP$

由于 $QP \cdot QK = QS^2 = QN \cdot QM$

$\therefore$ $QP \cdot (QM + MP) = (PQ + PN) \cdot QM$

$\therefore$ $QP \cdot MP = PN \cdot QM$

$\therefore$ $(QN - PN)(MN + PN) = PN(QN + MN)$

$\therefore \quad QN \cdot MN = PN \cdot MN + PN \cdot MN + PN^2 = PN(MN + NP) + PN \cdot MN$

$= PN(MK + MN) = PN - KN$

有　$S_1N \cdot NT = S_2N \cdot NT$，$\therefore \quad S_1N = S_2N$

即　S_1 与 S_2 重合

而 S 是点 Q 与 $\odot O$ 的交点

$\therefore \quad S_1 = S_2 = S$，即 S、N、T 三点共线

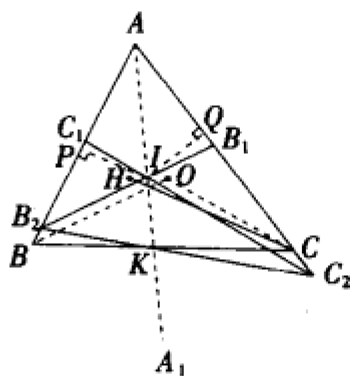


图 Ⅱ－4－5－32

例21　题目2003年中国数学奥林匹克第一大题，内容见本讲开始的"知识，方法，技能"中的叙述.

证明：首先证明 A、I、A_1 三点共线 $\Leftrightarrow \angle BAC = 60°$

如图 Ⅱ－4－5－32，设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，连 BO，CO. 则 $\angle BHC = 180° - \angle BAC$

$\angle BA_1C = 2(180° - \angle BHC) = 2\angle BAC$.

因此，$\angle BAC = 60° \Leftrightarrow \angle BAC + \angle BA_1C = 180°$

$\Leftrightarrow A_1$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 上.

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合.

$\Leftrightarrow A$、I、A_1 三点共线.

其次，再证 $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow \angle BAC = 60°$

作 $IP \perp AB$ 于点 P，$IQ \perp AC$ 于点 Q，则

$$S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2}IP \cdot AB_2 + \frac{1}{2}IQ \cdot AB. \quad ①$$

设 $IP = r$（r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径），则 $IQ = r$

又令 $BC = a$，$CA = b$，$AB = c$，则 $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$

注意到　$$S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot AB_2 \cdot \sin A \quad ②$$

由①、②及 $AB_1 = \dfrac{b}{2}$，$2AB_1 \cdot \sin A = h_c = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{c}$

有　$AB_2 \cdot \left(\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{c} - 2 \cdot \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}\right) = b \cdot \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$

则　$AB_2 = \dfrac{bc}{a+b-c}$

同理　$AC_2 = \dfrac{bc}{a+c-b}$

由 $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2}$，有 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2}$

于是　$bc = \dfrac{bc}{a+b-c} \cdot \dfrac{bc}{a+c-b}$

即　$a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow$ 由余弦定理，$\angle BAC = 60°$

§5.3 针对性训练

A组

1.(1983.第24届IMO试题)已知A为平面上两个半径不等的圆O_1和圆O_2的一个交点,两圆的外公切线分别为P_1Q_1、P_2Q_2的中点.求证$\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$

2.$\triangle ABC$内接于$\odot O$,$\angle BAC < 90°$,过B、C两点$\odot O$的切线交于P,M为BC中点.求证:(1)$\frac{AM}{AP} = \cos\angle BAC$;(2)$\angle BAM = \angle PAC$

3.(第10届IMO)证明:惟一存在三边长为连续整数且有一个角为另一个角的两倍的三角形.

4.(1999.越南数学奥林匹克)已知A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$外接圆上不包含A、B、C的弧$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$的中点,BC分别和$C'A'$、$A'B'$相交于M、N两点,CA分别和$A'B'$、$B'C'$相交于P、Q两点,AB分别和$B'C'$、$C'A'$相交于R、S两点.证明:$MN = PQ = RS$的充要条件是$\triangle ABC$为等边三角形.

5.(第37届IMO中国国家队选拔试题1)以$\triangle ABC$的边BC为直径作半圆,与AB、AC分别交于点D和E,过D、E作BC的垂线,垂足分别为F、G.线段DG、EF交于点M.求证:$AM \perp BC$

6.(第32届IMO预选题)在$\triangle ABC$中,已知$\angle A = 60°$,过该三角形的内心I作直线平行于AC交AB于F.在BC边上取点P使得$3BP = BC$.求证:$\angle BFP = \frac{1}{2}\angle B$

7.(第21届全俄中学生数学奥林匹克第五阶段试题)半圆圆心为O,直径为AB,一直线交半圆于C、D,交AB于$M(MB<MA,MC<MD)$.设K是$\triangle AOC$与$\triangle DOB$的外接圆除点O外之另一交点.求证:$\angle MKO$为直角.

8.(第31届IMO预选题)求证:若一个圆外切四边形有两条对边相等,则圆心到另外两边中点的距离相等.

9.(第12届IMO)M为$\triangle ABC$的边AB上任一点,r_1、r_2、r分别为$\triangle AMC$、$\triangle BMC$、$\triangle ABC$的内切圆半径;ρ_1、ρ_2、ρ分别为这三个三角形的旁切圆半径(在$\angle ACB$内部).求证:$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r}{\rho}$

10.(第38届IMO预备题)设D是$\triangle ABC$的边BC上的一个内点.AD交$\triangle ABC$外接圆于X,P、Q是X分别到AB和AC的垂足,Γ是直径为XD的圆.证明:PQ与Γ相切当且仅当$AB=AC$.

11.(1985.第28届IMO试题)设$\triangle ABC$,一个以O为圆心的圆经过顶点A及C,又和线段AB及线段BC分别交于点K及N,$\triangle ABC$,$\triangle KBN$的外接圆恰相交于B和另一点M.求证:$\angle OMB$为直角.

12.(蝴蝶定理)若AB是圆的弦,M是AB的中点,过M任意作弦CD和EF,连CF、DE,分别交AB于X、Y,则$MX=MY$

B组

1.(第37届IMO预选题)设$\triangle ABC$是锐角三角形,且$BC>CA$,O是它的外心,H是它的垂心,F是CH的垂足,过F作OF的垂线交边CA于P.证明:$\angle FHP=\angle BAC$

2.(1989.第23届全苏中学生数学竞赛十年级试题)在$\triangle ABC$的边AB、BC和CA上分别取点D、E、F,使$DE = BE$,$FE = CE$.求证:$\triangle ADF$的外接圆的圆心在$\angle DEF$的平分线上.

3.(第41届IMO试题)圆Γ_1和圆Γ_2相交于点M和N,设l是圆Γ_1和圆Γ_2的两条切线中距离M较近的那条公切线.l与圆Γ_1相切于点A,与圆Γ_2相切于点B.设经过点M且与l平行的直线与圆Γ_1还相交于点C,与圆Γ_2还相交于点D.直线CA和DB相交于点E,直线AN和CD相交于点P,直线BN和CD相交于点Q.证明:$EP = EQ$

4.(第38届IMO预选题)在圆Γ上取四个不同的点A、B、C、D,使$\angle BCD$不为直角.证明:
(a)AB、AC的垂直平分线分别与直线AD交于点W和V,且直线CV和BW交于一点T;
(b)线段AD、BT和CT中某一条线段的长度是另两条线段长度之和.

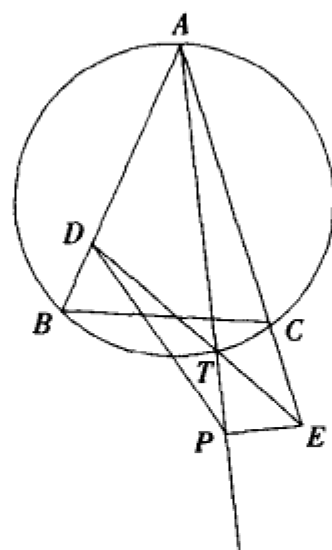
5.(第37届IMO预选题)设H为$\triangle ABC$的垂心,P为该三角形外接圆上的一点,E是高BH的垂足,并设$PAQB$与$PARC$都是平行四边形,AQ与HR交于X.证明:$EX \parallel AP$

6.凸四边形$ABCD$外切于$\odot O$,AB,BC,CD,DA上的切点分别为E,F,G,H,直线HE于FG交于P.求证:$OP \perp AC$

7.(1990.第31届IMO试题)在圆中,两条弦AB、CD相交于E点.M为弦AB上严格在E、B之间的点.过D、E、M的圆在E点的切线分别交直线BC、AC于F、G.已知$\frac{AM}{AB} = t$,求$\frac{GE}{EF}$(用t表示)

8.(第39届IMO试题)在凸四边形$ABCD$中,两对角线AC与BD互相垂直,两对边AB与DC不平行.点P为线段AB及CD的垂直平分线的交点,且P在四边形$ABCD$的内部.证明:$ABCD$为圆内接四边形的充分必要条件是$\triangle ABP$与$\triangle CDP$的面积相等.

9.(2000. IMO中国国家队选拔试题)如图Ⅱ-4-5-32,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,线段AB上有一点D,线段AC延长线上有一点E,使得$DE=AC$.线段DE与$\triangle ABC$的外接圆交于点T,P是线段AT的延长线上的一点.证明:点P满足$PD+PE=AT$的充分必要条件是点P在$\triangle ADE$的外接圆上.



图Ⅱ-4-5-33

面积问题与面积方法

§6.1 知识、方法、技能

由于平面上的凸多边形都可以分割成若干三角形，故在面积公式中最基本的是三角形的面积公式．它形式多样，应在不同场合下选择最佳形式使用．

Ⅰ．设$\triangle ABC$，a、b、c分别为角A、B、C的对边，h_a为a边上的高，R、r分别为$\triangle ABC$外接圆、内切圆之半径，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$．则$\triangle ABC$的面积有如下公式

(1) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a$

(2) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$

(3) $S_{\triangle ABC}=rp$

(4) $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

(5) $S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

(6) $S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}$

(7) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r_a(b+c-a)$

(8) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

(9) $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$

Ⅱ．除上述三角形面积公式外，还常用到以下面积定理：

(1) 一个图形的面积等于它的各部分面积之和；

(2) 两个全等形的面积相等；

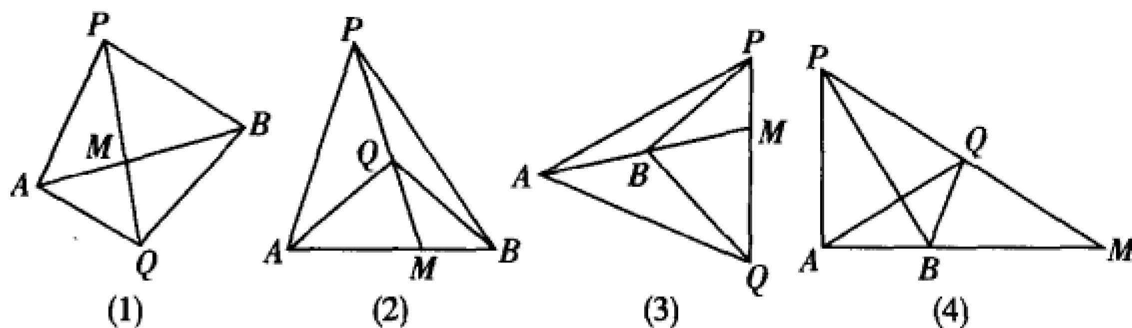
(3) 等底等高的三角形、平行四边形、梯形(梯形等底应理解为两底和相等)的面积相等；

(4) 相似三角形面积比等于相似比的平方；

(5) 等底(或等高)的三角形、平行四边形、梯形的面积比等于其所对应的高(或底)的比；

(6) 共边定理．

若直线AB与PQ交于点M，则有



图Ⅱ－4－6－1

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{PM}{QM}$$

【评注】 这是一个极为重要的定理,可以说是面积法的顶梁柱,虽然看起来是很普通的事,实则它有着极为深刻的内含:等式左边是一个和 M 根本无关的式子,而右边却可以得到一个确定 M 位置的式子.用这个式子就好像使用狙击枪一样,可以在根本不需要接近对手的时候就把对手搞定.

要注意的还有一点,即选择 A 和 B 的时候尽量不要让 A 和 B 在直线 PQ 上,否则会大大影响共边定理的效用.

(7) 定比分点定理.

M 是线段 PQ 上一点,满足 $MP:MQ=\lambda$,则

$$S_{\triangle AMB}=\frac{S_{\triangle APB}+\lambda\cdot S_{\triangle AQB}}{1+\lambda}$$

特别的,当 $\lambda=1$ 时,

$$S_{\triangle AMB}=\frac{S_{\triangle APB}+S_{\triangle AQB}}{2}$$

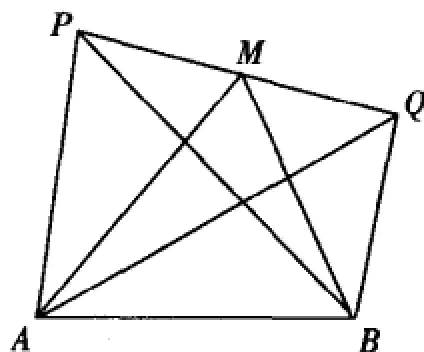


图 Ⅱ-4-6-2

【评注】 这个定理是对共边定理中处理面积积计算所不够强大的一面的一个补充,M 可能是一个感觉上悬空的点,用这个式子可以把和 M 有关的面积转化一下.

(8) 共角定理

若 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 相等或互补,则

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$$

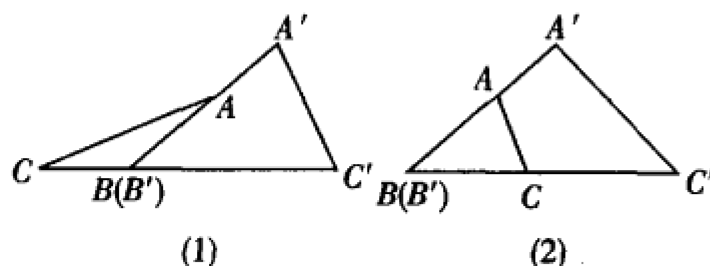


图 Ⅱ-4-6-3

【评注】 其实共角定理就是 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab\sin c$ 的一个简单推论,我们可以考虑用正弦定理来代替之.

Ⅲ. 初次面对这些很陌生的东西可能你会觉得很不适应,但是当你使用得熟练了之后你就会发现面积法确实是一个很强大的工具,它可以让你在看不清应该如何去算的时候,提供一个有力的方法,尤其在处理线段比例上,它有着很强大的功能.在后面很多地方都会用到面积的比例来转化边的比例,这也正是面积法的真正作用所在.

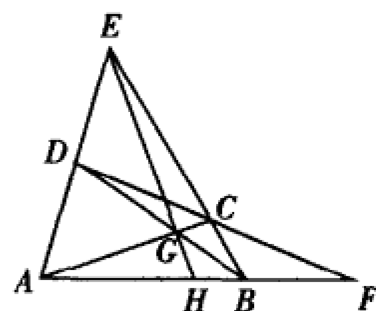


图 Ⅱ-4-6-4

我们先来熟悉一下这些定理,比如先证明在图 4-6-4 的图形中要证明 $\frac{AH}{HB}=\frac{AF}{BF}$,就可以由 $\frac{AH}{HB}=\frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle BGE}}=\frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle ABE}},\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BGE}}=\frac{DG}{BC}\cdot\frac{AC}{CG}$ 得到;只要证明 $\frac{DG}{BD}\cdot\frac{AC}{CG}\cdot\frac{BF}{AF}=1$ 即可,这即是以 $\triangle ABG$ 关于直线 DCF 的梅氏定理.于是我们要证明的东西就出来了,其中用到的只有共边定理,再加上梅氏定理作为一个辅助的工具.

请读者注意的是,面积法决不是那种能独当一面的方法,它一定是作为配角来使用的,而在证明过程中起到一个过渡的作用.

Ⅳ. 在这一讲中,重点研究两方面问题.一类是与面积直接有关的问题;另一类是应用面积方法来

解决的几何问题.所谓面积方法,就是在处理问题时,以面积的有关知识为论证或计算的手段,通过适当的变换,从而导出所考虑的量与量之间的关系,最后得到结论.

这两类问题在国内、国外的数学竞赛中常常出现,虽然面积方法是一种过渡性方法,但还是占有重要位置.因此,在本讲中研究这两方面问题的解题方法和手段,帮助读者开辟解题思路,丰富解题思想.

【注】 本讲中不包括用面积研究几何不等式的内容.但由于几何问题之间的普遍联系,所以也不可避免地要涉及一些.

§4.6.2 赛题精讲

例1 (蝴蝶定理)M 是 $\odot O$ 弦 AB 的中点,PQ 和 RS 是过 M 的两条弦,PS 和 RQ 交 AB 于点 X 和 Y.求证:$MX = MY$

【分析】 蝴蝶定理是很多读者所熟知的一个定理,当然它有一个纯几何的证法,就是直接关于 AB 的垂直平分线作对称得到的.但是笔者却十分看不起那个解法,因为那个证明实在没有什么道理,根本就是碰巧可以算出来而已.

所以,我将介绍这个定理的一个面积证法,请读者体会其中共角定理的应用.

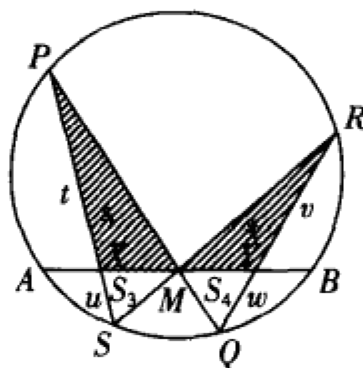


图 Ⅱ-4-6-5

证明:记 $MK = k$,其中 K 代表字母 P,Q,R,S,X,Y.$MA = MB = a$,$PX = t$,$SX = u$,$RY = v$,$QY = w$

再记 $S_{MXP} = S_1$,$S_{MYR} = S_2$,$S_{MXS} = S_3$,$S_{MYQ} = S_4$

由 $\angle PMX = \angle YMQ$,$\angle RMB = \angle XMS$ 得 $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{px}{qy}$,$\dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{xs}{ry}$

再由 $\angle P = \angle R$,$\angle S = \angle Q$ 得 $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{rv}{pt}$,$\dfrac{S_4}{S_3} = \dfrac{wq}{us}$

将以上四式相乘得到:$1 = \dfrac{x^2wv}{y^2ut}$,即 $x^2wv = y^2ut$

由圆幂定理有:$wv = AY \cdot YB = (a+y)(a-y) = a^2 - y^2$,$ut = AX \cdot XB = (a-x)(a+x) = a^2 - x^2$

代入上式得到 $x^2(a^2 - y^2) = y^2(a^2 - x^2)$

$\therefore a^2x^2 = a^2y^2 \Rightarrow x = y$

证毕

【评析】 这个解法就显得轻巧许多,就是简单的利用了一下共角定理就把一个很不好解决的东西搞定了.

很多的同学总有这样的一个想法就是每个条件都应该对应一个式子来表示它,转而言之就是每一个式子都应该是在题目中对应于一个条件.那么在这道题目中的四个式子都是怎么出来的呢?

首先 $\dfrac{S_1}{S_4}$ 和 $\dfrac{S_3}{S_2}$ 利用的是对顶角相等的结论,所以就对应于 PQ 和 RS 是过 M 这个条件,而 $\dfrac{S_2}{S_1}$ 和 $\dfrac{S_4}{S_3}$ 利用的是圆周角相等的结论,这等价于四点共圆的条件.所以说,任何的式子都不是凭空出现的,总会有它们对应的东西,不过有些是很不显然的而已.当然这个道理的使用价值并不是特别的大,因为你需要从条件出发而得到它的用法,这是一件很困难的事情,比如在这道题目中,事实上你根本就不会以为 PQ 和 RS 是过 M 也算一个条件.当然了,还是有一些题目就要利用这一原则的,就是每个条件都是有用的,从而,最别扭的条件也就往往可能是题目的突破口.

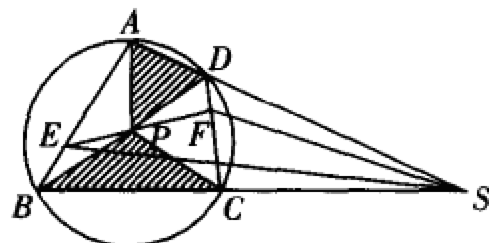
例2 已知 $ABCD$ 是圆内接四边形,E,F 分别为 AB,CD 上的点,且满足 $AE : EB = CF : FD$.设 P 是线段 EF 上满足 $PE : PF = AB : CD$ 的点.证明:$\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 的面积之比不依赖于 E,F 的选

择.

【分析】 此题是39届IMO的预选题，是一道标准的和面积有关的题目，放在这里就是希望读者可以熟悉一下我们前面介绍的一些公式的应用，先对面积的计算有个大致的了解.

这道题目的原解法确实很有创意，我把大致步骤抄录于此，请读者对其中不够详尽之处自己补充一下.

证法一：(1) 若直线 AD, BC 不平行(如图Ⅱ-4-6-6)，设其交点为 S.



图Ⅱ-4-6-6

我们可以证明 $\triangle SBE \backsim \triangle SDF$

于是 $\dfrac{SE}{SF}=\dfrac{SB}{SD}=\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{PE}{PF}$

从而 SP 平分 $\angle ESF$

进而可以知道 SP 也平分 $\angle ASB$

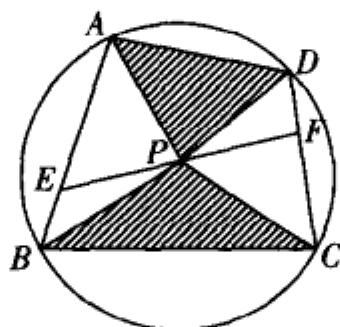
就是说，S 到边 AD 和 BC 的距离相等.

于是$\dfrac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPC}}=\dfrac{AD}{BC}$ 是定值.

(2) 直线 AD, BC 平行，这部分比较简单请读者自己给出证明.

【分析】 这个证明很有想法，但是我不推荐的原因是它的前提太困难了，你必须猜到 S 到边 AD 和 BC 的距离相等. 这个对于我们来说是很危险的，如果没有猜到，就满盘皆输了.

当然，大部分的题目都不是华山一条路，总是有其它适合我们的解法存在的. 我们的目标就是看这个比例如何，关键题目中也频繁出现比例，这个让我们觉得很闹心. 但是另一方面，这些比例提供了转化面积的方法. 于是，我们可以给出下面完全依赖面积的解法.



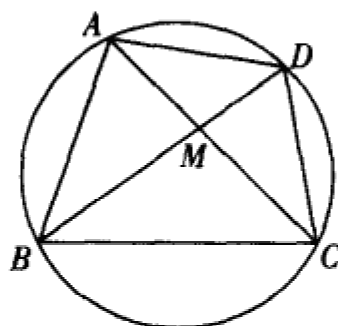
图Ⅱ-4-6-7

证法二：我们记 $AE:EB=CF:FD=\lambda$.

由我们开始给出的性质 ③ 知道

$$\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{S_{\triangle ADE}\cdot CD+S_{\triangle ADF}\cdot AB}{S_{\triangle BCE}\cdot CD+S_{\triangle BCF}\cdot AB}$$
$$=\frac{\lambda S_{\triangle ABD}\cdot CD+S_{\triangle ACD}\cdot AB}{S_{\triangle ABC}\cdot CD+\lambda S_{\triangle BCD}\cdot AB}.$$

当然，这时如果一狠心就算下去了也未尝不可，我们也可以选择一个温柔一点的方法，就针对 λ 的取值来看，题目要证明的是什么呢?



图Ⅱ-4-6-8

就是要证明系数的比例关系$\dfrac{S_{\triangle ABD}\cdot CD}{S_{\triangle BCD}\cdot AB}=\dfrac{S_{\triangle ACD}\cdot AB}{S_{\triangle ABC}\cdot CD}$.

题目证到这里就没什么好说的了已经到了怎么做都行的地步了.

我们特意使用一次共边定理熟悉一下.

设对角线 AC 和 BD 交于点 M.

于是，$\dfrac{S_{\triangle ABD}\cdot CD}{S_{\triangle BCD}\cdot AB}=\dfrac{AM\cdot CD}{CM\cdot AB}$，$\dfrac{S_{\triangle ACD}\cdot AB}{S_{\triangle ABC}\cdot CD}=\dfrac{DM\cdot AB}{BM\cdot CD}$.

剩下的部分可以由 $\triangle ABM \backsim \triangle DCM$ 推出.(请读者自己完成)

【评注】 读者可以比较一下两个解法的区别，第一个显得很轻灵，颇有创意；但是就实用性而言，第二个解法就是一个标准的中国式的证明，很朴实的几个式子也达到了同样的效果. 笔者比较建议读者学习第二个解法，因为它想法很简单，不像第一个解法那样花哨而且难以捉摸.

不论如何，这道题目的目的还是让读者对面积的基本计算有一个大致的了解，这对后面利用面积解题是一个必要的基础.

例3 已知⊙O 是 $\triangle ABC$ 在 $\angle A$ 内的旁切圆，与 AB、AC、BC 的切点分别为 D、E、F，且 OF 交 DE 于 N，AN 交 BC 于 M. 求证：$BM=MC$

【分析】 题目其实条件很简单，但是要处理 $BM=MC$ 可能会显得有点不自然. 所以，我们不妨使

用面积的比例来考虑.

证明：$\frac{MB}{MC}=\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ACN}}=\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle ACN}}\cdot\frac{S_{\triangle AEN}}{S_{\triangle AFN}}\cdot\frac{FN}{EN}=\frac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle AFN}}\cdot\frac{S_{\triangle AEN}}{S_{\triangle ACN}}\cdot\frac{FN}{EN}$

$$=\frac{AB}{AF}\cdot\frac{AE}{AC}\cdot\frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle ODF}}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\frac{1}{2}OD\cdot OE\cdot\sin\angle DOE}{\frac{1}{2}OD\cdot OF\cdot\sin\angle DOF}$$

$$=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin B}{\sin C}=1$$

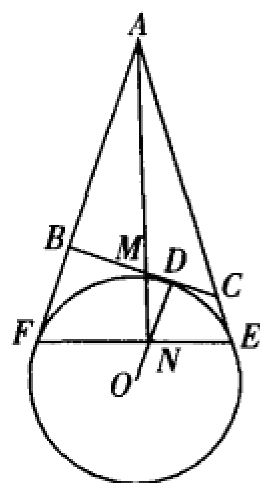


图 Ⅱ－4－6－9

【评注】 明锐的读者可能已经感觉到了一些面积法到比例的方法，就是在一个比例的后面乘上一个等于1的东西，然后再错位相消回到比例. 例如，我们要看$\frac{A}{B}$，一般的办法就是$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\cdot\frac{C}{B}$或$\frac{A}{B}=\frac{A}{C}\cdot\frac{C}{D}\cdot\frac{D}{B}$，这里$A,B,C,D$都代表面积. 但真正需要提高的一点就是$C$和$D$的选择，怎么去选择这两个中介的面积使得最后的结果比较容易.

下面，我们来看一些经典的使用面积法的题目，它们可以说是各式各样，经常有惊人之举.

例 4 （牛顿线）圆外接四边形的内切圆心和对角线中点共线.

【分析】 这是一个经典的结论，它的证明很有创意，是面积法的经典之作.

证明：如图 Ⅱ－4－6－10，四边形$ABCD$中，M和N为对角线AC和BD的中点，连接AO,BO,CO,DO,AM,CM,DN,BN.

于是$S_{\triangle ADM}+S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$

$$S_{\triangle ADN}+S_{\triangle BCN}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$$

$$S_{\triangle ADO}+S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$$

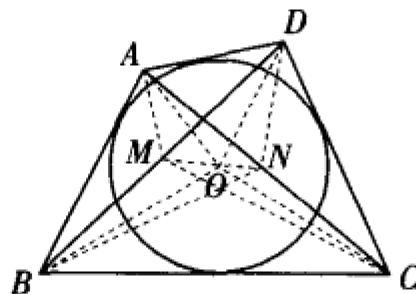


图 Ⅱ－4－6－10

由于平面上满足$S_{\triangle ADP}+S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}S_{四边形ABCD}$的点$P$的轨迹是一条直线（请见第八讲：定值，极值，轨迹）

所以，M、O、N共线

证毕.

【评注】 证明就这么简短的几句话，但是其中却包含着很多的道理.

笔者在看过解答之后再回头想想是怎么想到要使用面积法的，才发现使用面积法并不是一个很偶然的巧合，因为三个面积的式子是如此对称，所以使人不得不想到这会是一个很好的机会来使用面积法.

例 5 （2000. 全国高中数学联赛试题）如图 4－6－11，在锐角$\triangle ABC$的BC边上有两点E、F，满足$\angle BAE=\angle CAF$，作$FM\perp AB$，$FN\perp AC$（M、N是垂足）延长AE交$\triangle ABC$的外接圆于点D，证明：四边形$AMDN$与$\triangle ABC$的面积相等.

（注：此题当AD与AF重合时，即为第28届 IMO 第二题）

证法一： 如图 Ⅱ－4－6－11，连BD，则$\triangle ABD\backsim\triangle AFC$，所以

$AF\cdot AD=AB\cdot AC$

设$\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle EAF=\beta$，则

$$S_{四边形AMDN}=\frac{1}{2}AM\cdot AD\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AD\cdot AN\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{2}AD[AF\cdot\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha$$

$$+AF\cdot\cos\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)]$$

$$=\frac{1}{2}AD\cdot AF\cdot\sin(2\alpha+\beta)$$

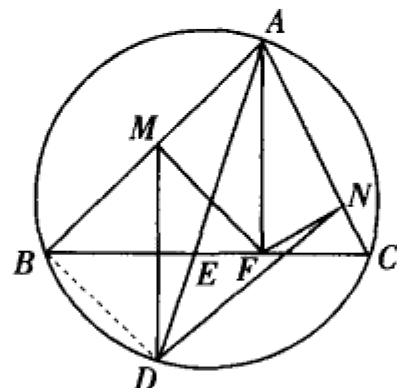


图 Ⅱ－4－6－11

$$= \frac{AF}{4R} \cdot AD \cdot BC \qquad ①$$

又　$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AF \cdot \sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}AC \cdot AF \cdot \sin\alpha$

$$= \frac{AF}{4R}(AB \cdot CD + AC \cdot BD)$$

由托勒密定理　$AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$

故　$S_{四边形AMDN} = S_{\triangle ABC}$

证法二:据证法1有

$S_{四边形AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot AF \cdot \sin(2\alpha+\beta) = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = S_{\triangle ABC}$

【评注】　证法1和证法2的共同特点是充分利用了正弦定理和加法定理;证法2比证法1巧妙是由于抓住了$\triangle ABD \backsim \triangle AFC$,从而有$AD \cdot AF = AB \cdot AC$

证法三:如图Ⅱ-4-6-12.作$DG \parallel MN$,交AC的延长线于G,只要证明

$S_{\triangle AMG} = S_{\triangle ABC}$

由于　$\angle AGD = \angle ANM = \angle AFM$,所以

$\triangle AGD \backsim \triangle AFM$

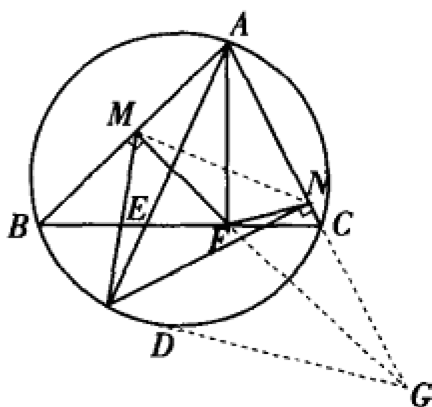
从而　$AD \cdot AF = AM \cdot AG$

又由于　$\triangle ABD \backsim \triangle AFC$

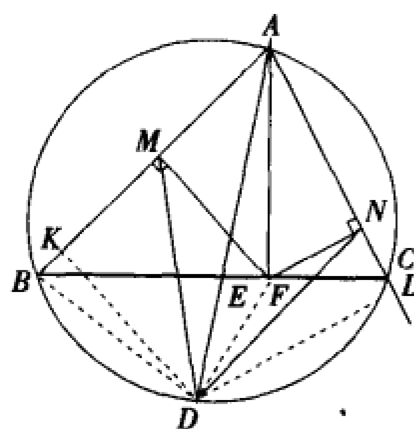
$\therefore$　$AD \cdot AF = AB \cdot AC$

从而　$AM \cdot AG = AB \cdot AC$

即　$S_{\triangle AMG} = S_{\triangle ABC}$.



图Ⅱ-4-6-12



图Ⅱ-4-6-13

证法四:作$DK \perp AB$,$DL \perp AC$,垂足分别为K、L,则只要证明$S_{\triangle FBM} + S_{\triangle FCN} = S_{\triangle FDM} + S_{\triangle FDN}$.(如图Ⅱ-4-6-13).

利用$S_{\triangle FDM} = S_{\triangle FKM}$,$S_{\triangle FDN} = S_{\triangle FLN}$,只需证明:$S_{\triangle FBM} + S_{\triangle FCN} = S_{\triangle FKM} + S_{\triangle FLN}$,即

$FM \cdot BM + FN \cdot CN = FM \cdot MK + FN \cdot NL$

因此,只需证明

$FM \cdot BK = FN \cdot NL$

由于$\triangle BKD \backsim \triangle CLD$,所以

$$\frac{BK}{CL} = \frac{DK}{DL} = \frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)} = \frac{FN}{FM}$$

故结论成立,其中$\alpha = \angle BAE = \angle CAF$.

【评注】　证法3、证法4除了考虑到相似三角形,主要考虑的是三角形面积的等积变换.面积的等积变换是处理面积问题的重要方法.本题应用面积的等积变换,还有如下简单的证法.

证法五:如图Ⅱ-4-6-14,作$AH \perp BC$,H为垂足,则A、M、H、F、N共圆,从而,有$\angle MHB =$

$\angle BAF=\angle CAD=\angle CBD$,所以 $MH \parallel BD$

同理 $NH \parallel CD$

于是　有

$S_{\triangle BMH}=S_{\triangle DMH}, S_{\triangle CNH}=S_{\triangle DNH}$

故　$S_{\text{四边形}AMDN}=S_{\triangle ABC}$.

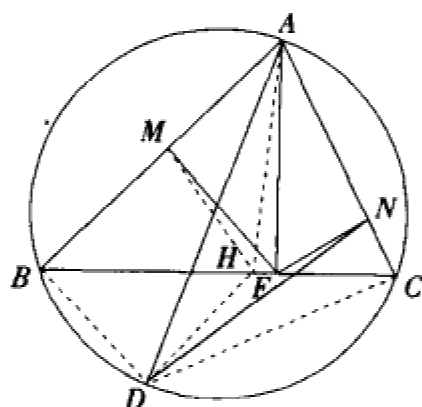


图 Ⅱ－4－6－14

例 6　如图 Ⅱ－4－6－15,E 为圆内接四边形 $ABCD$ 的 AB 边的中点,$EF \perp AD$ 于 F,$FH \perp BC$ 于 H,$EG \perp CD$ 于 G.求证:EG 平分 FH.

证明:设 $\angle HEP=\alpha$,$\angle FEP=\beta$,$\angle EPF=\theta$

$\because$　α 与 $\angle C$ 互补,$\angle A$ 与 $\angle C$ 互补

$\therefore$　$\alpha=\angle A$,同理 $\beta=\angle B$

又 $EF=AE\sin A=AE\cdot\sin\alpha$

$EH=EB\cdot\sin B=EB\cdot\sin\beta$

$AE=EB$.所以

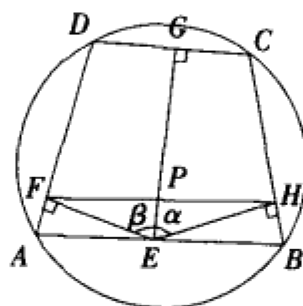


图 Ⅱ－4－6－15

$$1=\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PEF}}\cdot\frac{S_{\triangle PEH}}{S_{\triangle PEH}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}PE\cdot PF\cdot\sin\theta}{\frac{1}{2}PE\cdot EF\cdot\sin\beta}\cdot\frac{\frac{1}{2}PE\cdot EH\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}PE\cdot PH\cdot\sin(180^\circ-\theta)}$$

$$=\frac{PE^2\cdot PF\cdot EH\sin\theta\cdot\sin\alpha}{PE^2\cdot EF\cdot PH\cdot\sin\theta\cdot\sin\beta}=\frac{PF}{PH}\cdot\frac{EH\cdot\sin\alpha}{EF\cdot\sin\beta}$$

$$=\frac{PF}{PH}\cdot\frac{EB\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{AE\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{PF}{PH}$$

从而　$PF=PH$

【评注】　本例证明中,除巧妙利用面积公式外,还妙用了"1"的构造式,这对问题的解决起到了关键作用.

例 7　(1989.第 30 届 IMO 预选题)双心四边形是指既有内切圆又有外接圆的四边形.证明:双心四边形的两个心与对角线交点共线.

【分析】　证明三点共线的方法很多,有些方法是可以为我们所用的.但当初这个预选题所给答案用的是反演变换的方法.这种方法一是并不简单,二是反演的思想不易为中学生掌握运用.于是,我们考虑能否直接去解决此题,这需要充分利用内切圆和外接圆及其圆心,运用同一法,设 OO_1 与 BD 交于 E_1,OO_1 与 AC 交于 E_2,若

$$\frac{OE_1}{O_1E_1}=\frac{OE_2}{O_1E_2} \tag{①}$$

则 E_1 与 E_2 重合,即 O,O_1,E 三点共线.

那么,如果证明 ① 式成立呢?这就要应用我们所讲的"面积方法"来解决.

证明:如图 Ⅱ－4－6－16,设 OO_1 与 BD 交于 E_1,OO_1 与 AC 交于 E_2,则

$$\frac{OE_1}{O_1E_1}=\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle O_1BD}},\frac{OE_2}{O_1E_2}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle O_1AC}}$$

若 $\frac{OE_1}{O_1E_1}=\frac{OE_2}{O_1E_2}$,则 O、O_1、E 三点共线.

因此得证:

$$\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle O_1BD}}=\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle O_1AC}} \tag{②}$$

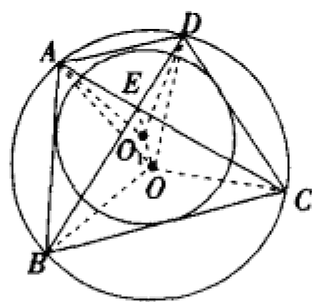


图 Ⅱ－4－6－16

设四边形 $ABCD$ 外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,则

$$\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OAC}}=\frac{\frac{1}{2}R^2\sin\angle BOD}{\frac{1}{2}R^2\sin\angle AOD}=\frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}$$

$$\begin{aligned}S_{\triangle O_1BD}&=\frac{1}{2}BO_1\cdot DO_1\sin\angle BO_1D\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\sin\frac{\angle B}{2}}\cdot\frac{r}{\sin\frac{\angle D}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle D}{2}+\angle C\right)\\&=\frac{1}{2}r^2\frac{1}{\sin\frac{\angle B}{2}\cdot\cos\frac{\angle B}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\angle C\right)\\&=\frac{r^2\cos\angle C}{\sin\angle B}\end{aligned}$$

同理可证 $S_{\triangle O_1AC}=\frac{r^2\cos\angle B}{\sin\angle C}$

所以 $\frac{S_{\triangle O_1BD}}{S_{\triangle O_1AC}}=\frac{\sin\angle C\cdot\cos\angle C}{\sin\angle B\cdot\cos\angle B}=\frac{\sin 2\angle C}{\sin 2\angle B}=\frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle OAC}}$

即(2)式成立,故命题得证.

例8 (第30届IMO预选题1989年)锐角三角形 ABC 中,角 A 的等分线与三角形的外接圆交于一点 A_1,点 B_1、C_1 与此类似,直线 AA_1 与 B、C 两角的外角等分线相交于 A_0,点 B_0、C_0 与此类似.求证:

(1) 三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的二倍;

(2) 三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积至少是三角形 ABC 面积的四倍.

分析与证明:面积问题最基本的方法是割补法.把复杂图形适当地分割成一些比较简单的单元,可以化难为易.

(1) 如图 Ⅱ-4-6-17,$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的内角平分线和外角平分线互相垂直,所以 $A_0A\perp B_0C_0$,即 A_0A 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的一条高线.同理 B_0B 和 C_0C 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的高线.设 $\triangle ABC$ 的内心为 I,则 I 是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的垂心.有一个著名定理:三角形中,三条高线的垂足,三边的中点,垂心与三个顶点连线的中点,这九点在同一个圆周上,这个圆叫做三角形的九点圆,图 Ⅱ-4-6-17 中的圆是 $\triangle A_0B_0C_0$ 的九点圆(因为它通过三条高线的垂足),所以 $IA_1=A_1A_0$,由此得:

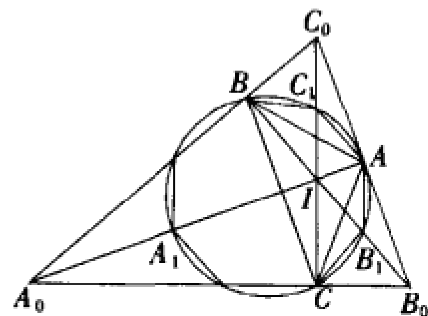


图 Ⅱ-4-6-17

$$S_{\triangle A_0CI}=2S_{\triangle A_1CI}$$

同理可得另外五个类似等式,把它们相加,就得到三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积等于六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的面积的二倍.

(2) 只要证明六边形的面积大于或等于 $\triangle ABC$ 的面积的二倍,还有一个条件没有用到:$\triangle ABC$ 是锐角三角形.有一道常见的几何题:"证明锐角三角形的垂心关于一边的对称点在三角形的外接圆上".由此可见,设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心,K 与 H 关于 BC 对称(如图 Ⅱ-4-6-18),则 K 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上.A_1 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,所以

$$S_{\triangle A_1BC}\geqslant S_{\triangle KBC}=S_{\triangle HBC}$$

同理可证另外两个类似的不等式,这样就能得到所需的结果.

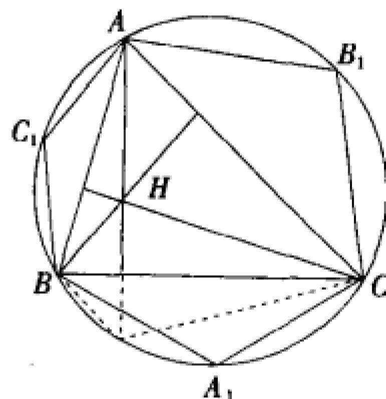


图 Ⅱ-4-6-18

下面我们深入讨论一道IMO试题的背景和证明方法.

例9 (第39届(1998年)IMO试题1)设凸四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 互相垂直,且两对边 AB 与 DC 不平行.点 P 为线段 AB 与 DC 的垂直平分线之交点,且在四边形的内部.

求证:A、B、C、D 四点共圆的充分必要条件为 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$

【分析】 为了深入了解此题的意义，我们先看一个古老的定理：

婆罗摩笈多定理：圆内接四边形 $ABCD$ 中，若二对角线交于 H 且互相垂直，则一边的中点与交点的连线必垂直于对边；反之，过交点作一边的垂线平分对边.

由此定理容易得到如下推论：

推论 1：圆内接四边形两条对角线互相垂直，则从对角线交点到一边中点的线段等于圆心到这一边的对边之距离（如图 Ⅱ－4－6－19 中，$HM = ON$）

这便是 1978 年上海市数学竞赛题之一. 其证明关键在于证明 $OMHN$ 是平行四边形.

推论 2：圆内接四边形两条对角线互相垂直，则圆心到一边的距离，等于这一边的对边的一半（如图 Ⅱ－4－6－19，即 $OM = \frac{1}{2}CD$）

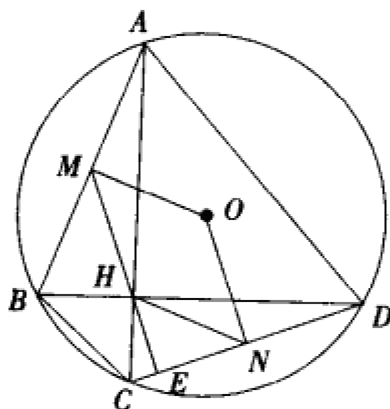


图 Ⅱ－4－6－19

此即 1978 年银川市数学竞赛题之一，由此可推得：

推论 3：圆内接四边形 $ABCD$，二对角线垂直并相交于 H，圆心为 O，则 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$

作为推论 3 之逆，便得第 39 届 IMO 的第一大题.

显然，此题欲证的必要条件，正是推论 3；而充分性则是该推论之逆，故本题的必要性易证，而难在充分性的证明. 下面我们用两种证法（反证法和直接证法）证明充分性.

证明：(1) 充分性的反证法

假定 $PA \neq PD$，不妨设 $PA < PD$，则以 P 为圆心，PD 为半径作 $\odot P$，其他符号如图 Ⅱ－4－6－20 所示.

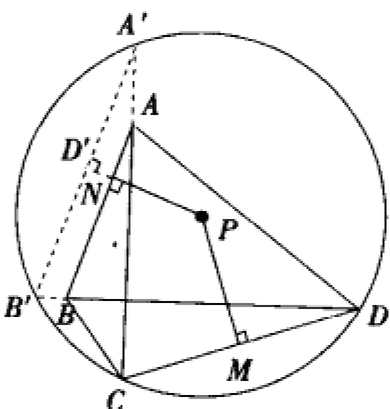


图 Ⅱ－4－6－20

∵ $PA < PD$

∴ A 在 $\odot P$ 内

而 C 在圆上，故延长 CA 交 $\odot P$ 于 A'，

同理延长 DB 交 $\odot P$ 于 B'，显然 $A'B' > AB$，$PN' > PN$，于是推论 2：

$PM = \frac{1}{2}A'B'$，$PN' = \frac{1}{2}CD$

∴ $\frac{1}{2}PM \cdot CD = \frac{1}{2}PN' \cdot A'B'$

再依充分性假定，$S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PAB}$

即 $\frac{1}{2}PM \cdot CD = \frac{1}{2}PN \cdot AB$

故 $PN' \cdot A'B' = PN \cdot AB$

显然与 $A'B' > AB$ 且 $PN' > PN$ 矛盾.

故充分性得证.

(2) 充分性的直接证法.

如果联系到推论 1，便知，$PMEN$ 应是一个平行四边形. 设法证明这一点，充分性便迎刃而解，现介绍如下.

符号如图 Ⅱ－4－6－21 所示.

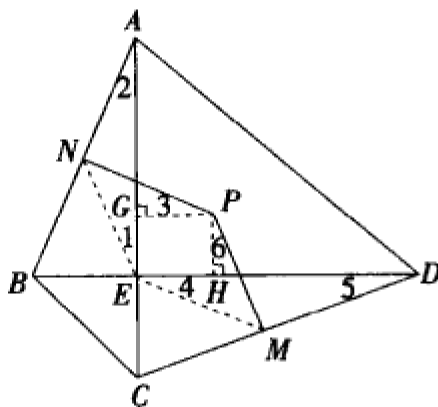


图 Ⅱ－4－6－21

∵ $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle PCD}$

∴ $\frac{1}{2}PN \cdot AB = \frac{1}{2}PM \cdot CD$

即 $PN \cdot EN = PM \cdot EM$

∴ $\frac{EN}{EM} = \frac{PM}{PN}$

∵ AB 不平行 CD

∴ $\angle 1 \xlongequal[\text{的中点}]{N\text{是斜边}} \angle 2$

$\xrightarrow[\text{为直径的圆上}]{N、G\text{在以}AP} \angle 3$

同理　$\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$

故　$\angle NEM = \angle 1 + 90^\circ + \angle 4$

$= \angle 3 + 90^\circ + \angle 6$

$= \angle MPN$

$\therefore$　$\triangle NEM \backsim \triangle MPN$

$\therefore$　$\triangle NEM \cong \triangle MPN$（$\because$　MN 公用）

$\therefore$　$PN = EM = \frac{1}{2}CD, PM = EN = \frac{1}{2}AB$

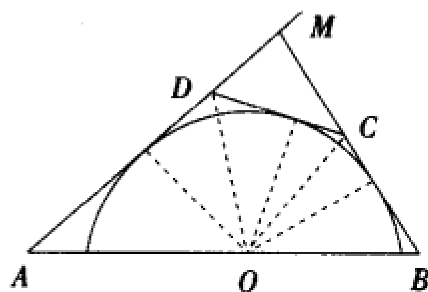
$\therefore$　$PA = \sqrt{PN^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}CD\right)^2 + PM^2} = PD$

$\therefore$　$ABCD$ 内接于圆，即充分性得证.

例 10　凸四边形 $ABCD$ 的顶点在一个圆周上，另一个圆的圆心在边 AB 上，且与四边形的其余三边相切. 求证：$AD + BC = AB$

【分析】　如图Ⅱ－4－6－22设另一圆圆心为 O，AD，BC 的延长线交于 M，即证 $AB = MA - MD + MB - MC$

由题设，$\odot O$ 为 $\triangle MCD$ 的旁切圆，且 $ABCD$ 是圆内接四边形，则 $\triangle MAB \backsim \triangle MCD$，于是，这两个三角形对应边之比等于相似比，对应面积之积之比等于相似比的平方. 利用二者之间的关系即可证得结论.



图Ⅱ－4－6－22

证明：如图所示，设另一圆圆心为 O，AD，BC 的延长线交于 M，由题设，$\odot O$ 为 $\triangle MCD$ 的旁切圆. 连结 OM，OC，OD，设 $MC = a$，$MD = b$，$CD = c$，$\odot O$ 的半径为 r，则

$S_{\triangle MCD} = S_{\triangle MDO} + S_{\triangle MCO} - S_{\triangle DOC}$

$= \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ar - \frac{1}{2}cr$

$= \frac{1}{2}(a + b - c)r$

$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}(MA + MB)r$

由于 $ABCD$ 是圆内接四边形，则 $\triangle MAB \backsim \triangle MCD$

所以　$\frac{MA}{a} = \frac{MB}{b} = \frac{AB}{c} = k$（常数）

$\therefore$　$\frac{S_{\triangle MAM}}{S_{\triangle MCD}} = k^2$

于是有　$\frac{MA + MB}{a + b - c} = k^2$，即$\frac{ak + bk}{a + b - c} = k^2$

从而　$a + b = k(a + b - c) = ak + bk - ck$

$= MA + MB - AB$

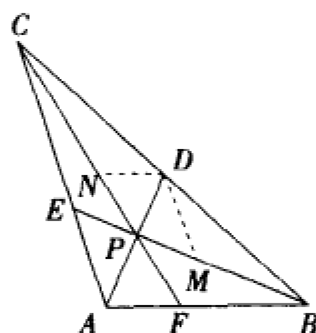
故　$AB = MA - b + MB - a$

$= MA - MD + MB - MC$

$= AD + BC$

§6.3 针对性训练

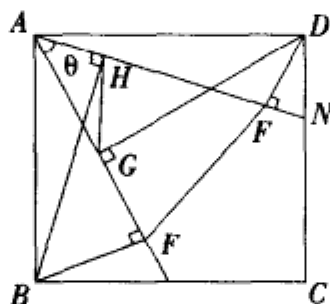
A组



图Ⅱ－4－6－23

1. 如图Ⅱ－4－6－23，P 是 $\triangle ABC$ 内的一点，连结 AP，BP，CP 并延长，分别与 BC，AC，AB 交于 D，E，F 点. 已知 $AP=6$，$BP=9$，$PD=6$，$PE=3$，$CF=20$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

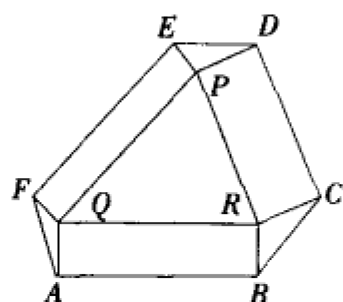
2.（1999. 上海市高中数学竞赛题）如图Ⅱ－4－6－24，$ABCD$ 是边长为 1 的正方形，点 M、N 分别在边 BC，CD 上，$BF\perp AM$，$BH\perp AN$，$DE\perp AN$，$DG\perp AM$，其中 F，H，E，G 为垂足，且 $\angle GAH=\theta$，则四边形 $EFGH$ 的面积是__________.



图Ⅱ－4－6－24

3. 在凸五边形 $ABCDE$ 中，设 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDE}=S_{\triangle DEA}=S_{\triangle EAB}=1$，求此五边形的面积.

4. 设凸六边形 $ABCDEF$ 的六个内角均为钝角，且 $AB\parallel DE$，$BC\parallel EF$，$CD\parallel FA$，以三边 AB、CD、EF 为边向内各作一个矩形，使它们的顶点两两重合，构成 $\triangle PQR$（如图Ⅱ－4－6－25）. 求证：矩形 $ABRQ$、$CDPR$、$EFQP$ 的面积之比等于 $\sin 2C:\sin 2E:\sin 2A$



图Ⅱ－4－6－25

5.（1999. 广西数学竞赛题）在 $\triangle ABC$ 中是否存在一点 P 使得过点 P 的任意直线都将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分？为什么？

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 是底边 BC 上一点，E 是线段 AD 上一点，使得 $\angle BED = 2\angle CED = \angle BAC$. 求证：$BD = 2CD$

7. 作平行四边形 $ABCD$ 的两条边 AB、BC 的平行线 EF，GH，则 4 个平行四边形中两条对角线 EH、GH 与四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 共点.

8.（第四届 CMO 试题）设点 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上，且 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$ 的内切圆有相等的半径 r，又以 r_0 和 R 分别表示 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的内切圆半径. 求证：$r + r_0 = R$.

B 组

1. 在面积为 S 的四边形 $ABCD$ 内部取点 O，使得
$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = 2S$
求证：四边形 $ABCD$ 是正方形，且 O 为中心.

2. 过 $\triangle ABC$ 内的一点 O 引三边的平行线 $DE \parallel BC$，$FG \parallel AB$，$HI \parallel CA$（如图 Ⅱ－4－6－26），已知 $\triangle HDO$、$\triangle GOE$、$\triangle OFI$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3，求 $S_{\triangle ABC}$

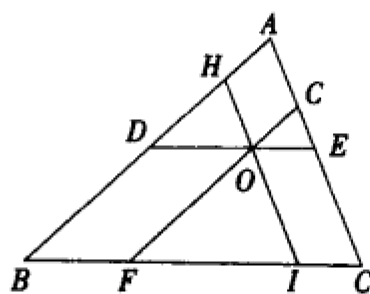


图 Ⅱ－4－6－26

3.（第 52 届波兰数学奥林匹克竞赛题）证明：在任意一个 $\triangle ABC$ 中，存在一点 P，使得过 P 的任何直线分该三角形的周长和面积所成的比相同.

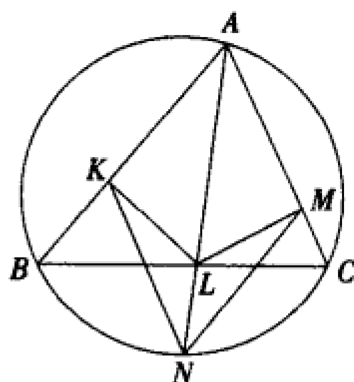


图 Ⅱ－4－6－27

4.（1987. 第 28 届 IMO）锐角 $\triangle ABC$ 的角 A 的平分线交 BC 边于 L，又交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 N，过 L 作 AB 和 AC 边的垂线 LK 和 LM，垂足是 K、M（如图 Ⅱ－4－6－27）. 求证：四边形 $AKNM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积.

5.(1998.莫斯科数学奥林匹克竞赛题）在 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA 与 AB 上取点 A_1、B_1 与 C_1，线段 A_1B_1、B_1C_1 与 C_1A_1 分 $\triangle ABC$ 为 4 个相同面积的三角形.求证：A_1B_1 与 C_1 是 $\triangle ABC$ 的边的中点.

6.(1999.世界城市数学竞赛）$\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，B' 是 CA 的中点，A'、C' 分别为 BC、AB 边上任意一点.求证：

(1)$\triangle A'B'C'$ 的面积不大于 $\triangle ABC$ 的面积的一半；

(2)$\triangle A'B'C'$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的四分之一的充要条件是 C' 和 A' 至少有一点是 AB 和 BC 的中点.

7.(1984·第 25 届 IMO）设在凸四边形 $ABCD$ 中，直径 CD 与以 AB 为直线的圆相切.求证：当且仅当 $BC \parallel AD$ 时，直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切.

8.如图，在“筝形”$ABCD$ 中，$AB = AD$，$BC = CD$，经过 AC、BD 的交点 O 任作两直线，分别交 AD 于 E，交 BC 于 F，交 AB 于 G，交 CD 于 H，GF 和 EH 分别与 BD 交于 I、J.求证：$IO = OJ$（图 Ⅱ－4－6－28）

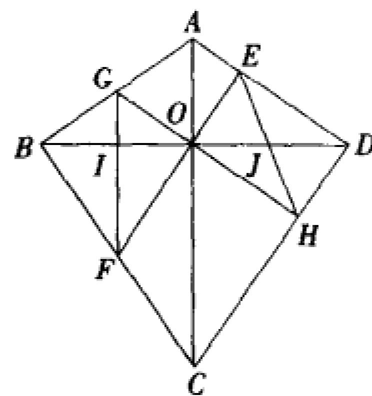


图 Ⅱ－4－6－28

9.(第 26 届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题）如图 Ⅱ－4－6－29 在 $Rt\triangle ABC$($\angle A = 90°$) 中，设 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的内角平分线交于 I 点，分别交对边于 D 和 E 点.证明：四边形 $BCDE$ 的面积是三角形 BIC 面积的两倍.

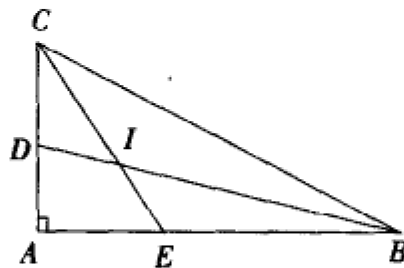


图 Ⅱ－4－6－29

10.在线段 AB 上取内分点 M，使 $AM \leqslant BM$，分别以 MA、MB 为边，在 AB 的同侧作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$.$\odot P$ 和 $\odot Q$ 分别是这两个正方形的外接圆，两圆交于 M、N.求证：B、C、N 三点共线.

11.(第 39 届 IMO 题) 如图 Ⅱ - 4 - 6 - 30 已知 $ABCD$ 是圆内接四边形，E、F 分别为 AB、CD 上的点，且满足 $AE:EB=CF:FD$. 设 P 是线段 EF 上满足 $PE:PF=AB:CD$ 的点. 证明：$\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 的面积之比不依赖于 F、E 的选择.

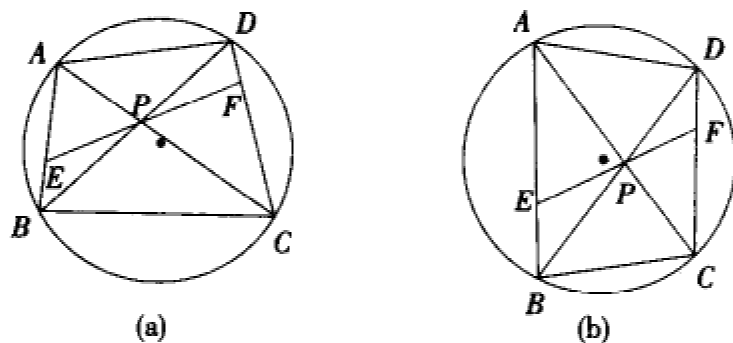


图 Ⅱ - 4 - 6 - 30

第七章

几何不等式

§7.1 知识、方法、技能

Ⅰ. 定义:几何问题中出现的不等式称为几何不等式.

Ⅱ. 有关证明线段不等的公理和定理

1. 在联结两点的所有线中,线段最短.

2. 在同一个三角形中,任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边.

3. 定点 P 到定直线的最短距离,是从 P 向定直线所作的垂线段的长.

4. 在两个三角形中,如果有两组对应边分别相等,那么夹角大的所对的第三边也大.

5. 在同一三角形中边长的大小顺序关系与对应角的大小顺序关系相同,而与对应高、中线及分角线长的顺序相反.

6. 在 $\triangle ABC$ 中,设三边 BC、CA、AB 分别为 a、b、c,内切圆半径为 r,旁切圆半径分别为 r_a、r_b、r_c 则

$$r_a \leqslant \frac{a^2}{4r}, r_b \leqslant \frac{b^2}{4r}, r_c \leqslant \frac{c^2}{4r}$$

7. 将军饮马问题:

一条直线 l 同侧有点 A 和 B,在直线 l 上求一点 P,使得 $AP + BP$ 最短.

做法是讨论 B 关于直线 l 的对称点 B',于是 $AP + BP = AP + PB' \geqslant AB'$,而 B' 事实上是一个定点,所以所求的点 P 即为 AB' 与直线 l 的交点.

将军饮马的思想在竞赛题中常有体现,比较显然的一个标志就是讨论形如 $AP + BP$ 这样的东西的极值的时候一般会使用这种方法.

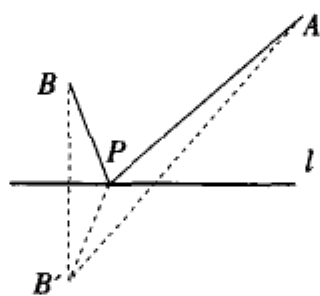


图 Ⅱ - 4 - 7 - 1

Ⅲ. 有关证明角不等的定理

1. 三角形的任何一个外角大于和它不相邻的任意一个内角.

2. 在同一个三角形中,大边对大角,小边对小角,反之亦然.

Ⅳ. 圆中有关不等量的知识

1. 在同圆或等圆中,圆心角(锐角)大则所对的弧大,弦大,弦心距小.

2. 过圆内一定点的弦中,以此点为中点的弦最小.

3. 若 A、B、C 为圆上的点,P 为圆外的点,Q 为圆内的点,且 P、C、Q 都在直线 AB 的同侧,则 $\angle AQB > \angle ACB > \angle APB$

Ⅴ. 几个著名的几何不等式

1. 托勒密定理的推广:在凸四边形 $ABCD$ 中,一定有:$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$,等号成立时四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形.

2. 欧拉定理

若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,两圆心间的距离为 d,则 $d = \sqrt{R(R - 2r)}$,且 $R \geqslant 2r$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,$d = 0$,此时 $R = 2r$

3. 艾尔多斯—莫迪尔(*Erdiss - Mordell*)不等式:在 $\triangle ABC$ 内部任取点 P,d_A,d_B,d_C 分别表示由

点 P 到顶点 A、B、C 之间的距离，d_a、d_b、d_c 分别表示由点 P 到边 BC、CA、AB 的距离，则 $d_A + d_B + d_C \geqslant 2(d_a + d_b + d_c)$

4. 外森比克不等式：设 $\triangle ABC$ 的边长和面积分别为 a、b、c 和 S，则 $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$，当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

5. 费尔马（*Fermat*）问题：在 $\triangle ABC$ 中，使 $PA + PB + PC$ 为最小的平面上的 P 点称为费尔马点. 当 $\angle BAC \geqslant 120°$ 时，A 点为费尔马点；当 $\triangle ABC$ 中任一内角都小于 $120°$ 时，则与三边张角为 $120°$ 的 P 点为费尔马点.

Ⅵ. 几个著名的代数不等式

在几何不等式的证明中，常用到的著名代数不等式有：柯西不等式，排序不等式，算术平均值不等式等.

Ⅶ. 证明几何不等式常用方法

1. 几何方法

几何方法是指用纯粹的平面几何知识来证明几何不等式，最常用的平面几何知识是：

(1) 前面叙述中的 Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，抓住几何图形特征，挖掘几何图形中最基本的几何不等关系. 事实上，这些最基本的几何不等关系在有关几何不等式的论证中异常活跃，常常成为解决问题的关键.

(2) 著名的几何不等式.

(3) 与面积有关的几何不等式也占有重要地位. 其内容丰富，涉及面宽，富于智巧. 证明这类不等式大都需要利用面积的等积变换、面积公式及面积比的有关定理等知识.

2. 代数方法

(1) 在引用勾股定理，余弦定理和一些等量关系式时，得用重要代数不等式进行转化、来达到证明几何不等式的目的.

(2) 适当地引入变量，将几何问题化为代数问题，特别是二次函数；恰当选择变量为关键.

3. 三角方法

(1) 在用正弦定理，余弦定理，三角形面积公式，圆外切四边形面积公式等涉及三角函数的等量关系时，注意应用三角函数有界性达到证明几何不等式的目的.

(2) 三角恒等变型：这主要是应用和、差、倍、半角公式，积化和差及和差化积公式等，制造出便于应用已知不等式的形式，以完成命题的证明.

(3) 边角互换：这主要是利用三角函数定义、正弦定理、余弦定理等，把一个关于角(边) 的不等式转化成边(角) 的不等式.

§7.2 赛题精讲

从近期国际、国内数学赛事中有关几何不等式的赛题可看出，三种方法的运用上都有体现. 但相对而言，运用几何方法的较多，然后是三角方法与代数方法的应用.

Ⅰ. 运用几何方法的几何不等式

例 1 （2001. 第 42 届国际 IMO 试题）设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，从 A 作 BC 的高，垂足为 P，且 $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30°$. 证明：$\angle CAB + \angle COP < 90°$

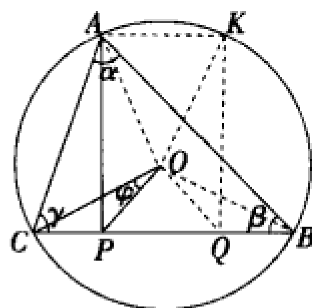


图 Ⅱ－4－7－2

【分析】 本题所求证的式子的左边为两角之和，故不易从面积和三角法入手，应从几何方法入手，注意图中最基本的等量关系和不等关系.

(1) 联想锐角 $\triangle ABC$ 中的一个等式：

$\angle OCP = \angle OBP = \dfrac{1}{2}(180° - \angle COB) = 90° - \angle CAB$（如图Ⅱ－4－7－

2) 进而 $\angle CAB + \angle OCP = 90°$

(2) 如能证明 $\angle COP < \angle PCO$. 则问题即刻解决. 故问题的焦点是在 $\triangle OCP$ 中, 努力证明 $OP > PC$

证明: 令 $\alpha = \angle CAB, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle BCA, \varphi = \angle COP$, 如图 Ⅱ - 4 - 7 - 2, 设 K, Q 分别为点 A, P 关于 BC 的垂直平分线的对称点, R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径, 则

$OA = OB = OC = OK = R$

由于 $KQPA$ 为矩形, 则 $QP = KA$

及 $\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = \angle AOB - \angle AOC$.

$= 2\gamma - 2\beta \geqslant 60°$

由此及 $OA = OK = R$, 导出

$KA \geqslant R, PQ \geqslant R$

在 $\triangle ABC$ 中,

$OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geqslant R + PC$

因此, $OP > PC$ $\therefore \angle PCO > \angle POC$ ①

另一方面, 在 $\triangle COP$ 中, $\angle PCO > \varphi$

由 $\alpha = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - 2 \cdot \angle PCO) = 90° - \angle PCO$

即 $\angle CAB + \angle PCO = 90°$

结合 ① 式有 $\angle CAB + \angle COP < 90°$

【评注】 此题前半段证明 $OP > PC$ 的过程中应用了"对称变换"的手法.

请用这种手法证明著名的蝴蝶定理:

设 M 是 $\odot O$ 中弦 AB 的中点, CD, EF 分别是过 M 点的两条弦. 连结 DE 和 CF 分别交 AB 于 P 和 Q 两点, 则 $PM = QM$.

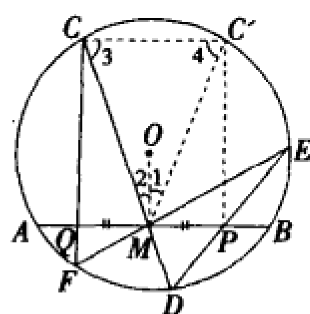


图 Ⅱ - 4 - 7 - 3

证: 以 OM 为对称轴, 作 MC 的对称图形 MC', (如图 Ⅱ - 4 - 7 - 3), 则

$MC = MC'$. $\angle 1 = \angle 2$

$\angle CMP = \angle C'MQ$

$\angle C'EP = \angle C'ED = 180° - \angle 3 = 180° - \angle 4 = 180° - \angle C'MB$

所以, C'、M、P、E 四点共圆.

所以 $\angle MC'P = \angle MEP = \angle MCQ$

$\therefore$ $\triangle MC'P \cong \triangle MCQ, MP = MQ$

例 2 (1999. 第 40 届 IMO 预选题) 已知 M 是 $\triangle ABC$ 内任意一点. 证明:

$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC$

【分析】 要证上述不等式, 只要证 MA(或 MB 或 MC) $+ MA + MB + MC < AB + AC + BC$. 而此不等式左边有四条线段, 右边只有三条线段, 因此考虑把 AB, BC, AC 各分出部分线段, 利用中点把它们各分成两段则为一种常见方法. 这样, 不等式左边为四条线段, 右边为六条线段, 可以先证明四边形及其内部一点之间一些线段不等关系的一个引理.

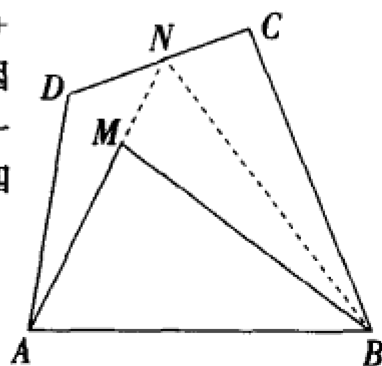


图 Ⅱ - 4 - 7 - 4

证明:

引理 M 是凸四边形 $ABCD$ 内的一点, 则

$MA + MB < AD + DC + CB$

事实上, 如图 Ⅱ - 4 - 7 - 4, 设 AM 交四边形 $ABCD$ 于 N, 不妨设 N 在 CD 上, 则

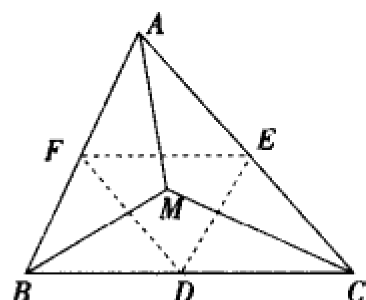
$MA + MB < MA + MN + NB$

$= AN + NB$

$\leqslant AD + DN + NC + CB$

$= AD + DC + CB$

如图Ⅱ－4－7－5，设 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 三边中点所得三角形，且将 $\triangle ABC$ 分成四个区域，每个区域至少被凸四边形 $ABDE$，$BCEF$，$CAFD$ 中的两个覆盖，不妨设 M 属于四边形 $AFDC$ 和 $ABDE$，则由引理，得



图Ⅱ－4－7－5

$MA + MC < AF + FD + DC = AF + EC + DC$

$MA + MB < AE + ED + DB = AE + FB + DB$

两式相加，得

$MA + MA + MB + MC < AB + AC + BC$

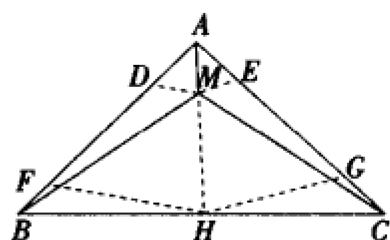
同理

$MB + MA + MB + MC < AB + AC + BC$

$MC + MA + MB + MC < AB + AC + BC$

故 $\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + AC + BC$

另证：不妨设 $\min\{MA, MB, MC\} = MA$，则以 A 为圆心，MA 为半径作圆，与 AB，AC 必相交，设交点为 D，E，延长 AM 交 BC 于 H，过 H 作 $HF // MD$，$HG // ME$ 分别交 AB，AC 于 F、G. 则有 $DM < FH$，$ME < HG$.



图Ⅱ－4－7－6

在等腰 $\triangle ADM$ 中，底角 $\angle ADM$ 必为锐角，即 $\angle AFH$ 为锐角，则 $\angle BFH$ 为钝角. 因此在 $\triangle BFH$ 中，有 $BH > FH$. 同理有 $HC > HG$，故

$DM < BH, ME < HC$

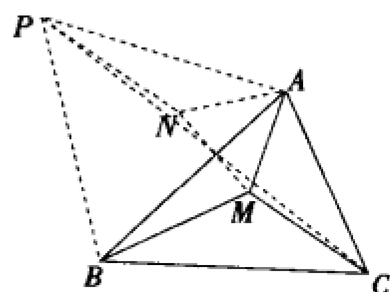
又因为 $BD + DM > MB. CE + ME > MC$

所以 $BD + BH > MB, CE + HC > MC$

因此

$$\begin{aligned} AB + AC + BC &= AD + BD + BH + HC + CE + EA \\ &= MA + (BD + BH) + (HC + CE) \\ &\quad + MA > MA + MA + MB + MC \\ &= \min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC \end{aligned}$$

证毕.

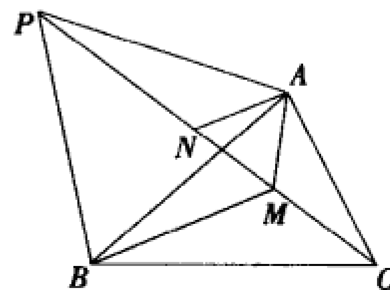


图Ⅱ－4－7－7

为了研究"2001，江苏省数学竞赛题的拓广"首先研究"知识，方法，技能"中提到的"费尔马(fermat)问题".

例 3 （三角形的 fermat 点）在锐角 $\triangle ABC$ 中，求点 M 使得 $AM + BM + CM$ 最小.

解：分别以 AM 和 AB 为边向 $\triangle ABC$ 外作正三角形 ABP 和 AMN，连接 MN，CP.



图Ⅱ－4－7－8

所以有 $\angle MAN = 60^\circ = \angle BAP$

$\therefore \angle BAM = \angle PAN$

加上条件 $AM = AN$，$AB = AP$，就得到 $\triangle BAM \cong \triangle PAN$

$\therefore PN = BM$

$\therefore AM + BM + CM = MN + PN + CM \geqslant CP$

请读者注意这里 P 事实上是个定点，所以 CP 是定长.

当 M 使得 C, M, N, P 共线时，$AM + BM + CM$ 取到最小值.

这时 $\angle AMB = \angle ANP = 120^\circ$

$\angle AMC = 180^\circ - \angle AMN = 120^\circ$

$\angle BMC = 120^\circ$

所以 M 即是使得 $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^\circ$ 的点.

至于 M 的存在性，我们考虑以 BC 为弦的一段 120° 的圆弧和以 AC 为弦的一段 120° 的圆弧，它们

二者的交点即为点 M.(点 M 称为 $\triangle ABC$ 的 Fermat 点) 如图 Ⅱ-4-7-9

【评注 1】 做正三角形的思路比较有意思,希望读者可以把这个题目背下来.

(2) 还有一个比较有意思的图形大家可以看一下,在图 Ⅱ-4-7-10 中有 AP,BQ,CR 共点.而它们所共的点就是 Fermat 点 M.

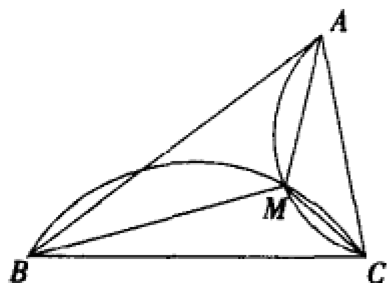


图 Ⅱ-4-7-9

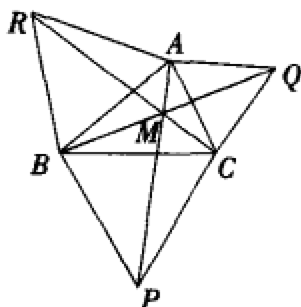


图 Ⅱ-4-7-10

例 4 (2001.江苏省数学竞赛试题)(1) 如图 Ⅱ-4-7-11,已知四边形 $ABCD$ 中,$AB = AD$, $\angle BAD = 60°$,$\angle BCD = 120°$,证明:$BC + DC = AC$

(2) 如图 Ⅱ-4-7-12,四边形 $ABCD$ 中,$AB = BC$,$\angle ABC = 60°$,P 为四边形$ABCD$ 内一点,且 $\angle APD = 120°$.证明:$PA + PD + PC \geqslant BD$

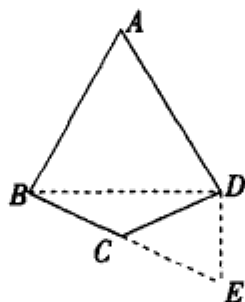


图 Ⅱ-4-7-11

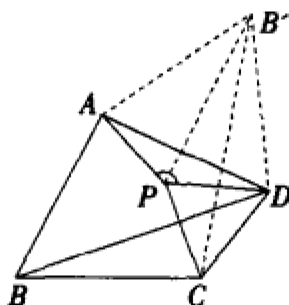


图 Ⅱ-4-7-12

证明:如图 Ⅱ-4-7-11,延长 BC 至 E,使 $CE = CD$

$\because \angle BCD = 120°$,$\therefore \angle DCE = 60°$

又$\because CD = CE$

$\therefore \triangle CDE$ 为等边三角形

$\therefore DE = CD = CE, \angle CDE = 60°$

又$\because AB = AD, \angle BAD = 60°$

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形

故 $AB = AD = BD, \angle BDA = 60°$

$\therefore \angle ADB = \angle CDE$

$\therefore \angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle CDE + \angle BDC = \angle BDE$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BED$

$\therefore AC = BE = BC + CE = BC + CD$

(2) 如图 Ⅱ-4-7-12,在四边形 $ABCD$ 外侧作正 $\triangle AB'D$,则 $\angle APD = 120°$,则四边形 $AB'DP$ 符合(1) 中的条件,于是 $B'P = AP + PD$

易知 $B'C \leqslant PB' + PC$,于是

$B'C \leqslant AP + PD + PC$

下面只需证明:$BD = B'C$

$\because \triangle AB'D$ 是正三角形

$\therefore \quad AB' = AD, \angle B'AD = 60°$

又易知 $\triangle ABC$ 是正三角形.

$\therefore \quad AC = AB, \angle BAC = 60°$

由此得 $\triangle AB'C \cong \triangle ADB$,故 $B'C = DB$

【评注】 1° 第(1)小问是由下面的命题改编而成:

设 P 为正 $\triangle ABC$ 外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点,则 $PA = PB + PC$.

2° 第(2)小问中的条件 $\angle APD = 120°$ 可以取消,结论仍成立,其证明要用到费尔马点的知识.

事实上,$\because ABCD$ 为凸四边形.

$\therefore \quad \angle BAD < 180°, \angle BCD < 180°$

又 $\triangle ABC$ 为正三角形

$\therefore \quad \angle CAD < 120°, \angle ACD < 120°$

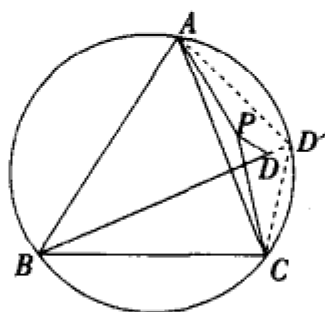
下面分两种情况讨论:

(i) 若 $\angle ADC \geqslant 120°$,则 D 为 $\triangle ADC$ 的费尔马点,如图Ⅱ-4-7-13,D 在 $\triangle ABC$ 的外接圆内,(或圆圈上),连 BD 交圆于 D'

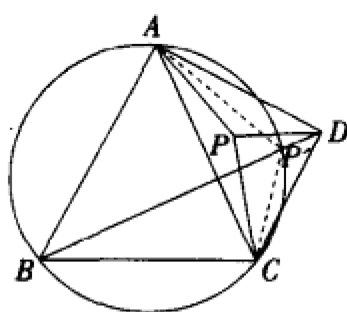
故 $PA + PC + PD \geqslant AD + DC \geqslant AD' + D'C$

又 $\because \angle AD'C = 120°$, $\therefore \quad AD' + D'C = BD'$

$\therefore \quad PA + PC + PD \geqslant BD' \geqslant BD$



图Ⅱ-4-7-13



图Ⅱ-4-7-14

(ii) 若 $\angle ADC = 120°$,则 D 在 $\triangle ABC$ 外接圆外部,设 P' 为 BD 与该圆的交点(如图Ⅱ-4-7-14),则 P' 为 $\triangle ADC$ 的费尔马点.于是

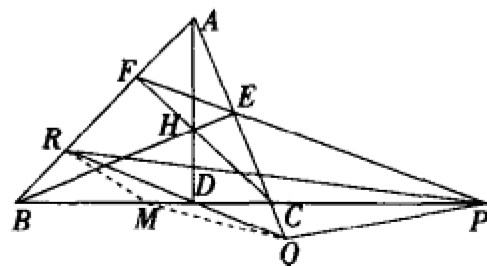
$PA + PC + PD \geqslant P'A + P'C + P'D$

而 $\angle AP'C = 120° \quad \therefore P'A + P'C = BP'$

$\therefore \quad PA + PC + PD \geqslant BP' + P'D = BD$

综上所述,$PA + PC + PD \geqslant BD$ 得证.

例 5 已知过锐角 $\triangle ABC$ 顶点 A、B、C 的垂线分别交对边于 D、E、F,$AB > AC$,直线 EF 交 BC 于 P,过点 D 且平行 EF 的直线分别交 AC、AB 于 Q,R,N 是 BC 上的一点,且 $\angle NQP + \angle NRP < 180°$.求证:$BN > CN$



图Ⅱ-4-7-15

【分析】 在题设条件不变的情况下,命题相当于"若 $\angle NQP + \angle NRP < 180°$,则 $BN > CN$".因此如果能证明"当 $BN = CN$ 时,$\angle NQP + \angle NRP = 180°$",则原命题得证.

因此考虑 BC 中点 M,得证 R, M, Q, P 四点共圆.这是解决原命题的关键.

这只要 $RD \cdot DQ = MD \cdot DP$

由于可证 B, R, C, Q 四点共圆,得 $RD \cdot DQ = BD \cdot DC = (BM + MD)(CM - MD) = MC^2 - MD^2$.故只要证 $MC^2 = MD \cdot MP$ 即可.

证明: 取 BC 中点,连 DE

$\because$ B、C、E、F 四点共圆

A、B、D、E 四点共圆

$\therefore$ $\angle PEC = \angle ABC = \angle DEC$

连 ME,因为 $\angle EDP = 180° - \angle ACB - \angle CED$

故 $\angle EMC = 180° - 2\angle ACB$

(因 $Rt\triangle BEC$ 中 ME 是斜边 BC 的中线,$\therefore ME = MC$)

两式相减,得

$\angle MED = \angle EDP - \angle EMC = \angle ACB - \angle CED$

$\qquad = \angle ACB - \angle CEP = \angle EPC$

$\therefore$ $\triangle MDE \backsim \triangle MEP$

$\therefore$ $ME^2 = MD \cdot MP = MC^2$

$\because$ $PQ \parallel FD$,F、E、C、B 四点共圆

$\therefore$ $\angle BRD = \angle BFE = \angle DCQ$

即 B,R,C,Q 四点共圆.

所以 $RD \cdot DQ = BD \cdot CD$

$= (BM + MD) \cdot (CM - MD)$

$= MC^2 - MD^2 = MD \cdot MP - MD^2$

$= MD(MP - MD) = MD \cdot DP$

故有 R,M,Q,P 四点共圆

$\therefore$ $\angle MRP + \angle MQP = 180°$

(注:上述即证明了当 $BM = CM$ 时,$\angle MRP + \angle MDP = 180°$)

当 N 在 BC 上,且 $\angle NQP + \angle NRP < 180°$ 时,N 必在 M 右侧

(否则 $\angle NQP + \angle NRP > \angle MQP + \angle MRP = 180°$)

$\therefore$ $BN > CN$

另证,取 BC 中点 M.

$\because$ $BE \perp AC$,$CF \perp AB$.得 B,C,E,F 四点共圆

$\therefore$ $\angle CEP = \angle ABC$

又 $EF \parallel QR$

$\therefore$ $\angle CEP = \angle CQD$,得 $\angle ABC = \angle CQD$.即 B,Q,C,R 四点共圆

$\therefore$ $DR \cdot DQ = DB \cdot DC$

设 $BM = MC = a$,$CP = c$,$DM = b$,则

$DB \cdot DC = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$\because$ $PE \cdot PF = PC \cdot PB$

由"九点圆"知,D、E、F、M 四点共圆

$\therefore$ $PE \cdot PF = PD \cdot PM$

$PC \cdot PB = PD \cdot PM$

即 $c \cdot (2a + c) = (a + c - b)(a + c)$

亦即 $a^2 = b(a + c)$

因此 $DR \cdot DQ = DB \cdot DC = a^2 - b^2$

$= b(a + c) - b^2 = b(a + c - b)$

$= DM \cdot DP$

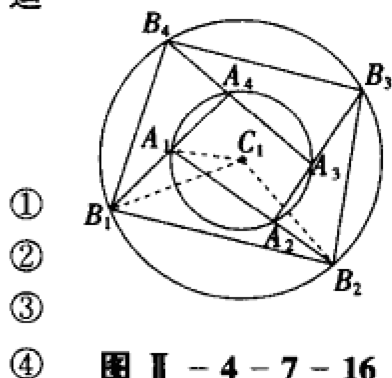
即 P,Q,M,R 四点共圆.

"以下"到"证出结论"同原证法.

【评注】 "九点圆"见第三讲:"共圆,共线,共点"中例 5.

例 6 （1988.第3届全国冬令营）如图Ⅱ－4－7－16所示，设C_1、C_2是同心圆，C_2的半径是C_1半径的2倍，四边形$A_1A_2A_3A_4$内接于圆C_1，将A_4A_1延长交圆C_2于B_1，A_3A_4延长交圆C_2于B_4.试证明：四边形$B_1B_2B_3B_4$的周长大于等于四边形$A_1A_2A_3A_4$的周长的2倍，并请确定等号成立的条件.

证明：记公共圆心为O，连接OA_1、OB_1和OB_2，在四边形$OA_1B_1B_2$中运用托勒密定理有



图Ⅱ－4－7－16

$OB_1 \cdot A_1B_2 \leqslant OA_1 \cdot B_1B_2 + OB_2 \cdot A_1B_1$

因　$OB_1 = OB_2 = 2OA_1$，故$2A_1B_2 \leqslant B_1B_2 + 2A_1B_1$

即　$B_1B_2 \geqslant 2A_1A_2 + 2A_2B_2 - 2A_1B_1$　①

同理有　$B_2B_3 \geqslant 2A_2A_3 + 2A_3B_3 - 2A_2B_2$　②

$B_3B_4 \geqslant 2A_3A_4 + 2A_4B_4 - 2A_3B_3$　③

$B_4B_1 \geqslant 2A_4A_1 + 2A_1B_1 - 2A_4B_4$　④

四式相加得

$B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + B_4B_1 \geqslant 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1)$　⑤

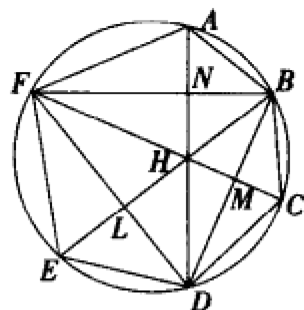
要使⑤式中等号成立，当且仅当$OA_1B_1B_2$四点共圆.这时，$\angle OA_1A_2 = \angle OB_1B_2 = \angle OB_2B_1 = \angle A_4A_1O$，即$OA_1$为$\angle A_4A_1A_2$的平分线.同理$OA_2$、$OA_3$、$OA_4$分别为$\angle A_1A_2A_3$、$\angle A_2A_3A_4$、$\angle A_3A_4A_1$的平分线.这意味着$O$为四边形$A_1A_2A_3A_4$的内切圆的圆心，故知四边形$A_1A_2A_3A_4$为正方形，即当且仅当四边形$A_1A_2A_3A_4$为正方形时⑤式等号成立.

例 7　圆内接六边形$ABCDEF$中，$AB = BC$，$CD = DE$，$EF = FA$.求证：$AB + BC + CD + DE + EF + FA \geqslant AD + BE + CF$

【分析】　由题设不难证得H为$\triangle BDF$的垂心，(如图Ⅱ－4－7－17)且$HB = AB = BC$，$HN = AN$，故问题转化为求证

$$2(HB + HD + HF) \geqslant AD + BE + CF$$

即证　$HB + HD + HF \geqslant 2(HM + HL + HN)$.这可由“艾尔德斯——莫迪尔不等式”得证.



图Ⅱ－4－7－17

证明：如图Ⅱ－4－7－17，设BE与DF相交于L，则$\angle FLB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{FE} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{CB}) = 90°$

即BL是$\triangle BFD$的高.

同理，设AD、CF分别交BF，BD于N、M，则DM，FM分别为BF，BD上的高.因此BL，DN，FM交于一点，这点就是$\triangle BFD$的垂心H.

由于$\angle HDL = \angle EDL$，$\angle HLD = \angle ELD = 90°$，$HL = EL$，所以$\triangle HDL \cong \triangle EDL$，则

$HE = HL + LE = 2HL$，$HD = DE$

同理　$HC = 2HM$，$HA = 2HN$，$HB = BC$，$HF = AF$

由“艾尔德斯——莫迪尔不等式”有

$$\begin{aligned} HB + HD + HF &\geqslant 2(HL + HN + HM) \\ &= HE + HA + HC \end{aligned}$$

因此　$2(HB + HD + HF) \geqslant AD + BE + CF$

即　$AB + BC + CD + DE + EF + FA \geqslant AD + BE + CF$

例 8　(1994.中国数学冬令营)设$ABCD$是一个梯形($AB \parallel CD$)，E是线段AB上一点，F是线段CD上一点，线段CE与BF相交于点H，线段ED与AF相交于点G，求证：$S_{EHFG} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$

【分析】　此题需从梯形内部各三角形面积关系着手，找到S_{EFGH}与S_{ABCD}之间的关系，注意适时应用均值不等式，从而转化为不等式解题.

证明：如图Ⅱ－4－7－18，设$\angle AGE = \alpha$，则　$S_{\triangle AGE} = \frac{1}{2}AG \cdot GE \cdot \sin\alpha$，$S_{\triangle ADG} = \frac{1}{2}DG \cdot AG$

$\cdot \sin\alpha$

$S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2}DG \cdot GF \cdot \sin\alpha, S_{\triangle FGE} = \frac{1}{2}FG \cdot GE \cdot \sin\alpha$

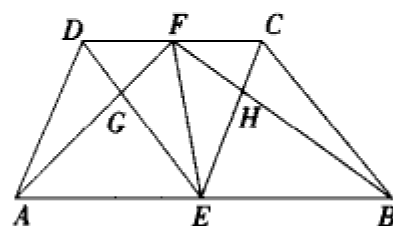


图 Ⅱ -4-7-18

则 $S_{\triangle AGE} \cdot S_{\triangle DFG} = \frac{1}{4} \cdot \sin^2\alpha \cdot DG \cdot GF \cdot AG \cdot GE$

$= S_{\triangle ADG} \cdot S_{\triangle FGE}$

则 $S_{\triangle AGE} + S_{\triangle DGF} \geqslant 2\sqrt{S_{\triangle AGE} \cdot S_{\triangle DFG}}$

$= 2\sqrt{S_{\triangle DGA} \cdot S_{\triangle FGE}}$

又 $S_{\triangle GEF} = S_{\triangle AFE} - S_{\triangle AGE}$

$= S_{\triangle ADE} - S_{\triangle AGE}$

$= S_{\triangle ADG}$

则 $S_{\triangle AGE} + S_{\triangle DGF} \geqslant 2S_{\triangle FGE}$

$\therefore\ 4S_{\triangle FGE} \leqslant 2S_{\triangle FGE} + S_{\triangle AGE} + S_{\triangle DGF}$

$= S_{\triangle EFD}$

同理 $4S_{\triangle FHE} \leqslant S_{EBCF}$

故 $4S_{EGFH} = 4S_{\triangle FHE} + 4S_{\triangle FGE}$

$\leqslant S_{EBCF} + S_{AEFD}$

$= S_{ABCD}$

则 $S_{EGFH} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$ 证毕.

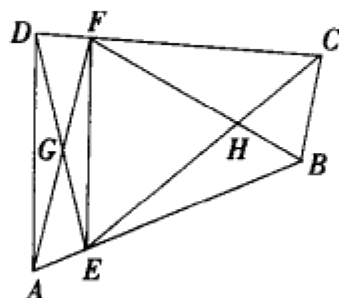


图 Ⅱ -4-7-19

【评注】 对一般凸四边形,结论不成立.如图 Ⅱ -4-7-19,先作两条过 H 的直线,然后取四点 B,C,F,E,使 $HE = 2HC$,$HF = 2HB$.连 CF,BC,BE,并在 CF,BE 的延长线上分别取D,A,构成四边形 $ABCD$.

显然 $S_{\triangle EHF} > \frac{1}{4}S_{EBCF}$

当 D 与 F,A 与 E 充分接近时,S_{AEFD} 很小,可以小于 $S_{\triangle EHF} - \frac{1}{4}S_{EBCF}$,此时

$S_{EHFG} > S_{\triangle EHF} > \frac{1}{4}S_{EBCF} + S_{AEFD} > \frac{1}{4}S_{ABCD}$.不满足结论.

作为应用纯几何方法的最后一个例子,想举一个应用“将军饮马问题”的例子.

例 9 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,求 BC 边上的点D,CA 边上的点E 和 AB 边上的点F,使得 $\triangle DEF$ 的周长最小.

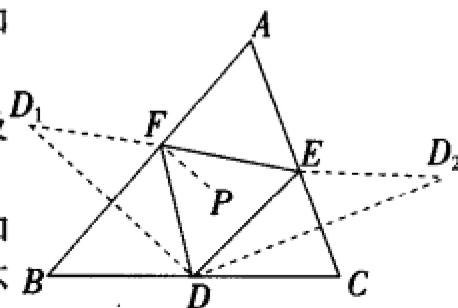


图 Ⅱ -4-7-20

【分析】 这是一道综合性题目,除将军饮马问题的思想,还要涉及著名的调整法.

我们先来看一下调整的结果.作 D 关于AB 和AC 的对称点D_1 和 D_2,所以 $\triangle DEF$ 的周长最小值在D_1,E,F,D_2 共线的时候取到.如果不共线就可以调整到共线,这样周长就会更短.注意这里应该固定 D,E,F 都应该有这样的性质.

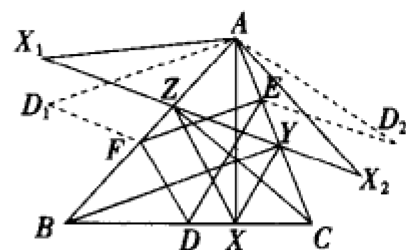
那么什么样的 D,E,F 满足这样的性质呢?首先,$\angle AFD = \angle AFD_1$ 是肯定的.由此能得到什么呢?我们还没有用共线的条件呢,即$\angle AFD_1 + \angle AFE = 180°$,由上面二式可以推出$\angle BFD = \angle AFE$.如果你可以看得更透彻一些的话会过点 F 作AB 的垂线PF,这样,FP 就是$\angle DFE$ 的平分线.同理,对$\triangle DEF$ 的其它两个顶点 D,E,过自己垂直于所在 $\triangle ABC$ 边的线都是 $\triangle DEF$ 的角平分线.那么什么样的 $\triangle DEF$ 有这样的性质呢?

经验丰富的读者已经可以猜到 D,E,F 就是 $\triangle ABC$ 的三个高的垂足了.

好,现在一定有的读者会说,我们的证明已经结束了,因为只要 $\triangle DEF$ 不满足那个性质,我们就可以再调得小些,所以最小值就是那个.但是请读者仔细思考一下这个证明的严谨性 …… 你这个调整是

有限的么?如果不是有限的话,为什么一定可以有一个最小值呢?即使有一定是你所期望的那个么?所以整个证明不可以就这样简单了事.下面将给出严格的解答,请读者自己将其中省略的东西补全.

略解:作 $\triangle ABC$ 的三条垂线 AX,BY,CZ.作 D 和 X 关于 AB,AC 的对称点 D_1,D_2 和 X_1,X_2.连接图中的线段.(在此就不一一详述是哪些了)



图Ⅱ-4-7-21

首先 X_1,Z,Y,X_2 共线.(这个留给读者给出证明)

由分析中叙述的结论可知 $\triangle DEF$ 的周长 $\geqslant D_1D_2$.

而 $\triangle XYZ$ 的周长 $= X_1X_2$.

所以只需要证明 $D_1D_2 \geqslant X_1X_2$.

但注意到 $\angle D_1AD_2 = \angle X_1AX_2 = 2 \cdot \angle BAC$,并且有边的关系 $AX_1 = AX_2 = AX \leqslant AD = AD_1 = AD_2$.(请读者想想为什么?)

由此 $D_1D_2 \geqslant X_1X_2$,事实上 $\triangle D_1AD_2 \backsim \triangle X_1AX_2$

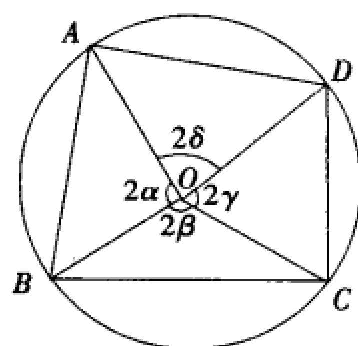
从而,使 $\triangle DEF$ 的周长最小的 D,E,F 即是 $\triangle ABC$ 的三个高的垂足.

Ⅱ.运用三角方法的几何不等式.

例 10 (1999.美国第 28 届数学奥林匹克)已知四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形.证明:

$|AB-CD|+|AD-BC| \geqslant 2|AC-BD|$

【分析】 要计算圆内各条弦的度,由于圆半径相同(不妨设为 1),可以通过其所对的圆心角得出.这样就转化为一个三角不等式问题,由对称关系,可比较 $|AB-CD|$ 和 $|AD-BC|$ 与 $|AC-BD|$ 之间的大小.



图Ⅱ-4-7-22

证明:证 O 为四边形 $ABCD$ 外接圆圆心.

不妨设圆半径为 1,又设 $\angle AOB = 2\alpha, \angle BOC = 2\beta, \angle COD = 2\gamma, \angle DOA = 2\delta$,则 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$

为方便,令 $\alpha \geqslant \gamma, \beta \geqslant \delta$.因为

$AB = 2\sin\alpha, BC = 2\sin\beta, CD = 2\sin\gamma, DA = 2\sin\delta$

所以

$$\begin{aligned}|AB-CD| &= 2|\sin\alpha-\sin\gamma| \\ &= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\right| \\ &= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\delta}{2}\right|\end{aligned}$$

同理 $|AD-BC| = 4\left|\sin\frac{\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right|$

又

$$\begin{aligned}|AC-BD| &= 2|\sin(\gamma+\delta)-\sin(\alpha+\delta)| \\ &= 4\left|\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma+2\delta}{2}\right| \\ &= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right|\end{aligned}$$

由 $0<\delta\leqslant\beta<\pi$,得 $0<\frac{\beta+\delta}{2}<\pi$

$0\leqslant\frac{\beta-\delta}{2}<\pi, 0<\frac{\delta}{2}\leqslant\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$

故 $|AB-CD|-|AC-BD|$

$$= 4\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\left(\sin\frac{\beta+\delta}{2}-\sin\frac{\beta-\delta}{2}\right)$$

$$= 8\left|\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\right|\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}\geqslant 0$$

即 $|AB-CD| \geqslant |AC-BD|$

同理 $|AD-BC| \geqslant |AC-BD|$

因此 $|AB-CD|+|AD-BC|\geqslant 2|AC-BD|$

当且仅当 $\alpha=\gamma,\beta=\delta$，即四边形为矩形时等号成立.

例 11 (1999.巴尔干地区)设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，M,N,P 分别是 $\triangle ABC$ 的重心 G 向边 AB，BC,CA 所作垂线的垂足.证明：$\frac{4}{27}<\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}\leqslant\frac{1}{4}$

【分析】 $S_{\triangle MNP}=S_{\triangle NGP}+S_{\triangle PGM}+S_{\triangle MGN}$ 由垂直关系，知 $\angle A=180^\circ-\angle MGP$，另由重心的性质，有 $GM=\frac{1}{3}h_c$，这时 h_c 为 AB 边上的高，从而 $S_{\triangle MGP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}h_c\cdot\frac{1}{3}h_b\cdot\sin A$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}h_c\cdot AB=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$，因此，$S_{\triangle MNP}$ 与 $S_{\triangle ABC}$ 的比值就转化为 $\triangle ABC$ 三内角的三角值关系式，这可以通过三角运算求出其范围.

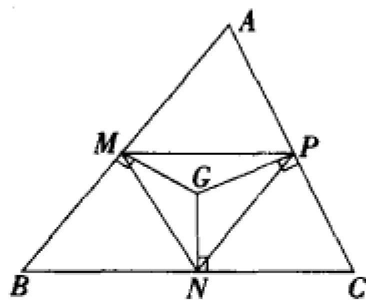


图 Ⅱ-4-7-23

证明：设 BC,CA,AB 长分别为 a,b,c，其上的高长依次为 h_a,h_b,h_c.

因为 G 为三角形 ABC 的重心，所以

$GN=\frac{1}{3}h_a,GP=\frac{1}{3}h_b,GM=\frac{1}{3}h_c$.

$\angle NGP=180^\circ-\angle C,\angle MGP=180^\circ-\angle A,\angle MGN=180^\circ-\angle B$,

由 $S=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}h_a\cdot a=\frac{1}{2}h_b\cdot b=\frac{1}{2}h_c\cdot c$

$S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}ac\cdot\sin B$

得

$$\begin{aligned}S_{\triangle MNP}&=S_{\triangle NGP}+S_{\triangle PGM}+S_{\triangle MGN}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}h_a\cdot\frac{1}{3}h_b\cdot\sin C+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}h_b\cdot\frac{1}{3}h_c\cdot\sin A+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}h_c\cdot\frac{1}{3}h_a\sin B\\&=\frac{2}{9}\left(\frac{S^2\sin C}{ab}+\frac{S^2\sin A}{bc}+\frac{S^2\sin B}{ca}\right)\\&=\frac{S}{9}(\sin^2C+\sin^2A+\sin^2B)\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C&=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B+\cos2C)\\&=\frac{3}{2}-\left[\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C-\frac{1}{2}\right]\\&=2+\cos C[\cos(A-B)-\cos C]\\&\leqslant 2+\cos C(1-\cos C)\\&\leqslant 2+\left(\frac{\cos C+1-\cos C}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$0\leqslant|A-B|<C<\frac{\pi}{2}$，有 $\cos(A-B)>\cos C$，所以

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C>2>\frac{4}{3}$$

即

$$\frac{4}{27}<\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}}\leqslant\frac{1}{4}$$

例 12 面积为 S^* 的凸四边形 $ABCD$ 内接于一圆，圆心在四边形内部.证明：以该四边形对角线交点在四边上的射影为顶点的四边形面积不超过 $\frac{S^*}{2}$.

【分析】 易得 $S^*=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOD$，而四边形 $PQRS$ 的面积计算要麻烦些，从图中的一些垂直关系可以发现 O 是四边形 $PQRS$ 的内切圆圆心，可由图外切四边形面积公式得

$S_{PQRS}^2=PQ\cdot QR\cdot RS\cdot SP\cdot\sin^2\frac{\angle SPQ+\angle SRQ}{2}$

(注：公式证明可利用余弦定理及三角形面积公式和 $PQ+SR=PS+RQ$).这四条边 PQ,QR，

RS,SP 与 AO,BO,CO,DO 之间可通过正弦定理连接起来，从而面积的大小关系证明可通过代数方法 —— 平均不等式得出.

证明：如图 Ⅱ-4-7-24，O 为圆内接四边形 $ABCD$ 对角线的交点，O 到四边的垂足分别为 P、Q、R、S.

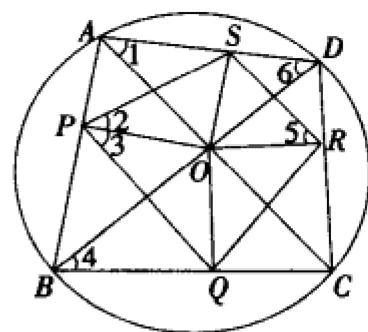


图 Ⅱ-4-7-24

由 A,S,O,P 四点共圆得 $\angle 1=\angle 2$

同理　$\angle 3=\angle 4,\angle 1=\angle 4$

故　$\angle 2=\angle 3$

即　PO 是 $\angle SPQ$ 的平分线.

同理 QO,RO,SO 分别是 $\angle PQR,\angle QRS,\angle RSP$ 的角平分线

因此 O 为四边形 $PQRS$ 的内心，又

$$\frac{1}{2}(\angle SPQ+\angle SRQ)=\angle 2+\angle 5=\angle 1+\angle 6=180^\circ-\angle AOD$$

即　$\sin\frac{1}{2}(\angle SPQ+\angle SRQ)=\sin\angle AOD$

由圆外切四边形面积公式，得

$$S_{PQRS}^2=PQ\cdot QR\cdot RS\cdot SP\cdot\sin^2\left[\frac{1}{2}(\angle SPQ+\angle SRQ)\right]$$
$$=PQ\cdot QR\cdot RS\cdot SP\sin^2\angle AOD$$

在四边形 $APOS$ 中，AO 是其外接圆直径，

故　$\frac{PS}{\sin A}=AO$，且 $\angle A=180^\circ-\angle C,\angle D=180^\circ-\angle B$

同理　$\frac{PQ}{\sin B}=BQ,\frac{RQ}{\sin A}=OC,\frac{SR}{\sin B}=OD$

因此

$$S^*=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\angle AOD$$
$$=\frac{1}{2}(AO+CO)(BO+DO)\cdot\sin\angle AOD$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{SP}{\sin A}+\frac{QR}{\sin A}\right)\cdot\left(\frac{PQ}{\sin B}+\frac{RS}{\sin B}\right)\cdot\sin\angle AOD$$
$$=\frac{(SP+QR)(PQ+RS)}{2\sin A\cdot\sin B}\cdot\sin\angle AOD$$
$$\geqslant\frac{4\sqrt{SP\cdot QR\cdot PQ\cdot RS}\sin\angle AOD}{2\sin A\sin B}$$
$$=\frac{2S_{PQRS}}{\sin A\cdot\sin B}\geqslant 2\cdot S_{PQRS}$$

即　$S_{PQRS}\leqslant\frac{S^*}{2}$

当且仅当 $ABCD$ 为矩形时等号成立.

例 13　(1996.第 37 届 IMO 试题) 设 $ABCDEF$ 为凸六边形，且 AB 平行于 ED，BC 平行于 FE，CD 平行于 AF，又设 R_A,R_C,R_E 分别表示 $\triangle FAB$，$\triangle BCD$ 及 $\triangle DEF$ 的外接圆半径，P 表示六边形的周长. 证明：

$$R_A+R_C+R_E\geqslant\frac{P}{2}$$

分析与证明：由已知条件及图形形状，可联想到第四届全俄数学奥林匹克试题及解法.

原题为：凸六边形 $ABCDEF$ 中所有内角都相等，证明：$AB-DE=EF-BC=CD-FA$　　(*)

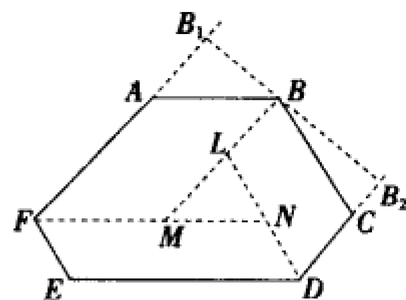


图 Ⅱ-4-7-25

由已知条件易得对边平行，因此，这两题有相类似的条件，利用其解

题思想,作 $FN // ED, DL // BC, BM // AF$,其交点分别为 L, M, N,如图 Ⅱ - 4 - 7 - 25 所示

设 $AB = a, BC = b, CD = c, DE = d, EF = e, FA = f, MN = x, ML = y, LN = z$,则有

$a + x = d$,① $e + z = b$,② $c + y = f$. ③

及 $\angle LMN = \pi - \angle A, \angle NLM = \pi - \angle C, \angle MNL = \pi - \angle E$

故有 $$\frac{x}{\sin\angle C} = \frac{y}{\sin\angle E} = \frac{z}{\sin\angle A} \quad ④$$

(由此即得(*))

(4) 结论作为预备条件使用.

对于求外接圆半径,常用的有正弦定理,即 $2R_E\sin\angle E = FD$,又因为 $AF // CD$,所以其最短距离应为公垂线,过 B 作 AF, CD 的垂线交 AF 于 B_1,交 CD 于 B_2,则有

$$2R_E \cdot \sin\angle E = FD \geqslant B_1B_2 = a\sin\angle A + b\sin\angle C \quad ⑤$$

同理可得

$$2R_C \cdot \sin\angle C = DB \geqslant f\sin\angle A + e\sin\angle A \quad ⑥$$

$$2R_A \cdot \sin\angle A = FB \geqslant d\sin\angle E + c \cdot \sin\angle C \quad ⑦$$

直接用这三个结论,总觉还差点什么,于是看看预备条件 ① ~ ④,为解决这个问题,又可与艾尔多斯——莫迪尔定理的迪尔解法产生联想,从而去寻求某种对称的性质,以便更好地利用 ① ~ ④. 利用④,有

$\frac{①}{\sin\angle C} - \frac{②}{\sin\angle A}$,得

$a\sin\angle A + b\sin\angle C = d\sin\angle A + e\sin\angle C$

$\frac{②}{\sin\angle A} - \frac{③}{\sin\angle E}$,得

$e\sin\angle E + f\sin\angle A = b\sin\angle E + c \cdot \sin\angle A$

$\frac{③}{\sin\angle E} - \frac{①}{\sin\angle C}$,得

$c \cdot \sin\angle C + d \cdot \sin\angle E = f\sin\angle C + a\sin\angle E$.

此结论恰好与 ⑤、⑥、⑦ 相匹配,且构成了互为倒数的理想结果,即

$$\begin{aligned}
&R_E + R_C + R_A \\
&\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(a \cdot \frac{\sin\angle A}{\sin\angle E} + b \cdot \frac{\sin\angle C}{\sin\angle E} + d \cdot \frac{\sin\angle A}{\sin\angle E} + e\frac{\sin\angle C}{\sin\angle E}\right)\right. \\
&+ \frac{1}{2}\left(f\frac{\sin\angle A}{\sin\angle C} + e \cdot \frac{\sin\angle E}{\sin\angle C} + b \cdot \frac{\sin\angle E}{\sin\angle C} + c \cdot \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C}\right) \\
&\left. + \frac{1}{2}\left(d \cdot \frac{\sin\angle E}{\sin\angle A} + c \cdot \frac{\sin\angle C}{\sin\angle A} + f \cdot \frac{\sin\angle C}{\sin\angle A} + a \cdot \frac{\sin\angle E}{\sin\angle A}\right)\right] \\
&\geqslant \frac{1}{4}(2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f) = \frac{P}{2}
\end{aligned}$$

等号当且仅当六边形为正六边形时成立.

Ⅲ. 用代数方法的几何不等式.

例 14 (1996. 第 37 届 IMO 预选题) 在平面上给定一点 O 和一个多边形 F,F 不定是凸的,P 为 F 的周长,D 为 O 点到 F 的各顶点的距离之和,H 为 O 点到 F 的各边所在直线的距离之和. 证明:$D^2 - H^2 \geqslant \frac{P^2}{4}$

【分析】 所谓代数法,这里是"用勾股定理"之后"用柯西不等式"使不等式获证.

证明:设 F 的各顶点依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,O 点到 A_kA_{k+1} 所在直线的垂线的垂足为 H_k,$k = 1, 2, \cdots$(视 $A_{n+1} = A_1$)

由勾股定理,有

$$OA_k^2 - OH_k^2 = A_kH_k^2,$$

$$OA_{k+1}^2 - OH_k^2 = A_{k+1}H_k^2$$

则 $4(D^2 - H^2)$

$= [(D+H)+(D+H)] \cdot [(D-H)+(D-H)]$

$= \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} OA_k + \sum\limits_{k=1}^{n} OH_k\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} OA_{k+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} OH_K\right)\right] \cdot \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n} OA_k - \sum\limits_{k=1}^{n} OH_k\right) + \right.$

$\left.\left(\sum\limits_{k=1}^{n} OA_{k+1} - \sum\limits_{k=1}^{n} OH_k\right)\right]$

$= \left[\sum\limits_{k=1}^{n}(OA_k + OH_k) + \sum\limits_{k=1}^{n}(OA_{k+1} + OH_k)\right] \cdot \left[\sum\limits_{k=1}^{n}(OA_k \cdot OH_k) + \sum\limits_{k=1}^{n}(OA_{k+1} - OH_k)\right]$

$\geqslant \left[\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(OA_k + OH_k)(OA_k - OH_k)} + \sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(OA_{k+1} + OH_k)(OA_{k+1} - OH_k)}\right]^2$（柯西不等式）

$= \left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_kH_k + \sum\limits_{k=1}^{n} A_{k+1}H_k\right)^2$

$\geqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_kA_{k+1}\right)^2$

$= P^2$

即 $D^2 - H^2 \geqslant \dfrac{P^2}{4}$

例 15 （1996.第37届预选题）设$\triangle ABC$是等边三角形，P是其内部一点，线段AP, BP, CP依次交三边BC, CA, AB于A_1, B_1, C_1三点.证明：$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geqslant A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A$

【分析】 所谓代数方法，这里是用了“余弦定理”之后用“均值不等式”转化，再用塞瓦定理得证，其中用“均值不等式”转化是中心枢扭.

证明：如图 Ⅱ－4－7－26，

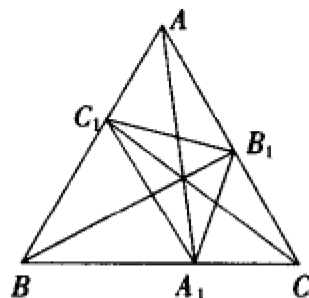


图 Ⅱ－4－7－26

得 $A_1B_1^2 = A_1C^2 + B_1C^2 - A_1C \cdot B_1C$

$\geqslant 2A_1C \cdot B_1C - A_1C \cdot B_1C$

$= A_1C \cdot B_1C$

同理 $B_1C_1^2 \geqslant B_1A \cdot C_1A$

$C_1A_1^2 \geqslant C_1B \cdot A_1B$

由塞瓦定理，得

$\dfrac{A_1C}{A_1B} \cdot \dfrac{B_1A}{B_1C} \cdot \dfrac{C_1B}{C_1A} = 1$

则 $A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1$

$\geqslant \sqrt{A_1C \cdot B_1C \cdot B_1A \cdot C_1A \cdot C_1B \cdot A_1B}$

$= A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A \cdot \sqrt{\dfrac{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}}$

$= A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A$

例 16 （第37届IMO预选题）设$\triangle ABC$是锐角三角形，外接圆圆心为O，半径为R，AO交BOC所在的圆于另一点A'，BO交COA所在的圆于另一点B'，CO交AOB所在的圆于另一点C'.证明：$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geqslant 8R^3$，并指出在什么情况下等号成立？

【分析】 此题的代数法是指：

要证：$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geqslant 8R^3$

只须证：$\dfrac{OA' \cdot OB' \cdot OC'}{R^3} \geqslant 8$ （＊）

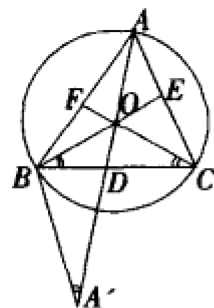
于是将左边“用面积之比和”表示，用“均值不等式”使（＊）获证.

证明：如图 Ⅱ－4－7－27，设AO与BC，BO与CA，CO与AB的交点依次为D、E、F，$\triangle AOB$、

$\triangle BOC$、$\triangle COA$ 的面积依次为 S_1、S_2、S_3，由 B、O、C、A' 四点共圆知

$\angle OBC = \angle OCB = \angle BA'O$

从而 $\quad OB' = \dfrac{R^2}{OE}, OC' = \dfrac{R^2}{OF}$



Ⅱ－4－7－27

所以
$$\frac{OA' \cdot OB' \cdot OC'}{R^3} = \frac{R^3}{OD \cdot OE \cdot OF}$$
$$= \frac{OA}{OD} \cdot \frac{OB}{OE} \cdot \frac{OC}{OF}$$
$$= \frac{S_1 + S_3}{S_2} \cdot \frac{S_1 + S_2}{S_3} \cdot \frac{S_2 + S_3}{S_1}$$
$$= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_3}{S_2}\right)\left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_3}\right)\left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_3}{S_1}\right)$$
$$= \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2}\right) + \left(\frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1}{S_3}\right) + 2 \geqslant 8$$

等号当且仅当 $S_1 = S_2 = S_3$ 时成立，此时 $\triangle ABC$ 为正三角形.

故 $\quad OA' \cdot OB' \cdot OC' \geqslant 8R^3$，等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

例 17 （1991. 第32届 IMO试题）已知 $\triangle ABC$，设 I 为它的内心，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的内角平分线分别交其对边于 A'，B'，C'. 求证：$\dfrac{1}{4} < \dfrac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \dfrac{8}{27}$ $\qquad$ （*）

【分析】 此题代数方法是指：

将各个比 $\dfrac{AI}{AA'}, \dfrac{BI}{BB'}, \dfrac{CI}{CC'}$ 变量代换后，用均值不等式得（*）的右端不等式；

不等式（*）的左端不等式用二次函数解决.

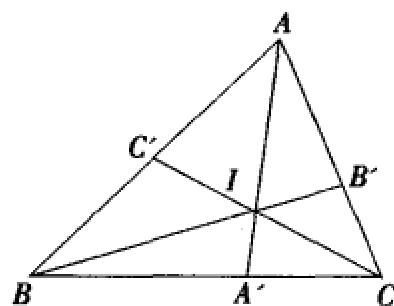


图 Ⅱ－4－7－28

证明：记 $BC = a, CA = b, AB = c$，易知 $\dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{c}{b}$，所以，$BA' = \dfrac{ca}{b+c}, \dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{AB}{BA'}, \dfrac{AI}{AA'} = \dfrac{b+c}{a+b+c}$

同样 $\dfrac{BI}{BB'} = \dfrac{a+c}{a+b+c}, \dfrac{CI}{CC'} = \dfrac{a+b}{a+b+c}$

由算术－几何平均不等式，得：
$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leqslant \left[\frac{1}{3}\left(\frac{AI}{AA'} + \frac{BI}{BB'} + \frac{CI}{CC'}\right)\right]^3$$
$$= \left[\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c}\right)\right]^3 = \frac{8}{27}$$

另一方面，记
$$x = \frac{b+c}{a+b+c}, y = \frac{c+a}{a+b+c}, z = \frac{a+b}{a+b+c}$$

则 $\quad x + y + z = 2$，

由三角形两边之和大于第三边得
$$x > \frac{a + (b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}, y > \frac{1}{2}, z > \frac{1}{2}$$

当 z 固定时，x 的二次函数
$$xy = x(2 - x - z), \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 - z - \frac{1}{2}$$

在定义区间的端点处取最小值，所以
$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} = xyz > \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2} - z\right) \cdot z = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - z\right)z$$

函数 $\left(\dfrac{3}{2} - z\right)z, \dfrac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1$，也在区间的端点处取最小值，所以

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

【评注】 (1) 在同样条件下,可证如下结论

$$\frac{5}{4} < \frac{AI}{AA'} \cdot \frac{BI}{BB'} + \frac{AI}{AA'} \cdot \frac{CI}{CC'} + \frac{BI}{BB'} \cdot \frac{CI}{CC'} \leqslant \frac{4}{3}$$

(2) I 为 $\triangle ABC$ 内任一点时,(*) 式右边仍成立,可仿下面证明;

(3) 推广:设 O 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任一点,A_1O 交对边于 A_i',$i = 1,2,3,4$,则

$$\frac{\prod A_iO}{\prod A_iA_i'} \leqslant \frac{81}{256}$$

证明:由体积关系易知 $\sum \frac{OA_i'}{A_iA_i'} = 1$

故 $\sum \frac{A_iO}{A_iA_i'} = 3$

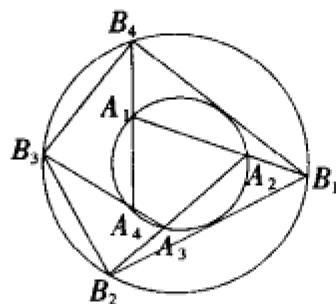
由均值不等式,得

$$\frac{\prod A_iO}{\prod A_iA_i'} \leqslant \left(\frac{1}{4}\sum \frac{A_iO}{A_iA_i'}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

最后,用代数方法分析证明一道几何不等式的难题,作为本讲的结束.

例 18 如图Ⅱ-4-7-29,两同心圆半径分别为 R 与 r,$A_1A_2A_3A_4$ 为小圆的内接四边形,分别延长 $A_4A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4$ 交大圆于点 B_1, B_2, B_3, B_4.

求证:$\frac{S_{B_1B_2B_3B_4}}{S_{A_1A_2A_3A_4}} \geqslant \frac{R^2}{r^2}$



图Ⅱ-4-7-29

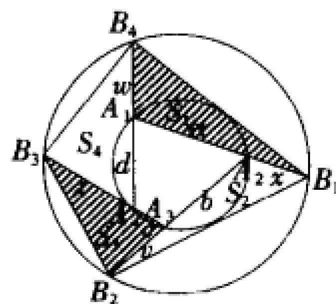
【分析】 本题是1993第8届CMO的第4题,是唯一一道CMO中的几何难题.

我们先来想想如何去计算四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的面积,直接计算的路显然是走不通的,我们只好寻求一个变化,把整个面积分为五块:四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面积加上四个小三角形的面积.然后分别去计算每一块的面积,化为边的比例再想办法.

证明:记四边形的四个内角分别为:$\alpha,\beta,\gamma,\theta$. $A_1A_2 = a, A_2A_3 = b, A_3A_4 = c, A_4A_1 = d$. $A_2B_1 = x, A_3B_2 = y, A_4B_3 = z, A_1B_4 = w$

再记 $S_{A_1B_1B_4} = S_1, S_{A_2B_2B_1} = S_2, S_{A_3B_3B_2} = S_3, S_{A_4B_4B_3} = S_4$

$\therefore \quad S_1 = \frac{1}{2}w(a + x)\sin\alpha, S_2 = \frac{1}{2}x(b + y)\sin\beta, S_3 = \frac{1}{2}y(c + z)\sin\gamma, S_4 = \frac{1}{2}z(d + w)\sin\theta$



图Ⅱ-4-7-30

由于 $\alpha + \gamma = 180°, \beta + \theta = 180°$,所以 $\sin\alpha = \sin\gamma, \sin\beta = \sin\theta$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{w(a + x)\sin\alpha}{ad\sin\alpha + bc\sin\gamma} = \frac{w(a + x)}{ad + bc}$$

同理 $\frac{S_2}{S} = \frac{x(b + y)}{ab + cd}, \frac{S_3}{S} = \frac{y(c + z)}{ad + bc}, \frac{S_4}{S} = \frac{z(d + w)}{ab + cd}$

我们要证明的结论就转化为证明:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{S} \geqslant \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$

$$\frac{w(a + x)}{ad + bc} + \frac{x(b + y)}{ab + cd} + \frac{y(c + z)}{ad + bc} + \frac{z(d + w)}{ab + cd} \geqslant \frac{R^2 - r^2}{r^2}$$

题目做到这里可以说是告一段落,前面的准备工作就结束了,关键是如何处理这些数据.证明不等式有的时候是一件很困难的事情,关键就是你不知道什么时候应不应该放缩.这个时候就应该从一些细

小的地方出发去找到一些突破口.例如在这道题目中,我们先得到了一定的成果,但是你觉得这确实可以算是一个好的结果的话,那么你如何看待你所设的这8个变量呢?它们又是如何和不等式的右边挂钩呢?

这正是这道题目的突破口所在,我们如何去看待这八个线段呢?我们可以使用的只有圆幂定理,由圆幂定理得 $x(x+a)=R^2-r^2, y(y+b)=R^2-r^2, z(z+c)=R^2-r^2, w(w+d)=R^2-r^2$. 那么怎么和我们要证明的东西联系起来呢?只有用均值不等式,当然这是一个很危险的举动,很容易就把不等式放过了,但是在没有办法的时候只能试上一试了.

由均值不等式有: $\frac{w(a+x)}{ad+bc}+\frac{x(b+y)}{ab+cd}+\frac{y(c+z)}{ad+bc}+\frac{z(d+w)}{ab+cd}$

$\geqslant 4\cdot\sqrt[4]{\frac{w(a+x)}{ad+bc}\cdot\frac{x(b+y)}{ab+cd}\cdot\frac{y(c+z)}{ad+bc}\cdot\frac{z(d+w)}{ab+cd}}$

$=\frac{4(R^2-r^2)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}$

$\therefore$ 只要证明 $(ab+cd)(ad+bc)\leqslant 16r^4$

剩下的事情就是基础几何不等式的题目了

$(ab+cd)(ad+bc)\leqslant\frac{1}{4}[(ad+bc)+(ab+cd)]^2$

$=\frac{1}{4}[(a+c)(b+d)]^2\leqslant\frac{1}{64}(a+b+c+d)^4$

$\leqslant\frac{1}{64}(4\sqrt{2}r)^4$

而所有圆内接四边形以正方形周长最大为 $4\sqrt{2}r$

$\therefore (ab+cd)(ad+bc)\leqslant\frac{1}{64}(4\sqrt{2}r)^4=16r^4$

§7.3 针对性训练

A组

1. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内的一个点，Q、R、S 分别是 A、B、C 与 P 的连线与对边的交点(如图 Ⅱ - 4 - 7 - 31). 求证：$S_{\triangle QRS} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

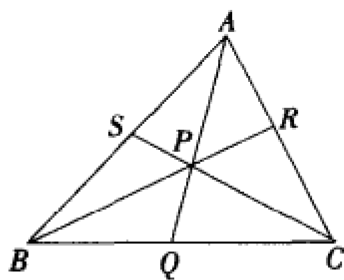


图 Ⅱ - 4 - 7 - 31

2. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\triangle$，三边分别为 a、b、c. 求证：$\triangle \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$，且当 $a=b=c$ 时等号成立.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 用弧度单位量度. 求证：$\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$.

4. (1) 设 a、b、$c \in \mathbf{R}_+$，满足条件 $(a^2+b^2+c^2)^2 > 2(a^4+b^4+c^4)$.

求证：a,b,c 一定是某个三角形的三条边长.

(2) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n (n \geqslant 3) \in \mathbf{R}_+$，满足条件 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$. 求证：这些数中任意三个一定是某个三角形的三条边长.

5. 设 P 是 $\triangle ABC$ 的一个内点，Q、R、S 分别是 A、B、C 与 P 的连线与对边的交点(如图 Ⅱ - 4 - 7 - 32). 求证：$S_{\triangle QRS} \leqslant \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

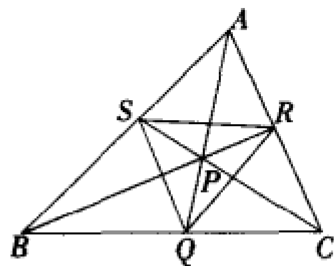


图 Ⅱ - 4 - 7 - 32

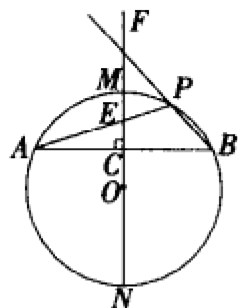
6. 在 $\triangle ABC$ 中,求证:$\cot^3\frac{A}{2}+\cot^3\frac{B}{2}+\cot^3\frac{C}{2}\geqslant 9\sqrt{3}$

7. 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的四个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上. 求证: 四个三角形 $\triangle P_1P_2P_3$, $\triangle P_1P_2P_4$, $\triangle P_1P_3P_4$, $\triangle P_2P_3P_4$ 中,至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的$\frac{1}{4}$.

8. $\triangle ABC$ 的外接圆K 的半径为R,内角平分线交圆 K 于A'、B'、C'. 证明:不等式 $16Q^3\geqslant 27R^4P$,其中 Q、P 分别为 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积.

9.(第 24 届 IMO 题 6) 设 a、b、c 是三角形的三边的边长. 证明:$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0$. 并说明等号何时成立.

10. 如图Ⅱ-4-7-33, AB 为$\odot O$ 的非直径的弦, C 为其中点,直线 OC 交$\odot O$ 于 M、N 两点, P 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$ 上异于A、B、M 的任一点,直线 AP、BP 分别交直线MN 于 E 和F. 求证:$\sqrt{CE\cdot CF}<CM<\frac{1}{2}(CE+CF)$



图Ⅱ-4-7-33

B 组

1. 设 x、y、$z\in\mathrm{R}$, $A+B+C=\pi$. 求证:

$x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$

等号成立的充要条件是

$x=y\cos C+z\cos B$ 及 $y\sin C=z\sin B$

2.(第 37 届 IMO 预选题) 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,外接圆圆心为 O,半径为 R, AO 交BOC 所在的圆于另一点 A', BO 交COA 所在的圆于另一点B', CO 交AOB 所在的圆于另一点C'. 证明:$OA'\cdot OB'\cdot OC'\geqslant 8R^3$,并指出在什么情况下等号成立?

3. 设$\triangle ABC$的内切圆半径为r，P为$\triangle ABC$内任一点.求证：$PA+PB+PC\geqslant 6r$

4. 设在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的平分线交外接圆于P、Q、R.证明$AP+BQ+CR>BC+CA+AB$

5.（第36届IMO试题5）设$ABCDEF$是凸六边形，满足$AB=BC=CD$，$DE=EF=FA$，$\angle BCD=\angle EFA=60^\circ$.设$G$和$H$是这六边形内部的两点，使得$\angle AGB=\angle DHE=120^\circ$.试证：$AG+GB+GH+DH+HE\geqslant CF$

6.（第36届IMO预选题）设$A_1A_2A_3A_4$是一个四面体，G是重心，$A_1A_2A_3A_4$的外接球面分别交GA_1，GA_2，GA_3，GA_4于A'_1、A'_2、A'_3、A'_4四点.证明：$GA_1\cdot GA_2\cdot GA_3\cdot GA_4\leqslant GA'_1\cdot GA'_2\cdot GA'_3\cdot GA'_4$及

$$\frac{1}{GA'_1}+\frac{1}{GA'_2}+\frac{1}{GA'_3}+\frac{1}{GA'_4}\leqslant\frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GA_3}+\frac{1}{GA_4}$$

7.（第37届IMO预选题）设$ABCD$是凸四边形，R_A、R_B、R_C、R_D分别表示$\triangle DAB$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDA$的外接圆半径.证明：$R_A+R_C>R_B+R_D$成立的充要条件是$\angle A+\angle C>\angle B+\angle D$

8.（第37届IMO预选题）在平面上给定O和一个多边形F，F不一定是凸的，p为F的周长，D为O点到F的各顶点的距离之和，H为O点到F的各边所在直线的距离之和.证明：$D^2-H^2\geqslant\frac{D^2}{4}$

9. 如图 Ⅱ－4－7－34,直线 l 交 $\triangle ABC$ 的AB边于B_1,交 AC 于C_1,$\triangle ABC$ 的重心 G 与A 点在 l 的同一侧(包括 G 在 l 上).证明:

$S_{BB_1GC_1}+S_{CC_1GB_1}\geqslant\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$,等号何时成立?

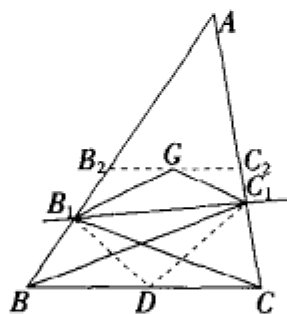


图 Ⅱ－4－7－34

10.(第34届IMO预选题)在 $\triangle ABC$ 的3条边 BC、CA、AB 上分别取点D、E、F,使 $\triangle DEF$ 为等边三角形.a、b、c 分别表示 $\triangle ABC$ 的三边长而S 表示它的面积.求证:

$DE\geqslant 2\sqrt{2}S\cdot(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)^{-\frac{1}{2}}$

11.(第34届IMO预选题)凸四边形 $ABCD$ 的面积为S,O 为四边形内部一点,K、L、M 与 N 分别是边 AB、BC、CD 与DA 内部的点,如果 $OKBL$ 与 $OMDN$ 都是平行四边形.证明:$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$.其中 S_1 与 S_2 分别是 $ONAK$ 与$OLCM$ 的面积.

12. 设 a、b、c 表示 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边长,形内任意两点 P_1、P_2 到 A、B、C 三个顶点的距离分别为 a_1、a_2,b_1、b_2,c_1、c_2.求证 $aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$

第八章

定值、极值、轨迹

§8.1 知识、方法、技能

Ⅰ. 定值问题

平面几何中的定值问题包括“定量定值问题”和“定位定值问题”.

定量定值问题指在变动的图形中某些元素的几何量保持不变;

定位定值问题指在变动的图形中某些元素间的几何性质或位置关系不变.

常见的定量定值问题有:定角,定长(线段长,周长,距离的和差等),定比(线段比,面积比),定积(面积,线段积等).

常见的定位定值问题有:过定点,过定直线,点在定圆上等.

求解定值问题一般分为两步:

第一步,先探求定值,通常运用特殊位置法,不论图形如何变动,定值这一共性始终不变.因此,可选择图形的特殊位置(如极限位置,临界位置)加以探求.或利用数形结合的思想,把几何问题转化为代数问题,然后通过计算求出定值.

第二步,证明定值在一般情况下成立.

Ⅱ. 几何极值问题

几何极值问题实际上就是以几何条件出现的极值问题.

解决几何极值问题的方法

1. 不变量方法

不变量方法是指应用平面几何中关于极值的基本结果解决几何极值.

例如:

(1) 两定点间的所有连线中,直线段最短;

(2) 连接定点与定直线上某点的线段中,垂线段最短;

(3) 定圆的所有弦中,直径最长;

(4) 定点与定圆上的点的所有连线中,以位于过定点和圆心的直线上的两条线段分别为最短和最长.

此外,等圆问题也提供了一系列有关极值的结果,例如:

(5) 周长一定的 n 边形中,以正 n 边形面积最大;

(6) 底边和顶角一定的所有三角形中,以等腰三角形面积最大;

(7) 周长一定的三角形(矩形)中,以正三角形(正方形)的面积最大;

(8) 内接于定圆的所有 n 边形中,以正 n 边形的面积最大.

限于篇幅,不一一列举.

2. 综合法

根据已知条件,直接利用平面几何中的有关知识求得结果.

3. 代数法

如判别式,二次函数,不等式等方法.

4. 三角法

选取某一变角为自变量,将欲求最值之几何量表示为它的函数,运用三角知识使问题获解.

Ⅱ. 轨迹问题

平面几何中点的轨迹就是具有某种性质的所有的点组成的图形(也叫具有某种性质的点的集合).在这一节里,求点的轨迹,主要运用基本的轨迹定理和纯几何的方法.

轨迹为直线的基本定理有:

(1) 到定直线距离等于定长的点的轨迹,是平行于该直线的两条直线;

(2) 到两定点 A、B 距离相等的点的轨迹,是线段 AB 的垂直平分线;

(3) 到两相交直线距离相等的点的轨迹,是这两直线夹角的平分线或其外角平分线;

(4) 已知平面上两条线段 AB 和 CD,则使 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle CDP}$ 为定值的点 P 的轨迹是一条直线.

轨迹为圆(或弧)的基本定理有:

(1) 到定点的距离等于定长的点的轨迹,是以该定点为圆心,以定长为半径的圆;

(2) 对定线段 AB 张成定角 θ 的点的轨迹,是以 AB 为弦,所含圆周角等于 2θ 的两个弓形弧;

(3) 点 P 到两定点的距离之比为定比 $\frac{m}{n}(\neq 1)$.若以 $\frac{m}{n}$ 内分和外分比两定点所连的线段,则以这两个分点所连线段为直径的圆,是到两定点距离比为定比 $\frac{m}{n}$ 的点的轨迹(称阿波罗尼斯圆).

§8.2 赛题精讲

Ⅰ. 关于定值问题

例 1 C 为圆 O 上 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,P 为 $\overset{\frown}{AMB}$ 上(不包括 A、B)的任一点,求证:$(AP+BP):CP$ 为定值.

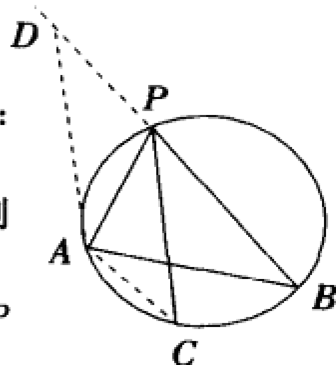


图 Ⅱ-4-8-1

证明:如图 Ⅱ-4-8-1,当 P 点运动到极限位置 A 点时,PA 趋于 0,PB 则趋于 AB,此时 CP 趋于 AC,因此定值可能为 $(AP+BP):CP=AB:AC$

连 AC,延长 BP 到 D,使 $PD=AP$,连 AD,在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle DAB$ 中,$\angle ACP=\angle B$,PC 是 $\angle APB$ 的平分线,又 $\angle PAD=\angle ADP$,可知 $\angle ADB=\angle APC$,$\triangle PAC\backsim\triangle DAB$,$DB:PC=AB:AC$.即 $(AP+BP):PC=AB:AC$(定值)

【评注】 此题亦可连 BC,由 $AC=BC$ 及托勒密定理,得 $AC\cdot PB+BC\cdot PB=AB\cdot PC$ 即 $(PB+PA):PC=AB:AC$(定值)

例 2 (1999. IMO 预选题)点 A、B、C 分 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 的圆周为三段弧,设 X 是 AB 弧上的一个动点,I_1,I_2 为 $\triangle CAX$ 和 $\triangle CBX$ 的内心.证明:$\triangle XI_1I_2$ 的外接圆与圆 O 交于 X 之外的一个定点.

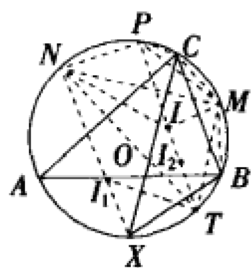


图 Ⅱ-4-8-2

【分析】 连 XI_1,XI_2 并延长交圆 O 于 N,M,则 N,M 为各弧的中点.设 T 为 $\triangle XI_1I_2$ 的外接圆与圆 O 的另一交点,则要证 T 为定点,且 I_1,I_2,T,X 共圆,即只要证 $\angle NXM=\angle I_1TI_2$,又 $\angle NXM=\angle NTM$,因此只要证 $\angle MTI_2=\angle NTI_1$ 即可.可以通过证 $\triangle MTI_2\backsim\triangle NTI_1$ 而得,

由 $\angle TNI_1=\angle TMI_2$,知只要有 $\frac{NT}{NI_1}=\frac{MT}{MI_2}$,从而 T 点也易作出.

证明:设 M 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,由 I_2 为 $\triangle XBC$ 的内心,知 X,I_2,M 共线,所以

$$\begin{aligned}\angle MBI_2&=\angle MBC+\angle I_2BC\\&=\angle MXC+\angle I_2BX\\&=\angle MXB+\angle I_2BX\end{aligned}$$

$= \angle MI_2B$

故 $MI_2 = MB$.

设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，则同样得 $MI = MB$

所以 $MI = MI_2 = MC$

即 I_2, B, C, I 在以 M 为圆心的圆上.

同理，设 N 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，有 A, I_1, I, C 在以 N 为圆心的圆上.

作 $CP \parallel MN$ 交圆 O 于 P，连 PI 与圆 O 交于 T 点，则

$MI = MC = NP, MP = NC = NI$

故四边形 $MPNI$ 为平行四边形，因此

$S_{\triangle MPT} = S_{\triangle NPT}$

$MP \cdot MT = NP \cdot NT$

由 $MP = NC = NI_1, NP = MC = MI_2$，得

$$\frac{NT}{NI_1} = \frac{MT}{MI_2}$$

又因为 $\angle I_1NT = \angle XNT = \angle XMT = \angle I_2MT$

$$\triangle NI_1T \backsim \triangle MI_2T$$

所以

$$\angle NTI_1 = \angle MTI_2$$

故 $\angle I_1XI_2 = \angle NXM = \angle NTM = \angle I_1TI_2$

即 X, I_1, I_2, T 四点共圆，亦即 T 在 $\triangle XI_1I_2$ 的外接圆上.

由于 M、N 为定点，且 $CP \parallel MN$，知 P 为定点，又 I 为定点，故 PI 与圆 O 的交点 T 也为定点.

因此对 $\overset{\frown}{AB}$ 上任一点 X，$\triangle XI_1I_2$ 的外接圆经过圆 O 上的定点 T.

例 3 （第 39 届 IMO 预选题）已知 $ABCD$ 是圆内接四边形，E、F 分别是 AB、CD 上的点，且满足 $AE : EB = CF : FD$，设 P 是线段 EF 上满足 $PE : PF = AB : CD$ 的点. 证明：$\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 的面积之比不依赖于 E、F 的选择.

证明：若直线 AD、BC 不平行（如图 Ⅱ－4－8－3），设其交点为 S，因为 $ABCD$ 为圆内接四边形，则 $\triangle ASB \backsim \triangle CSD$. 从而，$\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{CD}{CS}$

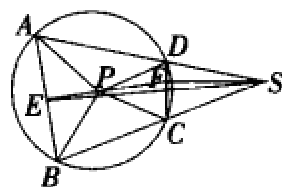


图 Ⅱ－4－8－3

又因为 $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{CF}{FD}$，即 $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{CF}{CD}$

有 $\dfrac{AE}{AS} = \dfrac{CF}{CS}$，故 $\triangle ASE \backsim \triangle CSF$

所以 $\angle ASE = \angle CSF$，且 $\dfrac{SE}{SF} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{PE}{PF}$

从而 $\angle ESP = \angle FSP$. 于是 $\angle ASP = \angle BSP$.

所以 P 到 AD、BC 的距离相等，故 $S_{\triangle APD} : S_{\triangle BPC} = AD : BC$ 为常数.

当 $AD \parallel BC$ 时（如图 Ⅱ－4－8－4），$ABCD$ 为等腰梯形，且 $AB = CD$，从而 $BE = DF$

设 M、N 分别为 AB、CD 的中点，则 $ME = NF$，且 E、F 到 MN 的距离相等. 于是，EF 的中点 P 在 MN 上，从而，P 到 AD 和 BC 的距离相等，故 $S_{\triangle APD} : S_{\triangle BPC} = AD : BC$

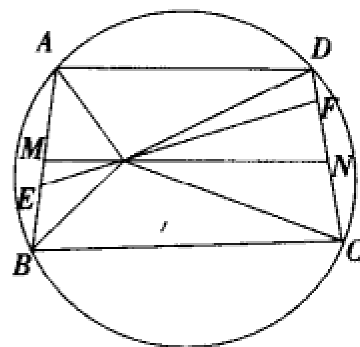


图 Ⅱ－4－8－4

Ⅱ. 关于几何极值问题

例 4 （2000. 河北省高中数学竞赛题）在 $\triangle ABC$ 中，若 $\dfrac{\cos A}{\sin B} + \dfrac{\cos B}{\sin A} = 2$，且 $\triangle ABC$ 的周长为 12，求其面积的最大可能值.

解:由已知,得 $\sin A \cdot \cos A + \sin B \cdot \cos B = 2\sin A \cdot \sin B$.

即 $\sin A(\cos A - \sin B) + \sin B(\cos B - \sin A) = 0$

$\sin A[\sin(90^\circ - A) - \sin B] + \sin B[\sin(90^\circ - B) - \sin A]$

$= 2\sin\frac{90^\circ - A - B}{2}\left[\sin A \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{A-B}{2}\right) + \sin B \cdot \cos\left(45^\circ + \frac{A-B}{2}\right)\right]$

$= 2\sin\frac{90^\circ - A - B}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left[\cos\frac{A-B}{2} \cdot (\sin A + \sin B) + \sin\frac{A-B}{2} \cdot (\sin A - \sin B)\right] = 0$

又 $\cos\frac{A-B}{2} \cdot (\sin A + \sin B) + \sin\frac{A-B}{2} \cdot (\sin A - \sin B)$

$= 2\cos^2\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2} + 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin^2\frac{A-B}{2} > 0$

故 $\sin\frac{90^\circ - A - B}{2} = 0$

则 $90^\circ - \angle A - \angle B = 0$. $\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$

即 $\triangle ABC$ 为直角三角形

设 A、B、C 分别为对应的边为 a、b、c,依题意,得

$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12$

$\because a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, a^2 + b^2 \geqslant 2ab$

$\therefore 12 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab}$

即 $ab \leqslant 36(2 - \sqrt{2})^2$

则 $S = \frac{1}{2}ab \leqslant 18(2 - \sqrt{2})^2 = 36(3 - 2\sqrt{2})$

即 $S_{max} = 36(3 - 2\sqrt{2})$

【评注】 上述解题的关键是:由三角式得 $\angle A + \angle B = 90^\circ$,继而,$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12$,用均值不等式得 $ab \leqslant 36(2 - \sqrt{2})^2$

例 5 (2000.朝鲜数学奥林匹克)已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形,D 是边 BC 上一点且 $BD = P$,r_1,r_2 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的内切圆的半径,请用 P 表示 r_1,r_2,并求 r_1r_2 的最大值.

解:如图 Ⅱ-4-8-5,在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理得

$AD^2 = P^2 - P + 1$

$AD = \sqrt{P^2 - P + 1}$

又三角形的面积等于其半周长与内切圆半径之积,故有

$\frac{1 + P + \sqrt{P^2 - P + 1}}{2} \cdot r_1 = S_{\triangle ABD}$

$= \frac{1}{2} \times 1 \times p\sin 60^\circ$

则 $r_1 = \frac{\sqrt{3}(1 + P - \sqrt{P^2 - P + 1})}{6}$

同理,由 $\triangle ADC$ 可得

$r_2 = \frac{\sqrt{3}(2 - P - \sqrt{P^2 - P + 1})}{6}$

则 $r_1r_2 = \frac{1 - \sqrt{P^2 - P + 1}}{4}$

当 $P = \frac{1}{2}$ 时,r_1r_2 的最大值为 $\frac{2 - \sqrt{3}}{8}$

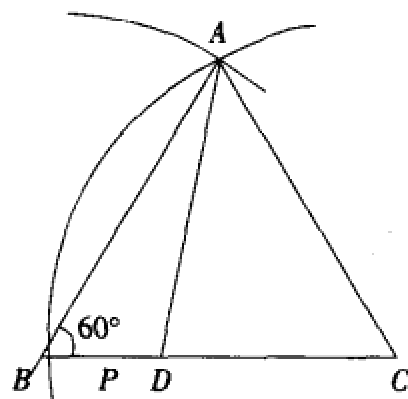


图 Ⅱ-4-8-5

例 6 (1988.中国国家集训队选拔考试题)如图 Ⅱ-4-8-6 所示,在梯形 $ABCD$ 的下底 AB 上有二定点 M、N,上底 CD 上有一动点 P,记 $E = DN \cap AP$,$F = DN \cap MC$,$G = MC \cap PB$,$DP = \lambda DC$,问当 λ 为何值时,四边

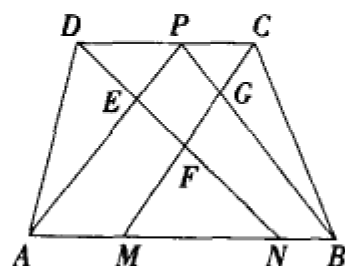


图 Ⅱ-4-8-6

形 $PEFG$ 的面积最大?

解:因为 $S_{PEFG}=S_{\triangle ABP}-S_{\triangle ANE}-S_{\triangle MBG}+S_{\triangle MNF}$,而其中 $S_{\triangle ABP}$ 与 $S_{\triangle MNF}$ 为定值,所以 S_{PEFG} 取得最大值当且仅当

$S_{\triangle ANE}+S_{\triangle MBG}$ 取最小值.

记:$AB=a,CD=b,MN=c$,并设 $AN=\mu(a+c)$,于是 $MB=(1-\mu)(a+c)$,不妨设梯形的高为1,容易看出

$$S_{\triangle ANE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu^2(a+c)^2}{\mu(a+c)+\lambda b}$$

$$S_{\triangle MBG}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\mu)^2(a+c)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

因此有 $S_{\triangle ANE}+S_{\triangle MBG}$

$$=\frac{1}{2}(a+c)^2\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right] \quad ①$$

由柯西不等式有

$$\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

$$=\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right]\cdot[\mu(a+c)+\lambda b+(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b]\cdot\frac{1}{a+b+c}\geqslant(\mu+1-\mu)^2\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+b+c} \quad ②$$

将②代入①,即得

$$S_{\triangle ANE}-S_{\triangle MBG}\geqslant\frac{(a+c)^2}{2(a+b+c)}$$

其中等号成立当且仅当②式中等号成立,而这又当且仅当

$$\frac{\mu}{\mu(a+b)+\lambda b}=\frac{1-\mu}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b} \quad ③$$

由此解得 $\lambda=\mu$,即当 $\lambda=\mu=\dfrac{AN}{AB+MN}$ 时,四边形 $PEFG$ 的面积取得最大值.

例7 (1996.中国数学冬令营试题6)在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ,\angle A=30^\circ,BC=1$,求 $\triangle ABC$ 的内接三角形的最长边的最小值.

【分析】 本题求三边最大边中的最小值,考虑极端状况:内接三角形是等边三角形.

解:首先在 $\triangle ABC$ 的内接正三角形的范围内,求边长的最小值.

如图Ⅱ-4-8-7,在边 BC 上任取一点 D,并记 $BD=x$,然后分别在边 CA,AB 上取点 E 和 F,使 $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}x,BF=1-\frac{x}{2}$,于是由余弦定理,有

图Ⅱ-4-8-7

$$DF^2=x^2+\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-2x\left(1-\frac{x}{2}\right)\cos60^\circ=\frac{7}{4}x^2-2x+1$$

$$DE^2=(1-x)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\frac{7}{4}x^2-2x+1$$

$$EF^2=\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cos30^\circ$$

$$=\frac{7}{4}x^2-2x+1$$

故得 $DF=DE=EF$,即 $\triangle DEF$ 为等边三角形,这表明对于 BC 上任何一点 D,都可作出一个内接正三角形,记 CA,AB 中点分别为 N,M,记 BM 中点为 S,则当点 D 从 B 变到 C 时,点 E 从 C 变到 N,点 F 从 M 变到 S. ①

若记 $\triangle DEF$ 的边长为 a,则有

$$a^2=\frac{7}{4}x^2-2x+1=\frac{7}{4}\left(x^2-\frac{8}{7}x+\frac{4}{7}\right)$$
$$=\frac{7}{4}\left[\left(x-\frac{4}{7}\right)^2-\frac{16}{49}+\frac{4}{7}\right]$$
$$=\frac{7}{4}\left(x-\frac{4}{7}\right)^2+\frac{3}{7}$$

可见当 $x=\frac{4}{7}$ 时，$a_{\min}=\sqrt{\frac{3}{7}}$. 图 Ⅱ－4－8－8 中用虚线表示的 $\triangle PQR$ 即为取最小值的位置.

下面证明，任何内接三角形的最大边边长都不小于 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

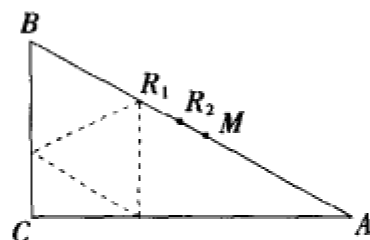


图 Ⅱ－4－8－8

为方便计，引入以 C 为原点，CA 为正半 x 轴的直角坐标系.（如图 Ⅱ－4－8－8），设 $\triangle XYZ$ 为 $\triangle ABC$ 的任一内接三角形，其中点 X,Y,Z 分别位于边 BC,CA,AB 上，在 BM 上取点 R_1 和 R_2，使得 $MR_1=\frac{1}{3}MB$，$MR_2=\frac{3}{14}MB$，于是 $AR_1=\frac{2}{3}AB$，$BR_2=\frac{11}{14}BM$，从而有

$$y_{R_1}=\frac{2}{3}>\sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$x_{R_2}=\frac{11}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{10}{13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$$

(1) 若点 Z 位于线段 BR_1 上，则 $y_Z\geqslant y_{R_1}>\sqrt{\frac{3}{7}}$；若点 Z 位于线段 R_2A 上，则 $X_z\geqslant X_{R_2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$，可见，这时 $\triangle XYZ$ 的最长边的边长大于 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(2) 设点 Z 位于线段 R_1R_2 内部，则将点 Z 作为点 F，作图 Ⅱ－4－8－8 的正三角形 DEF，不难验证，$X_E<X_F$，$y_D<y_F$. 因而，若点 x 位于线段上，则 $ZX\geqslant ZD=FD$；若点 Y 位于线段 CE 上，则 $ZY\geqslant ZE=FE$；若点 X 位于 BD 上，且点 Y 位于 EA 上，则由勾股定理知 $XY\geqslant DE$. 所以 $\triangle XYZ$ 的最大边长不小于 $\triangle EFD$ 的边长，从而不小于 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

综上所述，所求的最长边的最小值为 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

【评注】 证明过程中步骤 ① 不可省略，这是由于它表明前面顶点的取法不仅是 $\triangle DEF$ 为等边三角形的充分条件，也是必要条件.

例8 （2001. 中国数学奥林匹克）给定 a，$\sqrt{2}<a<2$，内接于单位圆 T 的凸四边形 $ABCD$ 适合以下条件：

(1) 圆心在这凸四边形内部；

(2) 最大边长是 a，最小边长是 $\sqrt{4-a^2}$，过点 A、B、C、D 依次作圆 T 的 4 条切线 L_A、L_B、L_C、L_D. 已知 L_A 与 L_B、L_B 与 L_C、L_C 与 L_D、L_D 与 L_A 分别交于点 A'、B'、C'、D'，求面积之比 $\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}$ 的最大值和最小值.

解： 记 $\odot T$ 的圆心为 O，并记 $\angle AOB=2\theta_1$，$\angle BOC=2\theta_2$，$\angle COD=2\theta_3$，$\angle DOA=2\theta_4$，于是 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 都是锐角且 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$，不难求得

$$S_{\text{四边形}A'B'C'D'}=\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4$$

$S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2}(\sin2\theta_1+\sin2\theta_2+\sin2\theta_3+\sin2\theta_4)$. 所以有

$$\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{2(\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4)}{\sin2\theta_1+\sin2\theta_2+\sin2\theta_3+\sin2\theta_4} \quad ①$$

由于式 ① 右端关于 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 对称，故不妨设 $AD=a$，$CD=\sqrt{4-a^2}$

于是 $\sin\theta_4=\frac{a}{2},\sin\theta_3=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$

又因 $\cos(\theta_1+\theta_2)=\cos\theta_3\cdot\cos\theta_4-\sin\theta_3\cdot\sin\theta_4$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4}(4-a^2)}-\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}=0$$

所以 $\theta_3+\theta_4=\frac{\pi}{2}$,从而,$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$

由三角公式有

$$\tan\theta_3+\tan\theta_4=\frac{\sin(\theta_3+\theta_4)}{\cos\theta_3\cdot\cos\theta_4}=\frac{1}{\sin\theta_4\cdot\sin\theta_3}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}} \quad ②$$

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}=\frac{1}{\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2}=\frac{2}{\sin2\theta_1} \quad ③$$

$$\sin2\theta_3+\sin2\theta_4=2\sin2\theta_3=4\sin\theta_3\cdot\cos\theta_3=4\sin\theta_3\cdot\sin\theta_4=a\sqrt{4-a^2} \quad ④$$

$$\sin2\theta_1+\sin2\theta_2=2\sin2\theta_1 \quad ⑤$$

简记 $\alpha=\tan\theta_3+\tan\theta_4,\beta=\sin2\theta_3+\sin2\theta_4,t=\sin2\theta_1$,于是 α、β 为常数而 t 为变数.将②~⑤代入①得

$$\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}=\frac{2\alpha+\frac{4}{t}}{\beta+2t} \quad ⑥$$

容易看出,式⑥右端是 t 的严格递减函数,而 t 的最大值为 1,故得

$$\min\left(\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}\right)=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}$$

另一方面,由于 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 都是锐角且 a 是最大边长,$\sqrt{4-a^2}$ 是最小边长,故有 $\theta_3\leqslant\theta_1,\theta_2\leqslant\theta_4$

又因 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}=\theta_3+\theta_4$,故知 t 的最小值为 $t_0=2\sin\theta_3\cdot\sin\theta_4=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}$

于是,由式⑥右端函数的严格递减性即得

$$\max\left(\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}\right)=\frac{8}{a^2(4-a^2)}$$

Ⅲ.关于轨迹问题

例 9 (1995.世界城市)P 是凸四边形 $ABCD$ 所在平面上一点,$\angle APB,\angle BPC,\angle CPD,\angle DPA$ 的平分线分别交 AB,BC,CD,DA 于点 K,L,M,N.

(1) 寻找一点 P,使 $KLMN$ 是平行四边形;

(2) 求所有这样 P 点的轨迹.

【分析】 先考虑(2),若 $KLMN$ 是平行四边形,则 $NK\parallel ML$,若 NK 与 BD 不平行,则设交点为 Q,利用梅涅劳斯定理及其逆定理,知 ML 也过 Q 点,与 $NK\parallel ML$ 矛盾,故 $NK\parallel BD$,利用角平分线定理可推出 $PA=PC,PB=PD$,故 P 是 AC,BD 的垂直平分线的交点.

解:(1) 设 P 是 AC,BD 的垂直平分线的交点,则 $PA=PC,PB=PD$

因为 PK 平分 $\angle APB$,PL 平分 $\angle BPC$,所以

$$\frac{AK}{KB}=\frac{PA}{PB},\frac{CL}{LB}=\frac{PC}{PB}$$

$$\frac{AK}{KB}=\frac{CL}{LB}$$

从而 $KL\parallel AC$

同理 $MN\parallel AC$,所以 $KL\parallel MN$

同理 $LM\parallel NK$,即 $KLMN$ 是平行四边形

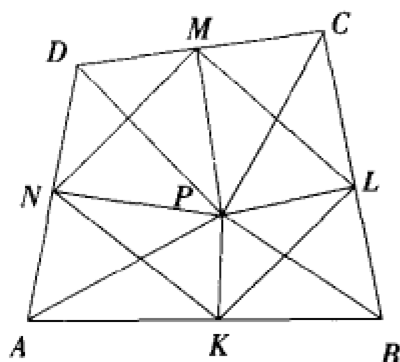


图 Ⅱ－4－8－9

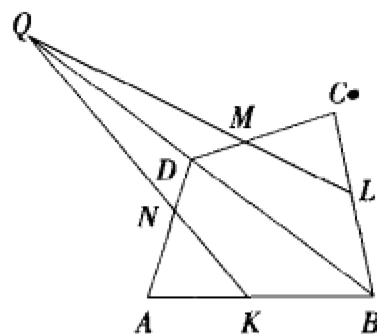


图 Ⅱ－4－8－10

(2) 假设 KN 与 BD 交于 D 点(如图 Ⅱ－4－8－10)

在 $\triangle ABD$ 中,由梅涅劳斯定理,知

$$\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BQ}{QD}=1$$

又 $\frac{AK}{KB}=\frac{PA}{PB},\quad \frac{BL}{LC}=\frac{PB}{PC},\quad \frac{CM}{MD}=\frac{PC}{PD},\quad \frac{DN}{NA}=\frac{PD}{PA}$

所以
$$\begin{aligned}\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DQ}{QB}&=\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{DQ}{QB}\\&=\frac{PB}{PA}\cdot\frac{PA}{PD}\cdot\frac{DQ}{QB}\\&=\frac{KB}{AK}\cdot\frac{NA}{DN}\cdot\frac{QD}{BQ}=1\end{aligned}$$

再由梅涅劳斯定理的逆定理,知 Q、M、L 共线,即 KN 与 LM 交于 Q,与 $KN /\!/ LM$ 矛盾

所以 $KN /\!/ BD /\!/ LM$

故 $\frac{PA}{PB}=\frac{AK}{KB}=\frac{AN}{ND}=\frac{PA}{PD}$

从而 $PB=PD$,同理 $PA=PC$

因此 P 点的轨迹是 AC,BD 的垂直平分线的交点.

例 10 (1995.第 36 届 IMO 中国代表队选拔考试题) 给定锐角 θ 和相切的两个圆,过公切点 A 作定直线 l(不过圆心) 交外圆于另一点 B,设 M 点在外圆优弧上运动,N 是 MA 与内圆的另一交点,P 是射线 MB 上的一点,使得 $\angle MPN=\theta$,试求 P 点的轨迹.

解法一: 当动点 M 在大圆优弧的不同部位时,相应的图形略有差异(参看所附图形 Ⅱ－4－8－11、12、13),我们所写的文字说明统一地适用于各种情形.

设直线 l 与内圆的另一个交点是 C,连 NC,过 A 点和 B 点作外圆的切线相交于 T 点.

$\because\ \angle TAB=\angle AMB=\angle ANC$,$\therefore\ MB /\!/ NC$

$\therefore\ \angle CNP=\angle MPN=\theta$

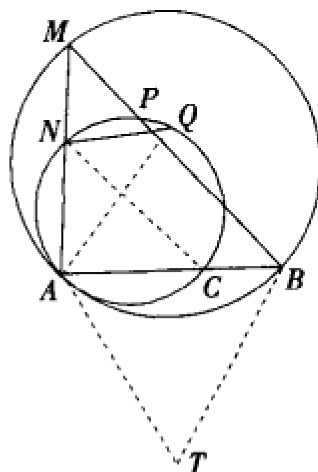


图 Ⅱ－4－8－11

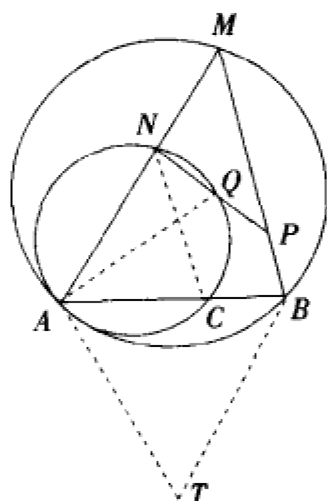


图 Ⅱ - 4 - 8 - 12

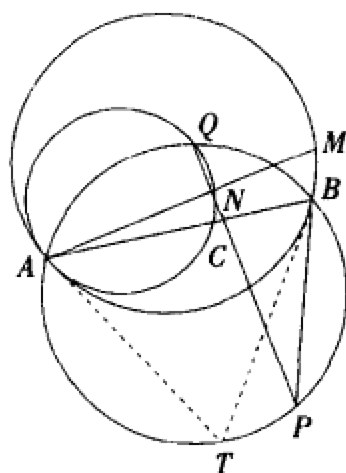


图 Ⅱ - 4 - 8 - 13

设直线 PN 与内圆的另一交点是 Q，则 A、C、N、Q 四点都在内圆周上，因而，$\angle CAQ = \angle CNP = \angle MPN = \theta$. 由此得知：$A$、$Q$、$P$、$B$ 四点共圆.

综上所述，Q 点是内圆上的定点，$\angle CAQ = \theta$

并且 P 点在 $\triangle ABQ$ 的外接圆上. 因此，我们可以按以下方式作出 P 点的轨迹.

在内圆被直线 l 截得的优弧上取 Q 点，使得 $\angle BAQ = \theta$

然后作 $\triangle ABQ$ 的外接圆. 该外接圆周在 $\angle ABT$ 外的那段圆弧，就是所求的轨迹.

解法二：过 A 点和 B 点作外圆的切线相交于 T. 设直线 l 与内圆的另一交点是 C，连 NC. 在切线 BT 上取一点 D，使得 $\angle BDC = \theta$，然后，连 AD 和 CD（参看图 Ⅱ - 4 - 8 - 14）

$\because\ \angle NMP = \angle CBD, \angle MPN = \angle BDC$

$\therefore\ \triangle MNP \backsim \triangle BCD$

因而 $\dfrac{MN}{MP} = \dfrac{BC}{BD}$ ①

又因为 $MB \parallel NC$，所以，$\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{AB}{BC}$ ②

将 ① 和 ② 式两边分别相乘得

$\dfrac{AM}{MP} = \dfrac{AB}{CD}$

又因为 $\angle AMP = \angle ABD$

所以 $\triangle AMP \backsim \triangle ABD$

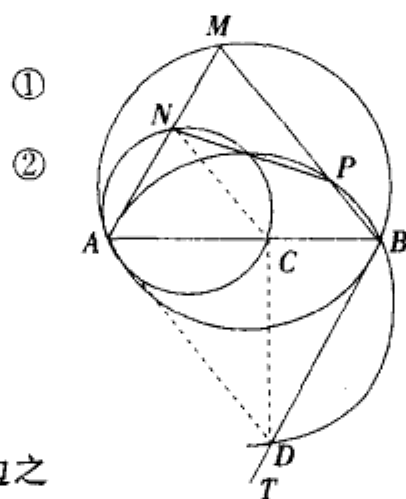


图 Ⅱ - 4 - 8 - 14

上式右端是一个完全确定的三角形，因此，$\triangle AMP$ 的各角以及各边之比都是完全确定的. 我们看到，P 点可由 M 点经过绕 A 点的旋转相似变换而得到，即

$\angle PAM = \angle DAB$（定角）

$\dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AD}{AB}$（定值）

因此，将所给的外圆的优弧作相应的旋转相似交换就得到 P 的轨迹.

综上所述，P 点的轨迹是以 AD 为弦，张角等于 $\angle ABD$（定角）的一段圆弧.

例 11 （1997. 第 38 届 IMO 中国国家队选拔考试题）给定 $\lambda > 1$，设点 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆的弧 BAC 上的一个动点，在射线 BP 和 CP 上分别取点 U 和 V，使得 $BU = \lambda BA$，$CV = \lambda CA$，在射线 UV 上取点 Q，使得 $UQ = \lambda UV$，求点 Q 的轨迹.

解：（如图 Ⅱ - 4 - 8 - 15）连接 AU、AV、AQ，在 BC 延长线上取点 D，使 $BD = \lambda BC$，连接 AD、QD

$\because\ CV = \lambda CA, BU = \lambda BA, \angle ACV = \angle ABU$

$\therefore\quad \triangle AVC \backsim \triangle AUB$

$\therefore\quad \dfrac{AU}{AV} = \dfrac{AB}{AC}, \angle VAC = \angle UAB$

$\therefore\quad \angle UAV = \angle BAC$

$\therefore\quad \triangle AUV \backsim \triangle ABC$

$\therefore\quad \dfrac{UV}{BC} = \dfrac{AU}{AB}, \angle AUV = \angle ABC$

又 $\because\quad UQ = \lambda UV, BD = \lambda BC$

$\therefore\quad \dfrac{UQ}{BD} = \dfrac{UV}{BC} = \dfrac{AU}{AB}$

$\therefore\quad \triangle AUQ \backsim \triangle ABD$

$\triangle AVQ \backsim \triangle ACD, \triangle AQD \backsim \triangle AVC$

$\therefore\quad \dfrac{QD}{VC} = \dfrac{AD}{AC}, QD = \dfrac{VC \cdot AD}{AC} = \lambda AD$

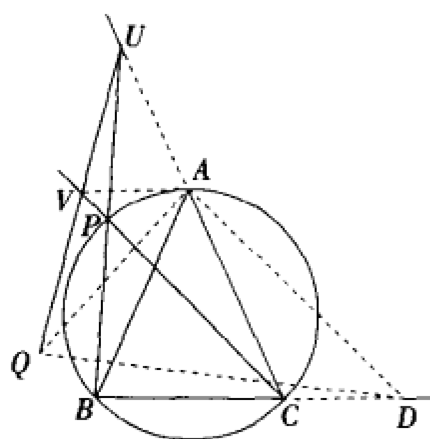


图 Ⅱ - 4 - 8 - 15

这表明点 Q 位于以点 D 为圆心,以 λAD 为半径的圆上.

当点 P 运动到点 B 和点 C 时,割线 BP 和 CP 分别变为过点 B 和 C 的切线,这时所分别得到的点 Q' 和 Q'' 即为轨迹弧的端点.

例 12 (1997.第 38 届 IMO 预选题)如图Ⅱ - 4 - 8 - 16,过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 的三个高分别交其对边于点 D、E、F,过点 D 平行于 EF 的直线分别交 AC、AB 于点 Q 和 R,EF 交 BC 于点 P.证明:$\triangle PQR$ 的外接圆过 BC 的中点.

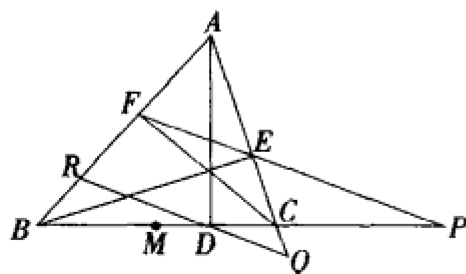


图 Ⅱ - 4 - 8 - 16

证明:点 P 的存在意味着 $AB \neq AC$,由对称性,可设 $AB > AC$,则 P、D 在射线 MC 上,点 B、C、E、F 共圆,因此 $PB \cdot PC = PE \cdot PF$,垂足 $\triangle DEF$ 的外接圆也即 $\triangle ABC$ 的欧拉圆(九点圆)必过 BC 的中点 M.

因此 $\quad PE \cdot PF = PD \cdot PM$

所以 $\quad PB \cdot PC = PD \cdot PM \qquad ①$

$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$

$\therefore\quad \angle ABC = \angle AEF$

$\because\quad QD /\!/ EF$,故 $\angle AEF = \angle CQD$,$\angle ABC = \angle RBD$,因而,$\angle RBD = \angle CQD$.显然 $\angle BDR = \angle QDC$

$\therefore\quad \triangle BDR \backsim \triangle QDC$,$\therefore\quad DQ \cdot DR = DB \cdot DC$

如能证明,$DB \cdot DC = DP \cdot DM \qquad ②$

则等式 $DQ \cdot DR = DP \cdot DM$ 成立,也就证明了 Q、R、M、P 共圆.由此,证明本题就简化为由①⇒②.

令 $MB = MC = a$,$MD = d$,$MP = p$,则有 $PB = p + a$,$DB = a + d$,$PC = p - a$,$DC = a - d$,$DP = p - d$

由 ① 得 $(p + a)(p - a) = (p - d)p$

即 $\quad a^2 = dp$

由 ② 得 $(a + d)(a - d) = (p - d)d$

即 $\quad a^2 = dp$,所以,② 成立.

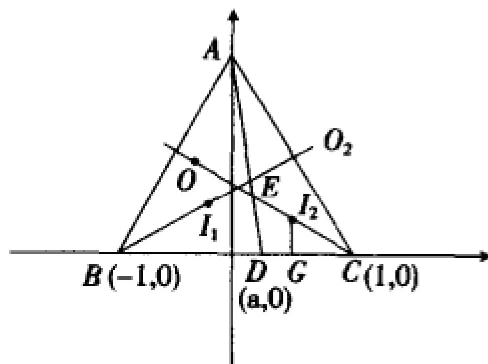
【评注】 (1) 证明的各处可以作变动.例如,易证 P 与 D 是关于以直径 BC 为圆的反演点,由此提供了等式 $a^2 = dp$ 的一个证明.

(2) 用三角法或解析法来证明也是可能的.例如,令 $D = (0,0)$,$A = (0,1)$,$B = (b,0)$,$C = (c,0)$,计算可得 $M = \left(\dfrac{b+c}{2}, 0\right)$,$P = \left(\dfrac{2bc}{b+c}, 0\right)$,$Q = \left(\dfrac{c(1-bc)}{1+c^2}, \dfrac{c(b+c)}{1+c^2}\right)$,$R =$

$\left(\dfrac{b(1-bc)}{1+b^2},\dfrac{b(b+c)}{1+b^2}\right)$.因此,得到所需的等式:$DQ\cdot DR=DP\cdot DM$.

例 13 (2001.第42届IMO中国队选拔赛试题)给定正$\triangle ABC$,D是BC边上任意一点,$\triangle ABD$的外心、内心分别为O_1,I_1,$\triangle ADC$的外心、内心分别为O_2,I_2,直线$O_1I_1\neq O_2I_2$相交于P.试求:当点D在BC边上运动时,点P的轨迹.

解:如图Ⅱ-4-8-17,建立直角坐标系,$BE\perp AC$,$CF\perp AB$,设D点的坐标为$(a,0)$,不妨设$0\leqslant a<1$,则O_2,I_1在BE或其延长线上,O_1,I_2在CF或其延长线上,由于O_2在DC的垂直平分线上,故O_2的横坐标为$\dfrac{a+1}{2}$,由$\angle CBO_2=30^\circ$知,O_2的纵坐标为$\dfrac{3+a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,因此$O_2$点坐标为$\left(\dfrac{a+1}{2},\dfrac{3+a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,$I_2$点的纵坐标为$\triangle ADC$内切圆半径长$r_2$,由$AD=\sqrt{a^2+3}$,及面积关系有$(2+1-a+\sqrt{a^2+3})r_2=(1-a)\sqrt{3}$,即



图Ⅱ-4-8-17

$$r_2=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(3-a-\sqrt{a^2+3}\right)$$

过I_2作$I_2G\perp BC$于G,则由$\angle GCI_2=30^\circ$,知$CG=r_2\cot30^\circ=\sqrt{3}r_2$.$I_2$点的横坐标为$1-CG=1-\dfrac{1}{2}(3-a-\sqrt{a^2+3})=\dfrac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3})$.因此$I_2$点的坐标为

$\left(\dfrac{1}{2}(a-1+\sqrt{a^2+3}),\dfrac{\sqrt{3}}{6}(3-a-\sqrt{a^2+3})\right)$.同理求得,$I_1$点坐标为

$\left(\dfrac{1}{2}(a+1-\sqrt{a^2+3}),\dfrac{\sqrt{3}}{6}(3+a-\sqrt{a^2+3})\right)$,$O_1$点坐标为$\left(\dfrac{a-1}{2},\dfrac{3-a}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

O_2I_2的方程为:$\dfrac{y-\dfrac{a+3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{x-\dfrac{a+1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{2a+\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}$

即 $$y-\frac{\sqrt{3}(a+3)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a+\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}\left(x-\frac{a+1}{2}\right)\qquad ①$$

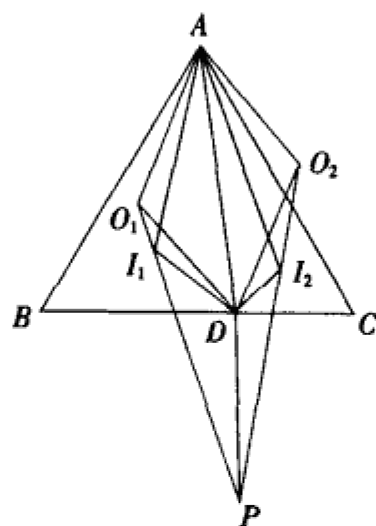
同理,O_1I_1的方程为:

$$y-\frac{\sqrt{3}(3-a)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2a-\sqrt{a^2+3}}{2-\sqrt{a^2+3}}\left(x-\frac{a-1}{2}\right)\qquad ②$$

由(1)和(2),解得$x=a$,代入(2)有

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2+3}$$

$\therefore\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+3}$.即 $y^2-\dfrac{x^2}{3}=1,(-1<x<1,y<0)$



图Ⅱ-4-8-18

另解:如图Ⅱ-4-8-18,作辅助线,由$\angle AO_2O=2\angle C=120^\circ$,$\angle AI_2D=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle C=120^\circ$,$\angle B=60^\circ$,知$O_2,I_2$均在$\odot O_1$上,同理$O_1,I_1$均在$\odot O_2$上,显然$\odot O_1$与$\odot O_2$是等圆,$\angle O_1DO_2=60^\circ$

因为$\angle AI_2O_2=30^\circ=\angle I_1AI_2$,所以$AI_1\,/\!/\,O_2P$, $\angle O_1PO_2=\angle O_1I_1A=30^\circ$

于是,D是$\triangle O_1PO_2$的外心,在$\triangle O_2DI_2$中,由$\angle DI_2O_2=150^\circ\Rightarrow\angle O_2DI_2+\angle DO_2I_2=30^\circ$

又因为

$$\begin{aligned}\angle O_2DC&=\angle I_2DC+\angle O_2DI_2=\angle ADI_2+\angle O_2HI_2\\&=\angle ADO_2+\angle O_2DI_2+\angle O_2DI_2\\&=30^\circ+2\angle O_2DI_2\end{aligned}$$

于是由$\angle DO_2P=\angle DPO_2$,$\angle PDC=180°-\angle CDO_2-2\angle DO_2P=150°-2\angle O_2DI_2-2\angle DO_2P$ $=90°$

$\therefore$ $\angle PDC=90°$ 即 $PD\perp BC$,以及 $AD=\sqrt{3}DO_1=\sqrt{3}DP$

再以 BC 边所在直线为 x 轴,BC 边中点 O 为原点建立直角坐标系,且不妨设正 $\triangle ABC$ 的边长为2,P 点坐标为(x,y),则在直角 $\triangle AOD$ 中,有

$AD^2-OD^2=AO^2$,即

$(\sqrt{3}y)^2-x^2=(\sqrt{3})^2,y^2-\frac{x^2}{3}=1$

其中 $-1<x<1,y<0$

§8.3 针对性训练题

A 组

1.(奥林匹克训练题)Rt△CDF 中,$\angle D = 90^\circ$,$DO \perp CF$,O 为垂足;以 C 为圆心,CD 为半径作一圆,AA' 为过 O 点的圆 C 的动弦,E 为直线 $A'A$ 上一点,且 $EF \perp CF$.证明:由 A、A' 至 EF 的距离的倒数和为定值.

2. 已知两圆相交于 M 和 N,问如何作一条线段 AB,经过点 M 且两端点分别落在两圆上,使得 AM、MB 最大?

3. 给定一圆 O 和圆外定直线 l,过 l 上任一点引圆的两条切线.证明:两切点的连线必过一定点.

4. 设 PMN 是 $\odot O$ 通过圆心的一条割线,PAB 是另一条割线,M、N、A、B 是这两条割线与圆的交点.求证:$\dfrac{AM \cdot BM}{AN \cdot BN}$ 是一个定值.

5.(第 35 届 IMO 预选题)一条直线 l 与圆心为 O 的圆不相交,E 是 l 上的一点,$OE \perp l$,M 是 l 上任意异于 E 的点,从 M 作 $\odot O$ 的两条切线分别切圆于 A 和 B,C 是 MA 上的点,使得 $EC \perp MA$,O 是 MB 上的点,使得 $ED \perp MB$,直线 CD 交 OE 于 F.求证:点 F 的位置不依赖于 M 的位置.

6. 已知圆 O_1 与圆 O_2 相交于 A 点和 A' 点,任意做一条与 AA' 相交的直线,分别与圆 O_1 与圆 O_2 相交于 B、C 和 D、E 点,且线段 CD 在线段 BE 上.求证:$\angle BAD + \angle CAE$ 为定值.

7. 若 PQ 为一线段,长度固定,令它在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上滑动(次序是 $BPQC$).过 P、Q 作 AC、AB 的平行线,分别交 AC 与 P_1、Q_1,交 AB 于 P_2、Q_2.证明:梯形 PQQ_1P_1 与 PQQ_2P_2 的面积之和与 PQ 在 BC 上的位置无关.

8. 在定线段 AB 上任选一点 M，然后，在直线 AB 的同一侧，分别以 AM 和 MB 为边作正方形 $AMCD$ 和 $MBEF$，这两个正方形的外接圆依次为圆 P 和圆 Q，它们除相交于点 M 外，还相交于另一点 N．求证：不论线段 AB 上的 M 点怎样选取，直线 MN 总通过一固定点 R．

9. 在 $\triangle ABC$ 的三边上分别取 D、E、F 三点连接的图形称为 $\triangle ABC$ 的内接三角形，试在锐角三角形 ABC 的所有内接三角形中求出周长最短的三角形．(*Schwarce* 问题)

B 组

1. (1988．中国国家集训队选拔考试题) 如图 Ⅱ－4－8－19 所示，在梯形 $ABCD$ 的下底 AB 上有二定点 M、N，上底 CD 上有一动点 P，记 $E = DN \cap AP$，$F = DN \cap MC$，$G = MC \cap PB$，$DP = \lambda DC$，问当 λ 为何值时，四边形 $PEFG$ 的面积最大？

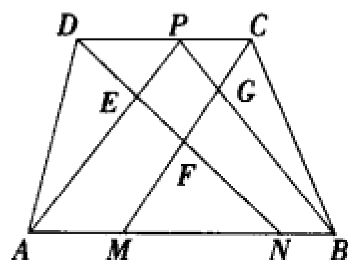


图 Ⅱ－4－8－19

2. 若 $\triangle ABC$ 的底边的大小及位置一定，其他两边的差 AC、AB 等于定长 $(AC > AB)$，则与 $\angle A$ 相邻的外角平分线在边 AC 上的正投影 AE 等于定长．

3. A 为圆 O 上一点，E、F、G 为直线 l 上三个定点，若线段 AE 交 $\odot O$ 于 B，线段 AG 交 $\odot O$ 于 D，FD 交 $\odot O$ 于 C．求证：当 A 在 $\odot O$ 上移动时，直线 BC 经过 l 上一定点 H．

4. 设 P 是以 OA、OB 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆周上的一个动点 $(\angle AOB = 90°)$，H 是 P 在 OA 上的射影，求 $\mathrm{Rt}\triangle PHO$ 的内心的轨迹．

5. 以点 O 为中心的正 n 边形($n \geqslant 5$) 的两个相邻点记为 A、B，$\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$ 全等，最初令 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$ 重合，然后在平面上移动 $\triangle XYZ$，使点 Y 与 Z 均沿着多边形的周界移动一周，而点 X 保持在多边形内移动，求点 X 的轨迹.

6. AC 是圆 O 的一条固定的弦，但不是直径，BC 是一条变动的弦且垂直于 OC，D 在劣弧 AC 上，如果 BD 交 AC 于 E，求 $\triangle ABE$ 外心的轨迹.

7. 设 D 是已知 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的动点，E 点在该三角形的内部且是 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 内切圆的外公切线与 CD 的交点. 求证：点 E 的轨迹是一段圆弧.

8. 考虑在同一平面上半径为 R 与 $r(R > r)$ 的两个同心圆. 设 P 是小圆周上的一个定点，B 是大圆周上的一个动点. 直线 BP 与大圆周相交于另外一点 C，过点 P 且与 BP 垂直的直线 l 与小圆周相交于另一点 A(如果 l 与小圆相切于 P，则 $A = P$). (1) 求表达式 $BC^2 + CA^2 + AB^2$ 所取值的集合；(2) 求线段 AB 的中点的轨迹.

9. 在平面上有三个不同的点 A、B、C，构造一条过 C 的直线 m，使得 A、B 两点到 m 的距离之积最大，对于每组点 A、B、C，如此的 m 是否惟一？

10. 边长为 $\frac{2}{3}$，$\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\sqrt{2}$ 的三角形纸片沿垂直于长度为 $\frac{3}{2}$ 的边的方向折叠，问重叠部分面积的最大值是多少？

11. 一等腰 $\triangle ABC$ 的底角为 α，腰长为 a，$\triangle ABC$ 的每一个内接三角形有一条最大的边(本题所述的内接三角形是指 $\triangle ABC$ 的每条边上至少有些内接三角形的一个顶点)，求这些最大边的最小值. 此时，这个内接三角形的形状如何？

12. 在一个平面中，C 为一个圆周，直线 l 是圆周的一条切线，M 为 l 上一点，试求出具有如下性质的所有点 P 的集合：在直线 l 上存在两个点 Q 和 R，使得 M 是线段 QR 的中点，且 C 是 $\triangle PQR$ 的内切圆.

第一章

整数问题

§1.1 知识、方法、技能

Ⅰ 整数与其进位制

1. 在集合观点下,整数是整数集合的简称,记为 Z,$Z=\{n \mid n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots\}$

整数对"加、减、乘"三种运算封闭,对"除、开方"运算不封闭.

2. 关于进位制.

正整数有无穷多个,为了用有限个数字符号表示出无限个正整数,前人发明了进位制.

10 是十进位制的基,任何大于 1 的整数 r 均可作为 r 进位制的基.

(1) 定义:自然数 N 的 r 进制是把 N 表示成 r 的 n 次多项式的形式.即

$N=a_n r^n+a_{n-1} r^{n-1}+\cdots+a_1 r+a_0$

其中 $a_i \in\{0,1,2, \cdots, r-1\}, i=0,1,2 \cdots, n . a_n \neq 0$,并记作 $N=(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_r$.

r 进制记数法的基本原则是"逢 r 进 1".

(2) 不同进位制的数可以互相转换

① 进制数转换为十进制数只需直接计算.例如

$(1021)_4=1 \times 4^3+0 \times 4^2+2 \times 4+1$

$=73$

② 十进制数转换成 P 进制数是"除 P 取余"法.例如

$137=(12002)_3$

因为

除数	商	余数
3	137	
3	45	… 2
3	15	… 0
3	5	… 0
	1	…… 2

$$137=1 \times 3^4+2 \times 3^3+0 \times 3^2+0 \times 3+2$$

③a 进制数转为 b 进数($a, b>1$ 且不等于 10)只需先把 a 进制数转换为十进制数,再由十进制转换为 b 进制数.例如

$(12002)_3=137=(10001001)_2$

(3) 近年来国际国内数学竞赛中关于"数的进位制"的应用有较多的体现,例如处理数字问题,处理数列问题等等.请见赛题精讲.

Ⅱ. 整数的奇偶性

将全体整数分为两类,凡是2的倍数的数称为偶数,否则称为奇数.因此,任一偶数可表为 $2m$($m \in$ **Z**),任一奇数可表为 $2m+1$ 或 $2m-1$ 的形式.奇、偶数具有如下性质:

(1) 奇数 ± 奇数 = 偶数;偶数 ± 偶数 = 偶数;

奇数 ± 偶数 = 奇数;偶数 × 偶数 = 偶数;

奇数 × 偶数 = 偶数;奇数 × 奇数 = 奇数.

(2) 奇数的平方都可表为 $8m+1$ 形式,偶数的平方都可表为 $8m$ 或 $8m+4$ 的形式($m \in$ **Z**).

(3) 任何一个正整数 n,都可以写成 $n=2^m l$ 的形式,其中 m 为非负整数,l 为奇数.

这些性质既简单又明显,然而它却能解决数学竞赛中的一些难题.

Ⅲ 质数与合数、算术基本定理

大于1的整数按它具有因数的情况又可分为质数与合数两类.

一个大于1的整数,如果除了1和它自身以外没有其他正因子,则称此数为质数或素数,否则,称为合数.

显然,1既不是质数也不是合数;2是最小的且是惟一的偶质数.

定理1 (正整数的惟一分解定理,又叫算术基本定理)任何大于1的整数A都可以分解成质数的乘积,若不计这些质数的次序,则这种质因子分解表示式是惟一的,进而A可以写成标准分解式:

$$A = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \quad (*).$$

其中$p_1 < p_2 < \cdots < p_n$,p_i为质数,α_i为非负整数,$i = 1,2,\cdots,n$,

推论:(合数的因子个数计算公式)若$A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$为标准分解式,则$A$的所有因子(包括1和$A$本身)的个数等于$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_n + 1)$.(简记为$\prod\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)$)

定理2 (质数的判定定理)设n是大于2的整数,如果不大于$\sqrt{n}$的质数都不是n的因子,则n是质数.

定理3 质数的个数是无穷的.

Ⅳ.整数的尾数

a为自然数,a的个位数(即尾数)记为$G(a)$.显然,$G(a)$是定义在N上,值域为$D = \{0,1,2,\cdots,9\}$的一个函数,称为尾数函数,例如.

$G(1990) = 0, G(3^3) = 7$.尾数函数有性质:

(1)$G(G(a)) = G(a)$

(2)$G(a + b + \cdots + c) = G(G(a) + G(b) + \cdots + G(c))$

(3)$G(a \cdot b \cdots \cdot c) = G(G(a) \cdot G(b) \cdot \cdots \cdot G(c))$

特别地 $G(a^n) = G(G^n(a))$

(4)$G(10a) = 0, G(10a + b) = G(b)$

(5)若$a - b = 10c$,则$G(a) = G(b)$

定理4 方幂的尾数是指数呈现以4为周期的循环,即

(i)$G(a^{4k}) = G(a^4), a, k \in \mathbf{N}$;

(ii)$G(a^{4k+r}) = G(a^r), k \geqslant 0, 0 < r < 4, a, k, r \in \mathbf{N}$

定理5 $G(a^{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n}) = G(a^{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n})$,其中$b_i = 4q_i + r_i, 1 \leqslant r_i \leqslant 3, i = 1,2,\cdots,n$.

定理6

$$G(a^{b_1 b_2 \cdots b_n}) = \begin{cases} G(a),\text{当 } b_1 \text{ 为奇数}, b_2 \text{ 为偶数时;} \\ G(a^4),\text{当 } b_1 \text{ 为偶数}, b_2 \text{ 为奇数,或二者同为偶数;} \\ G(a^{b_1}),\text{当 } b_1, b_2 \text{ 同为奇数时.} \end{cases}$$

§1.2 赛题精讲

例1 (2000.第41届IMO中国国家集训队选拔考试题第3题的第(1)问)对正整数$a \geqslant 2$,记N_a为具有以下性质的正整数K的个数:K的a进制表示的各位数字的平方和等于K.证明:N_a为奇数.

【分析】 数论题变幻无穷,往往与不等式λ组结合,考查分类讨论,构造思想的灵活应用能力.故而掌握一些小结论,构造技巧十分重要.此题就对不等式,构造等知识都有一定的要求

证明:设k的a进制表示为

$k = x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0$

其中 $x_n \neq 0, 0 \leqslant x_i \leqslant a-1, i = 0,1,\cdots,n$

依题设有

$x_n a^n + \cdots + x_1 a + x_0 = x_n{}^2 + \cdots + x_1{}^2 + x_0{}^2$,亦即 $x_n(a^n - x_n) + \cdots + x_1(a - x_1) = x_0(x_0 - 1)$

注意到左端和式中的每一项均为非函数,而诸 x_i 都是 a 进制表示中的数字,因此成立不等式估计:

$(a-1)(a-2) \geqslant x_0(x_0-1) \geqslant x_n(a^n - x_n) \geqslant a^n - a$

由此得 $n = 0$,或 1.

当 $n = 0$ 时,显然具有所给性质的正整数只有一个,即 1

当 $n = 1$ 时,$k = x_1 x_0$ 满足等式

$$x_1(a - x_1) = x_0(x_0 - 1)$$

我们对这样的整数进行分类,为此记

$B_a(x_0) = \{x_1 \mid x_1(a - x_1) = x_0(x_0 - 1), 1 \leqslant x_1 \leqslant a-1\}$

若 $B_a(x_0)$ 非空,则 $x_0 \geqslant 2$,设 $x_1 \in B_a(x_0)$,则 $a - x_1 \in B_a(x_0)$

又 $x_2 \geqslant 2$ 保证了 $x_0(x_0-1)$ 不是完全平方数,故 $x_1 \neq a - x$,从而,$|B_a(x)| = 0$ 或 2

显然有 $N_a = 1 + \sum\limits_{x_0=2}^{a-1} |B_a(x)|$,所以 N_a 为奇数.

关于二进制我们给出一个例.

例 2 (1999.保加利亚数学奥林匹克竞赛题)求所有的自然数 n 的个数,$4 \leqslant n \leqslant 1023$,使得 n 在二进制表示下,没有连续的三个数码相同.

【分析】 由 $a_n = a_{n-1} + x_{10}^{n-1} + x_{01}^{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$(这里 a_n 为以 1 开头,不出现连续三个相同数码的 n 位数的个数,$x_{ab}{}^n$ 表示以 1 开头,ab 结尾($a,b \in \{0,1\}$)不出现连续三个相同数码的 n 位数的个数),得 $a_3 + a_4 + \cdots + a_{10} = 228$

解:记二进制表示中,以 1 开头,不出现连续三个相同数码的 n 位数的个数为 a_n.

对 $a,b \in \{0,1\}$,用 x_{ab}^n 表示二进制表示中,以 1 开头,以 ab 结尾,不出现连续三个相同数码的 n 位数的个数,则 $n \geqslant 5$ 时,易知 $x_{100}{}^n = x_{10}{}^{n-1}, x_{01}{}^n = x_{100}{}^{n-1} + x_{10}{}^{n-1}, x_{10}{}^n = x_{11}{}^{n-1} + x_{01}{}^{n-1}, x_{11}{}^n = x_{01}{}^{n-1}$

利用上述递推关系,可知

$a_n = a_{n-1} + x_{10}{}^{n-1} + x_{01}{}^{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$

注意到 $a_3 = 3, a_4 = 5$,于是

$a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34, a_9 = 55, a_{10} = 89$,所求满足条件的自然数 n 的个数为

$a_3 + a_4 + \cdots + a_{10}$

于是问题为 228.

例 3 (1990.第 31 届备选题)证明:对任意自然数 n,二项式系数 $C_n^k (0 \leqslant k \leqslant n)$ 中,奇数的个数是 2 的幂.

解:将 n 用二进制表示,有

$n = 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \cdots + 2^{\beta_k} (\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k)$

于是 $(1+x)^n = (1+x)^2(1+x)^2 \cdot \cdots \cdot (1+x)^2$

因此 $(1+x)^x \equiv (1 + x^{2^{\beta_1}})(1 + x^{2^{\beta_2}}) \cdot \cdots \cdot (1 + x^{2^{\beta_k}}) (mod 2)$

右边多项式恰含 2^k 个项,它们的系数为 1(奇数).即 $(1+x)^n$ 的展开式中恰有 2^k 项系数 $C_n{}^k$ 为奇数.故结论成立.

例 4 (1988.第 29 届 IMO 试题)N 为正整数集,在 N 上定义函数 f 如下:$f(1) = 1, f(3) = 3$,而且对 $n \in$ N 有

$f(2n) = f(n)$ ① $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$ ②

$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$ ③

问有多少个 $n\in\mathbf{N}$,且 $n\leqslant 1988$,使得 $f(n)=n$?

解:问题的关键是找出 $f(n)$ 的表达式,为此我们先求 n 较小时的函数值,经计算可得.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	17	18
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	1	17	9

把它们的前 n 个表成二进制,可得

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
$f(n)$	1	01	11	001	101	011	111	0001	1001	0101

从上面的表中可看出,$f(n)$ 为奇数(其实这一点很容易由条件推知的).

当 $n=(a_ka_{k-1}\cdots a_1a_0)_2$ 时

$f(n)=(a_0a_1\cdots a_{k-1}a_k)_2$

即 $f(n)$ 是把 n 的二进制倒过来写.下面用数学归纳法证之.

奠基是显然的,设当 $n<l$ 时,命题成立.考虑 $n=l$ 的情形

若 l 为偶数,设 $l=(a_ka_{k-1}\cdots a_1o)_2$,由 ① 式,得

$f(l)=f((a_ka_{k-1}\cdots a_1)_2)=(a_1a_2\cdots a_k)_2=(0a_1a_2\cdots a_k)_2$

若 $l=4m+1$,设 $l=(a_k\cdots a_101)_2$,由 ② 式可得,$f(l)=2f((a_k\cdots a_11)_2-f((a_k\cdots a_1)_2)$

$=(10a_1\cdots a_k)_2$

若 $l=4m+3$,设 $l=(a_k\cdots a_111)_2$,由 ③ 式得 $f(l)=3f((a_k\cdots a_{11})_2)-2f((a_k\cdots a_1)_2)$

$=(11a_1a_2\cdots a_k)_2$

于是,猜测得证.

下面求满足 $f(n)=n$ 且$n\leqslant 1988$ 的解的个数,先将 1988 化成二进制,得 $1988=(11111000100)_2$,它是一个 11 位数.显然,在所有的 r 位二进制数中(前位与末位必须是 1).颠倒数字后值仍不变的恰有 $2^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}$ 个.因此,在一位数到 10 位数中,满足 $f(n)=n$ 的n 有

$$\sum_{r=0}^{10}2^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}=2\sum_{r=0}^{4}2^r=62\text{ 个}.$$

在 11 位数中有 $2^{\left[\frac{10}{2}\right]}=32$ 个,但其中有且仅有两个大于 1988,它们是 $(11111011111)_2$ 和 $(11111111111)_2$.因此,满足 $f(n)=n$ 且$n\leqslant 1988$ 的 n 值有 $62+32-2=92$ 个.

例 5 (1997.第 38 届 IMO 试题)求所有的整数对(a,b),其中 $a\geqslant 1,b\geqslant 1$,且满足等式 $a^{b^2}=b^a$.

解:显然当 a,b 中有一个等于 1 时,有$(a,b)=(1,1)$.下设 $a,b\geqslant 2$.

设 $t=\dfrac{b^2}{a}$,则由题中等式得 $b=a^t,at=a^{2t}$,从而 $t=a^{2t-1}$,因此 $t>0$.如果 $2t-1\geqslant 1$,则 $t=a^{2t-1}\geqslant(1+1)^{2t-1}\geqslant 1+(2t-1)=2t>t$,矛盾.所以 $2t-1<1$,于是,有 $0<t<1$.

记 $k=\dfrac{1}{t}$,则 $k=\dfrac{a}{b^2}>1$ 为有理数,由 $a=b^k$ 可知$k=b^{k-2}$. ①

如果 $k\leqslant 2$,则 $k=b^{k-2}\leqslant 1$,与前面所证 $k>1$ 矛盾,因此 $k>2$,设 $k=\dfrac{p}{q},p,q\in\mathbf{N},(p,q)=1$,则 $p>2q$,于是,由 ① 式可得.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^q=k^q=b^{p-2q}\in\mathbf{Z}$$

这意味着 $q^q\mid p^q$.但 p,q 互素,故 $q=1$,即 k 为一个大于 2 的自然数.

当 $b=2$ 时,由 ① 式得 $k=2^{k-2}$,所以 $k\geqslant 4$,又因

$k=2^{k-2}\geqslant C_{k-2}^0+C_{k-2}^1+C_{k-2}^0$

$$= 1 + (k-2) + \frac{(k-2)(k-3)}{2}$$
$$= 1 + \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$
$$\geqslant 1 + (k-1) = k$$

等号当且仅当 $k = 4$ 时成立.所以,

$a = b^k = 2^4 = 16$

当 $b \geqslant 3$ 时,

$k = b^{k-2} \geqslant (1+2)^{k-2} \geqslant 1 + 2(k-2) = 2k-3$

从而,$k \leqslant 3$.这意味着 $k = 3$,于是

$b = 3, a = b^k = 3^k = 27$

综上,满足题目等式的所有正整数对为

$(a,b) = (1,1),(16,2),(27,3)$

例 6 (2001.中国数学奥林匹克第4题)设 a、b、c、$a+b-c$、$a+c-b$、$b+c-a$、$a+b+c$ 是7个两两不同的质数,且 a、b、c 中有两数之和800,设 d 是这7个质数中最大数与最小数之差,求 d 的最大可能值.

【分析】 将 d 的具体表示式给出,自然思路开阔.

解:不妨设 $a < b < c$,于是7个数中,$a+b-c$ 最小,而 $a+b+c$ 最大,从而有

$$d = (a+b+c) - (a+b-c) = 2c$$

问题化为求 c 的最大可能值.

$\because a + b \quad c > 0$,且这7个数均为质数,

$\therefore c < a+b < a+c < b+c$

又 $\because a+b, a+c, b+c$ 中有1个数为800.

$\therefore c < 800$

又由于 $799 = 17 \times 47$ 和798都不是质数,而797为质数,故有

$c \leqslant 797, d \leqslant 1594$

令一方面.

1°.若 $b + c = 800$,则 $b = 3$,又 $a < b$,所以 $a = 2$,此时 $a+b+c$ 为合数,不符合题意.

2°.若 $a + b = 800$,注意到

$a = 5, b = 795$

$a = 7, b = 793 = 13 \times 61$

$a = 11, b = 789 = 3 \times 263$

都不全是质数,从而不能满足题中要求.

而 $a = 13, b = 787$ 都是质数,这时 $a+b-c = 3, a+c-b = 23$ 也都是质数,容易验证,$b+c-a = 1571$ 和 $a+b+c = 1597$ 也都是质数.

综上,d 的最大可能值为1594

例 7 (2000.第52届波兰数学奥林匹克初赛试题)证明:对于任意整数 $n \geqslant 2$ 和所有的质数 p,均有 $n^{p^p} + p^p$ 为一个合数.

证明:若 p 为奇数,记 $x = n^{p^{p-1}}$,则

$n^{p^p} + p^p = x^p + p^p = (x+p)(x^{p-1} - x^{p-2}p + \cdots - xp^{p-2} + p^{p-1})$

所以,此时,$n^{p^p} + p^p$ 是一个合数.

若 p 为偶数,则 $p = 2$,这时

$$n^{p^p+p^p} = n^4 + 4 = (n^2+2)^2 - 4n^2$$
$$= (n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$$

注意到 $n \geqslant 2$,故此时 $n^{p^p} + p^p$ 也是一个合数.

所以命题成立.

例 8 (1999. 乌克兰数学奥林匹克试题) 是否存在一个2000 位的整数,它是某整数的平方,且在十进制中至少有 1999 个数字是"5"?

解:若 2000 位的整数全是,显然不是完全平方数.

若有 1999 个数字是"5",且只有一个数字不是 5,设所求的 2000 位整数为 n.

(i) 若非 5 的数字不是个位数字,则存在 k(奇数),使

$n = (5k)^2 = 25k^2 = 25(4m + 1) = 100m + 25$

所以,非 5 的数字一定是 2,且是十位数字,其中 $k = 2t + 1, m = t(t + 1)$ 为偶数,又 m 是由 1998 个 5 组成的奇数,矛盾.

(ii) 若非 5 的数字是个位数字,则一定是 0,1,4,6,9 之一.若为 0,4 时,n 为 $4m + 2$ 型,若为 1,9 时,n 为 $4m + 3$ 型,均非完全平方数,若个位数字是 6,则 n 为 $3m + 2$ 型,非完全平方数.

综上,不存在题设条件的整数.

例 9 (2001. 第 14 届爱尔兰数学奥林匹克) 设 p 为奇质数,证明:若存在整数 x, y,使得 $p = x^5 - y^5$,则存在奇数 v,使得$\sqrt{\frac{4p+1}{5}} = \frac{v^2+1}{2}$

证明:若 $x > 0, y < 0$,则表明存在 $m, n \in \mathbf{N}^*$,使得 $p = m^5 + n^5$,于是 $p = (m + n)A$,这里 $A = m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4$.由于 p 为质数,故 $A = 1$,这导致 $p = m + n = m^5 + n^5$,故$m = n = 1$,与 p 为奇质数矛盾.

所以,只能是 $x > 0, y > 0$ 或 $x < 0, y > 0$ 的情形.这表明存在 $m, n \in \mathbf{N}^*$,使得 $p = m^5 - n^5$,故 $m > n$,进而,由 $m^5 - n^5 = (m - n)(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$ 及 p 为质数,可知 $m - n = 1$,即 $m = n + 1$,于是

$p = (n + 1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

从而,有

$$\begin{aligned}\frac{4p+1}{5} &= 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 4n + 1 \\ &= 4(n^2 + n)^2 + 4(n^2 + n) + 1 \\ &= (2n^2 + 2n + 1)^2\end{aligned}$$

故$\sqrt{\frac{4p+1}{5}} = 2n^2 + 2n + 1 = \frac{(2n+1)^2+1}{2}$,于是取 $v = 2n + 1$ 就得结论.

例 10 (第 26 届 IMO 试题) 求出最小正整数 n,使其恰有 144 个不同的正因数,且其中有 10 个连续整数.

解:据题目要求,n 是 10 个连续整数积的倍数,因而必然能被 2,3,…,10 整除.由于 $8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2 \times 5$,故其标准分解式中,至少会有 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 的因式,因此,若设

$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} . 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot \cdots$

则 $\alpha_1 \geqslant 3, \alpha_2 \geqslant 2, \alpha_3 \geqslant 1, \alpha_4 \geqslant 1$,由

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) \cdots = 144$

而$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) \geqslant 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$,故最多还有一个 $\alpha_j > 0, (j \geqslant 5)$,且$\alpha_j \leqslant 2$,为使 n 最小,自然宜取 $2 \geqslant \alpha_5 \geqslant 0$,由

$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1)(\alpha_5 + 1) = 144 \qquad (\alpha_5 \neq 0$ 时)

或 $\quad (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1) = 144 \qquad (\alpha_5 = 0$ 时)

考虑 144 的可能分解,并比较相应 n 的大小,可知合于要求的(最小),$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$,故所求的 $n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110880$

例 11 (1983 · 荷兰数学竞赛试题) 证明:如果 n 是奇正整数,那么,数 $A = 2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$ 在十进

制中的最末两位数为 28.

证明:只需证明 $A-28$ 是 100 的倍数(或能被 100 整除).

设 $n=2m+1(m\geqslant 0$ 整),则

$$A-28=2^{4m+2}(2^{4m+3}-1)-28$$
$$=4(2^{4m}-1)(8\cdot 2^{4m}+7)$$
$$=4(16^m-1)[8(16^m-1)+15]$$

因 $16^m-1=(16-1)(16^{m-1}+1\cdots+1)$

$=15k$(k 为自然数)

于是

$$A-28=4\cdot 15k(8\cdot 15k+15)$$
$$=900k(8k+1)$$

是 100 的倍数,故 A 的最末两位数为 28.

例 12 (1996.世界城市际数学联赛)是否存在一个六位数 A,使得 $A,2A,3A,\cdots,500000A$ 中任何一数的末尾六个数码不全相同?

解:设 A 是一个六位数,若 A 是偶数,则 $500000A$ 末尾有六个零;若 A 可被 5 整除,则 $200000A$ 末尾有六个零,因此我们不妨设 A 的末尾数字为 1,3,5,7,9,对于任何奇数字 d,存在一个一位数 b,使得 Ab 末尾数字为 d.

选择 b_0,使得 Ab_0 的末尾数字为 1.设 Ab_0 的末尾两位数字为 C_11,选择一位数 d_1,使得 $d_1+C_1=1$ 或 11,存在 b_1,使得 Ab_1 的末尾数字为 d_1,因此 $A(10b_1+b_0)$ 的末尾两位数字为 11.设 $A(10b_1+b_0)$ 的末尾三位数 C_211,选择一位数 d_2,使得 $d_2+C_2=1$ 或 11,存在 b_2,使得 Ab_2 的末尾数字为 d_2,因此 $A\times(100b_2+10b_1+b_0)$ 的末尾三位数字为 111.以此类推,存在 $B_1=10^5b_5+10^4b_4+10^3b_3+10^2b_2+10b_1+b_0$,使 AB_1 的末尾六个数字皆为 1.

对于 $2\leqslant k\leqslant 9$,在 B_k 是 KB_1 的后六位数字,则 AB_K 的末尾六个数字皆为 k,若 $A=999999$,则 $B_1=888889$,令 $A=8888889$,则对于 $1\leqslant k\leqslant 9,B_k=1000000-k>5000$,故 888889 满足题目要求.

例 13 (1999.全国高中数学联赛加试题三)给定正整数 n,已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 克的所有物品.

(1) 求 k 的最小值 $f(n)$;

(2) 当且仅当 n 取什么值时,上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的?并证明你的结论.

【分析】 对于质量为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 的 k 块砝码可称质量 $m=\sum\limits_{i=1}^{k}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}$,然后考虑 $\{m\mid m=\sum\limits_{i=1}^{k}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}\}$ 与集合 $\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\pm n\}$ 个数之间的关系,利用数的三进制和最小数原理.

解:设这 k 块砝码的质量数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$,且 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k,a_i\leqslant Z,1\leqslant i\leqslant k$.因为天平两端都可以放砝码,故可称质量为 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}$.若利用这 k 块砝码可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 的物品,则上述表示中含有 $1,2,3,\cdots,n$,由对称性易知也含有 $0,-1,-2,\cdots,-n$,即

$$\left\{\sum_{i=1}^{r}x_ia_i\mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\{0,\pm 1,\cdots,\pm n\}$$

所以 $2n+1=|\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n\}|\leqslant\left|\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}x_ia_i\mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\right|\leqslant 3^k$,即 $n\leqslant\dfrac{3^k-1}{2}$

设 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2},(m\geqslant 1,m\in Z)$

则 $k\geqslant m$,且 $k=m$ 时,可取 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$

由数的三进制表示可知,对任意 $0 \leqslant p \leqslant 3^m - 1$,都有 $p = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot 3^{i-1}$,其中 $y_i \in \{0,1,2\}$.则

$$p - \frac{3^m - 1}{2} = \sum_{i=1}^{m} y_i 3^{i-1} - \sum_{i=1}^{m} 3^{i-1} = \sum_{i=1}^{m} (y_i - 1) 3^{i-1}$$

令 $x_i = y_i - 1$,则 $x_i \in \{-1,0,1\}$,因此对一切 $-\frac{3^m-1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$ 的整数 l,都有 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 3^{i-1}$,其中 $x_i \in \{-1,0,1\}$,由于 $n \leqslant \frac{3^m-1}{2}$,故对一切 $-n \leqslant l \leqslant n$ 的整数 l 也有上述表示.

综上,可知 k 的最小值 $f(n) = m$. $\left(\text{其中} \frac{3^{m-1}-1}{2} < n \leqslant \frac{3^m - 1}{2}\right)$

(2)(i) 当 $\frac{3^m-1}{2} < n < \frac{3^{m+1}-1}{2}$ 时,由(1)可知 $1,3,\cdots,3^{m-1},3^m$ 就是一种砝码的组成方式.下面我们证明 $1,3,\cdots,3^{m-1},3^m-1$ 也是一种方式:

若 $1 \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$,由(1)可知 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 3^{i-1}, x_i \in \{-1,0,1\}$,则 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i 3^{i-1} + 0 \cdot (3^m - 1)$

若 $\frac{3^m-1}{2} < l \leqslant n < \frac{3^{m+1}-1}{2}$,则

$$\frac{3^m+1}{2} < l + 1 \leqslant \frac{3^{m+1}+1}{2}$$

由(1)可知 $l + 1 = \sum_{i=1}^{m+1} x_i \cdot 3^{i-1}$,其中 $x_i \in \{-1,0,1\}$,易知 $x_{m+1} = 1$(否则 $l \leqslant \sum_{i=1}^{m} 3^{i-1} - 1 = \frac{3^m-1}{2} - 1$, 矛盾),则 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i 3^{i-1} + 1 \cdot (3^m - 1)$

所以当 $n \neq \frac{3^m-1}{2}$ 时,$f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

(ii) 下面我们证明:当 $n = \frac{3^m-1}{2}$ 时,$f(n) = m$ 块砝码的组成方式是惟一的,即 $a_i = 3^{i-1}(1 \leqslant i \leqslant m)$

若对每个 $-\frac{3^m-1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$, 都有 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i$, $x_i \in \{-1,0,1\}$, 即

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i a_i \mid x_i \in \{-1,0,1\}\right\} \supseteq \left\{0, \pm 1, \cdots, \pm \frac{3^m-1}{2}\right\}$$

注意左边集合中至多有 3^m 个元素,故必有

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i a_i \mid x_i \in \{-1,0,1\}\right\} = \left\{0, \pm 1, \cdots, \pm \frac{3^m-1}{2}\right\}$$

从而对每个 l, $-\frac{3^m-1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$,都可以惟一地表示为 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i$,其中 $x_i \in \{-1,0,1\}$,因而 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{3^m-1}{2}$.则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+1)a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \frac{3^m-1}{2}$,令 $y_i = x_i + 1$,则 $y_i \in \{0, 1,2\}$.

由上可知,对每个 $0 \leqslant l \leqslant 3^m - 1$,都可以惟一地表示为 $l = \sum_{i=1}^{m} y_i a_i$,其中 $y_i \in \{0,1,2\}$.特别地,易知 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_m$

下面用数学归纳法证明 $a_i = 3^{i-1}(1 \leqslant i \leqslant m)$

当 $i = 1$ 时,易知 $\sum_{i=1}^{m} y_i a_i$ 中的最小正整数是 a_1,故 $a_1 = 1$

假设当 $1 \leqslant i \leqslant p$ 时,$a_i = 3^{i-1}$,由于 $\sum_{i=1}^{m} y_i a_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot 3^{i-1}$, $y_i \in \{0,1,2\}$ 就是数的三进制表示,易

知它们正好是 $0,1,2,\cdots,3^p-1$，故 a_{p+1} 应在除上述表示外 $\left\{\sum_{i=1}^{m} y_i a_i \mid y_i \in \{0,1,2\}\right\}$ 中的最小的数，因此，$a_{p+1}=3^p$. 由归纳可知 $a_i=3^{i-1}(1 \leqslant i \leqslant m)$

综合(i)(ii) 可知，当且仅当 $n=\frac{3^m-1}{2}$ 时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的.

§1.3 针对性训练

A组

1.(1984.第10届全俄数学竞赛试题)求使十进制数 2^n 的数字和为5的所有正整数 n.

2.(第16届美国普特南数学竞赛试题)求证:对每个正整数,恒存在它的某个整数倍,在十进制表示中,用到所有的十个数字.

3.(1990.全国高中数学联赛试题)a、$b \in N$,$a > b$,$\cos\alpha = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$.试证:$A_n = (a^2 + b^2)^n \cos n\alpha$ 对一切 $n \in \mathbf{N}$ 均为一整数.

4.(1)有 n 个整数,其积为 n,其和为零.求证:n 是4的倍数.(2)设自然数 n 是4的倍数,求证:可以找到 n 个整数,其积为 n,其和为零.

5. 设数列1,9,8,3,4,3,…,其中 a_{n+4} 为 $a_n + a_{n+3}$ 的个位数字($n \geqslant 1$).试证:$a_{1998}^2 + a_{1999}^2 + a_{2000}^2 + 3$ 是4的倍数.

6. 设多项式 $x^3 + bx^2 + cx + d$ 的系数都是整数,并且 $bd + cd$ 是奇数.证明:这个多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.

7. 设有 2^n 枚大小相同的硬币,分成许多堆,从中任取甲、乙两堆,并对它们进行调整.调整的规则是:若甲堆的硬币数 p 大于或等于乙堆的硬币数 q,则从甲堆中取出 q 枚硬币放到乙堆中去,这就叫“完成了一次调整”.求证:经过有限次调整后,可以把这 2^n 枚硬币并成一堆.

8.(第26届IMO试题)设M是由1985个不同的正整数组成的集.其中每个元素的质数因子不大于26.求证:从M中至少可以找到一个由四个不同元素组成的子集,使得这四个数的乘积等于某个正整数的四次方.

9. 如果大于1的自然数M、N不能以同底数的幂表示.(底、幂指数也是自然数).那么,$\log_M{}^N$一定是无理数.

10. 对每一非负整数n,考虑其素因数的最高幂不超过n者,称其和为n的幂和(例如,100的素因数是5,2,$2^6 < 100 < 2^7$,$5^2 < 100 < 5^3$,所以$2^6 + 5^2 = 89$是100的幂和).证明:有无穷多个数的幂和大于此数本身.

11.(第12届IMO试题)求出有下列性质的所有正整数n:集合$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$可以划分为两个无公共元素的非空子集,使得一个集合所有元素的积和另一子集的所有元素之积相等.

12. 用尾数方法证明:$5 \mid 3^{1980} + 4^{1981}$,$10 \mid 53^{53} - 33^{33}$

13.(1981.西德数学竞赛试题)a、$n \in \mathrm{N}$,$S = a + a^2 + \cdots + a^n$.证明:$G(S) = 1 \Leftrightarrow G(a) = 1, G(n) = 1$

B组

1. 数11111在哪种进位制中是一个完全平方数?

2.(第13届美国普特南数学竞赛试题)设$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$为实系数多项式,且对任意整数$i$,$f(i)$是整数.求证:对每个整数$k(0 \leqslant k \leqslant n)$,$n!a_k$是整数.

3. 求证:正整数 a 与 b 的乘积为偶数的必要充分条件是存在正整数 c、d,使得 $a^2+b^2+c^2=d^2$

4. 当 $n=2^m$ 时,杨辉三角形中的第 n 排上的每一个数 $C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, \cdots, C_{n-1}^{n-1}$ 都是奇数.

5.(第1届全国中学生数学冬令营试题)能否把1,1,2,2,3,3,…,1986,1986这些数排成一行,使得两个1之间夹着一个数,两个2之间夹着二个数,…,两个1986之间夹着1986个数?证明你的结论.

6. 设 x 是1989位数,y 是从 x 变换数码的位置而得到的数.能否成立等式:$x+y=99\cdots9$(共1989个9)?

7. 设 n 个正整数满足 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$,则在 2^n 个整数 $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$(t_i 取1或 -1,$i=1,\cdots,n$)中至少存在 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数同时为偶数或同时为奇数.

8. 能否把前 n 个正整数划分为若干类(不相交),使得没有任何数与它的二倍同时出现在一个类里.至少要划分为多少类?

9.(第28届IMO试题)已知 $n\geqslant 2$,如果对于整数 k,$0\leqslant k\leqslant\sqrt{\frac{n}{3}}$,$k^2+k+n$ 是质数.求证:对所有整数 k,$0\leqslant k\leqslant n-2$,$k^2+k+2$ 都是质数.

11.(第3届中国国家集训队选拔考试题)数学老师把一个二位数 n 的因数的个数 $f(n)$ 告诉了学生 B,把 n 的各位数字之和 $s(n)$ 告诉了学生 A,A 和 B 都是很聪明的学生,他们希望导出 n 的准确数值而进行了如下的对话:

A:我不知道 n 是多少? (A_1)

B:我也不知道,但我知道 n 是偶数. (B_1)

A:现在我知道 n 是多少了. (A_2)

B:现在我也知道了. (B_2)

老师证实了 A 和 B 都是诚实可信的,他们的每一句话都是有根据的.问 n 究竟是多少?为什么?

12.(1980.芬兰等四国数学竞赛试题)求$[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}]$的个位数字,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

13. 给定正整数 n,已知用克数都是正整数的 k 块砝码和一台天平可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 克的所有物品.

(1) 求 k 的最小值 $f(n)$;

(2) 当仅当 n 取什么值时,上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的?并证明你的结论.

第二章

整除问题

§2.1 知识、方法、技能

整除是整数的一个重要内容.这里仅介绍其中的几个方面:整数的整除性,费尔马定理,最大公约数和最小公倍数,方幂问题.

Ⅰ.整数的整除性

初等数论的基本研究对象是自然数集合及整数集合.我们知道,整数集合中可以作加、减、乘法运算,并且这些运算满足一些规律(即加法和乘法的结合律和交换律,加法与乘法的分配律),但一般不能做除法,即,如 a,b 是整数,$b\neq 0$,则 $\frac{a}{b}$ 不一定是整数.由此引出初等数论中第一个基本概念:整数的整除性.

定义 1:(带余除法) 对于任一整数 a 和任一整数 b,必有惟一的一对整数 q,r,使得 $a=bq+r$,$0\leqslant r<b$,并且整数 q 和 r 由上述条件惟一确定,则 q 称为 b 除 a 的不完全商,r 称为 b 除 a 的余数.

若 $r=0$,则称 b 整除 a,或 a 被 b 整除,或称 a 是 b 的倍数,或称 b 是 a 的约数(又叫因子),记为 $b\mid a$.否则,$b\nmid a$.

任何 a 的非 $\pm a$,± 1 的约数,叫做 a 的真约数.

0 是任何整数的倍数,1 是任何整数的约数.

任一非零的整数是其本身的约数,也是其本身的倍数.

由整除的定义,不难得出整除的如下性质:

(1) 若 $a\mid b$,$b\mid c$,则 $a\mid c$.

(2) 若 $a\mid b_i$,则 $a\mid \sum\limits_{i=1}^{n}c_ib_i$,其中 $c_i\in\mathbf{Z}$,$i=1,2,\cdots,n$.

(3) 若 $a\mid c$,则 $ab\mid cb$.反之,亦成立.

(4) 若 $a\mid b$,则 $|a|\leqslant|b|$.因此,若 $a\mid b$,又 $b\mid a$,则 $a=\pm b$.

(5) a、b 互质,若 $a\mid c$,$b\mid c$,则 $ab\mid c$.

(6) p 为质数,若 $p\mid a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$,则 p 必能整除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的某一个.特别地,若 p 为质数,$p\mid a^n$,则 $p\mid a$.

(7) 如在等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{k=1}^{m}b_k$ 中除开某一项外,其余各项都是 c 的倍数,则这一项也是 c 的倍数.

(8) n 个连续整数中有且只有一个是 n 的倍数.

(9) 任何 n 个连续整数之积一定是 n 的倍数.

【注】 由性质 2 可知,如整数 $b_1,b_2,\cdot\cdots\cdot b_n$ 都是 a 的倍数且特别 $c_i=1$,则 $a\mid(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

这实际上提供了证明 $a\mid(b_1+b_2+\cdots+b_n)$ 的一种基本的想法:我们可以尝试着证明更强的(也往往更易于证明)的命题:

每个 b_i 均是 a 的倍数($i=1,2,\cdots n$)这一命题当然并非一定成立,即使在它不成立时,上述想法仍有一种(常奏效的)变通:将和 $a_1+\cdots+a_n$ 适当地分组成为 $c_1+\cdots+c_k$,而 $a\mid c_1,\cdots,a\mid c_k$,由此当然

证明了 $a \mid (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

Ⅱ. 费尔马定理

定理1 （费尔马(Fermat)定理）设 p 为质数，对任何整数 n，都成立 $p \mid n^p - n$（或 $n^p \equiv n(\mathrm{mod}\, p)$）.

推论 p 为质数，且 $p \nmid n$，则 $p \mid n^{p-1} - 1$（或 $n^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$）

【注】 此推论常称为费尔马小定理.

Ⅲ. 最大公约数和最小公倍数

本讲开始在整除的定义同时给出了约数的概念，又由上一讲的算术基本定理，这就可以给出整数的约数的个数了. 即定理二.

定理二 设大于1的整数 a 的标准分解式为 $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$（$p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ 为质数，α_i 均为非负整数），则 a 的约数的个数为

$$d(a) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$$

所有的约数和为：

$$\sigma(a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

事实上，由算术基本定理的推论知 $d(a) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1)$，而各约数的和就是 $\prod_{i=1}^{n} (1 + p_i + \cdots + pa_{i_i})$ 展开后的各项之和，所以

$$\sigma(a) = \prod_{i=1}^{n} (1 + p_i + \cdots + p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_1{}^{\alpha_i} - 1}{p_i - 1}$$

例如，$25200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$，所以

$$d(25200) = (4 + 1)(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 90$$

$$\sigma(25200) = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \times \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \times \frac{5^3 - 1}{5 - 1} \times \frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 99944$$

定义2：设 a、b 是两个不全为0的整数. 若整数 c 满足：$c \mid a$，$c \mid b$，则称 c 为 a，b 的公约数，a 与 b 的所有公约数中的最大者称为 a 与 b 的最大公约数，记为 (a, b). 如果 $(a, b) = 1$，则称 a 与 b 互质或互素.

定义3：如果 d 是 a、b 的倍数，则称 d 是 a 与 b 的公倍数. a 与 b 的公倍数中最小的正数称为 a 与 b 的最小公倍数，记为 $[a, b]$.

最大公约数和最小公倍数的概念可以推广到有限多个整数的情形，并用 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公约数，$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数.

若 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1$，则称 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 互质，若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任何两个都互质，则称它们是两两互质的. 注意，n 个整数互质与 n 个整数两两互质是不同的概念，前者成立时后者不一定成立（例如，3，15，8 互质，但不两两互质）；显然后者成立时，前者必成立.

因为任何正数都不是0的倍数，所以在讨论最小公倍数时，一般都假定这些整数不为0. 同时，由于 a，b 与 $|a|$，$|b|$ 有相同的公约数，且 $(a, b)(|a|, |b|)$（有限多个亦成立），因此，我们总限于在自然数集合内来讨论数的最大公约数和最小公倍数.

显然，若 a，b 的标准分解式为 $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$，$b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$（$p_i$ 为质数，α_i，β_i 为非负整数），则

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \quad ①$$

$$[a, b] = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} \quad ②$$

例如 $3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

$756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$，

则 $(3960,756)=2^2\cdot 3^2=36$

$[3960,756]=2^3\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=83160$

求最大公约数也可以用辗转相除法,其理论依据是:

定理 3 设 a、b、c 是三个不全为 0 的整数,且有整数 t 使得 $a=bt+c$,则 a、b 与 b、c 有相同的公约数,因而 $(a,b)=(b,c)$,即 $(a,b)=(b,a-bt)$.

因为,若 d 是 a、b 的任一公约数,则由 $d\mid a$,$d\mid b$ 和 $a=bt+c$ 知 $d\mid c$,即 d 是 b、c 的公约数;反之,若 d 是 b、c 的任一公约数,d 也是 a、b 的公约数.

辗转相除法(欧几里德算法):设 a、$b\in \mathrm{N}^*$,且 $a>b$

由带余除法有

$$\left.\begin{array}{l} a=bq_1+r_1,0<r_1<b \\ b=r_1q_2+r_2,0<r_2<r_1 \\ \cdots \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n,0<r_n<r_{n-1} \\ r_{n-1}=r_nq_{n+1}+r_{n+1},r_{n+1}=0 \end{array}\right\} \quad ③$$

因为每进行一次带余除法,余数至少减 1,即 $b>r_1>\cdots>r_n>r_{n+1}$,而 b 为有限数,因此,必有一个最多不超过 b 的正整数 n 存在,使得 $r_n\neq 0$,而 $r_{n+1}=0$,故由定理二得:

$r_n=(r_{n+1},r_n)=(r_n,r_{n-1})=\cdots=(r_2,r_1)=(r_1,b)=(a,b)$

例如,$(3960,756)=(756,180)=(180,36)=36$

具体算式如下:

$5(q_1)$	$3960(a)$ 3780	$756(b)$ 720	$4(q_2)$
$5(q_3)$	$180(r_1)$ 180	$36(r_2)$	
	$0(r_3)$		

现在我们易于推出裴蜀定理.

定理 4 (裴蜀(Bezout)定理) 设 a,b 是整数,则 $(a,b)=d$ 的充要条件是存在整数 u,v,使得

$\mu a+vb=1$

特别地,a,b 互质(即 $(a,b)=1$)的充要条件是,存在整数 u,v,使得

$\mu a+vb=1$

【注】 在 a,b 都是正整数时,可以改述成如下的形式:正整数 a,b 互质的充要条件是存在正整数 u,v,使得

$\mu a-vb=1$

【注】 由辗转相除法的 ③ 式递推而得 $c=r_n=ax+by$

由定义和辗转相除算法还不难得出最大公约数和最小公倍数的如下性质.

(1)a 和 b 的任一公约数都是它们的最大公约数的约数

(2)$m\in \mathbf{N}$,则 $(am,bm)=m(a,b)$

(3) 设 c 为 a,b 的公约数,则 $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=\frac{(a,b)}{c}$.特别地,若 $c=(a,b)$,则 $\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=1$

(4) 设 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 是任意 n 个正整数,如果 $(a_1, a_2) = c_2, (c_2, a_3) = c_3, \cdots, (c_{n-1}, a_n) = c_n$,则 $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = c_n$

(5) 设 a 和 b 均与 m 互素,则 ab 也与 m 互素,即与 m 互素的整数关于乘法封闭. 一般地,如果 $a_1, \cdots, a_n$ 均与 m 互素,则 $a_1 \cdots a_n$ 与 m 互素

(6) 若 $b \mid ac$,且 $(b, c) = 1$,则 $b \mid a$

(7) 若 $(a, b) = 1$,则 $(ac, b) = (c, b)$

(8) 若 m 是整数,$a \mid m, b \mid m$,则 $[a, b] \mid m$,即 a, b 的任一公倍数是其最小公倍数的倍数

(9) 若 m 是正整数,则 $m[a, b] = [ma, mb]$

(10) $(a, b)[a, b] = |ab|$,特别地,若 $(a, b) = 1$,则 $[a, b] = |a, b|$

(11) 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是两两互素的正整数,a 是任意整数,若 $b_i \mid a (i = 1, 2, \cdots, n)$,则 $b_1 \cdots b_n \mid a$,因此,特别地,两两互素的正整数的最小公倍数等于它们的乘积

(12) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意 n 个正整数. 若 $[a_1, a_2] = m_2, [m_2, a_3] = m_3, \cdots, [m_{n-1}, a_n] = m_n$,则 $[a_1, a_2, \cdots, a_n] = m_n$

【注】 性质 ⑪ 提供了将一个整除问题分解的另一途境:为了证明 $b \mid a$,将 b 分解为若干个两两互素的整数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 之积,而证明 $b_i \mid a (i = 1, 2, \cdots, n)$

性质(8) 和(9) 对多于两个整数的最小公倍数仍然成立;但性质(10) 则不然. 即

$(a, b, \cdots, c)[a, b, \cdots, c] = |ab \cdots c|$

一般并不成立.(请读者自己给出反例)

Ⅳ. 方幂问题

一个正整数 n 能否表成 m 个整数的 k 次方和的问题称为方幂和问题. 特别地,当 $m = 1$ 时称为 k 次方问题,当 $k = 2$ 时,称为平方和问题.

1. 能表为某整数的平方的数称为完全平方数,简称平方数.

2. 关于平方数,明显有如下一些简单的性质和结论:

(1) 平方数的个位数字只可能是 0,1,4,5,6,9.

(2) 偶数的平方数是 4 的倍数,奇数的平方数被 8 除余 1,即任何平方数被 4 除的余数只能是 0 或 1.

(3) 奇数平方的十位数字是偶数.

(4) 十位数字是奇数的平方数的个位数一定是 6.

(5) 不能被 3 整除的数的平方被 3 除余 1,能被 3 整除的数的平方能被 3 整除. 因而,平方数被 9 除的余数为 0,1,4,7,且此平方数的各位数字的和被 9 除的余数也只能为 0,1,4,7.

(6) 平方数的约数的个数为奇数.

(7) 任何四个连续整数的乘积加 1,必定是一个平方数.

3. 进一步研究可得到有关平方和的几个结论:

定理 5 奇素数 p 能表示成两个正整数的平方和的充要条件是 $p = 4m + 1$.

定理 6 设正整数 $n = m^2 p$,其中 p 不再含平方因数,n 能表示成两个整数的平方的充要条件是 p 没有形如 $4q + 3$ 的质因数.

定理 7 每一个正整数都能表示成四个整数的平方和.

这几个定理的证明略. 这里重点是介绍有关 k 方幂的解法技巧. k 方幂中许多问题实质上是不定方程的整数解问题,比如著名的勾股数问题.

4. 在某些限制条件下,判断一个式子不是完全平方数的方法大致有

(i) 反证法.

(ii) 寻找整数 a,使 $a^2 < x^2 < (a + 1)^2$,则 x 不是整数.

(iii) 寻找一个特殊的模 m,若对任意整数 x,都有 $f(a) \not\equiv x^2 (mod m)$,则 $f(a) \neq x^2$,因而 $f(a)$ 不是完全平方数.

§2.2　赛 题 精 讲

例 1　(1999.上海市高中数学竞赛题)$\triangle ABC$ 中,边长 $a,b,c(a\leqslant b\leqslant c)$ 同时满足下列三个条件:

(1)a,b,c 均为整数;

(2)a,b,c 组成等比数列;

(3)a 与 c 中至少有一个等于 100.

求出三元数组(a,b,c)的所有可能的解

【分析】　利用三角形知识转化问题为 a,c 中至少有一个为 100,那么分情况讨论,利用整除性及不等式而得数的范围,从而运用奇数的离散性求得结果.

解:按题设,正整数 a,b,c 满足 $a\leqslant b\leqslant c,a+b>c,b^2=ac$,且 a,c 中至少有一个为 100

(i) 若 $a=100$,则 $b^2=100c$,得 $10\mid b$

又　$100+b>c=\dfrac{b^2}{100},b^2-100b-100^2<0$

故　$100\leqslant b<50(\sqrt{5}+1)$

注意到 $10\mid b$,则 b 可取 100,110,120,130,140,150,160

相应的 $c=100,121,144,169,196,225,256$

(ii) 若 $c=100$,则 $b^2=100a$,得 $10\mid b$

又　$\dfrac{b^2}{100}+b>100,b^2+100b-100^2>0$

故　$50(\sqrt{5}-1)<b\leqslant 100$

注意到 $10\mid b$,则 b 可取 70,80,90,100

相应的 $a=49,64,81,100$

综上所述,三元数组(a,b,c)共有 10 组可能的解.

(49,70,100),(64,80,100),(81,90,100),(100,100,100),(100,110,121),(100,120,144),(100,130,169),(100,140,196),(100,150,225),(100,160,256)

例 2　(1996.中国数学奥林匹克)设 $S=\{1,2,\cdots,50\}$.求最小自然数 k,使 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 和 b,满足$(a+b)\mid ab$.

【分析】　本题是整除的性质与数的离散性知识的综合运用.令 $a=a_1c,b=b_1c,(a_1,b_1)=1$,得$(a_1+b_1)\mid c$,且 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant a$,从而得到数对$(a_1,b_1)$有 23 对.

解:设有 $a,b\in S$ 满足条件$(a+b)\mid ab$,记 $c=(a,b)$,于是 $a=ca_1,b=cb_1$,其中 $a_1,b_1\in\mathbf{N}$ 且有$(a_1,b_1)=1$

因而有 $c(a_1+b_1)=(a+b)\mid ab=c^2a_1b_1,(a_1+b_1)\mid ca_1b_1$

因为$(a_1+b_1,a_1)=1,(a_1+b_1,b_1)=1$,故有$(a_1+b_1)\mid c$

因为 $a,b\in S$,所以 $a+b\leqslant 99$,即 $c(a_1+b_1)\leqslant 99$

故有 $3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$

由此可知,S 中满足条件$(a+b)\mid ab$ 的不同数对共有 23 对如下:

$a_1+b_1=3$:　(6,3),(12,6),(18,9),(24,12),(30,15),(36,18),(42,21),(48,24)

$a_1+b_1=5$:　(20,5),(40,10),(15,10),(30,20),(45,30)

$a_1+b_1=6$:　(30,6)

$a_1+b_1=7$:　(42,7),(35,14),(28,21)

$a_1+b_1=8$:　(40,24)

$a_1+b_1=9$:　(45,36)

令 $M = \{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$，则 $|M| = 12$，且上述23个数对中的每一对都至少包含 M 中的1个元素.因此，若令 $T = S - M$，则 $|T| = 38$ 且 T 中任何两数都不满足题中要求.可见所求的最小自然数 $k \geqslant 39$.

注意到下列12个满足题中要求的数对互不相交：

(6,3)，(12,4)，(20,5)，(42,7)，(24,8)，(18,9)，(40,10)，(35,14)，(30,15)，(48,16)，(28,21)，(45,36)对于 S 的任一39元子集 k，它只比 S 少11个元素，而这11个元素至多属于上述12个数对中的11对，从而必有12对中的1对属于 k.

综上可知，所求的最小自然数 $k = 39$.

例3 （1998.中国数学奥林匹克第4题）求所有大于3的自然数 n，使得 $1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3$ 整除 2^{2000}.

解：因2是素数，故只需考虑哪些自然数 $n > 3$，能使 $1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 2^k (k \in \mathrm{N})$，经计算得，

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$$

即 $(n+1)(n^2-n+6) = 3 \times 2^{k+1}$

做代换 $m = n + 1$ 得：

$$m(m^2 - 3m + 8) = 3 \times 2^{k+1} \qquad ①$$

由①知我们必须对 m 分两种情形分别讨论之.

(1) 若 $m = 2^s (m > 4, s \geqslant 3)$，则 $m^2 - 3m + 8 = 3 \times 2^t (t \in \mathrm{N})$

如果 $S \geqslant 4$，那么 $3 \times 2^t \equiv 8 (mod 16)$，即 $2^t \equiv 8 (mod 16)$.由此可得 $2^t = 8\ (t = 3)$，$m^2 - 3m + 8 = 24$.即 $m(m-3) = 16$，这不可能，因而只有 $S = 2, m = 8$，即 $n = 7$

(2) 若 $m = 3 \times 2^u (m > 4, u \geqslant 1)$，则 $m^2 - 3m + 8 = 2^v (v \in \mathrm{N})$ ②

如果 $u \geqslant 4$，那么 $2^v \equiv 8 (mod 16)$，由(1)知 $v = 3$，$m(m-3) = 0$，这也不可能，另外，当 $m = 3 \times 2$ 或 $m = 3 \times 2^2$ 都不能使②成立.因此，只有 $m = 3 \times 2^3 = 24$，即 $n = 23$.

又经检验知，$1 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 = 64 = 2^6$ 和 $1 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + C_{23}^3 = 2^{11}$ 都能整除 2^{2000}，故本题的答案是 $n = 7$ 及 $n = 23$

例4 （1999.第40届IMO第3题）确定所有的正整数对 (n, p)，满足：p 是一个质数，$n \leqslant 2p$，且 $(p-1)^n + 1$ 能够被 n^{p-1} 整除.

解：显然，$(1, p)$ 和 $(2,2)$ 满足题意，故下面考虑 $n \geqslant 2, p \geqslant 3$ 的情形.

因为 $(p-1)^n + 1$ 是奇数，所以 n 也是奇数，从而 $n < 2p$，记 q 为 n 的最小素因子，则 $q \mid (p-1)^n + 1$ 知 $(p-1)^n \equiv -1 (modq)$，且 $(q, p-1) = 1$，由 q 的选取知 $(n, p-1) = 1$，于是存在整数 u, v，使得

$$un + v(q-1) = 1$$

根据Fermat小定理，

$$\begin{aligned} p - 1 &\equiv (p-1)^{un} \cdot (p-1)^{v(q-1)} \\ &\equiv (-1)^u \cdot 1^v (modq) \end{aligned}$$

因为，u 必为奇数，所以 $p - 1 \equiv -1 (modq)$.这说明 $q \mid p$，进而有 $q \doteq p$，故证得 $n = p$

于是，我们得到：

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p + 1 = p^2 \left[p^{p-2} - \binom{p}{1} p^{p-3} + \cdots + \binom{p}{p-3} p - \binom{p}{p-2} + 1 \right]$$

在上式的括号中，除最后一项外，均可被 p 整除，这说明 $p - 1 \leqslant 2$，即得 $p = 3$

综上所述，所有的解为 $(2,2)$，$(3,3)$ 和 $(1, p)$.其中 p 为任意质数.

例5 （2000.第61届 *Putanm* 大学数学竞赛题）设 $n \geqslant m \geqslant 1$，$n, m$ 为整数，证明数 $\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}$ 为整数.

【**分析**】 此题属于裴蜀定理与组合数的综合运用,解题关键是由 $mr+nt=(m,n)$ 转化问题为 $r\binom{n-1}{m-1}+t\binom{n}{m}$

解:由裴蜀定理,知,存在 $r,t\in \mathrm{Z}$,使得 $\quad mr+nt=(m,n)$

于是 $$\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}=\frac{rm+nt}{n}\binom{n}{m}$$

$$=r\left(\frac{m}{n}\binom{n}{m}\right)+t\binom{n}{m}$$

$$=r\binom{n-1}{m-1}+t\binom{n}{m}\in \mathrm{Z}$$

所以,命题成立.

例6 (1997.加拿大数学奥林匹克试题)有多少个正整数对 x、y,$x\leqslant y$,使得$(x,y)=5!$和$[x,y]=50!$成立?

解:设 $p_1,p_2,\cdots,p_{12}$ 表示按递增次序从7到47的12个素数,则有

$5!=2^3\cdot3^1\cdot5^1\cdot p_1{}^0\cdot p_2{}^0\cdot\cdots\cdot p_{12}{}^0$

且设 $50!=2^{a_1}\cdot3^{a_2}\cdot5^{a_3}\cdot p_1{}^{b_1}\cdot p_2{}^{b_2}\cdot\cdots\cdot p_{12}^{b_{12}}$.

(注:$2^4,3^2,5^2,p_1,p_2,\cdots,p_{12}$ 都能整除 $50!$,因而素数 $2,3,5,p_1,p_2,\cdots,p_{12}$ 在 $50!$中的幂指数与 $5!$ 中的幂指数是不同的.)

又因 $x\mid 50!$,$y\mid 50!$,故 x,y 有以下形式:

$x=2_1^{n_1}\cdot3_2^{n_2}\cdot\cdots\cdot P_{12}^{n_{15}}$

$y=2_1^{m_1}\cdot3_2^{m_2}\cdot\cdots\cdot P_{12}^{m_{15}}$

则 $50!$的分解式中第 i 个素数的幂指数是 $\max(n_i,m_i)$,$5!$的分解式中,第 i 个素数的幂指数是 $\min(n_i,m_i)$.

由上面的值,素数$2,3,5,p_1,p_2,\cdots,p_{12}$的幂指数在$5!$和$50!$中是不同的,所以对 x 有 2^{15} 种选择,而其中只有一半的选择使 x 不超过y(因对 x 的每一种选择,y 是确定的,且不是 $x<y$ 就是$y<x$).故所求的整数对有$\frac{2^{15}}{2}=2^{14}$个.

例7 (1998.亚太地区数学竞赛试题)求满足如下条件的最大正整数 n:n 能被所有小于$\sqrt[3]{n}$ 的正整数整除.

分析与解:问题出现了根式,不便处理,若设小于$\sqrt[3]{n}$ 的最大整数是 k,则原题可转化为如下的等价形式:

设 k,n 是正整数,满足

$$k^3<n\leqslant(k+1)^3$$

且 n 能被所有不大于k 的正整数整除,求 n 的最大值.

于是,n 应能被正整数$1,2,\cdots,k$ 的最小公倍数c 整除,n 约等于k^3,而对较大的 k,c 显然大于k^3,这就是为什么题目要求的最大值.

下面我们找一个 c 的接近k^3 的约数,为此,考虑 $k,k-1,k-2$ 这三个数,其中 k 与$k-1$,$k-1$ 与$k-2$是互质的,而 k 与$k-2$ 当 k 是奇数时互质,当 k 是偶数时有公约数为2,下面就按 k 的奇偶分情况讨论.

当 k 为奇数时,n 应整除$k,k-1,k-2$ 的最小公倍数 $k(k-1)(k-2)$.显然,

$$k(k-1)(k-2)<k^3<n$$

而不等式

$$(k+1)^3<2k(k-1)(k-2)$$

可化简为

$$k^2(k-9)+(k-1)>0$$

即它对于 $k \geqslant 9$ 的整数成立.

于是经计算,当 $k = 7$ 时,1 至 k 的最小公倍数是 420,介于 $7^3 = 343$ 与 $8^3 = 512$ 之间,故 $n = 420$ 是 k 为奇数时的最大解.

当 k 是偶数时,$k-1,k-2,k-3$ 两两互质,于是,$(k-1)(k-2)(k-3)$ 整除 n,此时仍有

$$(k-1)(k-2)(k-3) < k^3 < n$$

而不等式

$$(k+1)^3 < 2(k-1)(k-2)(k-3)$$

对 $k \geqslant 14$ 的正整数成立.于是,k 的允许取值必为不超过 12 的偶数.

经检验知,当 $k = 8,10,12$ 时,正整数 1 至 k 的最小公倍数都大于 $(k+1)^3$,与题设不符;而与 $k \leqslant 6$ 所对应的 n 必不超过 $7^3 = 343$.

综上所述,本题的答案是 420.

【评注】 上述解法运用结论:"对正整数 a 和正整数 b,若存在整数 n,使得 $na < b < (n+1)a$,则 a 不整除 b."

例 8 (1998.第 39 届 IMO 第 3 题)对任一正整数 n,令 $d(n)$ 表示 n 的正因数(包括 1 及 n 本身)的个数.试确定所有可能的正整数 k,使得有一个正整数 n 满足

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

分析与解:首先,如果 k 是一个可能的正整数,即存在 $n \in \mathrm{N}$,使得

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

可设 n 的素数分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,则有

$$d(n) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$$

而 $d(n^2) = \prod_{i=1}^{s} (2\alpha_i + 1)$

从而 $\prod_{i=1}^{s} (2\alpha_i + 1) = k \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i + 1)$

由于左边是奇数,故 k 也应是奇数.

下面证明,所有的奇数都是可能的.

(1) 首先,如果一个数可以表成 $\prod_{i=1}^{s} \frac{(2\alpha_i + 1)}{(\alpha_i + 1)}$ 的形式(其中 α_i 都是非负整数,$i = 1,2,\cdots,s$).那么,由于素数是无限多的,可取 S 个互异素数 $p_1,p_2,\cdots,p_s$,并取 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,则有 $d(n^2)/d(n) =$ 这个数.从而这个数是可能的.

(2) 类似地,也可知,若自然数 k 是可能的,如果 $\prod_{i=1}^{s} \frac{(2\alpha_i + 1)}{(\alpha_i + 1)}$,$ke$,那么这个数也是可能的.

下面用归纳法证明上面提出的那个问题.

由于 $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$,故 1 是可能的.

假设对 $\leqslant 2k-1$ 命题成立,则对于 $2k+1(k \in \mathrm{N})$,设 $2k+2 = 2^m t$(m 是自然数,t 是奇数).

取 $p = 2t(2^{m-1}-1)$,$q = t(2^{m-1}p+1)-1$,则

$$t\left(\frac{2p+1}{p+1}\right)\left(\frac{4p+1}{2p+1}\right)\cdots\left(\frac{2^{m-1}p+1}{2^{m-2}p+1}\right)\left(\frac{2q+1}{q+1}\right)$$

$$= t \cdot \frac{(2^{m-1}p+1)}{p+1} \cdot \frac{2t(2^{m-1}p+1)-1}{t(2^{m-1}p+1)}$$

$$= \frac{2t(2^{m-1}p+1)-1}{p+1}$$

$= 2^m t - \dfrac{2t(2^{m-1}-1)+1}{p+1}$

$= 2^m t - 1 = 2k + 1$

由于 t 是小于 $2k+1$ 的奇数，故 t 是可能的，由上面的式子可知 $2k+1$ 也是可能的. 从而所有的正奇数都是可能的.

综合以上两个方面知，所有可能的数即为所有的正奇数.

例 9 （2000. 波兰数学奥林匹克）m, n 为给定的自然数，且 $mn \mid m^2+n^2+m$. 证明：m 是一个完全平方数.

解：令 $m^2+n^2+m = kmn$，即 $n^2 - kmn + m^2 + m = 0$，视为关于 n 的一元二次方程，可知

$\Delta = k^2m^2 - 4m(m+1)$ 为一个完全平方数.

设 $(m, k_m^2 - 4m - 4) = d$，则 $d \mid 4$.

若 $d = 1$，由 Δ 为完全平方数，可知 m 为完全平方数；

若 $d > 1$，由 $d \mid 4$，可知 $2 \mid d$，进而 m 为偶数，结合 $mn \mid m^2+n^2+m$，可知 n 为偶数，故 $4 \mid mn$，当然，$4 \mid m^2+n^2+m$，于是 $4 \mid m$. 这导致 $d = 4$，进而 $\dfrac{\Delta}{16}$ 为完全平方数，所以 $\dfrac{m}{4}$ 为完全平方数，综上可知，总有 m 为完全平方数.

例 10 （2000. 第 41 届 IMO 备选题）已知正整数集合 A 中的元素不能表示为若干个不同的完全平方数之和. 证明：A 中有有限个元素.

解：假设存在正整数 N，满足

$N = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2$

$2N = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是正整数，且对所有 α、β、γ、δ，当 $\alpha \neq \beta, \gamma \neq \delta$ 时，$\dfrac{a_\alpha}{a_\beta}$、$\dfrac{a_\alpha}{b_\delta}$、$\dfrac{b_\gamma}{a_\beta}$、$\dfrac{b_\gamma}{b_\delta}$ 都不是 2 的整数次幂.（包括 $2^0 = 1$）

下面证明：对于每一个整数 $p > \sum\limits_{k=0}^{4N-2}(2KN+1)^2$，均能表示为若干个不同的完全平方数之和.

设 $p = 4Nq + \gamma$，其中 $0 \leqslant v \leqslant 4N-1$

因为 $\gamma \equiv \sum\limits_{k=0}^{v-1}(2KN+1)^2 (modN)$ 且 $\sum\limits_{k=0}^{\gamma-1}(2KN+1)^2 < p$，所以当 $\gamma \geqslant 1$ 时，存在正整数 t，使得

$$p = \sum_{k=0}^{\gamma-1}(2KN+1)^2 + 4Nt$$

当 $\gamma = 0$ 时，$p = 4Nt$，此时 $t = q$，设

$t = \sum\limits_i 2^{2u_i} + 4N\sum\limits_j 2^{2v_j+1}$

则 $4Nt = 4N\sum\limits_i 2^{2u_i} + 4N\sum\limits_j 2^{2v_j+1} = \sum\limits_{i,\alpha}(2^{u_i+1}a_\alpha)^2 + \sum\limits_{j,r}(2^{v_j+1}b_v)^2$

所以 $p = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{v-1}(2KN+1)^2 4Nt & v \geqslant 1 \\ 4Nt & v = 0 \end{cases}$

容易验证，上式所有完全平方数互不相同.

最后证明正整数 N 存在，因为

$29 = 2^2 + 5^2, 58 = 3^2 + 7^2$

所以 $N = 29$

例 11 （1999. 乌克兰数学奥林匹克）是否存在一个2000 位的整数，它是某整数的平方，且在十进制中至少有 1999 个数字是“5”？

解：若 2000 位的整数全是 5，显然不是完全平方数.

若有 1999 个数字是“5”，且只有一个数字不是 5，设所求的 2000 位整数为 n.

(i) 若非 5 的数字不是个位数字，则存在 k(奇数)，使

$n=(5k)^2=25k^2=25(4m+1)=100m+25.$

所以，非 5 的数字一定是 2，且是十位数字，其中 $k=2t+1, m=t(t+1)$ 为偶数. 又 m 是由 1998 个 5 组成的奇数，矛盾.

(ii) 若非 5 的数字是个位数字，则一定是 0,1,4,6,9 之一，若为 0,4 时，n 为 $4m+2$ 型，若为 1,9 时，n 为 $4m+3$ 型，均非完全平方数，若个位数字是 6，则 n 为 $3m+2$ 型，非完全平方数.

综上所述，不存在题设条件的整数.

例 12 有 n 个人，已知他们中的任意两人至多通过电话一次，他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的总次数相等，都是 3^4 次，其中 k 是自然数，求 n 的所有可能值.

【分析】 将实际通话总次数表示出来，利用整除的性质进行讨论.

解：因为 n 个人共可组成 C_n^2 个“$n-2$ 人组”，所以通话总次数按重数计算为 $C_n^2\cdot 3^k$ 次，又每两人间通话都在 $C_{n-2}^{n-4}=C_{n-2}^2$ 个“$n-2$ 人组”中被各算了一次，故每一次通话在 $C_n^2\cdot 3^k$ 中的计算重数都是 C_{n-2}^2，所以实际通话总次数.

$l=\dfrac{C_n^2\cdot 3^k}{C_{n-2}^2}(l\in \mathrm{N})$，从而有

$\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 3^k=\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot l$

因为连续的 4 个自然数 $n, n-1, n-2, n-3$ 中恰有一个是 4 的倍数，且另有一个偶数不是 4 的倍数，故易知 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 与 $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ 都是自然数，且一奇一偶.

又因 4 个连续的自然数中任二数的公因数 $\leqslant 3$，且 $(n, n-1)=1, (n-2, n-3)=1$，所以最大公因数

$d=\left(\dfrac{n(n-1)}{2}, \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\right)=3$ 或 1

(1) 若 $d=3, 3\mid\dfrac{n(n-1)}{2}$，且 $3\mid\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$，则必有 $3\mid n$，且 $3\mid(n-3)$，设 $n=3n$，则

$\left[\dfrac{n_1(3n_1-1)}{2}, \dfrac{(3n_1-2)(n_1-1)}{2}\right]=1$

而 $\quad\dfrac{n_1(3n_1-1)}{2}\cdot 3^k=\dfrac{(3n_1-2)(n_1-1)}{2}l$

所以 $\quad\dfrac{(3n_1-2)(n_1-1)}{2}\mid 3^k$

当 $n=3n_1$，是奇数时，n_1-1 是偶数，且显然 $\left(3n_1-2, \dfrac{n_1-1}{2}\right)=1, 3n_1-2>\dfrac{n_1-1}{2}$，所以 $\dfrac{n_1-1}{2}=1$，则 $n_1=3$，此时 $3n_1-2=7\neq 3^k$，矛盾；当 $n=3n_1$ 是偶数时，因 $\left(\dfrac{3n_1-2}{2}, n_1-1\right)=1$，$\dfrac{3n_1-2}{2}>n_1-1$，故 $n_1-1=1, n_1=2, \dfrac{3n_1-2}{2}=2$，矛盾，所以 $d\neq 3$，必有.

(2) $d=1$，则 $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\mid 3^k$，若 n 是偶数，因为 $\left(n-3, \dfrac{n-2}{2}\right)=1, \dfrac{n-2}{2}<n-3$，所以 $\dfrac{n-2}{2}=1, n=4$ 矛盾，从而 n 是奇数. $(n-2, \dfrac{n-3}{2})=1$，显然 $\dfrac{n-3}{2}<n-2$，所以 $\dfrac{n-3}{2}=1 \therefore n=5$,

故 $n=5$ 为惟一可能值.

§2.3 针对性训练

A组

1. 已知 $p>5$ 且为质数.求证:$240\mid p^4-1$

2. 证明:$5\mid 1^n+2^n+3^n+4^n \Leftrightarrow 4\mid n(n\in \mathrm{N})$

3.(1981.全国高中数学联赛试题)证明:对于任何自然数 n 和k,数 $f(n,k)=2n^{3k}+4n^k+10$ 都不能分解或若干个连续的自然数之积.

4.(第21届IMO试题)设 p 和q 均为自然数,使得$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$.证明:$p$ 可被1979整除.

5.(1999.第40届IMO中国国家队选考试第2题)试求满足以下条件的全部质数 p:
对任一质数 $q<p$,若 $p=kq+r,0<r<q$,则不存在大于1的整数 a,使得 a^2 整除 r.

6. (a) 对于什么样的整数 $n>2$,有 n 个连续正整数,其中最大的数是其余 $n-1$ 个数的最小公倍数的约数?
(b) 对于什么样的整数 $n>2$,恰有一组正整数具有上述性质?

7.(1985.新加坡数学竞赛试题)设 a 和 b 是两个正整数,$(a,b)=1$,p 为大于或等于3的质数,$c=\left(a+b,\dfrac{a^p+b^p}{a+b}\right)$.试证:(1)$(c,a)=1$;(2)$c=1$ 或 $c=p$

8.(第26届IMO预选题)设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(k^5+k^7)$,求最大公约数 $d=(S_n,S_{3n})$

9.(第26届IMO预选题)m 个盒子中各放若干个球,每一次在其中 $n(n<m)$ 个盒中各加一球.求证:不论开始的分布情况如何,总可按上述方法进行有限次加球后使各盒中球数相等的充要条件是 $(m,n)=1$.

10.(1977.全苏数学竞赛试题)任何整数可表示为五个整数的立方和.

11.(1980.第6届全俄数学竞赛试题)求所有这样的自然数 n,使得 $2^8+2^{11}+2^n$ 是一个自然数的平方.

12.(1987.加拿大数学竞赛试题)求出 $a^2+b^2=n!$ 的所有解,其中 $a,b,n\in\mathrm{N}$,且 $a\leqslant b$,$n<14$

B组

1.(1986.加拿大数学竞赛试题)对于正整数 n 和k,定义 $F(n,k)=\sum\limits_{r=1}^{n}r^{2k-1}$.求证:$F(n,1)$ 可整除 $F(n,k)$.

2.（第 25 届 IMO 试题）求一对整数 a,b，满足：(i) $ab(a+b)$ 不能被 7 整除；(ii) $(a+b)^7-a^7-b^7$ 能被 7 整除.

3.（第 15 届美国普特南数学竞赛试题）是否存在 1000000 个连续整数，使得每一个都含有重复的素因子，即都能被某个素数的平方所整除？

4.（1998. 全国高中数学联赛题）对正整数 a,n，必有 $a=qn+r,0\leqslant r\leqslant n$. 定义 $Fn(a)=q+r$（商 + 余数），求最大的正整数 A，使得有正整数 n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6，对任意正整数 $a\leqslant A$，都有

$$Fn_6(Fn_5(Fn_4(Fn_3(Fn_2(Fn_1(a))))))=1$$

5.（第 25 届全俄中学生数学奥林匹克竞赛题）4 个自然数使其中任 2 个数之和的平方可被其余 2 个数的乘积整除. 求证：这 4 个数中至少有 3 个相等.

6.（第 58 届莫斯科数学奥林匹克竞赛题）整数 a,b,c 使得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ 与 $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ 均为整数. 证明：$|a|=|b|=|c|$

7.（第 40 届 IMO 国家队选拔考试题）试求满足以下条件的全部质数 p：
对任一质数 $q<p$，若 $p=kq+r,0\leqslant r<q$，则不存在大于 1 的整数 a，使得 a^2 整除 r.

8. 已知49个正整数的集 M，M 中每个数的质因数不大于10. 证明：M 中有4个互不相同的元素，它们的乘积等于某个整数的四次方.

9. 一个完全平方数(以十进制表示)的最后几位数字是相同的非零数字.问:相同数字的个数最多可能达到多少?并求具有这样性质(即最后几位数字是相同的非零数且相同的个数尽可能多)的最小完全平方数.

10.(第20届IMO试题)正整数 a 与 b,使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2.求证:$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是某个正整数的平方.

11.(2000.第41届IMO备选题)对于正整数 n,设 $d(n)$ 是 n 的所有正因数的个数,求所有正整数 n,使得 $d(n)^3=4n$

12.(1997.瑞士数学奥林匹克试题)n 为正整数,$n<200$ 且 $n^2+(n+1)^2$ 是完全平方数.求 n

第三章

同余问题

§3.1 知识、方法、技能

同余是数论中的重要概念,同余理论是研究整数问题的重要工具之一.本讲介绍同余的基本概念,剩余类和完全剩余系,同余方程,整数模的阶和中国剩余定量.

Ⅰ.基本概念

定义1:设 m 是一个给定的正整数.如果两个整数 a、b 用 m 除所得的余数相同,则称 a、b 对模 m 同余,记为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$;否则,记为 $a\not\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$.

例如,$15\equiv 7(\mathrm{mod}\,4)$,$-23\not\equiv 12(\mathrm{mod}\,7)$.

同余有如下两种等价定义法:

定义1* 若 $m\mid a-b$,则称 a、b 对模 m 同余.

定义1** 若 $a=b+mt(t\in\mathbf{Z})$,则称 a,b 对模 m 同余.

同余的基本性质:

(1)$a\equiv 0(\mathrm{mod}\,m)\Leftrightarrow m\mid a$

(2) $a\equiv a(\mathrm{mod}\,m)$(反身性)

$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)\Leftrightarrow b\equiv a(\mathrm{mod}\,m)$(对称性)

$\left.\begin{array}{l}a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)\\ b\equiv c(\mathrm{mod}\,m)\end{array}\right\}\Leftrightarrow a\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$(传递性)

(3) 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$,$c\equiv d(\mathrm{mod}\,m)$,则

①$a\pm c\equiv b\pm d(\mathrm{mod}\,m)$

②$ac\equiv bd(\mathrm{mod}\,m)$

(4) 若 $a_i\equiv b_i(\mathrm{mod}\,m)$,$i=0,1,2,\cdots,n$.则,$a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0(\mathrm{mod}\,m)$ 特别地,设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0(a_i\in\mathbf{Z})$,若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$,则 $f(a)\equiv f(b)(\mathrm{mod}\,m)$

(5) 若 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}\,m)$,则 $a\equiv b\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{(m,c)}\right)$特别地,又若$(c,m)=1$,则 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$

这个性质说明同余式两边的同一非零因数,不能像等式那样“约去”,只有当这非零因数与模互质时,才可“约去”.

(6)$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$,而 $d\mid m(d>0)$,则 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,d)$

(7) 设 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$

① 若 $c>0$,则 $ac\equiv bc(\mathrm{mod}\,m)$

②d 为 a、b、m 的任一公约数,则$\frac{a}{d}\equiv\frac{b}{d}(\mathrm{mod}\,\frac{m}{d})$

(8) 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m_1)$,$a\equiv b(\mathrm{mod}\,m_2)$ 且$(m_1,m_2)=1$,则 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m_1m_2)$

(9) 若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$,则$(a,m)=(b,m)$

(10)(费尔马定理的同余表示法)若 p 为质数,则 $a^p\equiv a(\mathrm{mod}\,p)$ 特别地,p 为质数且$(a,p)=1$,则 $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$

Ⅱ.剩余类和完全剩余系

若按对某一模 m 的余数进行分类,就可以引入所谓的剩余类和完全剩余系的概念.

定义 2:设 $m \in \mathbf{N}^*$,把全体整数按其对模 m 的余数 $r(0 \leqslant r \leqslant m-1)$ 归于一类,记为 k_r,每一类 $k_r(r=0,1,\cdots,m-1)$ 均称为模 m 的剩余类(又叫同余类).同一类中任一数称为该类中另一数的剩余.

剩余类 k_r 是数集 $k_r=\{qm+r \mid m$ 是模,r 是余数,$q \in \mathbf{Z}\}$,也即 $k_r=\{a \mid a \in \mathbf{Z}$ 且 $a \equiv r(\bmod m)\}$,它是一个公差为 m 的(双边无穷)等差数列.

根据定义,剩余类具有如下性质:

(1)$\mathbf{Z}=k_0 \cup k_1 \cup k_2 \cdots \cup k_{m-1}$,而 $k_i \cap k_j=\varnothing(i \neq j)$

(2) 对任一数 $n \in \mathbf{Z}$,有惟一的 r_0 使 $n \in k_{r_0}$

(3) 对任意的 $a,b \in \mathbf{Z}, a,b \in k_r \Leftrightarrow a \equiv b(\bmod m)$

定义 3:设 $k_0,k_1,\cdots,k_{m-1}$ 是模 m 的(全部)剩余类.从每个 k_r 中任取一个数 a_r,这 m 个数 a_0,$a_1,\cdots,a_{m-1}$ 组成的一个组称为模 m 的一个完全剩余系,简称完系.

例如,取 $m=4$,则有 $k_0=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots\}$,$k_1=\{\cdots,-7,-3,1,5,9,\cdots\}$,$k_2=\{\cdots,-6,-2,2,6,10,\cdots\}$,$k_3=\{\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}$.数组 0,1,2,3; $-8,5,2,-1$ 等等都是模 4 的一个完全剩余系.

显然,模 m 的完全剩余系有无穷多个.但最常用的是下面两种:

(1) 非负最小完全剩余系:$0,1,2,\cdots,m-1$;

(2) 绝对值最小完全剩余系:它随 m 的奇偶性不同而略有区别.

当 $m=2k+1$ 时,为 $-k,-(k-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,(k-1),k$.(对称式)

当 $m=2k$ 时,为 $-(k-1),-(k-2),\cdots,-1,0,1,\cdots,(k-1),k$.或

$-k,-(k-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,(k-1)$.

由定义不难得到如下判别完全剩余系的方法:

定理 1 m 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是模 m 的一个完系 $\Leftrightarrow$ 当 $i \neq j$ 时,$a_i \not\equiv a_j(\bmod m)$

定理 2 设 $(b,m)=1$,c 为任意整数.若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为一个完系,则 $ba_1+c,ba_2+c,\cdots,ba_m+c$ 也是模 m 的一个完全剩余系.

特别地,任意 m 个连续整数构成模 m 的一个完全剩余系.

证明:只需证明:当 $i \neq j$ 时,$ba_i+c \not\equiv ba_j+c(\bmod m)$.而这可用反证法得证.下略.

设 m 为一正整数,由于在 $0,1,\cdots,m-1$ 中与 m 互质的数的个数是由 m 惟一确定的一个正整数,因此,可给出如下定义.

定义 4:m 为一正整数,把 $0,1,\cdots,m-1$ 中与 m 互质的数的个数叫做 m 的欧拉函数,记为 $\varphi(m)$.

显然,$\varphi(m)$ 的定义域是正整数集 $\mathbf{N}^*$,前 n 个值为:

$\varphi(1)=0,\varphi(2)=1,\varphi(3)=2,\varphi(4)=2,\varphi(5)=4,\varphi(6)=2,\varphi(7)=6,\cdots$,当 $m=p$ 为质数时,$\varphi(p)=p-1$.

设 k 是模 m 的一个剩余类.若 a、$b \in k$,则 $a \equiv b(\bmod m)$.于是由性质 9 知,$(a,m)=(b,m)$.因此,若 $(a,m)=1$,则 k 中的任一数均与 m 互质.这样,又可给出如下定义.

定义 5:如果一个模 m 的剩余类 k_r 中任一数与 m 互质,则称 k_r 是与模 m 互质的剩余类;在与模 m 互质的每个剩余类中任取一个数(共 $\varphi(m)$ 个)所组成的数组,称为模 m 的一个简化剩余系.

例如,取 $m=6$,在模 6 的六个剩余类中,

$k_1=\{\cdots,-11,-5,1,7,13,\cdots\}$,

$k_5=\{\cdots,-7,-1,5,11,17,\cdots\}$ 是与模 6 互质的剩余类.数组 1,5;7,-7;1,-1;等等都是模 6 的简化剩余类.

由此定义,不难得到:

定理 3 $a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(m)}$ 是模 m 的简化剩余系 $\Leftrightarrow (a_i,m)=1$,且 $a_i \not\equiv a_j(\bmod m)(i \neq j,i,j=1,2,\cdots\varphi(m))$.

定理 4 在模 m 的一个完全剩余系中,取出所有与 m 互质的数组成的数组,就是一个模 m 的简化

剩余系.

这两个定理,前者是简化剩余系的判别方法,后者是它的构造方法.显然,模 m 的简化剩余系有无穷多个,但常用的是"最小简化剩余系",即由 $1,2,\cdots,m-1$ 中与 m 互质的那些数组成的数组.由定理三不难证得简化剩余系的如下性质定理.

定理 5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(m)}$ 是模 m 的简化剩余系.若 $(k,m)=1$,则 $ka_1,ka_2,\cdots,ka_{\varphi(m)}$ 也是模 m 的简化剩余系.

下面介绍两个有关欧拉函数的重要结论.其证明略.

定理 6 (欧拉定理)若 $(a,m)=1$,则 $a^{\varphi(m)}\equiv 1(mod m)$

特别地,(费马小定理)若 $m=p$ 为质数,$p\nmid a$,则 $a^{p-1}\equiv 1(mod p)$

定理 7 (威尔逊定理)设 p 是素数,则 $(p-1)!\equiv -1(mod p)$

定理 8 (欧拉函数值计算公式)令 m 的标准分解式为

$$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$$

则 $\varphi(m)=m\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$

例如,$30=2\cdot 3\cdot 5$,则 $\varphi(30)=30\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=8.$

读者应认识到:由于任何整数都属于模 m 的某一剩余类,所以,在研究某些整数性质时,选取适当的(模)m,然后在模 m 的每个剩余类中取一个"代表数"(即组成一个完全剩余系),当弄清了这些代表数的性质后,就可弄清对应的剩余类中所有数的性质,进而弄清全体整数的性质,这就是引入剩余类和完全剩余系的目的.

Ⅲ.同余方程

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为 x 的整系数多项式.类似于多项式和代数方程的有关定义,我们有

定义 6:同余式 $f(x)\equiv 0(mod m)$,$a_n\not\equiv 0(mod m)$ 叫做一元 n 次同余方程.例如,$9x^7-3x^5+5x^2-3\equiv 0(mod 3)$ 是七次同余方程.

定义 7:若 c 使得 $f(c)\equiv 0(mod m)$ 成立,则 $x\equiv c(mod m)$ 叫做同余方程 $f(x)\equiv 0(mod m)$ 的一个解.

显然,同余方程的解是一些剩余类,而不仅是一个或 n 个类.例如,$x\equiv 1(mod 5)$,$x\equiv 4(mod 5)$ 都是二次同余方程 $x^2\equiv 1(mod 5)$ 的解.

1.一次同余方程

$ax\equiv b(mod m)$(其中 $m\nmid a$)称为一次同余方程.关于它的解,有如下共知的结论:

定理 9 若 $(a,m)=1$,则 $ax\equiv b(mod m)$ 有一个解.

定理 10 若 $(a,m)=d>1$,$d\nmid b$,则 $ax\equiv b(mod m)$ 无解,其中 $a\not\equiv 0(mod m)$.

定理 11 若 $(a,m)=d>1$,$d\mid b$,则 $ax\equiv b(mod m)$ 有 d 个解.并且,若 $\alpha x\equiv\beta(mod m_1)$ 的一个解为 $x\equiv r(mod m_1)$,则 d 个解为:$x\equiv r+km_1(mod m)$,$k=0,1,\cdots,d-1$,

其中,$\alpha=\frac{a}{d}$,$\beta=\frac{b}{d}$,$m_1=\frac{m}{d}$

下面介绍一次同余方程

$$ax\equiv b(mod m),(a,m)=1 \qquad (*)$$

的解法.

解法一:因 $(a,m)=1$,则存在二数 s,t,使得 $as+mt=1$,即 $as\equiv 1(mod m)$,由此有 $asx\equiv bs(mod m)$,于是 $x\equiv bs(mod m)$ 为(*)的解.

解法二:先把(*)变形成 $x\equiv\frac{b}{a}(mod m)$($\frac{b}{a}$ 仅只是形式上的记号),然后用与 m 互质的数陆续乘右端的分子分母,直至把分母绝对值变成 1(通过分子分母各对模 m 取余数)而得到解.

解法三：利用欧拉定理. 因 $a^{\varphi(m)} \equiv 1(modm)$，由 $ax \equiv b(modm)$ 可得 $a^{\varphi(m)}x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1}(modm)$，从而有解

$x \equiv b \cdot a^{\varphi(m)-1}(modm)$

2. 一次同余方程组

定义 8：若数 r 同时满足 n 个同余方程：$f_k(x) \equiv 0\ (modm_k)$，$k = 1,2,\cdots,n$. 则 r 叫做这 n 个同余方程组成的同余方程组的解.

定理 12 对同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv c_1(modm_1) \\ x \equiv c_2(modm_2) \end{cases}$$

记 $(m_1, m_2) = d, [m_1, m_2] = M$.

① 若 $d \nmid c_1 - c_2$，则此同余方程组无解；

② 若 $d \mid c_1 - c_2$，则此同余方程组有对模 M 的一类剩余解.

3. 二次同余方程和平方剩余

二次同余方程的一般形式为

$$ax^2 + bx + c \equiv 0(modm), a \not\equiv 0(modm)$$

两边同乘以 $4a$，再加 b^2，配方得

$$(2ax - b)^2 - (b^2 - 4ac)^2 \equiv 0(modm)$$

若令 $y = 2ax + b, D = b^2 - 4ac$. 则上式变成

$$y^2 \equiv D \quad (modm)$$

因为二曲线式同时有解或同时无解. 于是针对后者这种简单的情形进行讨论.

首先引入"平方剩余" 和"平方非剩余" 两个概念.

定义 9：若同余方程 $x^2 \equiv a(modm)$ 有解，则 a 叫做模 m 的平方剩余，否则，a 叫做模 m 的平方非剩余.

定理 13 若 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 k 个两两互质的正整数，$m = \prod_{i=1}^{k} m_i$，则二次同余方程 $x^2 - a \equiv 0(modm)$ 与同余方程组 $x^2 - a \equiv 0(modm_i)(i = 1,2,\cdots,k)$ 同解.

此定理作用在于：把解一般的二次同余方程化为解

$$x^2 - a \equiv 0 \quad (modp) \qquad (*)$$

其中 p 为奇质数.

对(*)型的方程给出有关定理.

定理 14 (欧拉判别条件) 设 $(a, p) = 1$，则

(i) $x^2 - a \equiv 0(modp)$ 有解 $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(modp)$

(ii) $x^2 - a \equiv 0(modp)$ 无解 $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(modp)$

定理 15 模 p 的平方剩余与平方非剩余的个数各有 $\frac{p-1}{2}$，并有 $\frac{p-1}{2}$ 个平方剩余分别与数列 $1^2, 2^2, \cdots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ 中之一数同余.

Ⅳ. 模 m 的阶和中国剩余定理

(1) 模 m 的阶

定义 10：设 $m > 1$ 是一个固定的整数，a 是与 m 互素的整数，则存在整数 k，$1 \leqslant k < m$，使得 $a^k \equiv 1(modm)$. 我们将具有这一性质的最小正整数(仍记为 k) 称为 a 模 m 的阶.

a 模 m 的阶具有如下性质：

① 设 $(a, m) = 1$，k 是 a 模 m 的阶，u, v 是任意整数，则 $a^u \equiv a^v(modm)$ 的充要条件是 $u \equiv$

$v(\bmod k)$.

特别地,$a^u \equiv 1(\bmod m)$ 的充分必要条件是 $k \mid u$.

简证:充分性显然.

必要性.设 $u > v$,记 $l = u - v$,则由 $a^u \equiv a^v(\bmod m)$ 及$(a, m) = 1$ 易知 $a^l \equiv 1(\bmod m)$.用带余除法,$l = kq + r$,这里 $0 \leqslant r < k$,故 $a^{kq} \cdot a^r \equiv 1(\bmod m)$,即 $a^r \equiv 1(\bmod m)$.由 $0 \leqslant r < k$ 及k 的定义知,必须 $r = 0$,所以 $u \equiv r(\bmod k)$.

② 设$(a, m) = 2$,a 模m 的阶为k,则数列 $a, a^2, a^3, \cdots$,模 m 是周期的,且最小正周期是 k,而 k 个数 $a, a^2, \cdots, a^k$ 模 m 互不同余.

③ 设$(a, m) = 1$,则 a 模m 的阶整除欧拉函数$\varphi(m)$.特别地,若 m 是素数p,则 a 模p 的阶整除 $p-1$.

【注 1】 求出 a 模m 的阶往往非常有用.利用 a 模m 的阶及 ①,便能由某些整数幂的指数导出整除关系,这是数论中产生整除的另一个基本手法.

【注 2】 另一方面,确定 a 模m 的阶通常极其困难,当问题具有某些特殊性时方有可能实现,对于具体的 a 和m,逐一计算 $a, a^2, a^3, \cdots$,模 m 的余数可以求得阶;如利用(3),这一手续能稍被简化.

【注 3】 由 ③ 可见,a 模m 的阶不能超过$\varphi(m)$,如果存在整数 g,$(g, m) = 1$,使 g 模m 的阶恰是$\varphi(m)$,则称模 m 有原根,并称 g 是模m 的一个原根.

(2) 中国剩余定理(即孙子定理)

设 $n \geqslant 2, m_1, m_2, \cdots, m_n$ 是两两互质的正整数,记 $M = \prod_{i=1}^{n} m_i, M_i = \frac{M}{m_i}(i = 1,2,\cdots,n)$,则同余方程组

$$x \equiv c_i(\bmod m_i)(i = 1,2,\cdots,n)$$

有且只有解

$$x \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i\alpha_i c_i(\bmod M) \quad ①$$

其中 $M_i\alpha_i \equiv 1.(\bmod m_i), i = 1,2,\cdots,n$ ②

证明 由$(m_i, m_j) = 1(i \neq j)$ 知,$(M_i, m_i) = 1$,因此每一个同余方程 $M_i y \equiv 1(\bmod m_i)(i = 1, 2,\cdots,n)$ 都有解,于是必存在 α_i,使得 $M_i\alpha_i \equiv 1(\bmod m)$.又因 $M = m_iM_i, m_i \mid M_i(i \neq j)$,所以对模 $m_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 有 $M_1\alpha_1c_1 + \cdots + M_i\alpha_ic_i + \cdots + M_n\alpha_nc_n \equiv M_i\alpha_ic_i \equiv c_i(\bmod m_i)$.故 ② 是 ① 的解.

若 x_1, x_2 是适合(△)的任意两个解,则 $x_1 \equiv x_2(\bmod m_i), i = 1,2,\cdots,n$,因$(m_i, m_i) = 1(i \neq j)$.故 $x_1 \equiv x_2(\bmod m_1m_2\cdots m_n)$,即 $x_1 \equiv x_2(\bmod M)$,因此,(②) 是(①) 的惟一解.

§3.2 赛题精讲

例 1 (2001.第14届爱尔兰数学奥林匹克第2试第1题)求最小的正整数 a,使得存在正奇数 n,满足 $2001(55^n + a \cdot 32^n)$

【分析】 运用同余性质,努力求得 $a \equiv 1(\bmod 87)$ 和 $a \equiv -1(\bmod 23)$ 则 a 的可得.

解:由于 $2001 = 87 \times 23$,依题意知,存在正奇数 n,使得

$$87 \mid (55^n + a \cdot 32^n)$$

并且 $23 \mid (55^n + a \cdot 32^n)$,于是

$0 \equiv 55^n + a \cdot 32^n \equiv (-32)^n + a \cdot 32^n$

$\equiv 32^n(a-1)(\bmod 87)$.

故 $a - 1 \equiv 0(\bmod 87)$,并且

$0 \equiv 55^n + a \cdot 32^n \equiv 32^n + a \cdot 32^n \equiv 32^n(a+1)(\bmod 23)$

从而知 $a+1\equiv 0(mod23)$

问题转化为求最小的正整数 a，使 $87\mid(a-1)$ 且 $23\mid(a+1)$

为此，设 $a=87k+1$，则 $23\mid(87k+2)$，从而 $23\mid(-5k+25)$，即 $23\mid(k-5)$.

于是满足条件的最小正整数 $a=436$.

例 2 （第 27 届美国数学奥林匹克竞赛题）设集合 $\{1,2,3,\cdots,1998\}$ 被分为 999 个彼此不交的二元子集 $\{a_i,b_i\}$，并且对 $1\leqslant i\leqslant 999$，均有 $|a_i-b_i|=1$ 或 6. 证明：和数 $\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|$ 的末尾数字是 9.

【分析】 运用同余性质和个位数字，首先求得 $S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv 999\equiv 4(mod5)$，$S\equiv 1(mod2)$，从而得结论.

证明：由条件，对任意 $1\leqslant i\leqslant 999$，均有 $|a_i-b_i|=1(mod5)$，所以，和数 $S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv 4(mod5)$. 这表明，$S$ 的末尾数字只能为 4 或 9；

另一方面，$S=\sum_{i=1}^{999}|a_i-b_i|\equiv\sum_{i=1}^{999}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{1998}i\equiv 1(mod2)$. 这表明 S 为奇数.

综上可知，S 的末尾数字只能为 9.

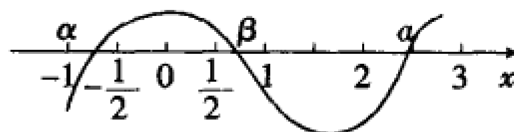
例 3 （第 29 届 IMO 预选题）设 a 是方程 $x^3-3x^2+1=0$ 的最大正根，求证：17 可以整除 $[a^{1788}]$ 与 $[a^{1988}]$. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明：根据如下符号表可知，若设三根依次为 $\alpha<\beta<a$

则 $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<\beta<1$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$2\sqrt{3}$	3
$f(x)$ 符号	−	+	+	−	−	+

$2\sqrt{2}<a$，由于 $f(-\alpha)=-2\alpha^3+(\alpha^3-2\alpha^2+1)=-2\alpha^3>0$，于是 $-\alpha<\beta$，$|\alpha|<\beta$



另一方面，由韦达定理知，

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3-a)^2+\frac{2}{a}=9+\frac{2-6a^2+a^3}{a}$$

$$=9+\frac{-2a^3+a^3}{a}$$

$$=1+(8-a^2)$$

$\because a^2>(2\sqrt{2})^2=8$，$\therefore \alpha^2+\beta^2<1$

为了估计 $[a^{1778}]$、$[a^{1988}]$，先一般考察 $[a^n]$，为此定义：

$$u_n=\alpha^n+\beta^n+a^n.(n=0,1,2,\cdots)$$

直接计算可知：$u_0=3$，$u_1=2+\beta+a=3$. $u_2=\alpha^2+\beta^2+a^2=9$，以及 $u_{n+3}=3u_{n+2}-n(n\geqslant 0)$.

又因 $0<\alpha^n+\beta^n<1$（$\because|\alpha|<\beta$，即 $\alpha^n+\beta^n>0$，又 $\alpha+\beta=3-a<2-2\sqrt{2}<1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$\alpha^n+\beta^n\leqslant|\alpha|^n+\beta^n<\alpha^2+\beta^2<1$），则 $a^n=u_n-(\alpha^n+\beta^n)=u_n-1-[1-(\alpha^n+\beta^n)]$

$\therefore[a^n]=u_n-1.(n=1,2,\cdots)$

由此知，命题变为证明：$u_{1788}-1$ 和 $u_{1988}-1$ 能被 17 整除.

现考察$\{u_n\}$在模17意义下的情况：

$u_0\equiv3,u_1\equiv3,u_2\equiv9,u_3\equiv7,u_4\equiv1,u_5\equiv11,u_6\equiv9,u_7\equiv9,u_8\equiv16,u_9\equiv5,u_{10}\equiv6,u_{11}\equiv 2,u_{12}\equiv1,u_{13}\equiv14,u_{14}\equiv6,u_{15}\equiv0,u_{16}\equiv3,u_{17}\equiv3,u_{18}\equiv9,\cdots$

可见，在模17意义下，$\{u_n\}$是16为周期的模周期数列，即$u_{n+16}\equiv u_n(mod17)$. 由于$1788\equiv 12(mod16),1988\equiv4(mod16)$，故$u_{1788}\equiv u_{12}\equiv1(mod17),u_{1988}\equiv u_4\equiv1(mod17)$，故$u_{1788}-1\equiv0$，$u_{1988}-1\equiv0(mod17)$. 命题得证.

例4 (1995.南斯拉夫数学奥林匹克试题)设n是正整数，n的二进制表示中恰有1995个1.求证：2^{n-1995}整除$n!$

证明：我们证明更一般的命题

"设正整数n在二进制表示中恰有$\lambda(n)$个1，则$2^{n-\lambda(n)}\mid n!$"

为此我们先证明如下引理.

"设$P\in\mathbf{N}$，满足$2^\lambda\mid(2^p)!$的λ的最大值$M=2^p-1$"

证：$M=\left[\frac{2^p}{2}\right]+\left[\frac{2^p}{2^2}\right]+\left[\frac{2^p}{2^3}\right]+\cdots$

$\quad=2^{p-1}+2^{p-2}+\cdots+2+1$

$\quad=2^p-1$

下面用数学归纳法证明命题.

令$\lambda(n)=k\in\mathbf{N}^+$，对$k$进行归纳.

当$k=1$时，n是2的方幂，设$n=2^p$，由引理知结论成立.

设对于$k\geqslant1$结论成立，那么对于$k+1$，设$n=2^p+m,m\in\mathbf{N}^+,m<2^p$且$\lambda(m)=k$，

$\because n!=(2^p)!(2^p+1)(2^p+2)\cdots(2^p+m)$

由引理知$(2^p)!\equiv0(mod2^{2^p-1})$ ①

又$\because(2^p+1)(2^p+2)\cdots(2^p+m)$是$m$个连续自然数的积，故这个乘积能被$m!$整除，又由归纳假设知$m!\equiv0(mod2^{m-k})$.

$\therefore(2^p+1)(2^p+2)\cdots(2^p+m)\equiv0(mod2^{m-k})$ ②

由①，②知

$n!\equiv0(mod2^{2^p-1}\cdot2^{m-k})$

$\quad\equiv0(mod2^{2^p+m-k-1})$

$\quad\equiv0(mod2^{n-(k+1)})$

即对于$k+1$结论成立.

综上知命题成立.

例5 (2000.奥地利，波兰数学竞赛题)求所有的正整数N，使得N仅含有两个质因子2或5，且$N+25$是一个完全平方数.

【分析】 运用数的因数表示，由$N=x(x+10)$可令$x=2^{\alpha_1}\cdot5^{\beta_1},x+10=2^{\alpha_2}\cdot5^{\beta_2}$，推出$\alpha_1,\alpha_2$中至少有一个1，运用同余知识，分别就$\alpha_1=1$和$\alpha_2=1$得出矛盾，从而知$N$.

解：设$N+25=(x+5)^2$，这里$x\in\mathbf{N}_+$，则$N=x(x+10)$

依题可设

$\begin{cases}x=2^{\alpha_1}\cdot5^{\beta_1}\\x+10=2^{\alpha_2}\cdot5^{\beta_2}\end{cases}$ 其中α_i,β_i为非负整数，于是$2^{\alpha_2}\cdot5^{\beta_2}-2^{\alpha_1}\cdot5^{\beta_1}=10$ ①

如果$\alpha_1=\alpha_2=0$，则要求$5^{\beta_2}-5^{\beta_1}=10$，这是不可能的，故$\alpha_1,\alpha_2$中至少有一个大于0，从而$x$为偶数，得$\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{N}_+$，且当$\alpha_1\geqslant2$时，可知$\alpha_2=1$，当$\alpha_2\geqslant2$时，$\alpha_1=1$，所以$\alpha_1,\alpha_2$中至少有一个为1.类似讨论，可知$\beta_1,\beta_2\in\mathbf{N}_+$且$\beta_1,\beta_2$中至少有一个为1.

情形1 $\alpha_1=1$，这时若$\beta_1=1$，则$x=10,x+10=20=2^2\times5$，得一个满足条件的$N=200$；若

$\beta_2 = 1$,则由 ① 式得 $2^{\alpha_2 - 1} - 5^{\beta_1 - 1} = 1$,这要求 $\alpha_2 - 1 \geqslant 3$,两边模 4,要求 $-1 \equiv 1(mod 4)$,矛盾.

情形 2 $\alpha_2 = 1$,这时 $\beta_2 > 1$,得 $\beta_1 = 1$,于是由 ① 式,得

$$5^{\beta_2 - 1} - 2^{\alpha_1 - 1} = 1 \quad ②$$

两边模 5,可知 $\alpha_1 - 1$ 为偶数,设 $\alpha_1 - 1 = 2m$,则 $m = 1$ 时,导出 $\alpha_1 = 3, \beta_2 = 2, N = 2000$. 当 $m > 1$ 时,对 ② 式两边模 8,可知 $\beta_2 - 1$ 为偶数,设 $\beta_2 - 1 = 2n$,导致$(5^n - 5^m) \cdot (5^n + 5^m) = 1$,左边显然大于 1,矛盾.

综上知,满足条件的 $N = 200$,或 2000.

例 6 (第 16 届巴尔干数学奥林匹克竞赛题) 设 $p > 2$ 为质数,使得 $3 \mid (p - 2)$. 记 $S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in Z, 0 \leqslant x, y \leqslant p - 1\}$,证明:$S$ 中至多有 $p - 1$ 个元素为 p 的倍数.

【分析】 由费尔马小定理可以推得:若 $1 \leqslant m < n \leqslant p - 1$,则 $m^3 \not\equiv n^3(modp)$ 这里 $p > 2$ 是质数,$p \equiv 2(mod3)$. 再依据完全剩余系的知识推得结论 $x^3 \equiv y^2 - 1(modp)$

证明:先证一个引理

引理:设 $p > 2$,p 为质数,且 $p \equiv 2(mod3)$,对任意整数 m, n,如果 $1 \leqslant m < n \leqslant p - 1$,那么 $m^3 \not\equiv n^3(modp)$

简证:事实上,设 $p - 1 = 3k + 1, k \in Z$,且 $m^3 \equiv n^3(modp)$

我们设 t 是满足同余式$m^t \equiv n^t(modp)$ 的最小自然数,则易证对任意自然数 r,若 $m^r \equiv n^r(modp)$,我们有 $t \mid r$,从而 $r \mid 3$.

另一方面,由 Fermat 小定理,$m^{p-1} \equiv 1(modp)$,$n^{p-1} \equiv 1(modp)$,即 $m^{3k+1} \equiv n^{3k+1}(modp)$,所以 $r \mid (3k + 1)$,结合 $r \mid 3$,可知 $r = 1$,这表明 $m \equiv n(modp)$,引理得证.

证明原题:

由引理可知,当 x 取遍模 p 的一个完系时,x^3 也取遍模 p 的一个完系,从而,对 $0 \leqslant y \leqslant p - 1$ 的每一个整数 y,存在惟一的 $x \in \{0, 1, \cdots, p - 1\}$,使得 $x^3 \equiv y^2 - 1(modp)$. 这表明集合 S 中充其量只有 p 个元素是 p 的倍数,注意到 S 中 $0 = 1^2 - 0^3 - 1 = 3^2 - 2^3 - 1$ 被表示了两次,从而 S 中至多只有 $p - 1$ 个元素为 p 的倍数.

例 7 (1998. 第 39 届 IMO 预选题) 确定最小的整数 $n \geqslant 4$,对于它,可以从任意 n 个不同的整数中,选出 4 个不同的数 a, b, c, d. 使得 $a + b - c - d$ 被 20 整除.

【分析】 任意 9 个不同的整数至少有 7 个不同的剩余类(mod 20),这 7 个互不同余的数两两的和中,由抽屉原理可知,只有两个是关于模 20 同余的,从而知 $n \leqslant 9$,而 $8 \leqslant 8$ 不可能.

解:一方面,任意 9 个不同的整数,如果其中有一个数 a, b, c, d 满足 $a \equiv c(mod\ 20)$, $b \equiv d(mod\ 20)$,那么显然 $a + b - c - d$ 被 20 整除,因此可以设 mod 20 后至少有 7 个不同的剩余类.

考虑这 7 个互不同余的数,它们两两的和共有 $C_7^2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$(个),因而必有同余的. 但由于每两个数互不同余,所以 $a + b \not\equiv a + c(mod\ 20)$,从而同余的和只能是 $a + b \equiv c + d(mod\ 20)$, a, b, c, d 互不相同,即有不同的数 a, b, c, d,使得 $a + b - c - d$ 被 20 整除. 另一方面,八个数 0,20,40,1,2,4,7,12 中任四个数 a, b, c, d,都不能使 $a + b - c - d$ 被 20 整除.

故 $n = 9$.

例 8 (2001. 第 42 届 IMO 试题) 设 n 为奇数,且大于 $1, k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为给定的整数,对于 $1, 2, \cdots, n$ 的 $n!$ 个排列中的每一个排列 $a = (a, a_2, \cdots, a_n)$,记 $S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$.

证明:有两个排列 b 和 c, $b \neq c$,使得 $S_{(b)} - S_{(c)}$ 能被 $n!$ 整除.

【分析】 所要证明的问题是 $n! \mid (S_{(b)} - S_{(c)})$. 自然地可联想到剩余类的性质,通过构造 $n!$ 的完全剩余类解题. 根据题目特点,应采用反证法为宜.

证:假设对任意两个不同的 b 和 c,均有

$$S_{(b)} - S_{(c)} \neq 0(modn!)$$

则当 a 取遍所有 $1,2,\cdots,n$ 的 $n!$ 个排列时，$S_{(a)}$ 遍历模 $n!$ 的一个完全剩余类，且每个剩余类恰经过一次，所以，

$$\sum_a S_{(a)} \equiv 1+2+\cdots+n!$$

$$\equiv \frac{n!}{2}(n!+1)(mod n!) \quad ①$$

其中，$\sum\limits_a$ 表示对 a 取遍 $n!$ 个排列求和(下同).

另一方面，

$$\sum_a S_{(a)} = \sum_a\left(\sum_{i=1}^{n} k_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(k_i \cdots \sum a_i)$$

$$= \frac{n!n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i \quad ②$$

由于 n 为大于1的奇数，则由①有

$$\sum_a S_{(a)} \equiv \frac{n!}{2}(mod n!)$$

由②有 $\quad \sum\limits_a S_{(a)} \equiv 0(mod n!)$

矛盾，故命题成立.

【评注】：

第一点：②式中，由于 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列的各个数字之和为 $\frac{n(n+1)}{2}$，当 $\sum\limits_a S_{(a)}$ 对每一个排列求和时，共计算 $n!$ 次，那么

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i \sum_a a_i) = \sum_{i=1}^{n}(k_i \cdot \frac{n!n(n+1)}{2})$$

$$= \frac{n!n(n+1)}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} k_i$$

第二点：本题巧妙地利用了完全剩余的性质，请再看一例：

设 $n \in \mathbf{N}^*$，整数 k 与 n 互质，且 $0<k<n$，令 $M=\{1,2,\cdots,n-1\}$，给 M 中每个数染上黑白两种颜色中的一种，染法如下：

(1) 对 M 中每个 i，i 与 $n-i$ 同色；

(2) 对 M 中每个 i，$i \neq k$，i 与 $|k-i|$ 同色，

求证：M 中所有的数必为同色.

请读者仿照例8给出解答，(答案请见练习题答案)

例9 (1998.第39届IMO中国国家队选拔考试第6题) 任意给定 $h=2^r$ (r 是非负整数)，求满足以下条件的所有自然数 k：对每个这样的 k，存在奇自然数 $m>1$ 和自然数 n，使得

$$k \mid m^k-1,\ m \mid n^{\frac{m^k-1}{k}}+1$$

【分析】 这个题目是该次考试第6大题，可见有很大难度.

因为 m 为奇数，又 $h=2^r$，$m^h-1=m^{2^r}-1=(m-1)(m+1)(m^2+1)\cdots(m^{2^{r-1}}+1)$. 当 $m\equiv 1(mod 4)$ 时有：

$$2^r \left| \frac{m^{2^r}-1}{m-1}\right.$$

将这作为突破口，可以猜想 k 的取值与 2^r 有关.

解：对于 $h=2^r$，约定将满足条件的所有的 k 的集合记为 $k(h)$，我们来证明：

$k(h)=\{2^{r+s}t \mid s,t\in\mathbf{N},2\nmid t\}$.

将用到以下事实：

$m \equiv 1(mod4) \Rightarrow 2^r \left| \frac{m^{2^r}-1}{m-1} \right.$

这个事实是显然的，因为

$$\frac{m^{2^r}-1}{m-1} = (m^{2^{r-1}}+1)(m^{2^{r-2}}+1)\cdot \cdots \cdot (m^2+1)(m+1)$$

(1) 先证：若 $S \geqslant 2, 2 \nmid t$，则 $k = 2^{r+s}t \in k(h)$

事实上，存在 $m = 2^s t + 1, n = m - 1$，使得我们有

$$2^r \left| \frac{m^{2^r}-1}{m-1} \right.$$

$$\frac{m^h-1}{k} = \frac{m^{2^r}-1}{2^{r+s}t} = \frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)}$$

是奇自然数.

所以　$k \mid m^h - 1$

又　$n^{\frac{m^k-1}{k}} = (m-1)^{\frac{m^k-1}{k}} \equiv -1(modm)$

所以　$m \mid (n^{\frac{m^k-1}{k}} + 1)$

(2) 再证：对于 $2 \nmid t, k = 2^{r+1}t \in k(h)$

事实上，存在 $m = 4t^2 + 1, n = 2t$，使我们有

$$\frac{m^h-1}{k} = \frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)} \cdot 2t$$

$$n^{\frac{m^h-1}{k}} = (n^2)^{\frac{m^{2^r}-1}{2^r(m-1)}\cdot t} \equiv -1(modm)$$

(3) 用反证法论证：对于 $0 \leqslant q \leqslant r, 2 \nmid t, 2^q t \notin k(h)$

若对 $k = 2^q t$，有 m、n 满足题中所述的要求，显然有 $(m, n) = 1$，在 m 的所有素因数中取以下表示中指数 a 最小的一个素数 p：

$p = 2^a b + 1, 2 \nmid b$

易见　$2^a \mid (m-1)$

一方面，由　$p \mid (n^{\frac{m^h-1}{k}} + 1)$，我们有

$$(n^{\frac{m^h-1}{2^q\cdot t}})^b = (h^{\frac{m^h-1}{2^{q+a}\cdot t}})^{2^a\cdot b} \equiv (n^{\frac{m^h-1}{2^{q+a}\cdot t}})^{p-1} \equiv 1(modp)$$

矛盾.

【结论】　对于 $h = 2^r, k(h) = \{2^{r+s}t \mid s, t \in \mathbf{N}, 2 \nmid t\}$

例 10　(2000.第 41 届 IMO 预选题) 求所有三元正整数组 (a, m, n)，使得 $a^m + 1$ 整除 $(a+1)^n$.

解：先证明关于正整数惟一分解定理的一个推论：

若 u 整除 v^l，则 u 整除 (u, v^l)，其中整数 $l \geqslant 1$.

事实上，设 $u = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$

　　　　　$v = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$，及 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 为非负整数，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为素数.

由　$u \mid v^l$，得 $l\beta_1 \geqslant \alpha_1, l\beta_2 \geqslant \alpha_2, \cdots, l\beta_k \geqslant \alpha_k$

因此　$l_{\min}\{\alpha_1, \beta_1\} \geqslant \alpha_1, l_{\min}\{\alpha_2, \beta_2\} \geqslant \alpha_2, \cdots, l_{\min}\{\alpha_k, \beta_k\} \geqslant \alpha_k$，故 $u \mid (u, v^l)$

对于所有正整数 a, m, n，不能验证 $(1, m, n)$ 和 $(a, 1, n)$ 是满足条件的解.

对于 $a > 1$，若 m 是偶数，则

$a^m + 1 = (a + 1 - 1)^m + 1 = 2(mod(a+1))$

所以 $(a^m+1,a+1)$ 要么等于1,要么等于2

$\because a^m+1\mid(a+1)^n,a>1$

$\therefore(a^m+1,a+1)=2$

由推论知 $a^m+1\mid 2^n$,因此 a^m+1 是2的整数次幂.设 $a^m+1=2^s$,因为 $a>1$,所以 $s\geqslant 2,a_m=2^s-1\equiv -1(mod4)$

又 m 是偶数,故 a^m 是完全平方数,矛盾.

对于 $a>1$,设 m 是大于1的奇数,则 $n>1$.设 p 是一个整除 m 的奇素数,$m=p^r,b=a^r$,因此 r 是奇数,由

$a^m+1=a^{p^r}+1=(b^p+1)\mid(a+1)^n$

$(a+1)\mid(a^r+1)=b+1$

从而 $(a+1)^n\mid(b+1)^n$

所以 $b^p+1=(a^m+1)\mid(b+1)^n$

$B=\dfrac{b^p+1}{b+1}$ 整除 $(b+1)^{n-1}$

由推论,得 B 整除 $(B,b+1)^{n-1}$

因为 p 是奇数,由二项式定理,得

$$B=\frac{b^p+1}{b+1}=\frac{(b+1-1)^p+1}{b+1}\equiv p(mod(b+1))$$

所以 $(B,b+1)\mid p$,进而可知 $(B,b+1)=p$

故 B 整除 p^{n-1},即 B 是 p 的整数次幂,且有 $p\mid(b+1)$.设 $b=kp-1$,由二项式定理,有

$b^p+1=(kp-1)^p+1$

$=[(kp)^p-\cdots-C_p^2(kp)^2+kp^2-1]+1$

$\equiv kp^2(modk^2p^3)$

$B=\dfrac{b^p+1}{b+1}=\dfrac{b^p+1}{kp}\equiv p(modkp^2)$

这表明 B 可以被 p 整除,但不能被 p^2 整除.

因此 $B=p$

如果 $p\geqslant 5$,则

$\dfrac{b^p+1}{b+1}=b^{p-1}-b^{p-2}+\cdots-b+1>b^{p-1}-b^{p-2}$

$=(b-1)b^{p-2}\geqslant 2^{p-2}>p$

所以 $p=3$

$B=p$ 等价于 $b^2-b+1=3,b=2$.由 $a^r=b=2$,得 $a=2,r=1$,则 $m=pr=3$,经验证 $(2,3,n)$ 是满足条件的解,其中 $n\geqslant 2$.

综上所述,解集为 $\{(a,m,n)\mid a=1$ 或 $m=1$ 或 $a=2,m=3,n\geqslant 2\}$

例11 设 n,k 是给定的整数,$n>0$,且 $k(n-1)$ 是偶数.证明:存在 x,y,使得 $(x,n)=(y,n)=1$,是 $x+y\equiv k(modn)$.

证明:我们先证明,当 n 为素数幂 p^a 时结论成立.实际上,我们能证明,存在 x,y,使 $p\nmid xy$,且 $x+y=k$.

如 $p=2$,则条件表明 k 为偶数,可取 $x=1,y=k-1$;如 $p>2$,则 $x=1,y=k-1$ 或 $x=2,y=k-2$ 中有一对满足要求.

一般情形下,设 $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ 是 n 的标准分解,上面已证明,对每个 p_i,均有整数 x_i,y_i,使 $p_i\nmid x_iy_i$,且 $x_i+y_i=k(1,2,\cdots,r)$.现在孙子定理表明,同余方程组

$x\equiv x_1(modp_1^{a_1}),\cdots,x\equiv x_r(modp_r^{a_r})$ 有解 x,同样

$y\equiv y_1(modp_1^{a_1}),\cdots,y\equiv y_r(modp_r^{a_r})$

也有解 y. 现在易证 x,y 符合问题中的要求：因 $p_i \nmid xy_i$，故 $p_i \nmid xy(i=1,\cdots,r)$，于是 $(xy,n)=1$. 又 $x+y\equiv x_i+y_i=k(\bmod p_i^{a_i})(i=1,\cdots,r)$，故 $x+y\equiv k(\bmod n)$.

例 12 （第 30 届 IMO 试题）设 n 为任意的正整数. 证明：一定存在 n 个连续的正整数解，使其中任何一个都不是质数的整数幂.

证明：取 $2n$ 个两两不同的质数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 和 $q_1,q_2,\cdots,q_n$. 同余方程组 $x\equiv -i(\bmod p_iq_i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 由于 $p_1q_1,p_2q_2,\cdots,p_nq_n$ 两两互质，根据孙子定理必有解，取为正整数 N，则 n 个连续正整数 $N+1,N+2,\cdots,N+n$ 都至少含有两个不同的质因数，因而它们中的任一个都不是质数的整数幂. 证毕.

例 13 一只棋子在一个七角形的棋盘上沿反时针方向跳走. 第一次跳一步，第二次跳二步，…，如此无限继续跳走. 证明：在七角形上有三个顶点处永远不被这只棋子走到.

证明：分别用 $0,1,\cdots,6$ 顺次给七个顶点编号. 设棋子从 0 号顶点经 x 次跳走后一共跳了 y 步，则棋子应停在 y 用 7 除所得的余数编号 $a(0\leqslant a\leqslant 6)$ 的顶点上. 由于棋子跳走了 x 次后，共走了 $1+2+\cdots+x=\frac{1}{2}x(x+1)$ 步，因而，只需考察同余方程

$$\frac{1}{2}x(x+1)\equiv a(\bmod 7)\qquad (0\leqslant a\leqslant 6)$$

的解的情形，化上述方程为

$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2\equiv a+1(\bmod 7)$$

因 $1^2\equiv 1,3^2\equiv 2,5^2\equiv 4,7^2\equiv 0(\bmod 7)$，所以 $a+1\equiv 1,2,4,0(\bmod 7)$，从而 $a=0,1,3,6$. 故在编号为 2,4,5 的三个顶点处永远不被棋子走到.

例 14 （1998. 第 39 届 IMO 预选题）确定所有正整数 n，对它，存在一个整数 m，使得 2^n-1 是 m^2+9 的一个因数.

【分析】 运用费尔马小定理与中国剩余定理. 由 2^n-1 是 m^2+9 的因数得 $(2^s-1)\mid m^2+9$，考虑同余方程组 $x=2^{2^{h-1}}(\bmod 2^{2^h}+1)$. $h=1,2,\cdots,k-1$ 有解 x_0，得 $m=3x_0$

解：$n=2^k$，k 为非负整数.

一方面，如果 n 有奇因数 s，那么 2^s-1 是 $2^n-1=(2^s)^{\frac{n}{s}}-1$ 的因数. 如果 2^n-1 是 m^2+9 的因数，那么 2^s-1 是 m^2+9 的因数. 因为 $3\nmid 2^s-1$ 并且 $2^s-1\equiv -1(\bmod 4)$，所以 2^s-1 必有一个 $\equiv -1(\bmod 4)$ 的素因数 $p>3$，从而 $m^2\equiv -9(\bmod p)$

两边 $\frac{p-1}{2}$ 次方得 $m^{p-1}\equiv -3^{p-1}(\bmod p)$

由费尔马小定理，得 $1\equiv -1$ 或 $0\equiv -1(\bmod p)$ 矛盾.

另一方面，

$$\begin{aligned}2^{2^k}-1&=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-1}}-1)\\&=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)(2^{2^{k-2}}-1)\\&=\cdots\\&=(2^{2^{k-1}}+1)(2^{2^{k-2}}+1)\cdots(2^2+1)(2+1)\end{aligned}$$

同余方程

$$x^2\equiv -1(\bmod 2^{2^h}+1)$$

有解 $\quad x\equiv 2^{2^{h-1}}(\bmod 2^{2^h}+1)$

而当 $j>i$ 时，

$$\begin{aligned}(2^{2^i}+1,2^{2^j}+1)&=(2^{2^{i+1}}-1,2^{2^j}+1)\\&=\cdots\\&=(2^{2^j}-1,2^{2^j}+1)\\&=(2,2^{2^j}+1)\end{aligned}$$

$= 1$

所以,根据中国剩余定理,同余方程组

$x \equiv 2^{2^{h-1}} (mod 2^{2^h} + 1). h = 1,2,\cdots,k-1$,有解 x_0

令 $m = 3x_0$,则 $m^2 + 9 = 9(x_0^2 + 1)$ 被 $2^{2^k} - 1$ 整除.

例 15 (2000 年·第 41 届 IMO 中国国家队选拔考试题)对正整数 $a \geqslant 2$,记 Na 为具有以下性质的正整数 K 的个数:K 的 a 进制表示的各位数字的平方和等于 K. 证明:

(1) Na 为奇数;

(2) 对任意给定的正整数 M,存在正整数 $a \geqslant 2$,使得 $Na \geqslant M$.

【注】 第(1)问解答见第一讲例 1,现看第二问证明如下.

证明:(2) 仅考虑满足条件的两位数 $K = x_1x_0$,我们注意到特殊值

$x_0 = uv, x_1 = u, a = (v^2+1)u - v$ 可使等式

$x_1(a - x_1) = x_0(x_0 - 1)$

成立.

令 $v_1 = 2, v_{i+1} = (v_1^2+1)\cdot\cdots\cdot(v_1^2+1), i = 1,2,\cdots,M-1$,则

$(v_i^2+1, v_j^2+1) = 1, i,j = 1,2,\cdots,M, i \neq j$

因此,由中国剩余定理知,存在正整数 $a \geqslant 2$ 满足同余方程组.

$a \equiv - v_i (mod(v_i^2+1)) \quad i = 1,2,\cdots,M$

于是,对应地有正整数 u_i,使得

$a = (v_i^2+1)u_i - v_i \quad (i = 1,2,\cdots,M)$

易见 $u_iv_i < a$,且由 $v_1, v_2, \cdots, v_M$ 互不相同知 $u_1, u_2, \cdots, u_M$ 也互不相同,从而,首位数字为 u_i,末位数字为 $u_iv_i (1 \leqslant i \leqslant M)$ 的这 M 个两位数具有题设性质,亦即 $Na \geqslant M$

§3.3 针对性训练

A组

1. (1) 证明:$f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$ 是一个整值多项式;

(2) 证明:$504 \mid n^9-n^3$;

(3) 求 243^{402} 的最末两位数字;

(4) 求 6^{592} 除以 11 的余数;

(5) 设 $a>1,n>1$,称 a^n 为一个完全方幂.

证明:当 p 为质数时,2^p+3^p 不是完全方幂.

2.(第 20 届 IMO 试题) 数 1978^n 与 1978^m 的最末三位数相等,试求正整数 m 和 n,使得 $n+m$ 取最小值,这里 $n>m\geqslant 1$.

3. 试求和 $S=1^5+2^5+3^5+\cdots+1990^5$ 除以 3 的余数.

4. 任意给定一个正整数 N,则总可以用 1986 的四个数码经过适当的排列得到一个四位数 $\overline{a_0a_1a_2a_3}$,使得 $7\mid(N+\overline{a_0a_1a_2a_3})$

5.(第 26 届 IMO 预选题) 求八个整数 $n_1,n_2,\cdots,n_8$ 满足:对每个整数 $k(-1985<k<1985)$,有八个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_8\in\{-1,0,1\}$,使得 $K=a_1n_1+a_2n_2+\cdots+a_8n_8$.

6. 解:(1)$6x\equiv 10(mod15)$;(2)$6x\equiv 9(mod15)$

7. 解同余方程组 $2x\equiv 3(mod5),10x\equiv 4(mod2)$

8. 设 a 是奇数,n 为正整数.证明:$a^{2^n}\equiv 1(mod2^{n+2})$

9. 设 a,b 是整数,p 是素数,若 $a^p\equiv b^p(mod p)$. 证明:$a^p\equiv b^p(mod p^2)$

10. 解同余方程组

(1) $\begin{cases}x\equiv 5(mod 8)\\x\equiv 6(mod 7)\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x\equiv 8(mod 15)\\x\equiv 3(mod 10)\\x\equiv 1(mod 8)\end{cases}$

11. 设 p,q 是不同的奇素数,$pq\mid 2^{pq-1}-1$,则 $p\mid 2^{q-1}-1$,且 $q\mid 2^{p-1}-1$;反之亦然.

12. 设 p 是奇素数,证明:2^p+1 的素因子或者是 3 或者具有形式 $2px+1$(x 是正整数).

13. 设 $a>1$ 是整数,p 是奇素数. 证明:a^p-1 的素因子或者整除 $a-1$,或者具有形式 $2px-1$(x 是正整数).

B 组

1.(第 17 届 IMO 试题)设 A 表示 4444^{4444} 的各位数字之和,B 表示 A 的各位数字之和,C 表示 B 的各位数字之和,求 C.

2.(1) 设 $n>1,2\nmid n$,求证:对任意的正整数 m,$n\nmid m^{n-1}+1$.

(2) 设 p_1,p_2 是两个奇质数,$p_1>p_2$. 求证:对任意的正整数 m,$p_1p_2\nmid m^{p_1-p_2}+1$

3. 设$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 满足$a_1+a_2+\cdots+a_n=2n,2\mid n,a_n\neq n+1$,则在其中一定可选出某些数,使它们的和等于 n.

4.(1988. 全国高中数学联赛试题)设 $a_1=1,a_2=2$,并且

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & \text{当 } a_n\cdot a_{n+1} \text{ 为偶数时},\\ a_{n+1}-a_n & \text{当 } a_n\cdot a_{n+1} \text{ 为奇数时}.\end{cases}$$

(用模周期数列概念).求证:$a_n\neq 0\quad(n\geqslant 1)$

5.(第26届IMO试题)设 n 为正整数,整数 k 与 n 互质,且 $0<k<n$.令 $M=\{1,2,\cdots,n-1\}$,给 M 中每个数染上黑、白两种颜色中的一种,染法如下:(i) 对 M 中每个 i,i 与 $n-i$ 同色;(ii) 对 M 中每个 i,$i\neq k$,i 与 $|k-i|$ 同色.求证:M 中所有的数必为同色.

6. 设 n 是偶数,$a_1,\cdots,a_n$ 与 $b_1,\cdots,b_{p-1}$ 都是模 n 的完全剩余系.证明:$a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$ 不是模 n 的完全剩余系.

7. 用欧拉函数的计算公式,证明:由费马小定理能推出欧拉定理.

8. 设 p 是一个素数,$1\leqslant k\leqslant p-1$.证明:$\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k(\bmod p)$

9. 对整数 n,用 $f(n)$ 表示 n^2+2 被4除的余数.求证:方程 $x^2+(-1)^y f(z)=10y$ 无整数解.

10.(第25届俄罗斯数学奥林匹克赛题)是否存在19个具有相同数字之和的不同自然数,使这些自然数之和等于1999?

11.(1999.保加利亚数学奥林匹克竞赛题)设数列 $\{a_n\}$ 为一个整数数列,满足:对任意自然数 n,均有 $(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$.若 $2000\mid a_{1999}$,求最小的自然数 $n(n>1)$,使得 $2000\mid a_n$.

12. 证明:对任意正整数 n,存在连续 n 个正整数,其中每一个都被某个大于1的平方数整除.

13. 设 $n \geqslant 1$,证明:2 模 5^n 的阶是 $\varphi(5^n) = 4 \times 5^{n-1}$

14. 任给正整数 n,存在一个整点,它与任意既约整点的距离大于 n.(整点指直角坐标系中坐标为整数的点,既约整点则是坐标互素的整点).

15.(2000.第 41 届 IMO 备选题) 求所有正整数 $n \geqslant 2$,满足对所有与 n 互素的整数 a 和 b, $a \equiv b(\bmod n)$ 当 n 仅当 $ab \equiv 1(\bmod n)$

第四章

不定方程

§4.1　知识要点与基本方法

所谓不定方程(组)，是指未知数的个数多于方程的个数，且未知数受到某些限制(如整数，正整数或有理数)的方程(组).

对于一个一般的不定方程(组)，除个别情况外，通常没有一个统一的解法，而且有许多不定方程(组)，目前还无法判断其是否有解，因此，必须对所给的不定方程(组)的具体形式进行分析，确定解题方向.

下面介绍几种常见的方法.

一、公式法

有些不定方程的求解可根据定理，依据公式，或有一定的解题模式，这类方法我们称之为公式法. 用公式来解的不定方程大体有如下四种.

1. 一次不定方程

在不定方程和不定方程组中，最简单的不定方程是整系数方程

$ax + by + c = 0, (a > b, b \neq 0)$

通常称之为二元一次不定方程.

一次不定方程解的情况有如下定理.

定理 1　二元一次不定方程

$ax + by = c$，　a, b, c 为整数.

有整数解的充分必要条件是$(a, b) \mid c$.　①

【证】　必要性　设 x_0, y_0 是 ① 的解，则有 $ax_0 + by_0 = c$.

设 $d = (a, b)$，则有 $d \mid ax_0, d \mid by_0$，所以有 $d \mid c$.

充分性　设 $d = (a, b)$ 且 $d \mid c$，有 $c = c_1 d$. 因 $d = (a, b)$，则存在 x_0, y_0，使得

$d = ax_0 + by_0$,

于是有

$c = c_1 d = a \cdot c_1 x_0 + b \cdot c_1 y_0$,

所以 $c_1 x_0, c_1 y_0$ 是 ① 的解.

显然，当方程 ① 有解时，$d \mid c$. 则用 d 去除 ① 的两端有

$a_1 x + b_1 y = c_1$.　②

此时，$(a_1, b_1) = 1$ 且 ② 与 ① 同解，因此，我们只须讨论$(a, b) = 1$ 时方程 ① 的解.

定理 2　若$(a, b) = 1$，且 x_0, y_0 为 ① 之一解，则方程 ① 全部解为

$x = x_0 + bt, y = y_0 - at$.　($t$ 为整数).

【证】　设 x_0, y_0 为 ① 的一解，则有

$ax_0 + by_0 = c$　③

设 x, y 是 ① 的任一解. 用 ① 式减去 ③ 式有

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

因为$(a,b)=1$，于是有 $b\mid(x-x_0)$，即 $x-x_0=bt$.从而有 $x=x_0+bt$.将此结果代入上式得 $y=y_0-at$.即方程任一解都可以表示为 $x=x_0+bt, y=y_0-at$(t 为整数).

反之，若 x_0,y_0 是 ① 的解，则容易验证 $x=x_0+bt, y=y_0-at$ 均是 ① 的解.从而定理得证.

2. 沛尔(pell)方程

二元二次不定方程本质上归结为(双曲型)方程

$$x^2-dy^2=c \qquad ④$$

的研究，其中 d,c 都是整数，$d>0$ 且非平方数，而 $c\neq 0$.方程 ④ 的一个特殊情形

$$x^2-dy^2=1 \qquad ⑤$$

最为重要，也最为基础，这称为沛尔方程.能够证明(本书不予讨论)方程 ⑤ 一定有无穷多组正整数解；又设(x_1,y_1)是 ⑤ 的正整数解(x,y)中使 $x+y\sqrt{d}$ 最小的解，则 ⑤ 的全部正整数解由

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{1}{2}[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n+(x_1-\sqrt{d}y_1)^n]\\ y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{d}}[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n-(x_1-\sqrt{d}y_1)^n]\end{cases} \qquad ⑥$$

给出.$(n=1,2,\cdots)$

读者不难由 ⑥ 导出 x_n,y_n 满足的线性递推关系

$$\begin{cases}x_n=2x_1x_{n-1}-x_{n-2}\\ y_n=2x_1y_{n-1}-y_{n-2}\end{cases} \qquad ⑦$$

沛尔方程在数学竞赛中主要用于证明问题有无穷多个解，实际上对具体的 d，可用尝试法求出 ⑤ 的一组正整数解(x_1,y_1)(因为方程一定有解!)，无论(x_1,y_1)是否为基本解，由 ⑥ 均给出方程的无穷多组解.

3. 勾股方程 $x^2+y^2=z^2$

这是一个相当特殊的三元二次不定方程，它有鲜明的几何意义，并应用广泛.

这里只讨论勾股方程的正整数解，由方程不难看出，如果$(x,y)=d$，则 $d^2\mid z^2$，从而 $d\mid z$，这样可在勾股方程的两边约去 d^2.所以我们只需讨论满足$(x,y)=1$的解，此时易知 x,y,z 实际上两两互素.这种 x,y,z 两两互素的正整数解(x,y,z)称为方程的本原解，也称为本原的勾股数.

将方程模4，并注意$(x,y)=1$，可知 x,y 一奇一偶，无妨设 y 为偶数，下面的结果给出了勾股方程的全部本原解.

定理3 方程 $x^2+y^2=z^2$ 满足$(x,y)=1, z\mid y$ 的全部正整数解(x,y,z)可表为

$x=a^2-b^2, y=2ab, z=a^2+b^2$

其中，a,b 是满足 $a>b>0$，a,b 一奇一偶，且$(a,b)=1$的任意整数.

证明从略.

4. 不定方程 xy = zt

这是个四元二次方程，此方程也有不少用处，其全部正整数解极易求出：

设$(x,z)=a$，则 $x=ac, z=ad$，其中$(c,d)=1$，故 $acy=adt$，即 $cy=dt$，因$(c,d)=1$，所以 $d\mid y$，设 $y=bd$，则 $t=bc$.因此方程 $xy=zt$ 的正整数解可表示为

$x=ac, y=bd, z=ad, t=bc$. a,b,c,d 都是正整数，且$(c,d)=1$.反过来，易知上述给出的 x,y,z,t 都是解.

也可采用如下便于记忆的推导：

设 $\dfrac{x}{z}=\dfrac{t}{y}=\dfrac{c}{d}$，这里 $\dfrac{c}{d}$ 是既约分数，即$(c,d)=1$.由于 $\dfrac{x}{z}$ 约分后得出 $\dfrac{c}{d}$，故 $x=ac, z=ad$，同理 $t=cb, y=db$.

二、奇偶分析法

我们知道整数分为两类奇数和偶数.所以解不定方程可从未知数、系数的奇偶性入手，讨论取值的

可能情形，一方面可以达到缩小未知数的取值范围，得出方程的解或证明方程无整数解等；另一方面又可用$2n$(偶数)或$2n\pm1$(奇数)代入方程，使方程变形成更便于讨论的等价方程，从这两个方面可看出，奇偶分析方法使用范围是很广的.

三、数或式的分解法

这种方法的目的是增加方程的个数.

先把方程变形、分解，将含未知数的代数式化为积的形式，把常数写成标准分解式，然后利用整数的惟一分解定理将原方程转换成若干个方程组求解.例如

若 $f_1f_2=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则必有

$$\begin{cases}f_1=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}\\ f_2=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k}\\ \beta_i+\gamma_i=\alpha_i,i=1,2,\cdots,k\end{cases}$$

这时就有可能消去某些未知数，或确定未知数的素因数，进而求解.

四、选择特殊模的方法

选择某些特殊的数m作为模来讨论解的可能情况是解不定方程的一种重要方法.

这种方法主要表现在两个方面.

1. 讨论方程某部分关于模m的余数的可能情况；

2. 利用方程两边关于模m同余，来讨论未知数的取值范围.

特别地，当$m=2$时，这种方法即为奇偶分析法.

五、不等式计法

通过对所考察量的放大、缩小得到未知数取值条件的不等式，解这些不等式就得到未知数取值范围，从而达到求解目的.

一般地，当方程的一个含未知数项的次数比其他项都高时，或者当某一个未知数的各项关于该未知数相同时，可考虑通过除以一式，将方程变形为带分式的形式，并通过不等式估计求解.

六、构造法

对于某些存在性命题，常采用构造法，构造一些数学模型来解决.

七、换元法

若能判明不定方程的未知数之间有倍数关系，则常使用换元法消去未知数或倍数，使方程简化.

八、费尔马无穷递降法

费尔马无穷递降法的逻辑步骤如下：

(1) 若一个命题$P(n)$对若干个正整数n正确，则在这n个数中必有一最小者.

(2) 若$P(n)$对于某n正确，则有一正整数$n'<n$，使$p(n')$也正确.

若以上两步骤都获得证明，则命题$P(n)$不成立.

费尔马无穷递降法可解决两方面问题.

(1) 证明不定方程无解；

(2) 证明不定方程有无限多解，并给出求全部解的方法.

§4.2 赛题精讲

一、关于公式法

例1 求$525x+231y=42$的整数解.

解：$\because(525,231)=21$ 且$21\mid42$，故原方程有整数解，且等价于方程

$$25x + 11y = 2 \quad ①$$

因为 $25 = 11 \times 2 + 3, 11 = 3 \times 3 + 2, 3 = 2 \times 1 + 1$,故 $1 = 3 - 2 = 3 - (11 - 3 \times 3) = -11 + 4 \times 3 = -11 + 4 \times (25 - 11 \times 2) = 25 \times 4 + 11 \times (-9)$,即

$$25 \times 4 + 11 \times (-9) = 1$$

从而有 $25 \times 8 + 11 \times (-18) = 2$.于是得 ① 的一组特解 $x = 8, y = -18$,所以 ① 的一切整数解(即原方程的一切整数解)为

$$\begin{cases} x = 8 + 11t \\ y = -18 - 25t \end{cases} \quad t \in Z$$

例 2 求 $7x + 19y = 213$ 的正整数解.

解:由例 1 的方法求得原方程的一切整数解为

$$\begin{cases} x = 25 + 19t \\ y = 2 - 7t \end{cases} \quad t \in Z$$

令 $\begin{cases} 25 + 19t > 0 \\ 2 - 7t > 0 \end{cases}$

解得 $-\frac{25}{19} < t < \frac{2}{7}$,因为 $t \in Z$,故 $t = 0, -1$.从而得原方程的正整数解为

$$\begin{cases} x = 25 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases}$$

例 3 证明:有无穷多个正整数 n,使得$[\sqrt{2}n]$ 是完全平方数.

证明:考虑沛尔方程

$$x^2 - 2y^2 = -1 \quad ②$$

有正整数解 $x = y = 1$,因此有无穷多组正整数解.(见 pell 方程的讨论).任取一组解 u, v,则

$2v^2 = u^2 + 1$

将上式两边同乘以 u^2,得 $2(uv)^2 = u^4 + u^2$

故 $u^2 < \sqrt{2}uv < u^2 + 1$

所以$[\sqrt{2}uv] = u^2$ 是一个平方数,即取 $n = uv$ 得出无穷多个符合要求的 n.

例 4 设 a, b, c, d 为正整数,$ab = cd$.证明:$a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ 不是素数.

证明:由 $ab = cd$,得出 $a = us, b = vt, c = vs, d = ut$,其中 u, v, s, t 都是正整数(参见公式法中,4.不定方程 $xy = zt$ 的讨论),因此

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = (u^4 + v^4)(s^4 + t^4)$

不是素数.

例 5 (1999.保加利亚奥林匹克竞赛题)证明方程 $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ 有无穷多组整数解.

【分析】 本题是pell方程与方程解的表示知识的综合运用,令 $x = 10 - k, y = 10 + k, z = m, t = -1 - m$,得$(2m + 1)^2 - 80k^2 = 1$,从而利用 pell 方程有通解表达式.

解:注意到,$10^3 + 10^3 + 0^3 + (-1)^3 = 1999$,我们寻找具有如下形式的满足方程的整数解:

$x = 10 - k, y = 10 + k, z = m, t = -1 - m$.这里 $k, m \in Z$.

经代入原方程,化简可知 k, m 满足

$m(m + 1) = 20k^2$,即

$(2m + 1)^2 - 80k^2 = 1$

这是一个 pell 方程.

注意到 $m = 4, k = 1$ 是该 pell 方程的一个解,并且该方程的所有正整数解(m_n, k_n) 满足:

$2m_n + 1 + k_n\sqrt{80} = (9 + \sqrt{80})^n$.

这样的(m_n, k_n) 有无穷多对,故原方程有无穷多组整数解.

二、关于奇偶分析法

例 6 (第 37 届美国普特南数学竞赛试题)求方程 $|p^r - q^s| = 1$ 的整数解,其中 p, q 是质数,r, s

是大于 1 的正整数,并证明你所得到的解是全部解.

解:由 p 和 q,r 和 s 的对称性,不妨设 $p^r > q^s$,即不妨只考虑方程 $p^r - q^s = 1$ ③

的整数解(p,q,r,s 仍如题设)

显然,③ 中 p,q 不能全为奇质数,且 $p \neq q$,故 p,q 中恰有一个等于偶质数 2.

(i) 若 $p = 2$,此时设 $q = 2q_1 + 1$,如果 $s = 2s_1$ 是偶数,则

$q^s + 1 = (2q_1 + 1)^{2s_1} + 1 = 2 + 4k$($k$ 为正整数)

不能被 4 整除,而 $p^r = 2^r(r > 1)$ 能被 4 整除,③ 不成立,故 s 只能取奇数值.于是 $s \geqslant 3$,此时,$p^r = 2^r = q^s + 1 = (q+1)(q^{s-1} - q^{s-2} + \cdots - q + 1)$,故 $q+1$ 只含素因子 2.设 $q + 1 = 2^t(t \geqslant 2)$,则 $2^r = q^s + 1 = (2^t - 1)^s + 1 = 2^t(s - C_s^2 \cdot 2^t + \cdots)$.由于$(s - C_s^2 \cdot 2^t + \cdots)$ 与 s 的奇偶性相同,即为奇数,故只能等于 1,这样 $t = r$,从而方程 ③ 化为 $2^r - (2^r - 1)^s = 1$,得 $s = 1$,这与题设 $s > 1$ 矛盾.故 ③ 中 p 不能取 2.

(ii) 若 $q = 2$,则由 ③ 得 $2^s = p^r - 1 = (p-1)(p^{r-1} + p^{r-2} + \cdots + 1)$,故 $p-1$ 只含素因子 2.设 $p - 1 = 2^t(t \geqslant 1)$,$r = 2^u \cdot r_1(u \geqslant 0$,$r_1$ 为奇数),则

$2^s = (2^t + 1)^r - 1 = 2^{t+u}(r_1 + r_1(r-1)2^{t-1} + \cdots)$,若 $t \geqslant 2$,则 $r_1 + r_1(r-1) \cdot 2^{t-1} + \cdots$ 是大于 1 的奇数,上式不能成立,故 $t = 1$,即 $p = 3$,这时由方程 ③ 得

$$2^s = 3^r - 1 = (4-1)^r - 1$$
$$= (-1)^r + C_r^1(-1)^{r-1} \cdot 4 + C_r^2(-1)^{r-2} \cdot 4^2 + \cdots - 1$$

若 r 是奇数,显然上式不成立;若 $r \geqslant 4$ 是偶数,则上式右边等于 $-4r + 8r(r-1) - \cdots = -4r[1 - 2(r-1) + \cdots]$,而$[1 - 2(r-1) + \cdots]$ 不是偶数,因而只能等于 -1,故 $2^s = 3^r - 1 = 4r$.显然 $r \geqslant 4$ 时,此式不成立,于是 $r = 2$,进而由 $2^s = 3^2 - 1 = 8$ 得 $s = 3$,从而方程 ③ 的解只能是 $p = 3, q = 2, r = 2, s = 3$.

综上,考察到对称性,原方程恰有两组解:

$$\begin{cases} p = 3 \\ q = 2 \\ r = 2 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = 2 \\ q = 3 \\ r = 3 \\ s = 2 \end{cases}$$

例 7 求 $x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4u^4)$ 的整数解.

解:显然 $x = y = z = u = 0$ 是一组解.由于各未知数的次数都是 4,我们仅需考虑方程的非负整数解.令 $x = 2^\alpha x_1, y = 2^\beta y_1, z = 2^\gamma z_1, u = 2^\delta u_1$,这里 x_1, y_1, z_1, u_1 是正奇数或零,$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是非负整数.于是方程变形为

$$2^{4\alpha}x_1^4 - 2^{4\gamma+1}z_1^4 + 2^{4\beta+2}y_1^4 - 2^{4\delta+3}u_1^4 = 0 \quad ④$$

若 x_1, y_1, z_1, u_1 均不为零,则取

$k = \min\{4\alpha, 4\gamma + 1, 4\beta + 2, 4\delta + 3\}$

显然 $4\alpha - k, 4\gamma + 1 - k, 4\beta + 2 - k, 4\delta + 3 - k$ 关于模 4 两两不同余,因而是四个不同的非负整数,因而用 2^k 去除 ④ 后,左边将成为一个奇数与另三个偶数的代数和,不能等于右边的零.

若 x_1, y_1, z_1, u_1 有些为零,但不全为零,上面的方法可同样使用.

综上所述,方程只有一组整数解 $x = y = z = u = 0$

三、关于数或式的分解法

例 8 (1999.保加利亚数学竞赛题) 找出所有的自然数组(x,y,z),使得 y 是质数,y 和 3 均不被 z 整除,且 $x^3 - y^3 = z^2$.

【分析】 将 $x^3 - y^3 = z^2$ 因式分解,利用 y 为质数得到,$x - y = m^2, x^2 + xy + y^2 = n^2, z = mn$,从而有 $3y^2 = (2n + 2x + y)(2n - 2 - y)$,再利用 y 为质数,分情况讨论即可.

解:由题意知$(x-y)[(x-y)^2 + 3xy] = z^2$ ⑤

因为 y 为质数,且 y 和 3 均不被 z 整除,所以

$(x,y)=1,(x-y,3)=1$

$\therefore (x^2+y^2+xy,x-y)=(3xy,x-y)=1$ ⑥

由⑤、⑥两式，得

$x-y=m^2,x^2+xy+y^2=n^2,z=mn(m,n\in \mathbf{N}_+)$

于是 $3y^2=4n^2-(2x+y)^2=(2n+2x+y)(2n-2x-y)$

又 y 为质数，且 $2n-2x-y<2n+2x+y$

则有下列三种情况：

(i)$2n-2x-y=y,2n+2x+y=3y$

得 $x=0$，舍去.

(ii)$2n-2x-y=3,2n+2x+y=y^2$

则 $y^2-3=4x+2y=4m^2+6y$

所以 $(y-3)^2-4m^2=12$，解得 $y=7,m=1$

故 $x=8,y=7,z=13$

(iii)$2n-2x-y=1,2n+2x+y=3y^2$，则

$3y^2-1=4x+2y=2(2m^2+3y)$

即 $3y^2-6y-4m^2-1=0$，于是 $m^2+1\equiv 0(mod 3)$ ⑦

但 $m^2+1\equiv 1,2(mod 3)$ 与⑦式矛盾.

综上所述，满足条件的自然数组是唯一的. 即(8,7,13).

例 9 (2001. 第14届爱尔兰数学奥林匹克)求(并予以证明)所有的正整数 a,b,c,n，使得 $2^n=a!+b!+c!$

【分析】 利用对称性由 $a\geqslant b\geqslant c$，分情况讨论，从整除性得矛盾，再利用因数分解，并注意到数的范围，分别得到结果.

解：设正整数 a,b,c,n 满足 $2^n=a!+b!+c!$，并且 $a\geqslant b\geqslant c$

若 $c\geqslant 3$，则 $3\mid a!+b!+c!$，但 $3\nmid 2^n$，矛盾，所以 $c\leqslant 2$

情形 1 $c=1$，此时，若 $b\geqslant 2$，则 $a!+b!+c!$ 为奇数与 2^n 为偶数矛盾，故 $b=1$，从而 $a!=2^n-2=2(2^{n-1}-1)$，得解为：

$(a,b,c,n)=(2,1,1,2)$ 或 $(3,1,1,3)$

情形 2 $c=2$，则 $2^n-2=a!+b!\geqslant 4$，故 $n\geqslant 3$，此时，若 $b\leqslant 4$，则 $8\mid a!+b!$，但 $8\nmid 2^n-2$，矛盾，所以 $b\leqslant 3$.

当 $b=2$ 时，$a!=4(2^{n-2}-1)$，注意到 $a\geqslant 4$ 时，$8\mid a!$，而 $a\leqslant 3$ 时，$4\nmid a!$，故此时无解.

当 $b=3$ 时，应有 $a!=8(2^{n-3}-1)$，此时当 $a\geqslant 6$ 时，$16\mid a!$，矛盾，所以 $a\leqslant 5$，又 $8<a!$ 故 $a\geqslant 4$，只能有 $a=4,5$，分别得解.

$(a,b,c,n)=(4,3,2,5)$ 或 $(5,3,2,7)$

综上所述，满足条件的 $(a,b,c,n)=(2,1,1,2),(3,1,1,3),(4,3,2,5),(5,3,2,7)$ 及各组解中 a,b,c 的其他排列，共计有18组解.

例 10 (2001. 第14届爱尔兰数学奥林匹克)设 p 为奇值数，证明：若存在整数 x,y，使得 $p=x^5-y^5$，则存在奇数 v，使得 $\sqrt{\frac{4p+1}{5}}=\frac{v^2+1}{2}$

【分析】 由质数 $p=x^5-y^5>0$，则只有两种情况(i)$x>0,y<0$ 或(ii)$x>0,y>0$ 且 $x>y$. 分情况讨论，可确只有(ii)符合，再分解因式，利质 p 的条件得 $x-y=1$，最后通过代数变形得到结论.

解：若 $x>0,y<0$，则表明存在 $m,n\in \mathbf{N}_+$，使得 $p=m^5+n^5$，于是 $p=(m+n)A$，这里 $A=m^4-m^3n+m^2n^2-mn^3+n^4$，由于 p 为质数，则 $A=1$，这导致 $p=m+n=m^5+n^5$，故 $m=n=1$，与 p 为奇数矛盾.

所以，只能是 $x>0,y>0$.

这表明存在 $m,n\in \mathbf{N}_+$，使得 $p=m^5-n^5$，故 $m>n$，又由 $m^5-n^5=(m-n)(m^4+m^3n+m^2n^2+mn^3+n^4)$ 及 p 为质数，可知 $m-n=1$，即 $m=n+1$，于是

$$\begin{aligned}p&=(n+1)^5-n^5\\&=5n^4+10n^3+10n^2+5n+1\end{aligned}$$

从而，有

$$\begin{aligned}\frac{4p+1}{5}&=4n^4+8n^3+8n^2+4n+1\\&=4(n^2+n)^2+4(n^2+n)+1\\&=(2n^2+2n+1)^2\end{aligned}$$

故 $\sqrt{\frac{4p+1}{5}}=2n^2+2n+1=\frac{(2n+1)^2+1}{2}$，于是取 $v=2n+1$，得结论成立.

例 11 （1996.第 22 届俄罗斯数学奥林匹克）已知 x,y,p,n,k 都是自然数，且满足：$x^n+y^n=p^k$，证明：如果 n 是大于 1 的奇数，p 是奇素数，那么，n 可以表示为 p 的以自然数为指数的幂.

【分析】 本题是特殊的不定方程，因式分解，整除性质的综合运用.

解：设 m 为 x,y 的最大约数，可设 $x=mx_1,y=my_1$，由已知条件有 $m^n(x_1^n+y_1^n)=p^k$. 因此，对某个非负整数 α，有

$$x_1^n+y_1^n=p^{k-n\alpha} \tag{8}$$

由于 n 为奇数，故有

$$\frac{x_1^n+y_1^n}{x_1+y_1}=x_1^{n-1}-x_1^{n-2}y_1+x_1^{n-3}y_1^2-\cdots-x_1y_1^{n-2}+y_1^{n-1}$$

用 A 表示等式右端的数，由 $p>2$，于是，x_1 与 y_1 中至少有一个大于 1. 而 $n>1$，所以 $A>1$

由等式 ⑧ 推出：$A(x_1+y_1)=p^{k-n\alpha}$

因为 $x_1+y_1>1$，且 $A>1$，所以它们都能被 p 整除，而且对于某个自然数 β，有 $x_1+y_1=p^\beta$. 这样，

$$\begin{aligned}A&=x_1^{n-1}-x_1^{n-2}(p^\beta-x_1)+x_1^{n-3}(p^\beta-x_1)^2-\cdots-x_1(p^\beta-x_1)^{n-2}+(p^\beta-x_1)^{n-1}\\&=nx_1^{n-1}+Bp(B\text{ 是某个整数})\end{aligned}$$

因为 A 可被 p 整除，x_1 与 p 互素，于是，n 可被 p 整除.

设 $n=pq$，那么 $x^{pq}+y^{pq}=p^k$，即

$$(x^p)^q+(y^p)^q=p^k$$

如果 $q>1$，同上面的证明一样，可以证明，q 可被 p 整除.

如果 $q=1$，那么 $n=p$.

这样重复下去，便可推出对某个自然数 l，有 $n=p^l$.

四、关于选取特殊模的方法

例 12 试证当 $2<n<11$ 时，不存在相继的 n 个自然数，使得它们的平方和是完全平方数.

证明：设 x 是自然数，而 $(x+1)^2+(x+2)^2+\cdots+(x+n)^2=y^2,y\in\mathbf{Z}$，即

$$nx^2+n(n+1)x+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=y^2 \tag{9}$$

记 $a=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$，则由 ⑨ 知 $y^2\equiv a(\bmod n)$，易证当 $n=3$ 时，$a\equiv 2(\bmod 3)$，$n=4$ 时，$a\equiv 2(\bmod 4)$；$n=9$ 时，$a\equiv 6(\bmod 9)$. 这些情况都有 $y^2\not\equiv a(\bmod n)$ $\therefore n\neq 3、4、9$.

当 $n=5、7$ 时，有 $n\mid a$，于是由 ⑨ 知 $n\mid y$. 设 $y=nz$，代入 ⑨ 得

$$x^2+(n+1)x+\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)=nz^2$$

即

$$t^2+\frac{1}{12}(n^2-1)=nz^2 \tag{10}$$

这里 $t = x + \frac{n+1}{2}$,因 $n = 5$、7.故 $t \in Z$ 若 $n = 5$,则由 ⑩ 得 $t^2 + 2 \equiv 0(mod5)$,$t^2 = 3(mod5)$;若 $n = 7$,则 $t^2 \equiv -4(mod7)$,$t^2 \equiv 3(mod7)$.这都是不可能的.故 $n \neq 5$、7.

当 $n = 6,8,10$ 时,由 ⑨ 得

$$(n+1)x^2 + (n+1)nx + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = x^2 + y^2 \qquad ⑫$$

若 $n = 6$,则由 ⑫ 知 $7 \mid (x^2 + y^2)$,但对任意整数 x,只能有 $x^2 \equiv 0,1,2,4(mod7)$,故 $x^2 + y^2 \equiv 0(mod7)$ 可推得 $x^2 \equiv 0(mod7)$ 且 $y^2 \equiv 0(mod7)$,于是 $7 \mid x, 7 \mid y$,故由 ⑫ 即知 $7^2 \mid \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 13 \times 7$,这是不可能的,故 $n \neq 6$,用同样的方法可证 $n \neq 10$.最后,若 $n = 8$,则由 ⑫ 得

$$x^2 + y^2 \equiv \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \equiv 6(mod9)$$

但对任意整数 x,只能有 $x^2 \equiv 0,1,4,7(mod9)$,故 $x^2 + y^2 \not\equiv 6(mod9)$,所 $n \neq 8$,命题证毕.

【评注】 当 $n = 11$ 时,方程有正整数解,解法如下:由 $11x^2 + 11 \times 12x + 11 \times 46 = y^2$ 知 $11 \mid y$,令 $y = 11z$,方程变形为 $x^2 + 12x + 46 = 11z^2$,于是

$$x^2 + x + 2 \equiv 0(mod11) \qquad 10'$$

解同余方程得 $x \equiv 4,6(mod11)$

取 $x = 4 + 11t$ 代入 $10'$,可得 $z^2 = 11t^2 + 20t + 10$.取 $t = 3$,得 $z^2 = 169$,$z = 13$,于是 $y = 11 \times 13$,$x = 37$,即 $38^2 + 39^2 + \cdots + 48^2 = 143^2$

例 13 证明:不定方程

$$(x+1)^y - x^z = 1, \qquad x,y,z > 1 \qquad ⑬$$

仅有一组正整数解 $x = 2, y = 2$ 及 $z = 3$.

证明:首先,将 ⑬ 模 $(x+1)$ 化简,得

$(-1)^{z+1} \equiv 1(mod(x+1))$,故 z 是奇数.

将 ⑬ 分解为

$$(x+1)^{y-1} = x^{y-1} - x^{y-2} + \cdots + x + 1$$

易知 x 必须是偶数,否则上式两边的奇偶不同.

类似,将 ⑬ 变形为

$$(x+1)^{y-1} + (x+1)^{y-2} + \cdots + (x+1) + 1 = x^{z-1}$$

可见 y 也是偶数.

现在记 $x = 2x_1, y = 2y_1$,则由 ⑬ 得

$$((x+1)^{y_1} - 1)((x+1)^{y_1} + 1) = x^z \qquad ⑭$$

因 x 是偶数,故 $(x+1)^{y_1} - 1$ 与 $(x+1)^{y_1} + 1$ 的最大公约数是 2,又显然有 $x \mid (x+1)^{y_1} - 1$,由这些及 ⑭ 推出,必须 $(x+1)^{y_1} - 1 = 2x_1^z$,$(x+1)^{y_1} + 1 = 2^{z-1}$.这意味着 $2^{z-1} > 2x_1{}^z$,故 $x_1 = 1$,即 $x = 2$,所以 $y = 2$ 及 $z = 3$

五、关于不等式估计法

例 14 (i) 求出方程 $5x^2 - 6xy + 7y^2 = 130$ 的全部整数解.

(ii) 证明方程 $x(x+1) + 1 = y^2$ 没有正整数解.

解:假设(i) 中方程有整数解,首先当有实数解,因此它作为 x 的方程的判别式应非负,

即 $(-6y)^2 - 4 \times 5 \times 7y^2 + 4 \times 650 \geqslant 0$.

解出 $y^2 \leqslant 25$,即 $|y| \leqslant 5$,因此整数 y 可取值 $0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 5$,逐一代入原方程检验(可首先检查上述判别式是否为完全平方数),得出全部解为 $(x,y) = (3,5), (-3,-5)$

(ii) 方程有正整数解,则

由 $x^2 < x(x+1) + 1 = y^2$,可见 $y > x$,因 x,y 是整数,所以 $y \geqslant x + 1$,于是

$y^2 > (x+1)^2 > x(x+1) + 1$.

矛盾!

【评注】 (1) 不等式估计法大致包含两个方面. 首先,如一个不定方程有整数解,它当然就有实数解,当方程的实数解集为一个有界集时,能用这一必要条件确定整数解的界限. 然后逐一检验,以确定全部解. ((i) 中的方程是椭圆,其实数解是有限的.)

如果方程的实数解是无界的,则上述方法不能奏效. 这时,我们应着眼于整数,利用整数的各种性质产生适用的不等式. 如(ii) 中方程的实数解是无界的,我们的论证应用了整数的最基本的性质:若整数 $y > x$,则 $y \geqslant x + 1$

(2)(ii) 的论证也可以变一种表述:设方程有正整数解 x, y,则

$x^2 < x(x+1) + 1 < (x+1)^2$

这表明,$x(x+1)+1$ 介于两个相邻平方数之间,从而不能是平方数,即(ii) 中方程没有正整数解.

例 15 试求所有的正整数 n,使方程

$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2 \cdot y^2 \cdot z^2$ 有

正整数解.

解:不妨设 $x \leqslant y \leqslant z$. 显然 $z^2 \mid (x^3 + y^3)$,故 $z^2 \leqslant x^3 + y^3$. 但 $x^3 \leqslant xz^2, y^3 \leqslant yz^2$,

将 $x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$ 变形有

$$z = nx^2y - \frac{x^3 + y^3}{z^2} \geqslant nx^2y^2 - (x+y).$$

于是 $x^3 + y^3 \geqslant z^2 \geqslant [nx^2y^2 - (x+y)]^2$

$n^2x^4y^4 < 2nx^2y^2(x+y) + x^3 + y^3$

$$nxy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{nx^3} + \frac{1}{ny^3} \tag{15}$$

易知 $x = 1$,否则,若 $x \geqslant 2$,而 $y \geqslant 2$,则 ⑮ 左边不小于 4,而右边显然小于 3,⑮ 将不成立. 以 $x = 1$

得 $ny < 2 + \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{ny^3}$

上式只能在 $y \leqslant 3$ 时才能成立,但 $z^2 \mid (1 + y^3)$. 由此只能是 $y = 1, 2$(当 $y = 3$ 时,$z^2 \mid 28, z^2 = 1, 4$,与 $z \geqslant y$ 矛盾),相应地,$z = 1, 3$.

综合上述讨论,只能有 $x = y = z = 1$ 或 $x = 1, y = 2, z = 3$,因而 n 只能取 3,1.

【评注】 此例把等式变形为不等式 ⑮ 后,由于左边变量 x, y 的指数是正数,右边的指数负数,因而当 x, y 增大时,左边的值增大,右边的值减小. 这样,x, y 就有一个上限,当 x, y 大于此上限时,⑮ 不再成立. 据此,并利用 x, y 是整数的要求,我们就只有对有限的几个 x, y 值进行验算,即可获解.

六、关于构造法

例 16 试证 如果正整数 n 使方程

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n \tag{16}$$

有一组整数解(x, y),那么这个方程至少有三组整数解

【分析】 此题是个存在性命题,采用构造法,即若(x, y) 为已知的解,利用它至少可构造出其它不同的两组解来.

解:$\because (x, y)$ 为一组整数解,则

$(y - x)^3 = y^3 - 3xy^2 + 3x^2y - x^3$

$\quad = y^3 - 3xy^2 + x^3 + 3x^2(y - x) + x^3$

$\quad = n + 3x^2(y - x) + x^3$

$\therefore \quad (y-x)^3 - 3(y-x)(-x)^2 - x^3 = n$

即 $(y-x)^3 - 3(y-x)(-x)^2 + (-x)^3 = n$

因此 $(y - x, -x)$ 也满足 ⑯

记 $u = y - x, v = -x$,则(u, v) 也是 ⑯ 的一组解

同样,可令 $u' = v - u, v' = -u$,则

$u' = -y, v' = x - y$

于是由上知(u', v')也是 ① 的一组解

下面证明:$(x,y),(y-x,-x),(-y,x-y)$是 ⑮ 的三组不同的解.

若$(x,y)=(y-x,-x)$,得 $x=0, y=0$,代入原方程,得 $n=0$,与 n 为正整数矛盾.

同样可证$(x,y)\neq(-y,x-y),(-y,x-y)\neq(y-x,-x)$.这就证明了 ⑮ 若有整数解的话,则至少有三组整数解.

例 17 对于 $n \in N$,且 $n \geqslant 2$,证明:方程 $x^2 + y^2 = z^n$ 一定有正整数解.

证明:设 $W = a + bi, a, b \in N$,

则 $W^n = x_1 + y_1 i, x_1, y_1$ 是非零整数,构造恒等式$(|W|^2)^n = |W^{2n}| = |W^n|^2$,有

$(a^2+b^2)^n = x_1^2 + y_1^n$

取 $z = a^2 + b^2$,就可以得到 $x^2 + y^2 = z^n$ 的一组正整数解.

七、换元法

例 18 (1986.第12届全俄数学竞赛试题)求方程$\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$的所有整数解.

解:因为

$x^2 - xy + y^2 = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 + 3(x-y)^2$

若令 $x+y=p, x-y=q$,则原方程可化为

$28p = 3(p^2+3q^2)$

由此可看出 $p>0$ 且 p 是3的倍数.设 $p=3k$,其中 k 是正整数,则 $28k = 3(3k^2+q^2)$,于是 $k>0$ 且 k 是3的倍数,设 $k=3m$(其中 $m\in N$)则 $28m = 27m^2 + q^2$,再由 $28m - 27m^2 = q^2 \geqslant 0$ 知 $m=1$.此时,$k=3, p=9, q=\pm 1$,故可由方程组

$$\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=\pm 1 \end{cases}$$

解得原方程的整数解$(x,y)=(5,4),(4,5)$.

换元法是一种基础性方法,应用起来面比较宽,用法也较灵活.

例 19 (1995.意大利数学奥林匹克试题)求出所有正整数 x, y,使得 $x^2 + 615 = 2^y$ ⑰

解:$\because 615 \equiv 0 (mod 5)$

又 $\because$ 对于非负整数 k,$2^{2k+1} = 4^k \cdot 2 \equiv (-1)^k \cdot 2 \equiv 2$ 或 $3 (mod 5)$

$x^2 \equiv 0$ 或 1 或 $4 (mod 5)$

$\therefore$ 比较 ⑰ 两端可知,y 必须是偶数.

故可设 $y = 2z$,代入 ⑰ 得

$(2^z - x)(2^z + x) = 615 = 3\times 5\times 41$

$$\therefore \begin{cases} 2^z + x = 615 \\ 2^z - x = 1 \end{cases} \quad ⑱$$

$$或 \begin{cases} 2^z + x = 205 \\ 2^z - x = 3 \end{cases} \quad ⑲$$

$$或 \begin{cases} 2^z + x = 123 \\ 2^z - x = 5 \end{cases} \quad ⑳$$

$$或 \begin{cases} 2^z + x = 41 \\ 2^z - x = 15 \end{cases} \quad ㉑$$

显然,方程组 ⑱,⑲,㉑ 无正整数解,由方程组 ⑳ 得:$2^z = 64$,$\therefore z = 6, x = 59, y = 12$

八、关于费尔马无穷递降法

例 20 证明:不定方程 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有正整数解. ㉒

证明:采用反证法,设㉒有正整数解,我们在所有这样的解中选取一组使 z 最小的解.论证的思想是由此选出另一组解(r,s,t).使得 $0 < t < z$,由于已选择为最小,这就导出矛盾.

首先,此时必有$(x,y)=1$,因设 $d=(x,y)$ 而 $d>1$,则由㉒知 $d^4 \mid z^2$,即 $d^2 \mid z$,所以 $\left(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d^2}\right)$,也是㉒的一组正整数解,但$\frac{z}{d^2} < z$,这和 z 的选取相违.

将㉒改写为$(x^2)^2+(y^2)^2=z^2$

由于$(x,y)=1$,故$(x^2,y^2)=1$,于是(x^2,y^2,z^2)是一组本原的勾股数.由本讲定理三可知,存在整数 $a>b>0$,$(a,b)=1$,a,b 一奇一偶,使得(不妨设 y 为偶数).

$$x^2=a^2-b^2, y^2=2ab, z=a^2+b^2 \qquad ㉓$$

由 $x^2+b^2=a^2$ 及$(a,b)=1$知,a 是奇数,b 是偶数.再应用上述定理,存在整数 $p>q>0$,$(p,q)=1$,p,q 一奇一偶,使得

$$x=p^2-q^2, b=2pq, a=p^2+q^2$$

由㉓得到 $y^2=4pq(p^2+q)$,即

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=pq(p^2+q^2)$$

因$(p,q)=1$,易知 p,q,p^2+q^2 两数互素,上式表明它们的积是整数的平方,故存在正整数 r,s,t,使得 $p=r^2,q=s^2,p^2+q^2=t^2$

从而 $r^4+s^4=t^2$

于是我们得出了㉒的一组正整数解(r,s,t),

但, $0 < t = \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{a} < \sqrt[4]{z} \leqslant z$

和 z 的最小性矛盾.

【评注】 采用费尔马无穷递降法证明不定方程无正整数解的主要步骤是:从相反的结论出发,假设存在一组正整数解,设法造出这个方程的另一组正整数解,而新的解比原来的解"严格地小",这里所谓严格的小,是指某一个与解有关的,取正整数值的量严格递减.如上述可以无限地进行下去,则由于严格递减的正整数数列只有有限多项,两者产生矛盾.

费尔马无穷递降法也可采用不同的形式(与上面说的实质相同)假设存在正整数解,并从中选择一组"最小"的解,这里的最小解,是指某一个与解有关的,取正整数的量达到最小.论证的核心是设法造出方程新的解,使它比已选择的解"严格地小",由此产生矛盾.

怎样造出更小的解,这当然视具体问题而定,例 20 中两次应用勾股数定理(即本讲定理三),下面的例 21 则利用(更为初等的)韦达定理.

例 21 证明:如果方程 $x^2+y^2+1=xyz$ 有正整数解(x,y,z),则必有 $z=3$. ㉔

证明:反证法,假设有正整数 $z \neq 3$,使方程㉔有正整数解(x,y),则 $x \neq y$,否则得出 $2x^2+1=x^2z$,故 $x=1$ 和 $z=3$,矛盾.

由于 x,y 是对称的,不妨设 $x>y$,在这种解中选取一组解(x_0,y_0),使 x_0 达到最小,考虑关于 x 的一元二次方程

$$x^2-y_0x+y_0^2+1=0 \qquad ㉕$$

由韦达定理,㉕的另一个根

$$x_1=y_0z-x_0$$

这是一个整数,而且

$$0 < x_1 = \frac{y_0^2+1}{x_0} \leqslant \frac{y_0^2+1}{y_0+1} \leqslant y_0$$

于是㉔又有一组正整数解(y_0,x_1),满足 $y_0 > x_1$(由前面讨论知 $y_0 \neq x_1$)及 $y_0 < x_0$,这与 x_0 的最小性矛盾.

费尔马无穷递降法的第二方面应用:证明不定方程有无限多解,并给出求全部解的方法请见本讲最后一个例子.

例 22 对于 *MapkoB* 方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ ㉖

试证:(1) 若 x_0, y_0, z_0 是 ㉖ 的整数解,则 $x_0, y_0, 3x_0y_0 - z_0$ 也是 ㉖ 的整数解; ㉗

(2) 方程 ㉖ 的正整数解,都可利用 ㉗ 由 $x = y = z = 1$ 得到.

证明:(1) 的证明是很容易的,仅对(2) 作出证明.

设 x, y, z 是 ㉖ 的正整数解,现分三种情况讨论:

其一,若 $x = y = z$,则显然有 $x = y = z = 1$

其二,若 $x = y \neq z$,则有 $2x^2 + z^2 = 3x^2z$

∵ 项 $2x^2, 3x^2z$ 都有因数 x^2,因而得 $x^2 \mid z^2$,从而 $x \mid y$,由 x, z 是正整数知可设 $y = tx$,t 是正整数,以此代入方程,得 $2x^2 + t^2x^2 = 3x^3t$,$2 + t^2 = 3xt$

同理,又有 $t \mid 2$,因而只能是 $t = 1, 2$,据此可得两组解 $x = z = 1$;$x = 1 \quad z = 2$,再注意到 $z \neq x$ 和 $x = y$ 立得:$x = 1, y = 1, z = 2$ ㉘

显然满足 $z = 3 \times 1 \times 1 - 1$,即 ㉘ 是由 $x = y = z = 1$ 代入 ㉗ 而得到的,

其三,可设 $x < y < z$,由 ㉖ 可解得

$$2z = 3xy \pm \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)}$$

如果上式根号前取减号,则因 $1 \leqslant x < y$,就有

$$\sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)} > \sqrt{x^2y^2} = xy$$

故 $2z < 3xy - xy = 2xy$,即 $z < xy$

但另一方面,由 $3xyz = x^2 + y^2 + z^2 < 3z^2$ 可得 $xy < z$,上述矛盾表明只能取

$$2z = 3xy + \sqrt{9x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)}$$

故 $2z > 3xy$,即 $3xy - z < z$,这就表明,若 x_0, y_0, z_0 是 ㉖ 的一组解,且 $x_0 < y_0 < z_0$,则由 ㉗ 产生的一组新的解 x_1, y_1, z_1,且使 $x_0 + y_0 + z_0 > x_1 + y_1 + z_1$

若 x_1, y_1, z_1 两两不相等,则可更换其顺序,再代入 ㉗,得到 x_2, y_2, z_2,使得

$$x_1 + y_1 + z_1 > x_2 + y_2 + z_2$$

显然这种过程不可能无限进行下去.因而,进行了有限次后,必将使所得到的 x_k, y_k, z_k 中至少有两个相等,从而成为前面已讨论过的两种情况之一,也即可以从 $x = y = z = 1$ 通过 ㉗ 得到

【评注】 由 $x = y = z = 1$,利用 ㉗,并以使 $x + y + z$ 递增的顺序可得下表($x \leqslant y \leqslant z$).

z	1	2	5	13	29	34	89	167	194	233	433	610	985	…
y	1	1	2	5	5	13	34	29	13	89	29	233	169	…
x	1	1	1	1	2	1	1	2	5	1	5	1	2	…

满足 ㉖ 的正整数称为 *MapkoB* 数,上表第一行是前13个 *MapkoB* 数.显然依 $x + y + z$ 递增的顺序,由 ㉗ 可得 ㉖ 的无限组解.

§ 4.3 针对性训练

A 组

1. 证明:连续三个正整数的积不能是整数的 k 次幂,这时 $k \geqslant 2$ 是给定的正整数.

2. 求方程 $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$ 的全部整数解.

3. 求出所有的边长为整数,周长是面积(数值)两倍的三角形.

4. 证明"方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 满足 $(x, y) = 1, z \mid y$ 的全部正整数解 (x, y, z) 可表示为 $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab, z = a^2 + b^2$,其中 a, b 满足 $a > b > 0, a, b$ 一奇一偶,且 $(a, b) = 1$ 的任意整数".

5. 证明:方程 $y^2 = x^3 + 7$ 没有整数解.

6.(1999.保加利亚数学竞赛题)找出所有整数组 (x, y),使得 $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$

7.(2000.西班牙数学竞赛题)解方程组 $\begin{cases} x \mid x \mid + y \mid y \mid = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$

8.(第 39 届 IMO 题)试确定使 $ab^2 + b + 7$ 整除 $a^2b + a + b$ 的全部正整数对 (a, b)

9.(1999.台湾数学奥林匹克竞赛题)求使方程 $(x + 1)^{y+1} + 1 = (x + 2)^{z+1}$ 成立的所有正整数解.

10.(第52届波兰数学奥林匹克竞赛题) 求方程 $x^{2000}+2000^{1999}=x^{1999}+2000^{2000}$ 的整数解.

B组

1. 求所有正整数 m,n,使得 $1!+2!+\cdots+m!=n^2$

2.(第52届波兰数学奥林匹克竞赛题) 已知$[x]$表示不超过 x 的最大整数,则方程
$3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+\sqrt{3^{2x}-[10\times3^{x+1}]+82}=-80$
的解的个数为________.

3. 求所有互不相同的正整数,使它们的积等于它们的和.

4.(1998.莫斯科大学数力系入学考试题) 有多少不同的整数对(x,y)满足方程 $x^2=4y^2+2025$

5. 证明:$x^2+y^2+z^2=6xyz$ 仅有整数解 $x=y=z=0$

6.(1998.加拿大数学奥林匹克竞赛题) 求满足下面方程的实数 a:$\left[\frac{a}{2}\right]+\left[\frac{a}{3}\right]+\left[\frac{a}{5}\right]=a$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

7. 证明:对任何正整数 m,同余方程 $6xy-2x-3y+1\equiv0(\mathrm{mod}\, m)$ 都有整数解,但不定方程 $6xy-2x-3y+1=0$ 没有整数解.

8.(2000.拉脱维亚数学竞赛题)求方程 $x(x+1)=y^7$ 的正整数解.

9. 设 a,b 为正整数,$ab+1\mid a^2+b^2$,证明:$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是平方数.

10. 确定所有实数对(a,b),使得$a[b_n]=b[a_n]$对一切正整数 n 成立($[x]$表示$\leqslant x$的最大整数).

11. 证明:边长为整数的直角三角形的面积不能是平方数.

12.(第22届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题)已知 x,y 是互素的自然数,k 是大于1的自然数,试找出满足:$3^n=x^k+y^k$ 的所有自然数 n,并给出证明.

第五章

数论中的存在性问题

§5.1　知识要点与基本方法

Ⅰ. 概念：

例：(2000.第41届IMO试题) 确定是否存在满足下列条件的正整数 n，使得 n 恰好能够被2000个互不相同的质数整除，且 2^n+1 能够被 n 整除.

这就是一个数论中典型的存在性问题，由此例，我们不难得到如下概念：

在数论问题中回答满足一些条件的某对象存在或不存在的问题我们称之为数论存在性问题. 它与其它数学存在性问题在理论上是一样的，区别是，其内容是数论知识方面的.

Ⅱ. 基本方法

解决数论存在性问题没有什么死的方法，也没有什么固定的程式，所用知识是普遍的，采取的方法也是灵活多样的.

但由于数论存在性问题是数学竞赛中难度较大的，并且又是常见的题型，因此，对其解决的方法我们给出大致的归纳如下：

1. 反证法.
2. 数学归纳法.
3. 按摸分类.
4. 高斯函数.
5. 试验，猜想，证明.
6. 构造法.

(1) 按归纳方式构造

(2) 用阶乘构造

(3) 用非十进制记数构造.

7. 数论知识的综合运用.

§5.2　赛 题 精 讲

1. 关于反证法

例1　已知 n 是已确定的正整数，$r=f(k)$ 是使满足 $1\leqslant r\leqslant n$ 的整数 r 与满足 $1\leqslant k\leqslant n$ 的整数 k 对应的函数，且当 $k_1<k_2$ 时，恒有 $f(k_1)\leqslant f(k_2)$. 证明：存在整数 $m(1\leqslant m\leqslant n)$，使 $f(m)=m$ 恒成立.

【分析】　因 n 的大小不知道，函数 f 的对应关系情况复杂，故很难确定符合条件的 m，不妨用反证法.

证明：若对任何 $1\leqslant m\leqslant n$ 的 m，均有 $f(m)\neq m$，则由 $f(1)\geqslant 1$ 和 $f(1)\neq 1$，可知 $f(1)\geqslant 2$. 于是，$f(2)\geqslant f(1)\geqslant 2$，即 $f(2)\geqslant 2$，又 $f(2)\neq 2$. 故 $f(2)\geqslant 3$，同理可得 $f(3)\geqslant 4,\cdots,f(n-1)\geqslant n$，

$f(n) \geqslant n+1$.这与 $1 \leqslant f(n) \leqslant n$ 矛盾.

故,存在整数 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$,使 $f(m)=m$.

2. 关于数学归纳法.

例 2 (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题)在黑板上依次写出数 $a_1=1, a_2, a_3, \cdots$,法则如下:如果 a_n-2 为自然数且未写出过,则写 $a_{n+1}=a_n-2$,否则就写 $a_{n+1}=a_n+3$,证明:所有出现在该序列中的完全平方数都是由写在它前面的那个数加 3 得到的.

【分析】 关键是根据在黑板上写数的法则,归纳证明:$k \leqslant 5m$ 时,$a_{k+5}=a_k+5$,继而,考虑平方数被 5 除的余数特征.

证明:首先用归纳法证明如下断言:"当 $n=5m$ 时,由 1 到 n 的所有自然数全都被写出,且 $a_{5m}=5m-2$,而对于任何 $k \leqslant 5m$,都必有 $a_{k+5}=a_k+5$."

当 $n=5$ 时,依据法则有

$$
\begin{aligned}
a_1=1 &\to a_2=a_1+3=4 \\
&\to a_3=a_2-2=2 \\
&\to a_4=a_3+3=5 \\
&\to a_5=a_4-2=3 \\
&\to a_6=a_5+3=6.
\end{aligned}
$$

假定当 $n=5m$ 时,由 1 到 $5m$ 的所有整数均已被写出,且 $a_{5m}=5m-2$.于是,接下来的 5 个数就只能是 $a_{5m+1}=5m+1$,

$$
\begin{aligned}
a_{5m+2} &= a_{5m+1}+3=5m+4 \\
a_{5m+3} &= a_{5m+2}-2=5m+2 \\
a_{5m+4} &= a_{5m+3}+3=5m+5 \\
a_{5m+5} &= a_{5m+4}-2=5m+3
\end{aligned}
$$

如此即完成了归纳过程.

进而考虑到平方数被 5 除的余数只能是 4、1 和 0,又显然出现在序列中的被 5 除余 4,1 和 0 的数,都是通过写在它前面的那个数加 3 得到的,因此命题得证.

例 3 (第 58 届莫斯科数学奥林匹克竞赛题)证明:存在无穷多个合数 n,使得 $3^{n-1}-2^{n-1}$ 是 n 的倍数.

证明:$\because$ 只要 x 与 y 为不相等的整数,k 为自然数,则 $x-y \mid x^k-y^k$

$\therefore$ 要证 $3^{n-1}-2^{n-1}$ 可被 n 整除,注意到 n 为合数,可知,只要 $2^t \mid n-1$ ①

$\therefore \quad n-1=k \cdot 2^t$

则当视 $x=3^{2^t}, y=2^{2^t}$ 时,就有

$$
\begin{aligned}
3^{n-1}-2^{n-1} &= 3^{k \cdot 2^t}-2^{k \cdot 2^t}=(3^{2^t})^k-(2^{2^t})^k \\
&= x^k-y^k
\end{aligned}
$$

可被 $x-y=3^{2^t}-2^{2^t}=n$ 整除

于是 $\quad n-1=3^{2^t}-2^{2^t}-1$

$\therefore \quad$ 要 ① 成立,只要 $2^t \mid 3^{2^t}-1$

下面用归纳法证明:对一切自然数 t,数 $3^{2^t}-1$ 都可被 2^{t+2} 整除.

当 $t=1$ 时,结论显然

假设对 $t=m$ 时结论成立,

则当 $t=m+1$ 时,有

$$
3^{2^{m+1}}-1=(3^{2^m}+1)(3^{2^m}-1)
$$

前一因子 $3^{2^m}+1$ 可被 2 整除,后一因子 $3^{2^m}-1$ 由归纳假设可知可被 2^{m+2} 整除.

∴ 当 $t=m+1$ 时,$3^{2^t}-1$ 可被 2^{t+2} 整除.

从而对一切自然数 t,数 $3^{2^t}-1$ 都可被 2^{t+2} 整除.

∴ 存在无穷多个合数 n,使得 $3^{n-1}-2^{n-1}$ 是 n 的倍数.

【评注】 注意到 $n=3^{2^t}-2^{2^t},t\geqslant 2$

则 显然 n 为合数.

此因:$3^{2^t}-2^{2^t}=3^{2\cdot 2^{t-1}}-2^{2\cdot 2^{t-1}}=(3^{2^{t-1}})^2-(2^{2^{t-1}})^2$

$=(3^{2^{t-1}}+2^{2^{t-1}})(3^{2^{t-1}}-2^{2^{t-1}})$

3. 关于按模分类

按模分类可以实现"大"向"小","多"向"少","无限"向"有限","无序"向"有序","不定"向"确定"的转化.

例 4 非常数的正整数无穷数列$\{a_n\}$满足递推关系 $a_{n+1}=2a_n+1$ 或 $2a_n-1$,$n=1,2,\cdots\cdots$,求证:数列$\{a_n\}$中至少有一项为合数.

【分析】 本题关键是考察 a_n 的取值情况,a_n 的取值由 a_1 确定,但 a_2 可有 2 个取值,a_3 可有 4 个取值,……,a_n 可有 2^{n-1} 个取值,因此,无法确定 a_n.用什么办法可把不定的递推关系转化成确定的递推关系呢?我们想到了"模".因 a_n 均为奇数($n\geqslant 2$),故按 mod 2 分类不行,可考虑 mod 3.

证明: 由于$\{a_n\}$是递增数列,不妨设 $a_1>3$(否则去掉前面若干项即可).

(i) 若 $a_1\equiv 0(mod\ 3)$,则 $3\mid a_1$,得证.

(ii) 若 $a_1\equiv 1(mod\ 3)$,a_1 为质数(若 a_1 为合数已得证)

对 $a_2=2a_1+1$,有 $a_2\equiv 0(mod\ 3)$,得证,

对 $a_2=2a_1-1$,有 $a_2\equiv 1(mod\ 3)$,从而,

对 $a_3=2a_2+1$,有 $a_3\equiv 0(mod\ 3)$,得证.

对 $a_3=2a_2-1$,有 $a_3\equiv 1(mod\ 3)$,从而,

… 或者得证,或者 $a_n=1(mod\ 3)$.

若都有 $a_1\equiv a_2\equiv\cdots\equiv a_n\equiv\cdots\equiv 1(mod\ 3)$

则 $a_{n+1}=2a_n-1$

于是 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$,从而

$a_{n+1}=2^n(a_1-1)+1$

应用费马小定理,得

$a_{a_1}\equiv 2^{a_1-1}(a_1-1)+1\equiv(a_1-1)+1\equiv 0(mod\ a_1)$

∴ $a_1\mid a_{a_1}$

于 a_{a_1} 为合数,得证.

(iii) 若 $a_1\equiv 2(mod\ 3)$,可类似于(ii)进行讨论.

4. 关于高斯函数的应用

$y=[x]$ 叫高斯函数,记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数.如$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]=0$,$[-0.128]=-1$,$[19.98]=19$ 等等.含有记号$[x]$的数学问题,一方面因为它是整数,所以经常与数论问题联系在一起,再则$[x]$满足不等式 $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$,因而借助于不等式又容易使问题得到解决.

数论问题中有一类是与高斯函数有关的存在性问题,解决时应抓住高斯函数的特殊性来解题.下面的例子还得注意归纳法的应用.

例 5 (1999.台湾省数学奥林匹克竞赛题)设非负整数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{1999}$,对于任意的整数 i,j,且

$i + j \leqslant 1999$,有 $a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$,证明:存在实数 x,使得对于 $n = 1,2,\cdots,1999$,有 $a_n = [nx]$.

分析与证明:

本题是证明存在 x,使 $a_n = [nx]$,根据高斯函数定义,应有

$nx - 1 < a_n \leqslant nx < a_{n+1}$

即 $\frac{a_n}{n} \leqslant x < \frac{a_{n+1}}{n}$

这个不等式应对 $n = 1,2,\cdots,1999$ 都成立.于是,x 应该同时属于 1999 个区间$\left[\frac{a_n}{n},\frac{a_{n+1}}{n}\right]$,可以想象出来,如果 x 存在,则 x 应为$\frac{a_n}{n}$ 的最大者.

我们取 $x = \max\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$

这样,只要证明对一切 $m \in \{1,2,\cdots,1999\}$,都有

$$\frac{a_{m+1}}{m} > x \geqslant \frac{a_n}{n}$$

即可,也就是

$\frac{a_{m+1}}{m} > \frac{a_n}{n}$

$$na_m + n > ma_n \tag{2}$$

我们采用数学归纳法证明这个不等式.

当 $m = n = 1$ 时,式(2) 成立.

设 m,n 均小于k 时,式(2) 成立.

当 m,n 中较大的一个为k 时,有两种情况:

(Ⅰ)$n = k$,此时设 $n = qm + r, 0 \leqslant r < m$,由已知有

$a_n \leqslant a_{qm} + a_r + 1 \leqslant a_{(q-1)m} + a_m + a_r + 2 \leqslant \cdots \leqslant qa_m + a_r + q$

由归纳假设 $ra_m + r > ma_r$,则

$$\begin{aligned} ma_n &\leqslant mqa_m + ma_r + mq \\ &< mqa_m + ra_m + r + mq \\ &= na_m + mq + r \\ &= na_m + n \end{aligned}$$

故式(2) 成立.

(Ⅱ)$m = k$,设 $m = qn + r, 0 \leqslant r < n$

由题设,有

$a_m \geqslant aq_n + a_r \geqslant \cdots \geqslant qa_n + a_r$

$na_m \geqslant nqa_n + na_r$

$$\begin{aligned} na_m + n &\geqslant nqa_n + na_r + n \\ &= ma_n - ra_n + na_r + n \\ &> ma_n \end{aligned}$$

这最后一步是由归纳假设 $na_r + n > ra_n$

于是,式(2) 成立.

以上我们证明了式(2) 成立,从而,对一连串区间$\left[\frac{a_n}{n},\frac{a_{n+1}}{n}\right]$中,只要 x 取$\frac{a_n}{n}$ 的最大者,就能满足题目要求.

例 6 (1987.IMO预选题)证明:对任一个自然数 $k(k \geqslant 2)$,存在一个无理数 r,使得对每一个自然数 m,$[r^m] \equiv -1(mod\ k)$

【分析】 如何考虑结论$[r^m]\equiv -1(mod\,k)$呢?这相当于$[r^m]+1\equiv 0(mod\,k)$,但是带有取整记号不便于思考.应注意到一个事实,如果$0<S<1$,则$r^m+s^m=[r^m]+1$.于是,问题转化为是否存在这样的无理数r和$0<s<1$,使得r^m+s^m能被k整除.同时又知道这样一个事实,若$r+s$与B都是整数,且$r+s$与γs都能被k整除时,对正整数m,r^m+s^m也能被k整除.这样,问题又转化为是否存在这样的无理数r和$0<s\nless 1$,使得$r+s$与rs都是整数且能被k整除,这使我们想到韦达定理.

证明:首先证明,当$r+s$与rs为整数,且能够被k整除时,对所有正整数m,r^m+s^m也是整数,且能被k整除.

设$r+s=kp$,$rs=kq$,其中k是正整数,p,q是整数,则

$r^2+s^2=(r+s)^2-2rs=k^2p^2-2kq=k(kp^2-2q)$

即r^2+s^2是整数,且能被k整除.

假设$r+s,r^2+s^2,r^3+s^3,\cdots,r^{m-1}+s^{m-1}$都是整数且能被$k$整除,由于

$r^m+s^m=(r+s)(r^{m-1}+s^{m-1})-rs(r^{m-2}+s^{m-2})$

则r^m+s^m是整数,且能被k整除.

于是,用数学归纳法完成了证明.

下面只需证明,存在这样的r和s,其中r是无理数,s满足$0<s<1$,$r+s$和rs是整数,且能被k整除,为此,考虑方程

$x^2-kpx+kq=0$

如果r,s存在,且$0<s<1$,则必须满足不等式组.

$$\begin{cases}\Delta=k^2p^2-4kq>0,\\ 0<\dfrac{kp-\sqrt{k^2p^2-4kq}}{2}<1\end{cases}$$

即$\begin{cases}p^2>\dfrac{4q}{k}\\ p>q>0\end{cases}$

显然,对任一自然数$k(k\geqslant 2)$,这样的整数p,q是存在的.

为使r是无理数,只要k^2p^2-4kq不是完全平方数即可.

为此选择$q=k$,则$k^2p^2-4kq=k^2(p^2-4)$

当$k=2$时 $k^2p^2-4kq=0$与$\Delta=k^2p^2-4kq>0$矛盾.$\therefore k=2$不符合题目要求.

当$k\geqslant 3$时,若k^2-4是完全平方数,设$k^2-4=t^2$,则$k^2-t^2=4$,有

$(k+t)(k-t)=4$

由于$k+t$与$k-t$具有相同的奇偶性,所以不存在两个不同的偶数之积为4.

即 k^2-4不是完全平方数.

从而$k^2p^2-4k^2$不是完全平方数,这时r就是无理数.

此时,$0<s<1$,则

$r^m+s^m=[r^m]+1\equiv 0(mod\,k)$

5.关于试验,猜想,证明的存在性问题

例7 记$I_k=\underbrace{111\cdots 1}_{k}$.求证:存在无穷多个正整数$n$,使$I_1,I_2,\cdots,I_n$除以$n$给出互不相同的余数.

试验:I_n:1,11,111,1111,$\cdots$,$\underbrace{111\cdots 1}_{k}$,$\cdots$.2不符合;3除以$I_1,I_2,I_3$的余数分别是1,2,0;4,5,6,7,8均不符合;9除以$I_1\sim I_9$的余数分别是1～8及0;10,11也非所求.但12以后的试算就变得复杂,甚至不可能,停止.回顾我们试算的结果,可以作出猜想:

$n=3^r,r\in\mathbf{N}^*$.

证明:

(i)对r用归纳法可证明$3^r\mid I_{3^r}$,但$3^{r+1}\mid I_{3^r}$(留给读者)

(ii) 用反证法证明 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 是 $mod\ n$ 的完全剩余类($n=3^r$).

若有 $i<j\leqslant 3^r$,使 $I_i\equiv I_j(mod\ 3^r)$,则由 $I_j=10^i.I_{j-i}+I_i$ 及 $(10,3^r)=1$ 知 $3^r\mid I_{j-i}$

即　存在正整数 $k<3^r$,使 $3^r\mid I_k$.令 k 为最小的这种数,设 $3^r=p\cdot k+s,0\leqslant s<k$

$\because I_{3^r}=I_k(10^{(p-1)k}+\cdots+10^k+1)+I_s$,(规定 $I_0=0$),又 $3^r\mid I_k,3^r\mid I_{3^r}$

$\therefore 3^r\mid I_s$

于是 $s=0$,有 $k\mid 3^r,k=3^t,1\leqslant t<r$

由(i)知　$3^t\mid I_{3^t}$.但 $3^{t+1}\nmid I_{3^t}$,故 $3^r\nmid I_{3^t}=I_k$.此与 $3^r\mid I_k$ 矛盾.

例8　证明:存在无穷多个自然数 n,使得

$n\mid 2^n+2,n-1\mid 2^n+1$.

试验,显然,$n\geqslant 2,\therefore$ 从2开始试算.

$2\mid 2^2+2,2-1\mid 2^2+1$

$3\nmid 2^3+2,4\nmid 2^4+2,5\nmid 2^5+2$

$6\mid 2^6+2$ 且 $5\mid 2^6+1$

再往下试验,

$7\nmid 2^7+2,8\nmid 2^8+1,9\nmid 2^9+2$

如果再继续试验就麻烦了,不妨思考以上成立的两个数2和6.

6可以写成 2^2+2

经试验 $2^6+2\mid 2^{2^6}+2,2^6+1\mid 2^{2^6+1}+1$

这是因为 $2^6+2=66,2^6+1=65$,而

$$\begin{aligned}2^{66}+2&=2(2^{65}+1)\\&=2(2^5+1)(2^{60}+2^{55}+\cdots+2^5+1)\end{aligned}$$

于是　$66\mid 2^{66}+2$

因　$$\begin{aligned}2^{66}+1&=(2^6)^{11}+1\\&=(2^6+1)(2^{60}-2^{54}+\cdots-2^5+1)\end{aligned}$$

又有 $65\mid 2^{66}+1$.

由以上试验可以猜想出,当 $n\mid 2^n+2$ 且 $n-1\mid 2^n+1$ 时,

$2^n+2\mid 2^{2^n+2}+2$,且 $2^n+1\mid 2^{2^n+2}+1$

下面我们证明这个结论,这就把讨论存在性问题转化为一个结论确定的论证性问题.

证明:显然,$2\mid 2^2+2,2-1\mid 2^2+1$

假设存在 $n\in\mathbf{N}$,使得

$n\mid 2^n+2$　且 $n-1\mid 2^n+1$

由 $n\mid 2^n+2$ 可知,$2\mid n,4\nmid n$

由 $n-1\mid 2^n+1$ 可知,存在 $k\in\mathbf{N}$,使得

$2^n+1=(n-1)k$

其中 $2\nmid n-1,2\nmid k$

$$\begin{aligned}2^{2^n+1}+1&=2^{(n-1)k}+1\\&=(2^{n-1}+1)M,M\in\mathbf{N}\end{aligned}$$

于是　$2^{n-1}+1\mid 2^{2^n+1}+1$

对此式两边同乘以2,有

$2^n+2\mid 2^{2^n+2}+2$

由于　$n\mid 2^n+2,4\nmid n$,则

$2^n+2=nt,t$ 为奇数.

$2^{2^n+2}+1=2^{nt}+1=(2^n+1)T, T\in \mathbf{N}$

即有　$2^n+1 \mid 2^{2^n+2}+1$

于是　当 $n \mid 2^n+2, n-1 \mid 2^n+1, 2 \mid n, 4 \nmid n$ 时,必有

$2^n+2 \mid 2^{2^n+2}+2$　且 $2^n+1 \mid 2^{2^n+2}+1$

因此,由 $n=2$ 可生成 $2^2+2=6, 2^6+2=66, 2^{66}+2, \cdots$ 等等.如此下去,可以得到无穷多个符合题目要求的自然数 n.

6. 构造法

首先指出的是,构造的思索过程,实如同摸着石头过河,走一步看一步,通过不断的修正"凑"出符合要求的对象.

(1) 按归纳方式构造.

例 9 (第 27 届美国数学奥林匹克竞赛题)证明,对任意 $n\in \mathrm{N}, n\geqslant 2$,存在一个由 n 个整数构成的集合 ζ,使得对 ζ 中的任意两个不同的数 a,b,均有 $(a-b)^2 \mid ab$.

证明:我们对 n 采用归纳的构造.

当 $n=2$ 时,取 $\zeta_2=\{1,2\}$ 即可

设 $n=k$ 时,存在含 k 个元素的集合

$\zeta_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

满足条件,即对任意 $1\leqslant i<j\leqslant k$,均有

$(a_i-a_j)^2 \mid a_ia_j$

令 $A=a_1\cdots a_k$,考虑如下的 $k+1$ 个数.

$A, A+a_1, A+a_2, \cdots, A+a_k$

构成集合 ζ_{k+1},则容易验证 ζ_{k+1} 满足题中的条件.

【评注】上述归纳的关键是令 $A=a_1\cdots a_k$,选集合 $\zeta_{k+1}=\{A, A+a_1, A+a_2, \cdots, A+a_k\}$

例 10　对任意 $n\geqslant 2$,证明,存在 n 个不同的正整数 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 使得

$(a_i-a_j) \mid (a_i+a_j)\qquad (i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n)$

证明:用归纳方式构造.

当 $n=2$ 时,取 $a_1=1, a_2=2$,即可

假设已有 n 个正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 符合要求,则 $n+1$ 个数

$a_n!, a_n!+a_1, a_n!+a_2, \cdots, a_n!+a_n$ 符合要求.

事实上

$\dfrac{(a_n!+a_i)+a_n!}{(a_n!+a_i)-a_n!}=\dfrac{2\cdot(a_n!)+a_i}{a_i}\in \mathbf{N}^+\ (i=1,2,\cdots,n)$

又不妨设 $i>j, (i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$A=\frac{(a_n!+a_i)+(a_n!+a_j)}{(a_n!+a_i)-(a_n!+a_j)}=\frac{2(a_n!)+a_i+a_j}{a_i-a_j}$$

$\because (a_i-a_j) \mid (a_i+a_j)$　(归纳假设),且

$(a_i-a_j) \mid 2(a_n!)$,所以,$A\in \mathbf{N}^+$

(2) 用阶乘构造

例 11　证明:可把正整数集 $\mathbf{N}^+$ 分拆成两个子集 A,B,使得 A 中任 3 个数都不成等差数列,而且不存在由 B 中无穷多个数构成的等差数列.

证明:令 $A=\{n!+n \mid n\in \mathbf{N}^+\}$,

$B=\mathrm{N}-A$

若 B 中含有首项为 a_1,公差为 d 的无限长等差数列,则此数列中的一项

$$a_1+\left[\frac{(a_1+d)!}{d}+1\right]d$$
$$=(a_1+d)!+(a_1+d)\in A$$

与所设矛盾,故 B 中不会无穷多项组成的等差数列.

又对任意正整数 $m>n>k\geqslant 1$,有

$$(k!+k)+(m!+m)$$
$$>m!+m\geqslant m(n!)+m$$
$$\geqslant 3(n!)+m$$
$$=2(n!)+(n!)+m$$
$$>2(n!+n)$$

所以,A 中任 3 数不成等差数列.

(3) 采用非十进制记数构造.

例 12 证明:可以用 4 种颜色对正整数 1,2,…,2000 染色,使它不会有由 7 个同色数组成的等差数列.

证明:问题等价于把集合

$$\zeta=\{1,2,\cdots,2000\}$$

分拆成 4 个非空子集 M_1,M_2,M_3,M_4,使得

$$M_i\cap M_j=\phi(i\neq j),M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4=\zeta$$

因为 $6\times 7^3>2000$,所以,ζ 中的每个数都可以表示成至多 4 位的 7 进制数 $(abcd)_7$.这里 $a,b,c,d\in\{0,1,2,\cdots,6\}$

设 $A_i=\{(abcd)_7\mid(abcd)_7\in\zeta,b\neq i,c\neq i,d\neq i\},i=1,2,3,4$.

对任意 $x\in\zeta$,由于每个 7 进制正整数末 3 位数上至少有 1,2,3,4 中的一个数字未出现,例如 x 的末 3 位数中未出现 4,则 $x\in A_4$,所以,

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4=\zeta$$

下证:集合 $A_i(i=1,2,3,4)$ 中不含由 7 项构成的等差数列.

反设某个 A_i 中含有由 7 项构成的等差数列:$a,a+d,\cdots,a+6d$(a 为首项,d 为公差).

若 $7\nmid d$,则上述 7 个数模 7 两两不同余(即构成一个模 7 的完系),从而,这 7 个数中必有一个,它除以 7 的余数为 i,即为它的 7 进制表示中的末位数为 i,矛盾.

若 $7\nmid d,7^2\nmid d$,仿上可得到这个等差数列中必有一项,它的 7 进制表示中从右数的第三位数字为 i,矛盾.

若 $7^3\mid d$,则 $6d\geqslant 6\times 7^3>2000$,矛盾.

综上证得集合 $A_i(i=1,2,3,4)$ 中任意 7 个数不成等差数列,最后,令

$M_1=A_1,M_2=A_2\cap\overline{A}_1,M_3=A_3\cap\overline{A}_1\cap\overline{A}_2,M_4=A_4\cap\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$,得到符合要求的分拆.

7. 关于数论知识的综合运用

例 13 (2000.第 41 届 IMO 试题)确定是否存在满足下列条件的正整数 n,n 恰好能够被 2000 个互不相同的质数整除,且 2^n+1 能够被 n 整除.

【分析】 本题是数学归纳法,整除知识,代数变形的综合运用.

由于题目中所要确定的 n,是恰好可被 2000 个互不相同的质数整除,故可考虑用数学归纳法证明一个更一般的命题.

证明:先证明一个引理.

引理 对于每一个整数 $a>2$,存在一个质数 p 满足 $p\mid a^3+1$,但 p 不能整除 $a+1$.

证:假设对某个 $a>2$,引理不成立,则 a^2-a+1 的每一个质因子都要整除 $a+1$,而恒等式 a^2-

$a+1=(a+1)(a-2)+3$说明能够整除 a^2-a+1 的唯一质数是3，换言之，a^2-a+1 是3的方幂，

又∵从假设有3整除 $a+1$，即 $a+1$ 是3的倍数，∴ $a-2$ 也是3的倍数，于是 a^2-a+1 能够被3整除，但不能被9整数，故得 a^2-a+1 恰等于3.

另一方面，由 $a>2$ 知 $a^2-a+1>3$，∴ 矛盾，从而引理得证.

接下来证明一个更一般的命题：

"对于每一个自然数 k，一定存在一个自然数 n 满足 $n\mid(2^n+1)$．$3\mid n$，且 n 恰好能够被 k 个互不相同的质数整除."

当 $k=1$ 时，$n=3$ 即可使命题成立.

假设当 $k=m,m\geqslant1$ 时，命题成立.

当 $k=m+1$ 时，因为 $n\mid(2^n+1)$，n 可以写成 $3^l\cdot t(l\geqslant1,3\nmid t)$ 的形式，则 n 必为奇数，

且　　$3\mid(2^{2n}-2^n+n)$

利用恒等式

$2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$

可知　$3n\mid(2^{3n}+1)$

根据上面引理，存在一个奇质数 p 满足 $p\mid(2^{3n}+1)$．但 p 不能整除 2^n+1，于是，自然数 $n(k+1)=3p\cdot n(k)$，即满足命题对于 $k+1$ 的要求，归纳法完成.

例 14　(2002．第19届希腊数学奥林匹克竞赛试题)(1) 正整数 p,q,r,a 满足 $pq=ra^2$，且 r 是素数，p,q 互素．证明：p,q 中有一个是完全平方数？(2) 是否存在素数 p，使得 $p(2^{p+1}-1)$ 是完全平方数.

解：(1) 设 $p={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_m}^{k_m}$，$q={q_1}^{s_1}{q_2}^{s_2}\cdots{q_n}^{s_n}$，$a={a_1}^{t_1}{a_2}^{t_2}\cdots{a_l}^{t_l}$，其中 p_i,q_j,a_h 均为素数，且 $(p_i,q_j)=1$，则有

${p_1}^{k_1}\cdot{p_2}^{k_2}\cdots{p_m}^{k_m}\cdot{q_1}^{s_1}\cdot{q_2}^{s_2}\cdots{q_n}^{s_n}=r{a_1}^{2t_1}\cdot{a_2}^{2t_2}\cdots a_l^{2t_l}$

由于 r 是素数，则 p,q 中不被 r 整除的那个数一定是完全平方数.

(2) 设 $p(2^{p+1}-1)=b^2$

当 $p=2$ 时，则 $b^2=14$，不可能，

当 $p>2$ 时，设 $p=2q+1$，由于 $p\mid b^2$，所以 $p\mid b$，设 $b=pa$，则有 $p(2^{p+1}-1)=p^2a^2$，即

$(2^{q+1}-1)(2^{q+1}+1)=pa^2$

由于 p 是素数，$(2^{q+1}-1,2^{q+1}+1)=1$，由(1)可知 $2^{q+1}-1=c^2$ 或 $2^{q+1}+1=c^2$

若 $2^{q+1}-1=c^2$，则 $2^{q+1}=c^2+1$．由于 $q\geqslant1$，则 $4\mid2^{q+1}$，而 $4\nmid(c^2+1)$，矛盾.

若 $2^{q+1}+1=c^2$，则 $2^{q+1}=c^2-1=(c-1)(c+1)$，于是 $c-1=2^{q_1}$，$c+1=2^{q_2}$，且 $q_1<q_2$，$q_1+q_2=q+1$，所以，有 $2^{q_2}-2^{q_1}=2$，$2^{q_1}(2^{q_2-q_1}-1)=2$

若 $2^{q_1}=1$，则 $q_1=0$，$2^{q_2-q_1}-1=2$ 矛盾.

若 $2^{q_1}=2$，则 $q_1=1$，$2^{q_2-q_1}-1=1$，$q_2-q_1=1$，$q_2=2$，于是 $q=2$，$p=5$，$p(2^{p+1}-1)=5\times63$ 不是完全平方数．因此，不存在正整数 p，使得 $p(2^{p+1}-1)$ 是完全平方数.

§5.3 针对性训练

A 组

1. 证明:对任何整数 $n > 12$,存在一个边为整数而其面积在 n 与 $2n$ 之间的直角三角形.

2. 若 A 与 B 是三位正整数,$A * B$ 表示 A 和 B 连写而成的六位正整数,试求出所有的 A 和 B,使得 $A, B, B-A, A * B$ 和 $\frac{A * B}{B}$ 都是完全平方数.

3. 是否存在整数 k,使映射 $(x, y) \to x^2 + kxy + y^2, x, y \in Z$ 的象集是自然数集 N?

4. 设 n 是给定的大于 1 的正整数,求证:存在唯一的正整数 $A < n^2$,使得 $n \mid \left[\frac{n^2}{A}\right] + 1$

5. 证明:对于任意的非负整数 n,$19 \times 8^n + 17$ 是合数.

6. 对任意 $n \geqslant 2$,证明:存在 n 个连续正整数,使它们都不是 p^q 的形式.这里 p 是质数,q 是大于 1 的正整数.

B 组

1. 证明:存在无穷多个正整数 n 满足:对 $n^2 + 3$ 的每一个质因子 p,都可以找到一个正整数 k,使 $k^2 < n$,并且 $p \mid k^2 + 3$

2. 除了$(x,y,z)=(n,n,n)$之外,不定方程$(x+y+z)^2=9(x^2y+y^2z+z^2x)$还存在其它整数解吗?

3.(1985.加拿大数学奥林匹克)求证,当且仅当存在某个正整数 k,使得 $n=2^{k-1}$ 时,2^{n-1} 能整除 $n!$

4. 设 $w(n)$ 表示自然数 n 的素因数的个数,$n>1$,证明:存在无穷多个 n,使得
$w(n)<w(n+1)<w(n+2)$

5. 设 $\zeta=\{x\mid x\geqslant 0$,其4进制表示中只含$0,1\}$,$x$ 是不属于ζ的任意非负实数,求证:存在 $y\in\zeta$,使$\frac{x+y}{2}\in\zeta$

6. 证明:存在两个严格递增数列$\{a_n\}$及$\{b_n\}$,使 $a_n(a_n+1)\mid({b_n}^2+1)\quad(n=1,2,\cdots)$

7. 证明:数列$\{2^n-3\}$,$(n=2,3,\cdots)$中存在无穷子数列,使其中的项两两互质.

8.(2001.第15届韩国数学奥林匹克)设 p_n 是从最小的质数2开始递增的第 n 个质数.例如:$p_1=2,p_2=3,p_3=5,\cdots$

(1) 已知 $n\geqslant 10$,r 是满足$2\leqslant r\leqslant n-2$,$n-r+1<p_r$ 的最小整数,定义 $N_s=sp_1p_2\cdots p_{r-1}-1$,其中 $S=1,2,\cdots,p_r$.证明:存在 j,$1\leqslant j\leqslant p_r$,使得 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 均不整除N_j;

(2) 用(1)的结论,求所有整数 m,使得
$p_{m+1}^2<p_1p_2\cdots p_m$.

第一章

集合、映射、映射法

§1.1 知识、方法、技能

这一讲主要介绍有限集的阶，有限集上的映射及其性质.这些在与计数有关的数学竞赛问题中应用极广，是参赛者必不可少的知识.

Ⅰ.有限集元素的数目

1.有限集的阶

有限集 A 的元素数目叫做这个集合的阶，记作 $|A|$ [或 $n(A)$]

2.集族的阶

若 M 为由一些给定的集合构成的集合，则称集合 M 为集族.

设 A 为有限集，由 A 的若干个子集构成的集合称为集合 A 的一个子集族，求满足一定条件的集族的阶是一类常见的问题.

显然，若 $|A|=n$，则由 A 的所有子集构成的子集族的阶为 2^n

Ⅱ.映射，映射法

定义 1:设 X 和 Y 是两个集合(二者可以相同).如果对于每个 $x\in X$，都有惟一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称这个对应关系为 X 到 Y 的映射，记为 $X\to Y$ 或 $x\in X\to y\in Y$.这时，$y=f(x)\in Y$ 称为 $x\in X$ 的象，而 x 称为 y 的原象.特别当 X 和 Y 都是数集时，映射 f 称为函数.

定义 2:设 f 为从 X 到 Y 的一个映射.

(1) 如果对于任何 $x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射；

(2) 如果对于任何 $y\in Y$，都有 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，则称 f 为满射；

(3) 如果映射 f 既为单射又为满射，则称 f 为双射；

(4) 如果 f 为满射且对任何 $y\in Y$，恰有 X 中的 m 个元素 x_1、x_2、$\cdots x_m$，使得 $f(x_i)=y$，$i=1,2,\cdots,m$，则称 f 为(倍数为 m 的)倍数映射.

定理 1 设 X 和 Y 都是有限集，f 为从 X 到 Y 的一个映射，

(1) 如果 f 为单射，则 $|X|\leqslant|Y|$；

(2) 如果 f 为满射，则 $|X|\geqslant|Y|$；

(3) 如果 f 为双射，则 $|X|=|Y|$；

(4) 如果 f 为倍数为 m 的倍数映射，则 $|X|=m|Y|$.

这个定理的结果是显然的.

定理 2 设有限集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，f 是 A 到 A 上的映射，记 $f_1(x)=f(x)$，$f_{r+1}(x)=f[f_r(x)](x\in A,r\in\mathbf{N}^*)$，则 f 是一一映射(即双射)的充要条件是:对任意 $a_i\in A$，存在 $m_i\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant m_i\leqslant n$，使得 $f_{m_i}(a_i)=a_i$，而 $f_s(a_i)\neq a_i(s\in\mathbf{N}^*,1\leqslant s\leqslant m_i-1)$.

证明:必要性.若 f 是双射，则 $f_1(a_i)=a_i$(此时 $m_i=1$)或者 $f_1(a_i)=a_{i_1}\neq a_i$.在后一种情形下，不可能有 $f_2(a_i)=f_1(a_{i_1})=a_{i_1}$.否则，$a_{i_1}$ 在 A 中有两个原象 a_i 和 a_{i_1}，与 f 是双射不合，而只可能有 $f_2(a_i)=a_i$(此时 $m_i=2$)，或者 $f_2(a_i)=a_{i_2}\neq a_i,a_{i_1}$.如果 $f_2(a_i)=a_{i_2}$，则依同样的道理，不可能有 $f_3(a_i)=f(a_{i_2})=a_{i_1},a_{i_2}$，而只可能有

$f_3(a_i) = a_i$(此时 $m_i = 3$),或者 $f_3(a_i) = a_{i3} \neq ai, a_{i1}, a_{i2}$.如此等等.

因为 A 是有限集,所以经过有限次(设经过 m 次)后,有 $f_{m_i}(a_i) = a_i$,而 $f_s(a_i) \neq a_i(s \in N^*, 1 \leqslant s \leqslant m_i - 1)$.

这表明当 f 是双射时,对任一 $a_i \in A$ 都存在着映射圈:

$a_i \to a_{i1} \to a_{i2} \to \cdots \to a_{im_i-1} \to a_i$.

在这个映射圈中,诸元素互异,且 $1 \leqslant m_i \leqslant n$($m_i = 1$ 时,只有一个元素 a_i).

充分性.如果对任意 $a_i \in A$ 存在 $m_i \in \mathbf{N}^*, 1 \leqslant m_i \leqslant n$,使 $f_{m_i}(a_i) = a_i$,而 $f_s(a_i) \neq a_i(s \in \mathbf{N}^*, 1 \leqslant s \leqslant m_{i-1})$,这说明从 A 中任一元素 a_i 出发,都可以得到一个包含 m_i 个互异元素的映射圈,显然 f 是双射.

定理 3 在命题1的条件下,若对 $a_i \in A$,存在 $m_i \in \mathbf{N}^*$,使 $f_{m_i}(a_i) = a_i$,则对任意 $t \in \mathbf{N}^*$,有 $f_{tm_i}(a_i) = a_i$.

这是明显的事实,证明从略.

§1.2 赛题精讲

例 1 设集合 $A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2000, x = 4k+1, k \in \mathbf{Z}\}$,集合 $B = \{y \mid 1 \leqslant y \leqslant 3000, y = 3k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 求 $|A \cap B|$.

解:形如 $4k+1$ 的数可分三类:

$12l+1, 12l+5, 12l+9(l \in \mathbf{Z})$,其中只有形如 $12l+5$ 的数是形如 $3k-1$ 的数.

令 $1 \leqslant 12l + 5 \leqslant 2000(l \in \mathbf{Z})$

得 $0 \leqslant l \leqslant 166$,所以 $A \cap B = \{5, 17, \cdots, 1997\}$,所以 $|A \cap B| = 167$

例 2 集合 $A = \{0,1,2,\cdots,9\}, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为A 的非空子集族,并且当 $i \neq j$ 时,$|B_i \cap B_j| \leqslant 2$,求 n 的最大值.

解:首先考虑至多含三个元素的 A 的非空子集族,它们共有 $C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 = 175$ 个,这说明 $n_{\max} \geqslant 175$

下证,$n_{\max} \leqslant 175$.事实上,设 D 为满足题设的子集族.若 $B \in D$,且 $|B| \geqslant 4$,设 $b \in B$,则 B 与 $B - \{b\}$ 不能同时含于 D,以 $B - \{b\}$ 代 B,则 D 中元素数目不变.仿此对 D 中所有元素数目多于 4 的集合 B 作相应替代后,集族 D 中的每个集合都是元素数目不多于 3 的非空集合,故 $n_{\max} \leqslant 175$.

所以 $n_{\max} = 175$

在许多问题中,计数对象的特征不明显或混乱复杂难以直接计数,这时可以通过适当的映射将问题划归为容易计数的对象,然后再解决,从而取得化难为易的效果.

例 3 设 $S = \{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的公差为正的等差数列,其项都在 S 中且当将S 的其他元素置于A 中之后,均不能构成与A 有相同公差的等差数列.求这种A 的个数(只有两项的数列也视为等差数列).

解:当 $n = 2k$ 为偶数时,满足题中要求的每个数列 A 中必有连续两项,使其前一项在集$\{1,2,\cdots,k\}$ 和$\{k+1, k+2, \cdots, 2k\}$ 中各任取一数,并以二数之差作为公差可以作出一个满足要求的数列 A.容易看出,这个对应是双射.故知 A 的个数为$k^2 = \dfrac{n^2}{4}$

当 $n = 2k+1$ 为奇数时,情况完全类似.惟一的不同在于这时第二个集合$\{k+1, k+2, \cdots, n\}$ 有 $k+1$ 个元素.故 A 的个数为$k(k+1) = (n^2 - 1)/4$

例 4 (1991.全国高中联赛试题)设 a_n 为下述自然数N 的个数:N 的各位数字之和为n 且每位数字都只能取 1、3 或 4.求证对每个自然数 n,a_{2n} 都是完全平方数.

证明:记各位数字之和为 n 且每位数字都是 1 或 2 的所有自然数的集合为 S_n,并记 $|S_n| = f_n$,则 $f_1 = 1, f_2 = 2$,且当 $n \geqslant 3$ 时有 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$,这意味着 $\{f_n\}$ 恰为非波那契数列.

作对应 $S_n \in M_1 \to M'$ 如下:先将 M 的数字中自左至右的第一个 2 与它后邻的数字相加,其和作为一位数字;然后再把余下数字中第一个 2 与它后邻的数字相加,所得的和作为下一位数字;依此类推,直到无数再相加为止.所得的新自然数 M' 除最后一位数可能为 2 之外,其余各位数字均为 1、3 或 4.若记所有 M' 的集合为 T_n,则容易看出,上述对应是由 S_n 到 T_n 的双射.从而有 $|T_n| = |S_n| = f_n$,且显然有

$$f_n = a_n + a_{n-2}, n = 3,4,\cdots \quad ①$$

对于任一数字和为 $2n$,各位数字均为 1 或 2 的自然数 M,必存在正整数 k,使得下列两条之一成立:

(1)M 的前 k 位数字之和为 n

(2)M 的前 k 位数字之和为 $n-1$,第 $k+1$ 位数字为 2

则立即可得

$$f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^2, n = 2,3,\cdots \quad ②$$

由 ① 和 ② 得到

$$a_{2n} + a_{2n-2} = f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^2$$

$$a_{2n} - f_n^2 = -(a_{2n-2} - f_{n-1}^2) \quad ③$$

因为 $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4, f_2 = 2$,所以 $a_4 - f_2^2 = 0$.于是由 ③ 递推即得

$$a_{2n} = f_n^2, n = 1,2,3,\cdots$$

即 a_{2n} 为完全平方数.

【评注】 运用映射法解题的关键,在于巧妙地构造一个一一映射.映射法不仅用于计数,且在与计数有关的其它问题的解决上发挥着威力,再看一例.

例 5 (1983.AIME)对 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的所有非空子集,定义一个惟一正确的"交替和"如下:按照递减的次序重新排列该子集,然后从最大的数开始交替地减或加后继的数(例如 $\{1,2,4,6,9\}$ 的交替和是 $9-6+4-2+1=6$,$\{5\}$ 的交替和就是 5).对 $n=7$,求所有这种"交替和"的总和.

解:记 $N = \{1,2,3,\cdots,n\}, M = \{1,2,\cdots,n-1\}$

$N' = \{\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\} \mid a_1,a_2,\cdots,a_k \in M\}$

$M' = \{\{a_1,a_2,\cdots,a_k\} \mid a_1,a_2,\cdots,a_k \in M\}$

再证 N' 中元素 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 与 M' 中元素 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 对应,显见这 N' 到 N 的一一对应.

因为 $|N'|$ 与 $|M'|$ 均为 2^{n-1},且两数组 $\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 与 $\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 的"交替和"恰为 n,因此所有"交替和"的总和为 $n \cdot 2^{n-1}$.

特别地,当 $n = 7$ 时,得"交替和"为 448

应用映射还可以证明某些与计数相关的不等式和等式.这时可以通过分别计数来证明等或不等,也可以不计数而直接通过适当的映射来解决问题.

例 6 将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和,和项顺序不同认为是不同的写法,所有写法种数记为 $\alpha(n)$.将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和,和项顺序不同认为是不同的写法,所有写法的种数记为 $\beta(n)$.求证对每个 n,都有 $\alpha(n) = \beta(n+2)$

证法一:将每项都是1 或 2,各项之和为 n 的所有数列的集合记为 A_n,每项都是大于 1 的正整数,各项之和为 n 的所有数列的集合记为 B_n,则问题就是证明 $|A_n| = |B_{n+2}|$,显然,只需在两集之间建立一个双射就行了.

设 $(a_1,a_2,\cdots,a_m) = a \in A_n$,其中 $a_{i_1} = a_{i_2} = \cdots = a_{i_k} = 2, 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$,其余的 a_i 均为 1 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$

令

$$b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}$$
$$b_2 = a_{i_1+1} + a_{i_1+2} + \cdots + a_{i_2}$$
$$\vdots$$
$$b_k = a_{i_{k-1}+1} + a_{i_{k-1}+2} + \cdots + a_{i_k}$$
$$b_{k+1} = a_{i_k+1} + a_{i_k+2} + \cdots + a_{m+2}$$
$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_k, b_{k+1}) \quad ①$$

则 $b \in B_{n+2}$.

定义

$$A_n \ni a \to b \in B_{n+2} \quad ②$$

则 f 为双射.事实上,若 $a, a' \in A_n$,且 $a \neq a'$,则或者数列 a 和 a' 中 2 的个数不同,或者 2 的个数相同但位置不全相同.无论哪种情形,由 ① 和 ② 知 $b = f(a)$ 与 $b' = f(a')$ 不同,即 f 为单射.另一方面,对任何 $b \in B_{n+2}$,利用 ① 式又可确定 $a \in A_n$,使得 $f(a) = b$,即 f 为满射,从而 f 为由 A_n 到 B_{n+2} 的双射.

证法二:使用证一中的记号 A_n 和 B_n.对于任意的 $(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m) = a \in A_{n+2}$,令 $a' = (a_1, a_2, \cdots, a_{m-1})$.显然,当 $a_m = 1$ 时,$a' \in A_{n+1}$;当 $a_m = 2$ 时,$a' \in A_1$,容易看出,映射

$$A_{n+2} \ni a \xrightarrow{f} a' \in A_{n+1} \cup A_n$$

是双射,故有 $a(n+2) = a(n+1) + a(n)$.注意到 $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2$,便知 $\alpha(n) = f_n$,这里 $\{f_n\}$ 为菲波那契数列.

对于任意的 $(b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b_k) = b \in B_{n+2}$,令

$$b' = \begin{cases} (b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}) & \text{当 } b_k = 2 \\ (b_1, b_2, \cdots, b_{k-1}, b_k) & \text{当 } b_k > 2 \end{cases}$$

则当 $b_k = 2$ 时,$b' = 2$ 时,$b' \in B_n$;当 $b_k > 2$ 时,$b' \in B_{n+1}$.容易验证,映射

$$B_{n+2} \ni b \to b' \in B_{n+1} \cup B_n$$

为双射,故有 $\beta(n+2) = \beta(n+1) + \beta(n)$.又因 $\beta(3) = 1, \beta(4) = 2$,所以 $\beta(n+2) = f_n = \alpha(n)$

证法三:显然有 $\alpha(1) = 1 = \beta(3), \alpha(2) = 2 = \beta(4)$,即命题于 $n = 1, 2$ 时成立.

设命题于 $n \leqslant k+1 (k \geqslant 1)$ 时成立,须证当 $n = k+2$ 时命题成立.既然命题于 $n = k, k+1$ 时都成立,故存在 A_n 与 B_{k+2}、A_{k+1} 与 B_{k+3} 之间的双射 f_k 与 f_{k+1}.令

$$f(a) = \begin{cases} f_k(a) & \text{当 } a \in A_k \\ f_{k+1}(a) & \text{当 } a \in A_{k+1} \end{cases}$$

则 f 为由 $A_k \cup A_{k+1}$ 到 $B_{k+2} \cup B_{k+3}$ 的双射.

对于任意的 $(a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m) = a \in A_{k+2}$ 和任意 $(b_1, b_2, \cdots, b_l) = b' \in B_{k+2} \cup B_{k+3}$,令

$$a' = (a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}) \in \begin{cases} A_k & \text{当 } a_m = 2 \\ A_{k+1} & \text{当 } a_m = 1 \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} (b_1, b_2, \cdots b_l + 2) \in B_{k+4} & \text{当 } b' \in B_{k+2} \\ (b_1, b_2, \cdots b_l + 1) \in B_{k+4} & \text{当 } b' \in B_{k+3} \end{cases}$$

则映射 $g: A_{k+2} \ni a \to a' \in A_k \cup A_{k+1}$

$h: B_{k+2} \cup B_{k+3} \ni b' \to b \in B_{k+4}$

都是双射,从而复合映射

$$h \circ f \circ g: A_{k+2} \ni a \to b \in B_{k+4}$$

为双射,故有 $\alpha(k+2) = \beta(k+4)$,于是由数学归纳法知命题对所有自然数 n 都成立.

例 7 (1950.莫斯科数学竞赛题)某城市有公共汽车10条线路,现知沿其中 9 条线路可走遍所有车站,但沿其中任何 8 条线路不能走遍所有车站,问至少有多少个不同的车站?

分析与解:此例是如下问题的特殊情形.

设$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$，$S = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$.若(i)$S$中每$r$个元素交集不空；(ii)每$r+1$个元素的交集为空集，问(Ⅰ)$|A|$至少是多少？(Ⅱ)当$|A|$最小时，集$|A_i|$为多少？

对于(Ⅰ)，这可考虑是标集$\{1,2,\cdots,k\}$的任一r元子集$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$，在$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}$中任取一个元素$a$.作映射$f:(i_1, i_2, \cdots, i_r) \to a$，则$f$是足标集的$r$元子集的集合到$A$的一个单射.事实上，若$\{j_1, j_2, \cdots, j_r\}$也对应于$a$，则会形成$r+1$个集的交不空，矛盾.故$|A|$不少于足标集的$r$元子集的个数，即$|A| \geqslant C_k^r$

对于(Ⅱ)，考虑任一A_i，在S中任取其余r个集，它们的交集至少有一个元(不空)，而此交集与A_i取交为空集.由于有C_{k-1}^1种不同取法，故$|A_i| \leqslant |A| - C_{k-1}^r$.当$|A| = C_k^r$时，$|A_i| \leqslant C_{k-1}^{r-1}$.

另一方面，A_i与S中任选$\gamma - 1$个其余的集取交，至少有一个元，从而$|A_i| \geqslant C_{k-1}^{r-1}$.

这说明，当$|A|$取最小值C_k^r时，每个A_i的阶$|A_i|$都是C_{k-1}^{r-1}，故得原题答案至少有45个车站.

例8 设系数a_{ij}为整数，不全为0的方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

试证：在$n \geqslant 2m$时，有一组整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足

$$0 < \max |x_i| \leqslant n(\max |a_{ij}|)$$

分析与解：先假定$n = 2m$，设$A = \max |a_{ij}|$，$B = mA$，集合$X = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid |x_i| \leqslant B, i = 1,2,\cdots,n\}$，$Y = \{(y_1, y_2, \cdots, y_m) \mid |y_i| \leqslant nAB, i = 1,2,\cdots,m\}$，作映射$f: y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$(其中$i = 1,2,\cdots,m$)是从$X$到$Y$的映射(因为$|y_i| \leqslant |a_{i1}| \cdot |x_1| + |a_{i2}| \cdot |x_2| + \cdots + |a_{in}| \cdot |x_n| \leqslant nAB$)

因$|X| = (2B+1)^n = (2mA+1)^{2m} = (4m^2A^2 + 4mA + 1)^n > (2nAB+1)^m = |Y|$，故$f$一定不是单射，也就是说，$X$中所有两个不同元素$(x'_1, x'_2, \cdots, x_n')$，$(x_1'', x''_2, \cdots, x''_n)$具有相同的象.

令$x_j = x_j' - x_j''$，$j = 1,2,\cdots,n$，则$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是方程组的解，并且$0 < \max |x_j| < \max |x'_j| + \max |x''_j| \leqslant 2B = nA$.

如$n > 2m$，由上面所证，方程组有解$(x_1, x_2, \cdots, x_{2m}, 0, 0, \cdots, 0)$满足$0 < \max |x_j| \leqslant 2mA < nA$

【评注】 此例是从反面运用单射来探索求解的.

映射法还可以与其他方法结合起来使用，而且大多数竞赛题是这种类型.例如映射法可与抽屉原理、构造法、反证法等各种方法结合起来.

例9 (1992.IMO试题5)设$oxyz$是空间直角坐标系，S是空间中的一个有限点集，S_x, S_y, S_z分别是S中所有点在坐标平面oyz, ozx, oxy上的正投影所成的集合.求证：

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$$

证明：对每点$(i,j) \in S_x$，令

$$T_{ij} = \{(x,i,j) \mid (x,i,j) \in S\}$$

显然有$S = \sum\limits_{(i,j)\in S_x} T_{ij}$

由柯西不等式有

$$|S|^2 \leqslant \sum_{(i,j)\in S_x} 1 \cdot \sum_{(i,j)\in S_x} |T_{ij}|^2 = |S_x| \cdot \sum_{(i,j)\in S_x} |T_{ij}|^2 \qquad ①$$

考虑集合$V = \sum\limits_{(i,j)\in S_x} (T_{ij} \times T_{ij})$，其中$T_{ij} \times T_{ij} = \{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in T_{ij}\}$

显然，$|V| = \sum\limits_{(i,j)\in S_x} |T_{ij}|^2$

定义映射f如下

$V \ni ((x,i,j),(x',i,j)) \to ((x,j),(x',i)) \in S_y \times S_z$，不难看出$f$为单射，因此有

$|V| \leqslant |S_y| \cdot |S_z|$ ②

由 ①、② 即得 $|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|$

例 10 （1992. 日本奥林匹克预选赛题）设集合 $A = \{1,2,\cdots,10\}$，A 到 A 的映射 f 满足下列两个条件：

① 对任意 $x \in \mathbf{A}$，$f_{30}(x) = x$

② 对每个 $k \in \mathbf{Z}_+$，$1 \leqslant k \leqslant 29$，至少存在一个 $a \in A$，使得 $f_k(a) \neq a$

求这样的映射的总数.

解：注意到 $10 = 5 + 3 + 2$，$30 = 5 \times 3 \times 2$. 这提示我们将 A 划分成三个不相交的子集

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \cup \{b_1, b_2, b_3\} \cup \{c_1, c_2\}$

因为 f 满足条件 ① 和 ②，所以 f 是 A 到 A 上的双射，并且由定理 2 的证明过程得知 A 中存在映射圈，因此，定义映射

$f: f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_4, f(a_4) = a_5, f(a_5) = a_1; f(b_1) = b_2, f(b_2) = b_3, f(b_3) = b_1; f(c_1) = c_2, f(c_2) = c_1$

因为 30 是 5、3、2 的最小公倍数，故由定理 2 和定理 3 知 f 是满足题目条件 ① 和 ② 惟一的一类映射.

因此，f 的总数目相当于从 10 个元素中选取 5 个，再从剩下的 5 个中选取 3 个，最后剩下的两个也选上，它们分别作圆排列的数目，它等于

$(\mathrm{C}_{10}^5 \cdot 4!)(\mathrm{C}_5^3 \cdot 2!)(\mathrm{C}_2^2 \cdot 1!) = 120960$

例 11 （1996. 日本数学奥林匹克预选赛题）设集合 $A = \{1,2,3,4,5,6\}$，映射 $f: A \to A$，其三次复合映射 $f \cdot f \cdot f$ 是恒等映射，这样的 f 有多少个?

解：因为集合 A 上的三次复合映射是恒等映射，所以定理 2 和定理 3 推知符合条件的映射 f 有三类：

(1) f 是恒等映射；

(2) A 中存在一个三元映射圈 $a \to b \to c \to a$（a, b, c 互异），而其他三个元素是不动点；

(3) A 中存在两个三元映射圈 $a \to b \to c \to a$ 和 $a' \to b' \to c' \to a'$（a, b, c, a', b', c' 互异）.

类型(1) 的 f 只有 1 个.

对于类型(2)，先从 6 个元素中选出 3 个元素，a, b, c 的方法有 $\mathrm{C}_6^3 = 20$ 种，又 a、b、c 作圆排列有 $(3-1)! = 2$ 种，故这样的 f 有 $20 \times 2 = 40$ 个.

对于类型(3)，首先 6 个元素平分成两组有 $\mathrm{C}_6^3 \div 2 = 10$ 种分法，每组分别作圆排列又有 $(3-1)!(3-1)! = 4$ 种方式，所以这样的 f 有 $10 \times 4 = 40$ 个.

综上所述，所求的 f 有 $1 + 40 + 40 = 81$ 个

例 12 （1988. 国家集训队选拔考试题）把正三角形 ABC 的各边 n 等分，过各分点在 $\triangle ABC$ 内作各边的平行线，得到的图形叫做正三角形 ABC 的 n 格点阵.

(1) 求其中所有边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数；

(2) 求其中所有平行四边形的个数.

解：延长 AB 至 B'，AC 至 C'，使得 $|BB'| = |CC'| = \frac{1}{n}|BC|$. 作出正三角形 $AB'C'$ 的 $n+1$ 格点阵(图 Ⅱ－6－1－1). 边 $B'C'$ 上有 $n+2$ 个点，依次编号为 $0,1,2,\cdots,n+1$. 在 $\triangle ABC$ 中边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形可以按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类. 容易看出，这三类中菱形个数相同. 边不平行 BC 且边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的所有菱形集合记作 S. 由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有有序数对 (i,j)，$i < j$ 所构成的集合记作 T. 很明显，$|T| = \mathrm{C}_n^2$，设菱形 $EFGH \in S$，延长它的两条邻边 HG 与 GF，

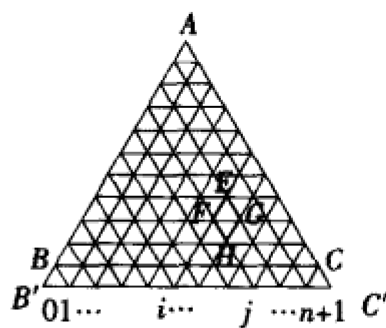


图 Ⅱ－6－1－1

分别交 $B'C'$ 于点 i 与 j，$1 \leqslant i < j \leqslant n$，则 $(i,j) \in T$. 令 (i,j) 是菱形 $EFGH$ 在 S 到 T 的映射 φ 下的像. 这样便建立了 S 到 T 的映射 φ. 容易验证，映射 φ 是双射. 因此，$|S| = |T| = \mathrm{C}_n^2$. 所以所求的边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数为 $3\mathrm{C}_n^2$

其次，将平行四边形按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类，这三类的平行四边形个数应相同，边不平行 BC 的所有平行四边形集合记作 V. 非负整数 $0,1,2,\cdots,n+1$ 构成的所有有序四元数组 (i,j,k,l)，$0 \leqslant i < j < k < l \leqslant n+1$ 构成的集合记作 W. 很明显，$|W| = \mathrm{C}_{n+2}^4$. 设 α 是 V 中平行四边形，延长它的四条边分别交 $B'C'$ 于点 i,j,k,l，其中 $0 \leqslant i < j < k < l \leqslant n+1$，则 $\beta = (i,j,k,l) \in W$. 令 β 是 α 在 V 到 W 的映射 φ 下的像. 这样便定义了 V 到 W 的一个映射 φ. 容易验证，φ 是双射. 因此，$|V| = |W| = \mathrm{C}_{n+2}^4$. 从而所求平行四边形的个数为 $3\mathrm{C}_{n+2}^4$

§1.3　针对性训练

A组

1.(1983. 高中联赛) 在六条棱长分别为 2,3,3,4,5,5 的所有四面体中,最大的体积是多少?证明你的结论.

2.(1984.高中联赛) 在 $\triangle ABC$ 中,P 为边 BC 上任意一点,$PE \parallel BA$,$PF \parallel CA$,若 $S_{\triangle ABC}=1$,证明:$S_{\triangle BPF}$,$S_{\triangle PCE}$ 和 $S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于$\frac{4}{9}$

3.(1988.高中联赛) 在坐标平面上,是否存在一个含有无穷多条直线 $l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots$ 的直线族,它满足条件:(Ⅰ)点$(1,1)\in l_n$,$n=1,2,\cdots$;(Ⅱ)$K_{n+1}=a_n-b_n$,其中 K_{n+1} 是 l_{n+1} 的斜率,a_n 和b_n 分别是 l_n 在x 轴和y 轴上的截距,$n=1,2,\cdots$;(Ⅲ)$K_nK_{n+1}\geqslant 0$,$n=1,2,\cdots$?并证明你的结论.

4.(1987.高中联赛) 在坐标平面上,纵横坐标都是整数的点为整点,试证:存在一个同心圆的集合,使得(Ⅰ)每个整点都在此集合的某一圆周上;(Ⅱ)在此集合的每个圆周上,有且只有一个整点.

5.(1989.高中联赛) 如果从数 1,2,…,14 中,按由小到大的顺序取出 a_1,a_2,a_3,使同时满足 $a_2-a_1\geqslant 3$ 与 $a_3-a_2\geqslant 3$,那么所有符合上述要求的不同取法有多少种?

6.(1992.高中联赛) 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$,若 X 是S_n 的子集,把 X 中的所有数的和称为X 的"容量",(规定空集的容量为 0) 若 X 的容量为奇(偶) 数,则称 X 为S_n 的奇(偶) 子集.(Ⅰ)求证:S_n 的奇子集与偶子集个数相等.(Ⅱ)求证:当 $X\geqslant 3$ 时,S_n 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等.(Ⅲ)当 $n\geqslant 3$ 时,求 S_n 的所有奇子集的容量之和.

B 组

1. 设有 $P(P\geqslant5)$ 个球队进行单循环赛(即每两个队都比赛一次,且仅比赛一次),又设①每场比赛没有平局;②对任意两个球队 x 和 y,如 x 胜 y,则其余 $P-2$ 个队中,胜 x 负于 y 的队数大于等于胜 y 负于 x 的队数,求证:对任意两队 A 和 B,如 A 胜 B,则必有两队 C 和 D,使比赛结果是 B 胜 C,C 胜 D,D 胜 A.

2. 对内角分别为$30^\circ,60^\circ,90^\circ$ 的三角形的顶点和各边四等分点共 12 个点,染以红色或蓝色,则必存在同色的三点,以它们为顶点的三角形与原三角形相似.

3.(1989.IMO预选)平面上已给 7 点,用一些线段连结它们,使得(ⅰ)每三点中至少有两点相连;(ⅱ)线段的条数最少.问有多少条线段?并给出一个这样的图形.

4.(1988.IMO预选)试求具有下述性质的最小自然数 n,使当将集合$\{1,2,\cdots,n\}$任意分成两个不相交的子集时,必可从其中之一选出三个数,其中两个数之积等于第三数.

5.(1990.IMO预选)试求所有正整数 K,使得集合 $Z=\{1990,1991,\cdots,1990+K\}$ 可以分解成不交的子集 A 与 B,且使两集中元素之和相等.

6. 在圆周上给定$2n-1(n\geqslant3)$个点,从中任选 n 个点染成黑色,试证一定存在两个黑点,使得以它们为端点的两条弧之一的内部,恰好含有 n 个给定的点.

7.(1988.国家集训选拔)把正$\triangle ABC$ 的各边 n 等分,过各分点在$\triangle ABC$ 内作各边的平行线,得到的图形叫做正$\triangle ABC$ 的 n 格点阵,(Ⅰ)求其中所有边长为$\frac{1}{n}|BC|$的菱形个数;(Ⅱ)求其中所有平行四边形的个数.

8.(1990.国家集训练习)设 $M=\{1,2,\cdots,20\}$,对于 M 的任一九元子集 S,$f(S)$ 取 1 至 20 中的一

个整数($1 \leqslant f(S) \leqslant 20$),证明:存在 M 的一个十元子集 T,使得所有的 $K \in T$,都有 $f(T \setminus \{K\}) \neq K$.

9.(1991.国家集训选拔)在一个车厢中,任何 $m(m \geqslant 3)$ 个旅客都有惟一的公共朋友(当甲是乙的朋友时,乙也是甲的朋友,任何人不作为他自己的朋友),问在这车厢中,朋友最多的人有多少个朋友?

第二章

“抽屉”、“容斥”与“极端”

§2.1 知识、方法、技能

所谓“抽屉”、“容斥”、“极端”，是指“抽屉原理，容斥原理，极端原理”.

Ⅰ. 抽屉原则

10个苹果放入9个抽屉中，无论怎么放，一定有一个抽屉里放了2个或更多个苹果. 这个简单的事实就是抽屉原则. 由德国数学家狄利克雷首先提出来的. 因此，又称为狄利克雷原则.

将苹果换成信、鸽子或鞋，把抽屉换成信筒、鸽笼或鞋盒，这个原则又叫做信筒原则、鸽笼原则或鞋盒原则. 抽屉原则是离散数学中的一个重要原则，把它推广到一般情形就得到下面几种形式：

原则一：把 m 个元素分成 n 类 $(m > n)$，不论怎么分，至少有一类中有两个元素.

原则二：把 m 个元素分成 n 类 $(m > n)$

(1) 当 $n \mid m$ 时，至少有一类中含有至少 $\frac{m}{n}$ 个元素；

(2) 当 $n \nmid m$ 时，至少有一类中含有至少 $[\frac{m}{n}] + 1$ 个元素.

其中 $n \mid m$ 表示 n 是 m 的约数，$n \nmid m$ 表示 n 不是 m 的约数，$[\frac{m}{n}]$ 表示不超过 $\frac{m}{n}$ 的最大整数.

原则三：把 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n - n + 1$ 个元素分成 n 类，则存在一个 k，使得第 k 类至少有 m_k 个元素.

原则四：把无穷多个元素分成有限类，则至少有一类包含无穷多个元素.

以上这些命题用反证法极易得到证明，这里从略.

一般来说，适合应用抽屉原则解决的数学问题具有如下特征：新给的元素具有任意性. 如10个苹果放入9个抽屉，可以随意地一个抽屉放几个，也可以让抽屉空着. 问题的结论是存在性命题，题目中常含有“至少有……”、“一定有……”、“不少于……”、“存在……”、“必然有……”等词语，其结论只要存在，不必确定，即不需要知道第几个抽屉放多少个苹果.

对一个具体的可以应用抽屉原则解决的数学问题还应搞清三个问题：

(1) 什么是“苹果”?

(2) 什么是“抽屉”?

(3) 苹果、抽屉各多少?

用抽屉原则解题的本质是把所要讨论的问题利用抽屉原则缩小范围，使之在一个特定的小范围内考虑问题，从而使问题变得简单明确.

用抽屉原则解题的基本思想是根据问题的自身特点和本质，弄清对哪些元素进行分类，找出分类的规律.

用抽屉原则解题的关键是利用题目中的条件构造出与题设相关的“抽屉”.

Ⅱ. 容斥原理

当我们试图对某些对象的数目从整体上计数碰到困难时，考虑将整体分解为部分，通过对每个部分的计数来实现对整体的计数是一种明智的选择. 将整体分解为部分也就是将有限集 X 表示成它的一组两两互异的非空真子集 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 的并集，即 $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 集族 $\varphi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$

叫做集合 X 的一个覆盖.一个特殊情况是,集族 φ 中的任意两个集合都不相交,这时我们称集族 φ 为集合 X 的一个(完全)划分.如果 φ 为集合 X 的划分,则对集合 X 的计数可通过熟知的加法公式

$$|X| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \cdots + |A_n| \quad ①$$

进行,但是,要找到一个划分并且其中所有子集易于计数的有时并非易事.我们可以考虑通过对任意的集族中的子集的计数来计算 $|X|$,当集族 φ 中至少存在两个集合的交非空时,我们称这个覆盖为集合 X 的不完全划分.对于集合 X 的不完全划分,显然有

$$|X| < |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \quad ②$$

因为在计算 $|A_i|$ 时出现了对某些元素的重复计数,为了计算 $|X|$,就得将②式右边重复计算的部分减去,如果减得超出了,还得再加上,也就是说我们要做"多退少补"的工作.完成这项工作的准则就是容斥原理.是十九世纪英国数学家西尔维斯特提出的.容斥原理有两个公式.

1. 容斥公式

定理 1 设 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为有限集,则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| \quad ③$$

证明:当 $n = 2$ 时,设 $A_1 \cap A_2 = B, A'_1 = A_1/B, A'_2 = A_2/B$,由加法公式有

$|A'_1| + |B| = |A_1|$, $|A'_2| + |B| = |A_2|$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2| &= |A'_1 \cup A'_2 \cup B|\\ &= |A'_1| + |A'_2| + |B|\\ &= (|A_1| - |B|) + (|A_2| - |B|) + |B|\\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\end{aligned}$$

结论成立.

若 $n = k$ 时结论成立,则由

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right|\\ &= \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{k}(A_i \cap A_{i+1})\right|\\ &= \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| + |A_{k+1}| - \sum_{i=1}^{k}\\ &\quad |A_i \cap A_{k+1}| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})| - \cdots + (-1)^{k}\left|\bigcap_{i=1}^{k}\right.\\ &\quad \left.(A_i \cap A_{k+1})\right|\\ &= \sum_{i=1}^{k+1} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k}\left|\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right|\end{aligned}$$ 知,

$n = k + 1$ 时结论成立.

由归纳法原理知,对任意自然数 n,公式③成立.

公式③称为容斥公式,显然它是公式①的推广.

如果将 A_i 看成具有性质 P_i 的元素的集合,那么 $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 就是至少具有 n 个性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 之一的元素的集合.因此,容斥公式常用来计算至少具有某几个性质之一的元素的数目.

2. 筛法公式

与容斥公式讨论的计数问题相反,有时需要计算不具有某几个性质中的任何一个性质的元素的个数,即 $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n|$.为此,我们先引入下面的引理.

引理 1 设 A 关于全集 I 的补集为 $\bar{A}$,则 $|A| + |\bar{A}| = |I|$

引理 2 $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$

引理简单证略.利用二引理改写公式③便得

定理 2 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为有限集 I 的子集,则

$$|\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i|=|\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}|=|I|-|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|$$

$$=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^n|\bigcap_{i=1}^{n}A_i| \quad ④$$

称为筛法公式.

Ⅲ. 极端原理

极端原理是一个极为简单的,极为重要的又是极易被人们忽视的原理,它的具体内容如下.

1. 最小数原理(1):在有限个实数组成的集合中,必存在最小的数.

最小数原理(2):设 N 是自然数全体组成的集合,若 M 是 N 的非空子集,则 M 中必有最小的数.

2. 最短长度原理(1):任意给定相异两点,所有连接这两点的线中,以直线段的长度为最短.

最短长度原理(2):在连接一已知点与一已知直线或已知平面上的点的所有线中,以垂线段的长度为最短.

3. 规划论的一个基本原则

当点(x,y)在平面上一个区域 P(包括边界)上变动时,一次函数 $P=ax+by$ 在P上的最大值和最小值总是在 P 的边界上达到,当区域 P 是一个多边形时,就一定在顶点上达到;如果 P 有一条边与直线族 $ax+by=P$ 平行,则在这条边上 $ax+by$ 的值都相等,且是最大值或最小值.

上述原理还要注意在"反证法"、"构造法"、"列举法" 中的运用,详见例 19,例 20.

§2.2 赛 题 精 讲

例 1 (1992.北京高一数学竞赛复试试题)一个体育代表团共有977 名运动员,他们着装运动服上的号码两两不同,但都小于 1992.

证明:至少有一名运动员的号码数恰等于另外两名运动员的号码数之和.

【分析】 问题的核心是抓住运动服上号码都小于 1992,利用 977 套运动服上号码两两不同构造出 1993 个小于 1992 的整数元素,以 1992 作为 1992 个抽屉,于是,必有一个抽屉中的两个元素相等.

问题是如何构造出这 1993 个小于 1992 的整数呢?请看证法一.

证法一:设体育代表团的 997 名运动员的号码数依次从小到大排列为:

$(A)1\leqslant x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{996}<x_{997}<1992$.作差组成 996 个差数:$x_i-x_1(i=2,3,4,\cdots,997)$,则有

$(B)1\leqslant x_2-x_1<x_3-x_1<x_4-x_1<\cdots<x_{996}-x_1<x_{997}-x_1<1992$

这样,(A)、(B) 总计共有 $997+996=1993$ 个正整数,这 1993 个正整数都小于 1992,根据抽屉原则,其中必有两数相等,但(A) 中号码彼此不等,(B) 中数值也彼此不等.所以只能是(A) 中某元素 x_n 与(B) 中某个元素 x_i-x_1 相等,即

$x_i-x_1=x_n$

当 $n\neq1$ 时,$x_i=x_1+x_n$,等式表示一名运动员号码数恰等于另两名运动员号码数之和的结论成立.

当 $n=1$ 时,即 $x_i-x_1=x_1$,这时从(B) 中删去 x_i-x_1,得到所余下的(B'),(B') 中共 995 个数,(A) 与(B') 共 1992 个数,这些数都是小于 1992 的正整数,而小于 1992 的正整数没有重复时共计 1991 个,则相当于将 1992 个元素放进 1991 个抽屉中,其中必有一个抽屉有两个元素,即由抽屉原理可知,这 1992 个数中必有两元素相等,并且只能是(B') 中的 x_p-x_1 与(A) 中的某个 x_k 相等,(此时 $p\neq i$),有 $x_p-x_1=x_k$

即 $x_p=x_1+x_k$ 成立.

但 x_k 是否等于 x_1 呢?事实上是不可能的,结论:$x_k \neq x_1$

假设 $x_k = x_1$,则有 $x_p = x_1 + x_1$,但前面已有 $x_i - x_1 = x_1$ 即 $x_i = x_1 + x_1 \therefore x_i = x_p$,(*) 可是与 x_1 相等的 $x_i - x_1$ 已从(B)中删去了,从而(*)式矛盾,故 $x_k \neq x_1$,此时,$x_p = x_1 + x_k$ 说明一名运动员号码 x_p 恰等于另两名运动员号码数 x_1 与 x_k 之和的结论成立.

综上可知,问题的结论成立.　　　　　　证毕.

【再分析】 另僻蹊径,别有洞天,注意列 997 个号码中最大的号码设为 n,则有 $997 \leqslant n < 1992$.这时不论 n 为奇数或为偶数,除去最大的数码后,可构造小于等于其和为 n 的 995 个"数偶"抽屉,而 997 个号码,除去最大的数码外,还剩下 996 个数码,这 996 个数码放入小于等于 995 的那么多个抽屉中,必有两个数码在一个抽屉中,其和当然为 n,则问题得证

然而其和为 n 的小于等于 995 那么个"数偶"抽屉从哪儿构造起呢?从最大数码 n 为奇数或为偶数的表示法:$n = 2k + 1$ 或 $n = 2k(k \in \mathbf{Z}_+)$ 中 k 入手即可.

另证如下

设 997 名运动员号码数最大的为 n,则 $997 \leqslant n < 1992$

(1) 当 n 为奇数时,设 $n = 2k + 1(k \in \mathbf{Z}_+)$,则除去最大的码数 $n = 2k + 1$ 后,可构造 k 个数偶:$(1,2k),(2,2k-1),(3,2k-2),\cdots,(k,k+1)$ 这 k 个数偶,任一组中两数之和均为 n

由于 $2k + 1 < 1992$,所以 $k \leqslant 995$

根据抽屉原理,其余 996 名运动员(除去最大号 n 外)的号码放在这 k 个抽屉中,必有两人的号码在同一抽屉中,即这个抽屉中的两个号码数之和等于 n,则问题得证.

(2) 当 n 为偶数时,设 $n = 2k,(k \in \mathbf{Z}_+)$,考虑$(1,2k-1),(2,2k-2),\cdots,(k-1,k-1),(k)$ 这 k 个数组中,前 $k-1$ 个数偶中的两个数之和均为 n

由于 $2k < 1992$,则 $k < 996$,即 $k \leqslant 995$

根据抽屉原理,除最大号码 n 外的 996 个号码中必有两个为前 $k-1$ 组中的一组,而这两个数之和均为 n,问题得证.

例 2　已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{99},a_{100}$ 都是实数,在集合

$\left\{a_1,\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\cdots,\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}}{100}\right\}$ 中至少 有 51 个元素的数值相等,求证:$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{99},a_{100}$ 中有两个数相等.

【分析】 若令 $b_i = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{i},(i = 1,2,\cdots,100)$ 应当看到一个明显的事实:

若 $b_i = b_{i+1} = p$,即若相邻的两个 b_i 与 b_{i+1} 相等,则有 $a_{i+1} = p$　　　　(*)

事实上,当 $b_i = b_{i+1}$ 时

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{i} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_i+a_{i+1}}{i+1}$$

$$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_i = i \cdot a_{i+1}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1+a_2+\cdots+a_i+a_{i+1} &= i \cdot a_{i+1} + a_{i+1}\\ &= (i+1)a_{i+1}\end{aligned}$$

$$\therefore a_{i+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_i+a_{i+1}}{i+1} = p$$

而结论(*)恰是我们构造抽屉的基础,我们可以将相邻两个 b_i,b_{i+1} 相等作为桥梁,将 100 个 $b_i(i = 1,2,\cdots,100)$ 每相邻两个 b_i 分别组成 50 个数偶,以这 50 个数偶作为抽屉,注意到 100 个 b_i 中至少有 51 个元素相等,即相等的 b_i 的个数比数偶的个数至少多 1 个,于是据抽屉原则可知,在这 50 个数偶中,必有一个数偶中的两个数,亦即 b_i 和 b_{i+1} 相等,由结论(*)便可知 $a_{i+1} = p$

其次,找到与 a_{i+1} 相等的另一个 a_i,可分成两种情况.$b_1 = p$ 和 $b_1 \neq p$ 两种情况遵循上述构造抽屉的方法,即可证明在 $a_i(i = 1,2,\cdots,100)$ 中有两个相等.

证明: 令 $b_i = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{i},(i = 1,2,3,\cdots,100)$,已知其中至少有 51 个元素 b_i 相等,设这个

数值为 p,则易知如下结论.

若 $b_i = b_{i+1} = p$,则 $a_{i+1} = p$ (*)

(证明从略)

于是,当 $b_1 = p$ 时,则 $a_1 = p$,将 $b_1,b_2,\cdots,b_{99},b_{100}$ 分成如下 50 组.

$\{b_1,b_2\},\{b_3,b_4\},\cdots,\{b_{99},b_{100}\}$

因为在 $b_i(i=1,2,3,\cdots,100)$ 这 100 个元素中至少有 51 个的数值相等,根据抽屉原则,必有一个数偶的两个数相等,设 $b_{2k+1} = b_{2k+2} = p$,由(*),则 $a_{2k+2} = p$,于是

$a_1 = a_{2k+2}$ 命题成立

当 $b_1 \neq p$ 时,(注意如下找到相等的两个 a_i 的方法),$\because b_1 \neq p$,$\therefore$ 相等的两个 a_i 中就不可能再有 a_1 了,于是将 $b_2,b_3,\cdots,b_{99},b_{100}$ 这 99 个元素分成如下 50 组:

$\{b_2,b_3\},\{b_4,b_5\},\cdots,\{b_{98},b_{99}\},\{b_{100}\}$

$\because$ 在 $b_i(i=2,3,\cdots,100)$ 这 99 个元素中至少有 51 个的数值相等,根据抽屉原则,必定有一组的两个数相等,设 $b_{2m} = b_{2m+1} = p$,则由结论(*),有 $a_{2m+1} = p$

再将 $b_2,b_3,\cdots,b_{99},b_{100}$ 这 99 个元素换一种分组方式,分组如下:

$\{b_2\},\{b_3,b_4\},\cdots,\{b_{99},b_{100}\}$

同样,$\because$ 在 $b_i(i=2,3,4,\cdots,100)$ 这99个元素中至少有51个的数值相等,根据抽屉原则,必有一组中的两个数相等,设 $b_{2n+1} = b_{2n+2} = p$,则由(*)可知,$a_{2n+2} = a$

于是 $a_{2m+1} = a_{2n+2}$

综上所述,结论成立.

例 3 (2000.第61届 Putnam 大学教学竞赛题)设 a_j,b_j,c_j 为整数,这里 $1 \leqslant j \leqslant N$,且对任意的 j,数 a_j,b_j,c_j 中至少有一个数为奇数,证明:存在整数 r,s,t 使得集合 $\{\mathrm{ra}_j + \mathrm{sb}_j + \mathrm{tc}_j \mid 1 \leqslant j \leqslant N\}$ 中,至少有 $\frac{4N}{7}$ 个数为奇数.

【分析】 本题命题起点为"抽屉原理与数的奇偶性的综合运用.

解:考虑不全为零的 7 个数组 (x,y,z),其中 $x,y,z \in \{0,1\}$,容易证明:第 a_j,b_j,c_j 不全为偶数,则集合 $Aj = \{xa_j + yb_j + zc_j \mid x,y,z \in \{0,1\}\}$ 中恰有 4 个为偶数,也恰有 4 个为奇数,这里 $1 \leqslant j \leqslant N$. 当然,在 $x = y = z = 0$ 时,$xa_j + yb_j + zc_j$ 为偶数.

由上述结论可知,$\{xa_j + yb_j + zc_j \mid x,y,z \in \{0,1\},x,y,z$ 不全为零,$1 \leqslant j \leqslant N\}$ 中,恰有 $4N$ 个数为奇数.

于是,由抽屉原理,可知存在一组数 $(x,y,z),x,y,z \in \{0,1\},x,y,z,$ 不全为零,使得 $\{xa_j + yb_j + zc_j \mid 1 \leqslant j \leqslant N\}$ 中至少有 $\frac{4N}{7}$ 个奇数.

【评注】 本题解题关键是:$\{xa_i + yb_j + zc_j \mid x,y,z \in \{0,1\},x,y,z$ 不全为零,$1 \leqslant j \leqslant N\}$ 中,恰有 $4N$ 个数为奇数,用抽屉原理得结论.

例 4 (2000.CMO题)某次考试有5道选择题,每题即有 4 个不同答案供选择,每人每题恰选 1 个答案. 在 2000 份答案中发现存在一个 n,使得任何 n 份答卷中都存在 4 份,其中每两份的答案都至多 3 题相同,求 n 的最小可能值.

【分析】 命题起点为"抽屉原则与特例法的综合运用."

解:将每道题的 4 种答案分别记为 1,2,3,4,每份试卷上的答案记为 (g,h,i,j,k),其中 $g,h,i,j,k \in \{1,2,3,4\}$,令

$\{(1,h,i,j,k),(2,h,i,j,k),(3,h,i,j,k),(4,h,i,j,k)\},h,i,j,k = 1,2,3,4$,共得 256 个四元组.

由于 $2000 = 256 \times 7 + 208$,故由抽屉原理知有 8 份考卷上的答案属于同一个四元组,取出这 8 份考卷后,余下的 1992 份中仍有 8 份属于同一个四元组;再取出这 8 份考卷,余下的 1984 份中又有 8 份属于同一个四元组;取出这 8 份考卷,连同前两次取出的考卷共 24 份,在这 24 份考卷中,任何 4 份中总有两

份的答案属于同一个四元组，当然不满足题中的要求．所以，所求的最小值$\geqslant 25$.

另一方面，令

$\zeta=\{(g,h,i,j,k)\mid g+h+i+j+k\equiv 0(mod 4)g,h,i,j,h\in\{1,2,3,4\}\}$

则$|\zeta|=256$，且ζ中任何两种答案都至多有3题相同，从ζ中去掉6个元素，当余下的250种答案中的每种答案都恰有8人选用时，共得到2000份答卷，其中的任何25份答案中，总有4份不相同，由于它们都在ζ中，当然满足题中要求，这表明$n=25$时可以满足题中要求.

综上所述，所求的n的最小可能值为25.

【评注】 上述解法的解题关键是，多次利用抽屉原理得$n\geqslant 25$，再举例说明$n=25$取得．其中构造"抽屉"为$\{(1,h,i,j,k),(2,h,i,j,k),(3,h,i,j,k),(4,h,i,j,k)\}.h,i,j,k=1,2,3,4$.

例5 （第39届美国普特南数学竞赛题）在1,4,7,10,13,…,100中任选出20个数，其中至少有不同的两对数，其和都等于104，试证明之.

证明：给定的数共有34个，其相邻两数的差均为3，我们把这些数分成如下18个不相交的集合.

$\{1\},\{52\},\{4,100\},\{7,97\},\cdots,\{49,55\}$．且把它们分作是18个抽屉，从已知的34个数中任选20个数，即使把前面两个抽屉中的数1和52都取出，则剩下的18个数在后面的16个抽屉中至少有不同的两个抽屉中的数全被取出，这两个抽屉中的数互不相同，每个抽屉中的两个数的和都是104.

【评注】 此例是根据某两个数的和为104来构造抽屉．一般地，与整数集有关的存在性问题也可根据不同的需要利用整数间的倍数关系，同余关系来适当分组而构成抽屉.

例6 （第28届IMO第3题）设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为实数，满足$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：对于每一整数$k\geqslant 2$，存在不全为零的整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$使得$|a_i|\leqslant k-1(i=1,2,\cdots,n)$，并且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

证明：由柯西不等式得

$$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2\leqslant(1^2+1^2+\cdots+1^2)(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n^2)$$

即 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}$

所以 当$0\leqslant a_i\leqslant k-1$时，有

$$\begin{aligned}&a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|\\&\leqslant(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\\&\leqslant(k-1)\sqrt{n}\end{aligned}$$

把区间$[0,(k-1)\sqrt{n})$等分成k^2-1个小区间，每个小区间的长度为$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$，由于每个$a_i$能取$k$个整数，因此$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|$共有$k^n$个正数，由抽屉原则知必有二数会落在同一个小区间之内，设它们分别是$\sum_{i=1}^{n}a_i{}'|x_i|$与$\sum_{i=1}^{n}a_i{}''|x_i|$

因此有 $$\left|\sum_{i=1}^{n}(a_i{}'-a_i{}'')|x_i|\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}\quad ①$$

很明显，我们有$|a_i{}'-a_i{}''|\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n$

现在取

$$a_i\begin{cases}a_i{}'-a_i{}''\ (\text{如果 } x_i\geqslant 0)\\a_i{}''-a_i{}'\ (\text{如果 } x_i<0)\end{cases}$$

这里$i=1,2,\cdots,n$，于是①可表示为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

这里a_i为整数，适合$|a_i|\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n$

【评注】 如上例所示，在证明存在某些有界量使相关的不等式成立时，可类似地把某区间划分为

若干小区间作成抽屉,借用抽屉原则来证明.

例 7 (第20届IMO第6题)一个国际社团的成员来自六个国家共有1978人,用1,2,…,1977,1978来编号,试证明:该社团至少有一个成员的编号或者与他的两个同胞的编号之和相等,或者是其中一个同胞的编号的两倍.

证明:可用反证法来证明与本题完全相当的下列问题:把数列1,2,…,1978按任一方式分成六组,则至少有一组具有这样的性质:其中有一个数或等于同组中其他两数之和,或等于其中某一个数的两倍.

假设这六组中的每一组数都不具备上述性质,也就是说每一组数都具备下列性质,记作性质(P).

同组中任何两数之差必不在此组中.

因为如果有a,b连同$a-b$都在同一组中,那么由$a=b+(a-b)$可知,这组已具备题目所要求的性质.

因$1978\div 6>329$,所以由抽屉原则可以肯定有一个组A,其中至少有380个正整数,现在从A中任意取出330个数来,记其中最大的那个数为a_1,把a_1分别减去其余329个数而得到329个差,它们互不相等且均小于1978.由性质(P),它们不会再在组A中,即应属于其余五组.又因$329\div 5>65$.再由抽屉原则可以肯定有一组B,其中至少含有上述329个数中的66个数,从B中任取66个数且记其中最大的那个数为b_1,再把b_1减去其余65个数,得出的差显然不再属于B,当然也不会属于A

假如其中的某一个数b_1-b属于A,由于b_1与b分别可以写为

$b_1=a_1-a',b=a_1-a$

其中a与a'都属于A,于是

$b_1-b=(a_1-a')-(a_1-a)=a-a'$

这就同A具备性质(P)的假设相违背,这就是说上述65个数必属其余四个数组.

由于$65\div 4>16$,所以至少有一组,称为C,至少会有上述65个整数中的17个,反复进行上述推理,最后可得一数组F,其中至少会有两个数,大数与小数之差是一个小于1978的正整数,可是它不在A、B、C、D、E、F的任一组中,这显然是一个矛盾,这矛盾说明至少有一组数不具备性质(P).即题目的结论是正确的.

【评注】 我们容易发现,如果把此题中1978改为任何一个不小于1975的正整数后其结论仍是成立的.上例的解答过程说明了对有些数学问题需要我们连续运用抽屉原则,而且每构造一次抽屉都把范围缩小一些.

例 8 (1990.匈牙利数学竞赛题)已知1与90之间的19个(不同的)正整数,两两的差中是否一定有三个相等?

证明:设这19个数为$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{19}\leqslant 90$

由于 $a_{19}-a_1=(a_{19}-a_{18})+(a_{18}-a_{17})+\cdots+(a_2-a_1)$

若右边的18个差中无三个相等,而只有两个相等,且取最小的,则

$a_{19}-a_1>2\times(1+2+\cdots+9)=90$

这与$a_{19}-a_1\leqslant 90-1=89$矛盾.

所以两两的差中定有三个相等.

抽屉原则实际上都是重叠原则,这里再介绍抽屉原则的几种变形:

平均量重叠原则:把一个量S任意分成n份,则其中至少有一份不大于$\dfrac{S}{n}$,也至少有一份不少于$\dfrac{S}{n}$.

面积的重叠原则:在平面上有n个面积分别是$A_1,A_2,\cdots,A_n$的图形,把这n个图形按任何方式一一搬到某一个面积为A的固定图形上去.

(1) 如果$A_1+A_2+\cdots+A_n>A$,则至少有两个图形有公共点;

(2) 如果$A_1+A_2+\cdots+A_n<A$,则固定图形中至少有一个点未被盖住.

例9 (第1届全俄数学奥林匹克试题)在一个面积为20×25的长方形内任意放进120个面积为1×1的正方形,证明:在这个长方形内一定还可以放下一个直径为1的圆,它和这120个正方形的任何一个都不相重叠.

证明:要使直径为1的圆完全放在一个矩形里,它的圆心应与矩形任何一条边的距离不小于$\frac{1}{2}$,这可从20×25的长方形$ABCD$的每一边剪去一个宽为$\frac{1}{2}$的长条,则余下的长方形$A'B'C'D'$的面积为$19\times 24=456$[如图 Ⅱ-6-2-1].这样,任意放进长方形$ABCD$内的直径为1的圆心都在长方形$A'B'C'D'$中,此外,圆心应与任何一个正方形的边界的距离也大于$\frac{1}{2}$,即在任何一个小正方形以外加上$\frac{1}{2}$的框[如图 Ⅰ-3-2-2(b)]所得图形的面积是

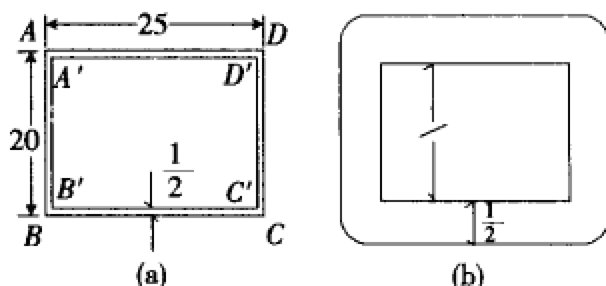


图 Ⅱ-6-2-1

$$1+4\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=3+\frac{\pi}{4}$$

用这样的120个图形互不相交地去覆盖长方形$A'B'C'D'$,它们的总面积等于

$$120\times(3+\frac{\pi}{4})$$

但是$120\times(3+\frac{\pi}{4})<120\times\frac{12+3.2}{4}=30\times 15.2=456$

这说明用这样的120图形不能覆盖一个面积为456的长方形,从而可以在长方形$ABCD$内放置一个直径为1的圆,它不与所有的小正方形中的任何一个重叠.

例10 (1968.波兰数学竞赛题)设n与k是正整数,$n>3$,$\frac{n}{2}<k<n$,平面上有n个点,其中任意三点不共线,如果其中每个点都至少和其他k个点用线段连接,则连接的线段中至少有三条围成一个三角形.

证明:因为$n>3$,$k>\frac{n}{2}$,所以$k\geqslant 2$.这表明,n个点中必有两个点a与b,它们之间连一线段,余下的点构成的集合记作X.X中用线段与a连接的所有点的集合记作$n-2$.另一方面,由已知条件,$|A|\geqslant k-1$,$|B|\geqslant k-1$,则由容斥公式,$n-2\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\geqslant 2k-2-|A\cap B|$

即 $|A\cap B|\geqslant 2k-n>0$

这就证明了$A\cap B\neq\varnothing$,也就是说$A\cap B$中必有一点c,它与a,b构成一个$\triangle ABC$

例11 (匈牙利数学竞赛试题)由数字1、2和3组成n位数,要求n位数中1,2和3的每一个至少出现一次,求所有这种n位数的个数.

解:由数字1,2和3组成的n位数的集合记作S,则$|S|=3^n$

设S中所有不含k的n位数的集合记作$A_k(A_k=1,2,3)$,则$\overline{A}_k$是S中所有含有数字k的n位数的集合,$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$即是$S$中同时含有数字1,2和3的$n$位数的全体构成的集合.由筛法公式:

$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$

因$A_k(k=1,2,3)$是S中所有不含数字k的n位数的集合,所以$|A_k|=2^n$

$A_i\cap A_j$是所有不含数字i和j的n位数的集合,所以$|A_i\cap A_j|=1,1\leqslant i<j\leqslant 3$

显然$A_1\cap A_2\cap A_3=\varnothing$,则$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

所以满足此题要求的n位数的个数为$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=3^n-3\times 2^n+3$

例12 如果记小于n且与n互质的数的个数为$\varphi(n)$,则在数论上叫函数$\varphi(n)$为欧拉函数,试求$\varphi(60)$

解:$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

设1到60中 $k(k = 2,3,5)$ 的倍数的集合为 A_k,则

$|A_2| = [\frac{60}{2}] = 30$, $|A_3| = [\frac{60}{3}] = 20$

$|A_5| = [\frac{60}{5}] = 12$, $|A_2 \cap A_3| = 10$

$|A_2 \cap A_5| = 6$, $|A_3 \cap A_5| = 4$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 2$

由筛法公式

$$\begin{aligned}\varphi(60) &= |\overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_5| = 60 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5| \\ &= 60 - (30 + 20 + 12 - 10 - 6 - 4 + 2) = 16\end{aligned}$$

事实上,小于60且互质的数有:1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49,53,59这16个.

一般地,如 $n = P_1^{a_1}P_2^{a_2}\cdots\cdots P_k^{a_k}$($P_1,P_2,\cdots\cdots P_k$ 是不同的质数,$a_1,a_2,\cdots a_k$ 是正整数),则

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{P_1})(1 - \frac{1}{P_2})\cdots\cdots(1 - \frac{1}{P_k})$$

利用这个公式计算例10,即为

$$\varphi(60) = 60(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 60 \times \frac{1 \times 2 \times 4}{2 \times 3 \times 5} = 16$$

【评注】 用容斥公式或筛法公式解题的关键是根据题意构造出能覆盖整个已知集合的若干子集,至于求出这些子集及相应子集的不同交集的元素个数是容易的.

例13 某人写了 n 封信及 n 个写了相应收信人的姓名及邮编、地址的信封,现把所有的信一一装到信封中去,求所有的信全部装错信封的装法总数.

解:设 I 为所有的装法构成的集合,则显然有 $|I| = n!$,我们用 $1,2,3,\cdots,n$ 分别对信和信封进行编号,并记 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为第 i 封信恰装入第 i 个信封的所有装法构成的集合,则 $\overline{A}_i$ 为第 i 封信不装入第 i 个信封的所有装法构成的集合,而所求的全部装错的装法的集合即为 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$

由筛法公式

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n|$$

$$= |I| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

我们容易求得

$|A_i| = (n-1)!(i = 1,2,\cdots,n)$

$|A_i \cap A_j| = (n-2)!(i,j = 1,2,\cdots,n$,且 $i < j)$

$\cdots$

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!(i_1,i_2,\cdots,i_k = 1,2,\cdots,n$,且 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$

$\cdots$

$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 0! = 1$

所以

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| \\ &= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \cdots + (-1)^k C_n^k(n-k)! + \cdots + (-1)^n C_n^n 0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})\end{aligned}$$

因此,n 封信装入 n 个信封时全部装错的方法总数为

$$n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

【评注】 这个问题通常称为伯努利—欧拉错装信封问题,最早考虑这类问题的是伯努利,后来欧

拉对这个题发生兴趣,称之为“组合理论的一个妙题”,并在与伯努利毫无联系的情况下独自解决了这道难题.

这个问题又称为乱序排列,即把 n 个元素的排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 重新排列,使每个元素都不在原来的位置上排列问题.

在 1960—1961 年波兰数学竞赛中曾有六个信笺装错问题:

某人给六个不同的收信人写了六封信,并且准备了六个写有收信人地址的信封,有多少种投放信笺的方法,使每份信笺与信封上的收信人皆不相符?

例 14 (第 4 届全国冬令营试题)设 S 是复平面上的单位圆周(即模等于 1 的复数的集合),f 是从 S 到 A 的映射,对于任何 $Z\in S$,定义

$f^{(1)}(Z)=f(Z)$

$f^{(2)}(Z)=f(f(Z))$

…………

$f^{(k)}(Z)=f(f(\cdots(f(Z)))),\cdots$

如果 $C\in S$ 及自然数 n 使得

$f^{(1)}(C)\neq C,f^{(2)}(C)\neq C,\cdots,f^{(n-1)}(C)\neq C,f^{(n)}(C)=C$

我们就说 C 是 f 的 n - 周期点.设 m 是大于 1 的自然数且 f 的定义如下:

$f(Z)=Z^m,Z\in S$

试求:f 的 1989 - 周期点的总数.

解:因 $f(Z)=Z^m,Z\in S$,所以由数学归纳法容易证明 $f^n(Z)=Z^{m^n},n\in N$

设 $B_n=\{Z\in S\mid f^{(n)}(Z)=Z\}$,因为 B_n 是 1 的 m^n-1 次根的全体构成之集合,所以 B_n 中的元素个数为 $|B_n|=m^n-1$

如 $Z_0\in S$,有 $f^{(n)}(Z_0)=Z_0$ 且 Z_0 为 f 的 m - 周期点,则必有 $m\mid n$.否则可设 $n=pm+q,0\leqslant q\leqslant m$.于是有 $Z_0=f^{(n)}(Z_0)=f^{(q)}\cdot f^{(m)}\cdots f^{(m)}(Z_0)=f^{(q)}(Z_0)$

如 $q\neq 0$,则上式意味着 Z_0 为 f 的 q - 周期点,这与已知 Z_0 为 f 的 m - 周期点矛盾,故只有 $q=0$,即 $m\mid n$

设 $T=\{f$ 的 1989 - 周期点$\}$,则因为 $1989=3^2\times 13\times 17$,可得 $T=B_{1989}\setminus(B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663})$.事实上 $T\subset B_{1989}\setminus(B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663})$ 是显然的.另外,对于任意的 $Z_0\in B_{1989}\setminus(B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663})$,因 $f^{(1989)}(Z_0)=Z_0$,故有 $k\leqslant 1989$,使 Z_0 为 f 的 k - 周期点,如 $k<1989$,则如前面所证,有 $k\mid 1989$,从而 k 至少是 117,153,663 这三个数中的一个数,故 $Z_0\in B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663}$,矛盾,故 $k=1989$,即 $Z_0\in T$

由容斥公式

$|B_{117}\cup B_{153}\cup B_{663}|$

$=|B_{117}|+|B_{153}|+|B_{663}|-|B_{117}\cap B_{153}|-|B_{117}\cap B_{663}|-|B_{153}\cap B_{663}|+|B_{117}\cap B_{153}\cap B_{663}|$

$=|B_{117}|+|B_{153}|+|B_{663}|-|B_9|-|B_{39}|-|B_{51}|+|B_3|$

$=m^{117}-1+m^{153}-1+m^{163}-1-m^9+1-m^{39}+1-m^{51}+1+m^3-1$

所以,f 的 1989 - 周期点的总数为

$m^{1989}-m^{663}-m^{153}-m^{117}+m^{51}+m^{39}+m^9-m^3$

前面通过例题说明了抽屉原则和容斥原理在竞赛当中应用.下面介绍极端原理在竞赛中的应用.

例 15 (1979.广东数学竞赛题)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $2n$ 个正数,且 ${a_1}^2+a_2^2+\cdots+{a_n}^2=1,{b_1}^2+b_2^2+\cdots+{b_n}^2=1$,求证:$\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}$ 中存在一个值一定不大于 1

证:因 $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_n}{b_n}$ 这 n 个数中,如有最小数,不妨设为 $\frac{a_r}{b_r}$,即 $\frac{a_r}{b_r}\leqslant\frac{a_i}{b_i}(i=1,2,\cdots,n)$

由于 $b_i > 0$，于是

$$\frac{a_r}{b_r} \cdot b_i \leqslant a_i, (\frac{a_r}{b_r})^2 \cdot b_r^2 \leqslant a_i^2 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

因此，$(\frac{a_r}{b_r})^2(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \leqslant a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$，由题设条件，即有

$(\frac{a_r}{b_r})^2 \leqslant 1$，亦即 $\frac{a_r}{b_r} \leqslant 1$

例 16 有 n 个男生，m 个女生($n, m \geqslant 2$)，每个男生至少与一女生彼此相识，每个女生不全认识 n 个男生，证明：他们当中，如有两个男生与两个女生，其中每个男生恰好认识其中一女生，其中每个女生恰好认识其中一男生.

证：由于男生集合和女生集合都是有限集合，因此必有一个女生认识的男生最多，设 a_1 是认识男生最多的女生.

由题设，每个女生不全认识 n 个男生，则 a_1 至少与一个男生不相识，设 a_1 与男生 b_1 不相识，又由题设，每个男生至少与一个女生彼此相识，设 b_1 认识女生 a_2

由于女生 a_2 认识的男生不如 a_1 认识的男生多，所以必有一男生 b_2，使得 a_1 与 b_2 相识且 a_2 与 b_2 不相识.

于是，对于 a_1, a_2, b_1, b_2，女生 a_1 仅认识男生 b_2，a_2 仅认识男生 b_1　　证毕.

【评注】 上例的一种变形便是 1964 年匈牙利的一道竞赛题，晚会上 $n(n \geqslant 2)$ 对男女青年双双起舞，设任何一个男青年都未与全部女青年跳过舞，而每个女青年都至少与一个男青年跳过. 求证：必有两男 b_1, b_2 及两女 g_1, g_2，使得 b_1 与 g_1，b_2 与 g_2 跳过舞而 b_1 与 g_2，b_2 与 g_1 均未跳过.

例 17 （1969. 美国普特南数学赛题）求证：单位长的任何曲线能被面积为 $\frac{1}{4}$ 的闭矩形覆盖.

证明：设曲线端点连线所在直线设为 l，设矩形 $ABCD$ 是覆盖曲线且边 $AB \parallel CD \parallel l$，$BC \perp l$，$DA \perp l$ 的最小矩形，令 $AB = a$，$BC = b$，则曲线和矩形的四边都有公共点，分别记为 P_1, P_2, P_3, P_4，曲线的端点是 P_0, P_5，如图 Ⅱ-6-2-2，则折线长 $P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_5 \leqslant$ 曲线长 $= 1$

图 Ⅱ-6-2-2

设 $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5$ 在 l 上的射影长分别是 x_i，$i = 1,2,\cdots,5$，则 $\sum_{i=1}^{5} x_i \geqslant a$

同理，设 $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5$ 在垂直于 l 的直线上的射影长是 y_i，$i = 1,2,\cdots,5$，则 $\sum_{i=1}^{5} y_i \geqslant 2b$

于是

$$1 \geqslant P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_5$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2} + \sqrt{x_4^2 + y_4^2} + \sqrt{x_5^2 + y_5^2}$$

$$\geqslant \sqrt{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)^2}$$

（闵可夫斯基不等式）

$$\geqslant \sqrt{a^2 + 4b^2}$$

由平均值不等式得

$a \cdot b = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + 4b^2}{2} \leqslant \frac{1}{4}$，故矩形 $ABCD$ 的面积不大于 $\frac{1}{4}$，即证.

例 18 （1978. 全国高中联赛）设 R 为平面上以 $A(4,1)$，$B(-1,-6)$，$C(-3,2)$ 三点为质点的三角形区域（包括三角形内部及周界）. 试求当 (x,y) 在 R 上变动时，函数 $4x - 3y$ 的极大值和极小值.（须证明你的论断）

解:如图 Ⅱ $-6-2-3$,令 $\lambda=4x-3y$,显见,当 λ 固定,(x,y) 变动时,我们即得到平面上一条直线,再令 λ 变动,则得平面上一系列相互平行的直线,在其中每一条直线上,$4x-3y$ 的值相同,当直线经过 A 点时,$\lambda=B$,此时直线过$(3.25,0)$,当直线经过 B 点时,$\lambda=14$,此时直线经过$(3.5,0)$,当直线经过 C 点时,$\lambda=-18$,此时直线经过$(-4.5,0)$,即直线 $\lambda=4x-3y$ 和 x 轴交于$(x',0)=(\frac{1}{4}\lambda,0)$,而 $\lambda=4x'$ 和 x' 成正比,由于 $-4.5\leqslant x'\leqslant 3.5$,所以 $-18\leqslant\lambda\leqslant 14$,所求极大值和极小值分别是 14 和 -18

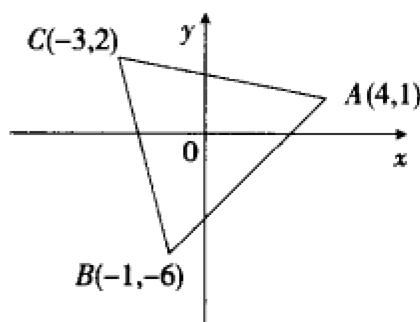


图 Ⅱ $-6-2-3$

例 19 (1963.美国普特南数学竞赛题)设 $f(n)$ 是定义在自然数集上且取自然数值的严格递增函数,$f(2)=2$,当 m,n 互质时,有 $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$,求证:对一切自然数 n 都有 $f(n)=n$

证:由已知有 $f(3)\cdot f(7)=f(21)<f(22)=f(2)\cdot f(11)=2f(11)<2f(14)=2\cdot f(2)\cdot f(7)=4f(7)$

所以 $f(3)<4$,又 $f(3)>f(2)=2$,所以 $f(3)=3$

假设命题不成立,设使 $f(n)\neq n$ 的最小自然数为 $n_0(\geqslant 4)$.

又因为 $f(n)$ 严格递增,所以 $n\geqslant n_0$ 时,$f(n)>n$ ①

当 n 为奇数时,2 与 n_0-2 互质,故有

$$f[2(n_0-2)]=f(2)\cdot f(n_0-2)$$
$$=2f(n_0-2)$$
$$=2(n_0-2)$$

因为 $n_0\geqslant 4$,所以 $2(n_0-2)\geqslant n$ ②

此时 ①,② 相矛盾.

当 n_0 为偶数时,2 与 n_0-1 互质,于是

$$f[2(n_0-1)]=f(2)\cdot f(n_0-1)$$
$$=2f(n_0-1)$$
$$=2(n_0-1) \quad ③$$

显然 $2(n_0-1)>n_0$,导致 ①,③ 相矛盾.

综上知假设不成立,故命题获证.

【评注】 与反证法联用,是运用极端性原则的常见形式,不仅如此,应用极端性原则,是使用反证法时,加强效果的强有力手段.

例 20 (1971.波兰数学竞赛题)求最大的整数 A,使对于由 1 到 100 的全部整数的任一排列,其中都有 10 个位置相邻的数,其和大于或等于 A

解:设 $T=(a_1,a_2,\cdots,a_{100})$ 是从 1 到 100 的自然数的一个排列.

考察相邻 10 项之和 $\sum\limits_{k=1}^{10}a_{n+k}$,$n=1,2,\cdots,90$

这是一个有限集,在有限集中必有一个最大数,设为 $A_1=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant 90}\sum\limits_{n=1}^{10}a_{n+1}$

于是 T 中有某 10 个相邻项之和为 A_T,其令任何相邻 10 项之和都不大于 A_r

由 A_r 的定义可得

$A_r\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$A_r\geqslant a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$

$\cdots$

$A_r\geqslant a_{91}+a_{92}+\cdots+a_{100}$

相加得

$$10A_r \geqslant \sum_{i=1}^{100} a_i = 5050$$

$$\therefore A_r \geqslant 505 \qquad ①$$

由题意，我们是寻找对所有的排列 T 中最小的 A_T，即 $A = \min A_T$

下面我们可以构造出一个排列 T'，使得对排列 T'，其 $A''_1 \leqslant 505$

事实上，可以这样排列 1 到 100

$$T' = (100,1,99,2,98,3,\cdots,51,50)$$

即满足

$$a_{2n+1} = 100 - n, \quad 0 \leqslant n \leqslant 49$$

$$a_{2n} = n \quad 1 \leqslant n \leqslant 50$$

此时有

$$\begin{aligned}
&a_{2k} + a_{2k+1} + \cdots + a_{2k+9} \\
&= (a_{2k} + a_{2k+2} + \cdots + a_{2k+8}) + (a_{2k+1} + a_{2k+3} + \cdots + a_{2k+9}) \\
&= (k + k + 1 + k + 2 + k + 3 + k + 4) + [100 - k + 100 - (k + 1) + 100 - (k + 2) + 100 - (k + 3) + 100 - (k + 4)] \\
&= 500
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_{2k+1} + a_{2k+2} + \cdots + a_{2k+10} \\
&= (a_{2k} + a_{2k+1}) + (a_{2k+2} + a_{2k+3}) + \cdots + (a_{2k+8} + a_{2k+9}) + a_{2k+10} - a_{2k} \\
&= 500 + k + 5 - k \\
&= 505
\end{aligned}$$

于是

$$A_T \leqslant 505 \qquad ②$$

由 ① 和 ② 得 $A = 505$

【评注】 此例是在符合题设要求的条件下，从某种极端情形出发通过构造使问题得以解决.

§2.3 针对性训练

A组

1. 从1 ~ 100 的自然数中,任意取出 51 个数,证明其中一定有两个数,它们中的一个是另一个的整数倍.

2. 设 a 为任意数,n 是正整数,证明总可以找到整数 p 和 $q(1 \leqslant p \leqslant n)$,使得 $|pa - q| < \frac{1}{n}$

3. 求不大于10^6 而至少能被 3,5,7 之一整除的正整数的个数.

4.(第 4 届莫斯科数学奥林匹克试题) 在小于 1000 的正整数中,既不能被 5 整除也不能被 7 整除的数有多少个?

5. 数学竞赛给出 A、B、C 三道题,有 25 个学生参加竞赛,每个学生至少能解出一道题,在没有解出 A 题的学生中解出 B 题的人数是解出 C 题的人数的 2 倍,只解出 A 题的人数比其余解出 A 题的人数多 1,在只解出一题的学生中有一半不能解出 A 题,试求只解出 B 题的学生数.

6. 把 8 张卡片 $AABBCDEF$ 排成一列,相同字母的卡片不许相邻的排法有多少种?

7. 某人写了4 封信,并在信封上写下了对应的收信人的姓名及地址,问把所有的信笺装错信封的情况有多少种?

8.(1987. 高中联赛)$n(n > 3)$ 个乒乓球选手单打比赛若干场后,任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同,试证明:总可以从中去掉一名选手,而使在余下的选手中,任意两个选手已赛过的对手仍

然不完全相同.

9.(1988.高中联赛)已知 $a_1=1, a_2=2$,且对 $n=1,2\cdots$

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n;当\ a_n\cdot a_{n+1}\ 为偶数\\ a_{n+1}-a_n;当\ a_n\cdot a_{n+1}\ 为奇数\end{cases}$$

试证:对一切自然数 n,都有 $a_n\neq 0$

10.(1990.高中联赛)某市有 n 所中学,第 i 所中学派出 C_i 名学生到体育馆观看球赛($0\leqslant C_i\leqslant 39$, $i=1,2,\cdots,n$),全部学生总数为 $C_1+C_2+\cdots+C_n=1990$.看台的每一横排有 199 个座位,要求同一学校的学生必须坐在同一横排,问体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能按要求入座?

11.(1993.匈牙利)在平面上有矩形的无穷集合,其中每个矩形的顶点坐标为$(0,0),(0,m),(n,m),(n,0)$.此处 n 和 m 都是正整数(不同矩形对应 m,n 的值不同),求证:从这些矩形中可选出两个来,使得一个矩形包含在另一个之中.

12.(1991.亚太地区)若平面上有 997 个点,如果每两点连一条线段,且中点涂成红色,证明:平面上至少有 1991 个红点,你能找到一个正好是 1991 个红点的特例吗?

13.(1976.USAMO)求方程 $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 的所有整数解,并证明之.

B 组

1.(1988.加拿大)设 S 为平面上的一个有限点集(含点数 $\geqslant 5$,其中的若干点涂上红色,其余的点涂上蓝色,设任何三个及三个以上的同色的点不共线.求证:(Ⅰ)它的三个顶点涂有相同的颜色;(Ⅱ)这三角形至少有一条边上不包含另一种颜色的点.

2.(1989.USAMO)一个网球俱乐部的 20 位成员已经被安排了 14 场单打比赛,其中每个成员至少参加一场比赛,求证:在这种安排中必有六场比赛是在 12 名不同选手之间进行的.

3.(1987.CMO) 某次体育比赛,每两名选手赛一场,每场比赛一定决出胜负.通过比赛确定优秀选手.选手 A 为优秀选手的条件是:对任何选手 B,或者 A 胜 B,或者 A 间接胜 B,即存在选手 C,使得 A 胜 C 而 C 胜 B,如果按上述规则确定的选手只有一名,求证这名选手全胜所有其它选手.

4.(1988.CMO) 在有限项的实数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \qquad (*)$$

中,如果一段数 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+l}$ 的算术平均值大于 1988,那么我们把这段数称为一条"龙",并把 a_k 称为这条龙的"龙头".(如果某一项 $a_m > 1988$,那么单独这一项也是龙).假定数列(*)中至少存在一条龙,求证(*)中全体可以作为龙头的项的算术平均值必定大于 1988.

5.(1990.CMO) 设 X 是一个有限集合.法则 f 使得 X 的每个偶子集 E(由偶数个元素组成的子集)都对应一个实数 $f(E)$,满足如下条件:(i)存在一个偶子集 D,使得 $f(D) > 1990$;(ii)对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A, B 都有

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 1990$$

求证:存在 X 的子集 P 和 Q,使得

(a) $P \cap Q = \varnothing, P \cup Q = X$

(b) 对 P 的任何非空偶子集 S,有 $f(s) > 1990$

(c) 对 Q 的任何偶子集 T,有 $f(T) \leqslant 1990$

6.(1993.CMO) 给定集合 $S = \{Z_1, Z_2, \cdots, Z_{1993}\}$,其中 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_{1993}$ 都是非零负数.(可看作平面上的非零向量).求证:可以把 S 中的元素分成若干组,使得(i)S 中的每个元素属于且仅属于其中一组;(ii)每组中的任一复数与该组中所有复数之和的夹角不超过 90°;(iii)将任意两组中的所有复数分别求和,所得的两个和数之间的夹角大于 90°.

7.(1997.IMO) 设 $f(n)$ 是一个在正整数集 N_+ 上有定义并在 N 中取值的函数.试证:如果对于每个 $n \in \mathrm{N}$,不等式 $f(n+1) > f(f(n))$ 成立,则对所有 $n \in \mathrm{N}$,都有 $f(n) = n$,

8.(1988.IMO) 已知正整数 a 与 b 使得 $ab + 1$ 整除 $a^2 + b^2$

求证:$\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ 是某个正整数的平方.

第三章

组合计数方法

§3.1 知识、方法、技能

组合计数就是计算集合的元素个数.它是组合数学的重要组成部分.

在具体问题中给出的集合各式各样,都具有实际意义,而且集合中的元素是由某些条件所确定的,要判定一个元素是否属于某集合 A,已非易事,要确定 A 的元素个数就更难了.这正是研究计算问题的原因.

解决组合计数问题虽然不需要高深理论知识,却需要重要的计算原理与思想方法.

Ⅰ.几种特殊的排列、组合

1.圆排列

定义 1:从几个元素中任取 r 个不同元素仅按元素之间的相对位置而不分首尾排成一个圆圈,这种排列称为 n 个不同元素的 r—— 圆排列.r—— 圆排列数记为 K_n^r.

定理 1　$K_n^r = \frac{P_n^r}{r}$.

证:对 n 个不同元素取 r 个的任一圆排列,均有 r 种不同的方式展开成 r 个不同的直线排列,且不同的圆排列展开的直线排列也彼此不同,故有 $r\cdot K_n^r = P_n^r$,得证.

2.重复排列

定义 2:从 n 个不同元素中允许重复的任取 r 个元素排成一列,称为 n 个不同元素的 r—— 可重复排列.

定理 2　n 个不同元素的 r—— 可重排列数为 n^r.

证:在按顺序选取的 r 个元素中,每个元素都有 n 种不同的选法,故由乘法原理有,其排列数为 n^r.

3.不全相异元素的全排列

定义 3:设 n 个元素可分为 k 组,每一组中的元素是相同的,不同组间的元素是不同的,其中第 i 组的元素个数为 $n_i(i = 1,2,\cdots,k)$,$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列.

定理 3　n 个元素的不全相异元素的全排列个数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

证:先把每组中的元素看做是不相同的,则 n 个不同元素的全排列数为 $n!$,然后分别将每个组的元素还其本来面目看成是相同的,则在这 $n!$ 个全排列中,每个排列都重复出现了 $n_1!n_2!\cdots\cdots n_k!$ 次,所以不全相异元素的全排列数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

4.多组组合

定义 4:将 n 个不同的元素分成 k 组的组合称为 n 个不同元素的 k—— 组合.

定理 4　对于一个 n 个不同元素的 k—— 组合,若第 i 组有 n_i 个元素 $(i = 1,2,\cdots,k)$,则不同的分组方法数为 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

证:我们把分组的过程安排成相继的 k 个步骤.第一步,从 n 个不同元素中选 n_1 个,有 $C_n^{n_1}$ 种方

法;第二步,从 $n-n_1$ 个元素中选 n_2 个有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法;…;第 k 步,从 $n-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-1})$ 个元素中选 n_k 个元素,有 $C_{n-(n_1+n_2+\cdots n_{k-1})}^{n_k}$ 种方法,再由乘法原理得证.

5. 重复组合

定义5:从 n 个不同元素中任取 r 个允许元素重复出现的组合称为 n 个不同元素的 r——可重组合.

定理5 n 个不同元素的 r—— 可重组合的个数为 C_{n+r-1}^{r}

证:设 $(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 是取自 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的任一 r 可重复组合,并设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r$.令

$b_i=a_i+i-1(1\leqslant i\leqslant r)$.

从而 $b_1=a_1,b_2=a_2+1,b_3=a_3+2,\cdots,b_r=a_r+r-1$

显然下面两组数是一对一的:

$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_r$

$1\leqslant a_1<a_2+1<a_3+2<\cdots<a_r+r-1\leqslant n+r-1$

设 $A=\{(a_1,a_2,\cdots,a_r)\mid a_i\in\{1,2,\cdots,n\},a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r\}$

$B=\{(b_1,b_2,\cdots,b_r)\mid b_i\in\{1,2,\cdots,n+r-1\},b_1<b_2<\cdots<b_r\}$

则由 A、B 之间存在一一对应,故 $|A|=|B|=C_{n+r-1}^{r}$

Ⅱ. 枚举法

所谓枚举法就是把集合 A 中的元素一一列举出来,从而计算出集合 A 的元素个数.它是最基本,也是最简单的计数方法.应用枚举法计数的关键在于一一列举集合中的元素时必须做到既不重又不漏.

Ⅲ. 映射法(略).

Ⅳ. 分类计数原理与分步计数原理

分类计数原理　完成一件事,有几种方式,第一种方式有 m 种方法,第二种方式有 n 种方法,…,最后一种方式有 r 种方法.不管采取哪一种方法都能完成这件事,则完成这件事的方法总数为 $m+n+\cdots+r$

分步计数原理　完成一件事,有几个步骤,第一步有 m 种方法,第二步有 n 种方法,…,最后一步有 r 种方法,要完成这件事,必须通过每一步,则完成这件事的方法总数为 $m\cdot n\cdot\cdots\cdot r$

应用分类计数原理的关键在于分划,即把一个所要计数的集合 S 分划成一些两两不交的小集合,且使每个小集合都便于计数.

应用分步计数原理的关键在于分解,即把一个所要计数的集合 S 分解成若干个集合的乘积.

对一个集合 S 的分划或分解,没有一般方法,应由具体问题而定,而这正是应用两个原理解题的难点与技巧所在.

Ⅴ. 递推方法

将与正整数有关的数字问题,通过寻求递推公式,或通过递推公式,而使问题得到解决的方法,叫做递推方法.

递推方法几乎对所有数学分支都具有重要的作用,当然对组合计数就更不例外了,它是组合计数的常用方法.

应用递推方法解题,会遇到如下两类问题:一是如何找到满足题设条件的递推公式,二是推理计算.详见例题.

Ⅵ. 母函数法

母函数是一种非常有用的方法.这种方法的最早系统叙述见于 *Laplace* 在1812年出版的名著《概率解析理论》中.这种方法思想简单,是把离散数列和幂级数一一对应起来,把离散数列间的相互结合关系对应成幂级数间的运算关系,最后由幂级数来确定离散数列的构造.

简要地说,母函数方法是将一个有限或无限的数列

$\{a_k\}=\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots\}$

和如下形式的多项式

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots$

联系起来,构成对应关系$\{a_k\} \leftrightarrow f(x)$

这个 $f(x)$ 就称为$\{a_k\}$ 的母函数或生产函数.意思是这个数列$\{a_k\}$ 是由多项式 $f(x)$ 产生的.

例如:组合数列 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 的母函数是$(1+x)^n$.因为由二项式定理可得

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \cdots + C_n^nx^n$

$(1+x)^n$ 是最常见的母函数.

设$\{a_n\}$ 与$\{b_n\}$ 是两个给定的数列,为了确定它们之间的某种关系,可分别写出二者所对应的母函数,再研究这两个母函数间的某种关系从而确定两个数列之间的关系,这便是母函数方法解题的基本思想.

Ⅶ.子集类

一个 n 元集合X有 2^n 个子集$A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}$,如果以它的部分子集作为元素,又可得到一个集合 $F = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}(1 \leqslant k \leqslant 2^n)$,这个集合 F 称为原来集合X 的一个子集类.

应用子集类知识可以帮助我们解决如下二类问题:

a.什么时候可以把一个整数(集合)写成若干个满足一定条件的整数(子集)之和(并).

b.在可以写的情况下有多少种写法.前者是存在性问题,后者是组合计数问题.

§3.2 赛题精讲

例1 (2000.日本东京大学试题)满足下列条件的正整数的全体用集合 ζ 表示,"各位数字不相同,且任意两位数字的和不为9",这里,ζ 的元素用十进制表示,且 ζ 含1位整数.

试回答下列问题:

(1) 在 ζ 的元素中,4位数有多少个?

(2) 在 ζ 的元素中,从小到大排列,第2000个数是多少?

【分析】 本题计数方法在数字与位数问题中的应用.解题关键是

(1) $\overline{abcd}$ 考虑各个数位上取可能值.

(2) 估计算2000个数的位数.

解:(1)4位数由高到低位的数字分别设为 a, b, c, d,则由题意知 a 取9个值,b 必取$(10-2=)$8个值,c 必取$[(10-2)-2=]$6个值,d 必取$[(10-4)-2=]$4个值,因此,4位数共有$[9\times(10-2)\times(10-4)\times(10-6)=]$1728个.

(2) 由题意知 ζ 中1位数有9个,2位数有72个,3位数有432个,则

$$9+72+432=531<2000<513+1728=2241$$

所以第2000个数是4位数.

又大于8695的四位数有$[1+2\times(6\times4)+8\times6\times4=]$241个,从而知第2000个数为8695

例2 (2000.全国高中联赛第二试压轴题)有 n 个人,已知他们中的任意两人至多通电话一次,他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的总次数相等,都是 3^k 次,其中 k 是自然数,求 n 的所有可能值.

【分析】 本题着重考察了排列组合数与不定方程的综合应用;其解题关键是抓住 n 个人之间通话的总次数按重复数计算是 $3^kC_n^2$ 次,以及 n 个人之间通话的总次数 $l = \dfrac{C_n^2 \cdot 3^k}{C_{n-1}^2}$

解:显然 $n \geqslant 5$,因为 n 个人共可组成$C_n^{n-2} = C_n^2$ 个"$n-2$人组",所以 n 个人之间通话的总次数按重数计算是 $3^kC_n^2$ 次.

若某两人之间通电话一次,则这次通话在 $C_{n-2}^{n-4} = C_{n-2}^2$ 个"$n-2$"人组中被各算了一次,所以每次

通电话的计算重数都是 C_{n-2}^2.故实际 n 个人之间通话的总次数为 $l = C_n^2 3^k / C_{n-2}^2$,其中 l 为自然数,即

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} l = \frac{2(n-1)}{2} 3^k$$

因为 n 与 $n-2$ 或 $n-1$ 与 $n-3$ 中恰有一个数是 4 的倍数,另一个数是偶数,且不是 4 的倍数,所以,$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ 与 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 一奇一偶.

又因为 $n, n-1, n-2, n-3$ 中任意两数的公因数不超过 3,故

$$d = (\frac{1}{2}(n-2)(n-3), \frac{1}{2}n(n-1))$$
$$= 3 \text{ 或 } 1$$

若 $d = 3$,则必为 $3 \mid n, 3 \mid n-3$

设 $n = 3n_1$,则

$$\frac{1}{2}(3n_1 - 2)(n_1 - 1)l = \frac{1}{2}n_1(3n_1 - 1)3^k$$

且 $(\frac{1}{2}(3n_1 - 2)(n_1 - 1), \frac{1}{2}n_1(3n_1 - 1)) = 1$

所以 $\frac{1}{2}(3n_1 - 2)(n_1 - 1) \mid 3^k$

又因为$(3n_1 - 2, n_1 - 1) = 1$

当 n_1 为奇数时,$\frac{n_1 - 1}{2} = 1, 3n_1 - 2 = 7, 7 \mid 3^k$ 矛盾.

当 n_1 为偶数时,$n_1 - 1 = 1, \frac{1}{2}(3n_1 - 2) = 2, 2 \mid 3^k$,矛盾.

故 $d = 1$,且有

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \mid 3^k$$

若 n 是偶数,因为$(\frac{n-2}{2}, n-3) = 1$,所以$\frac{n-2}{2} = 1, n = 4$,矛盾.

若 n 是奇数,有$\frac{n-3}{2} = 1, n = 5$

故当 $n = 5$ 时,满足要求.

【评注】 (1) 上述解题方法不是命题组给出的方法,较为自然,而命题组给出的方法较为"艰深",非一般人所能领会其"意境".

(2) 下面再给一种"组合味" 较浓的解答.

另解:显然 $n \geqslant 5$,记 n 个人为n 个点 $A_1, A_2, \cdots A_n$,若,A_i, A_j 之间通电话,则连 A_iA_j,因此这 n 个点中必有连线段,不妨设 A_1A_2 之间有连线段.

若 A_1A_3 之间无连线段,分别考虑 $n-2$ 个点 $A_1A_4A_5 \cdots A_n$, $A_2A_4A_5 \cdots A_n$ 及 $A_3A_4A_5 \cdots A_n$,由题意知 A_1, A_2, A_3 分别与 $A_4, A_5, \cdots, A_n$ 之间所连线段的总数均相等,记为 m

将 A_2 加入到 $A_1A_4A_5 \cdots A_n$ 中,则这 $n-1$ 个点的线段总数 $S = 3^k + m + 1$.从这 $n-1$ 个点中去掉任意一点,剩下的 $n-2$ 个点的线段的总数为 3^k,因此每个点都与其他 $n-2$ 个点之间有 $m+1$ 条连线段.从而

$$S = \frac{1}{2}(n-1)(m+1)$$

将 A_3 加入到 $A_1A_4A_5 \cdots A_n$ 中,则这 $n-1$ 个点的线段总数$t = 3^k + m$.同理可得

$$t = \frac{1}{2}(n-1)m$$

因此,由 $S = t + 1$ 得

$$\frac{1}{2}(n-1)(m+1) = \frac{1}{2}(n-1)m + 1$$

即 $n=3$,矛盾.
所以 A_1A_3 之间有连线段.

同理,A_2A_3 之间也有连线段,进而 A_1、A_2 与所有 $A_i(i=3,4,\cdots,n)$ 之间有连线段.

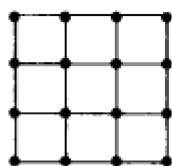
对于 $A_i,A_j(i\neq j)$,因 A_i 与 A_1 有连线段,同理 A_i 与 A_j 之间有连线段.因此 $A_i,A_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 之间均有连线段.

所以 $3^k=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$,故 $n=5$

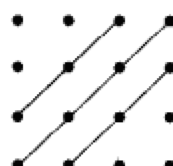
例 3 (1993.第 44 届 AHSME 试题)在 xy 平面上,顶点的坐标 (x,y) 满足 $1\leqslant x\leqslant 4,1\leqslant y\leqslant 4$,且 x,y 是整数的三角形有多少个?

解:由题设知,在 xy 平面上有 16 个整点,共有 $C_{16}^3=560$ 个三点组,要从中减去那些三点共线的.

平面上有 4 条垂直线和 4 条水平线,每条上有 4 个点,这 8 条线上含有 $8C_4^3=32$ 个三点共线的三点组(如图 Ⅱ-6-3-1).



Ⅱ-6-3-1



Ⅱ-6-3-2

类似地,在斜率为 ±1 的线上三点共线的三点组有 $2C_4^3+4C_3^3=8+4=12$(个)(如图 Ⅱ-6-3-2).

此外,没有其他的三点共线的三点组,所以,组成的三角形的个数是 $560-32-12=516$(个)

例 4 (1985.全国高中数学联赛)方程 $2x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$ 有多少个非负整数解.

解:设 $(x_1,x_2,\cdots,x_{10})$ 是原方程组的一个非负整数解,由于 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,10)$

因此 $2x_1\leqslant 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$

即 $2x_1\leqslant 3$,所以 $x_1=0,1$.下面分两种情形:

(1)$x_1=0$,则 $x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$,所以 $x_i=0,1,2,3(i=2,3,\cdots,10)$

如果有某个 $x_i=3$,则其他 $x_i=0$,这样解有 $C_9^1=9$(个)

如果某个 $x_i\neq 3$,若某个 $x_i=2$,则必有一个 $x_j=1,i\neq j,2\leqslant i,j\leqslant 9$,这样解有 $C_9^1\cdot C_8^1=72$(个).

如果对每个 $x_i\neq 2,3$,则 $x_2,x_3,\cdots,x_{10}$ 中必有三个 $x_i(2\leqslant i\leqslant 10)$ 为 1,这样解有 $C_9^3=84$(个)

(2)$x_1=1$,则 $x_2+x_3+\cdots+x_{10}=1$,因此 $x_2,x_3,\cdots x_{10}$ 中仅有一个是 1,这样解有 $C_9^1=9$(个)

于是原方程组有 $C_9^1+C_9^1\cdot C_8^1+C_9^3+C_9^1=174$ 个非负整数解.

例 5 (1991.全国高中数学联赛)设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列,其项都在 S 中,且添加 S 的其他元素等于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列,求这种 A 的个数(这里只有两项的数列也看做等差数列).

解:构造具有如下要求的集合 A:把 A 中的元素按从小到大的次序排好后,在其最大元素后面添上 S 的任何元素均不能构成具有原公差的等差数列.这时,当 A 的首项与公差一旦确定,其整个集合 A 也即确定,不妨设 A 的首项为 a,公差为 d,则

$a=1,d=1,2,\cdots,n-1$ 时的集 A 有 $n-1$ 个;

$a=2,d=1,2,\cdots,n-2$ 时的集 A 有 $n-2$ 个;

…

$a=n-1,d=1$ 时的集 A 有 1 个.

因此,所求 A 的总个数为 $1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

例 6 (1986.第 4 届 AIME 试题)在扔硬币时,如果用 Z 表示正面朝上,F 表示反面朝上,那么扔硬

币的序列就表示为用 Z 和 F 组成的串，我们可以统计在这种序列中正面紧跟着反面(ZF)的出现次数，正面紧跟着正面(ZZ)的出现次数，……，例如序列 $ZZFFZZZZFZZFFFF$ 是15次扔币的结果，其中有5个 ZZ，3个 ZF，2个 FZ，4个 FF

问：有多少个15次扔硬币的序列，恰好有2个 ZZ，3个 ZF，4个 FZ，5个 FF？

解：符合题意的序列具有如下两种可能形式：

(1)F 带头的：$F\cdots FZ\cdots ZF\cdots$

(2)Z 带头的：$Z\cdots ZF\cdots FZ\cdots ZF\cdots F$

由于题设要求的序列恰有3个 ZF，则序列属于第(ii)类的，应具有如下形式

$Z\cdots \underline{ZF}\cdots FZ\cdots \underline{ZF}\cdots FZ\cdots \underline{ZF}\cdots F$

其中只有2个 FZ，达不到4个 FZ，故不可能，所以符合题设的序列只能是第(i)种形式.

由于序列恰有4个 FZ，则在考虑序列中恰有两个 ZZ 的情况下可分为如下两类：

$______ ZZZ ______ Z ______ Z ______ Z$ ①

$______ ZZ ______ ZZ ______ Z ______ Z$ ②

以及 Z 的不同位置，其中的空格之处应填 F

设每个空格处填 F 的个数依次为 x_1, x_2, x_3, x_4，则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$

这相当于求其正整数解的个数，显然有 $C_8^3 = 56$

另一方面，对于①，ZZZ 的位置有4种，对②，ZZ，ZZ，Z，Z 的排列方法有6种，所以 Z 的排列方法有10种.

所以，符合题意的序列有 $10 \times 56 = 560$(个)

例7 (1993.第11届 AIME 试题)$\triangle ABC$ 的顶点为 $A = (0,0)$，$B = (0,420)$，$C = (560,0)$，一个骰子的六个面分别标上两个"A"，两个"B"，两个"C"，从 $\triangle ABC$ 内部选出一点 $P_1 = (k,m)$，重复扔骰子，依下列法则选出点 $P_2, P_3, \cdots$：如骰子露出标记 L 的那面，$L \in \{A,B,C\}$，且刚刚选为 P_n，那么 P_{n+1} 选为 $\overline{P_nL}$ 的中点，已知 $P_7 = (14,92)$，问 $k + m = ?$

解：首先应注意到因 P_1 在 $\triangle ABC$ 内，则以后的所有 P_k 在 $\triangle ABC$ 内.下面，我们将证明一旦任何后继的 P_k 给出，则可惟一地确定 P_1

假定 $P_k = (x_k, y_k)$，因 P_k 在 $\triangle ABC$ 内，则有

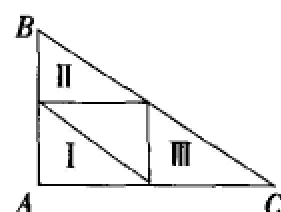
$0 < x_k < 560, 0 < y_k < 420$

$0 < 420x_k + 560y_k < 420 \cdot 560$

若掷出 A，则

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = P_{k+1} = \frac{1}{2}P_k = (\frac{x_k}{2}, \frac{y_k}{2})$$

于是 P_{k+1} 所在的可能范围被限制在原三角形的 $\frac{1}{4}$ 之内(图Ⅱ-6-3-3中的一部分)，显然 P_{k+1} 在 I 内，从而有



图Ⅱ-6-3-3

$$420x_{k+1} + 560y_{k+1} < \frac{1}{2} \times 420 \times 560$$

同样掷出 B，则 P_{k+1} 在Ⅱ内，$y_{k+1} > 210$

若掷出 C，则 P_{k+1} 在Ⅲ内，$x_{k+1} > 280$

所以，对 $k \geqslant 2$，P_k 必在Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ之一内，且由它的前一点惟一确定.

例如，若 $P_k = (x_k, y_k)$ 位于Ⅱ内，则 P_k 必为 BP_{k-1} 的中点，这时 $P_{k-1} = 2P_k - B = (2x_k, 2y_k - 420)$

所以，若 $k \geqslant 2$，$P_k = (x_k, y_k)$，有

$$P_{k-1} = \begin{cases} (2x_k, 2y_k - 420)，若\ y_k > 210 \\ (2x_k - 560, 2y_k)，若\ x_k > 280 \\ (2x_k, 2y_k)，若\ 420x_k + 560y_k < \frac{1}{2} \times 420 \times 560 \end{cases}$$

下面,我们可以由 P_7,推出 P_1:

$P_7=(14,92)\Rightarrow P_6=(28,184)\Rightarrow P_5=(56,368)\Rightarrow P_4=(112,316)\Rightarrow$

$P_3=(224,212)\Rightarrow P_2=(448,4)\Rightarrow P_1=(336,8)$

$\therefore k+m=336+8=344$

例 8 已知定义在非负整数集上的函数 $f(n)$ 由下列条件确定:$f(0)=0, f(1)=0, f(2n)=2f(n)+1(n>0)$ 及 $f(2n+1)=f(2n)-1$,求最小正整数 m,使 $f(m)=2^{1990}+1$

$n_{1988}=3\times 2^2-1$

…

满足 $f(n_{k+1})=2^{1989-k}$ 的最小正整数是

$n_k=3\cdot 2^{1989-k}-1$

…

满足 $f(n_1)=2^{1989}$ 的最小正整数是

$n_1=3\cdot 2^{1989}-1$

所以,满足 $f(m)=2^{1990}+1$ 的最小正整数是

$m=2n_1=3\cdot 2^{1990}-2$

例 9 从$\{1,2,\cdots,n\}$中选出 k 项的严格递增数列,每相邻两项的差$\leqslant m$,$m(k-1)<n$,有多少种不同的选法?

解:设第一个数为 x_1+1

第二个数为$(x_1+1)+(x_2+1)$

…

第 i 个数为$(x_1+1)+\cdots+(x_i+1)$

…

第 k 个数为$(x_1+1)+\cdots+(x_k+1)$

其中 $0\leqslant x_i\leqslant m-1(2\leqslant i\leqslant k)$ ①

设 $x_2+x_3+\cdots+x_k=r$ ②

则 $(x_1+1)+\cdots+(x_k+1)\leqslant n$

得 $0\leqslant x_1\leqslant n-k-r$

所以 x_1 可取 $n-k-r+1$ 个值.

把$(1+x+\cdots+x^{n-1})^{k-1}$展开,则 x^r 的系数a_r 就是方程 ② 的,满足条件 ① 的整数解$(x_2,x_3,\cdots,x_k)$的个数,即$(1+x+\cdots+x^{m-1})^{k-1}=\sum\limits_{r\geqslant 0}a_r x^r$ ③

所求的选法共有$\sum a_r(n-k-r+1)$种.

因为$\sum a_r(n-k-r+1)=(n-k+1)\sum a_r-\sum ra_r$ ④

所以只要求出$\sum a_r$ 与$\sum ra_r$ 即可.在 ③ 中令 $x=1$ 可得$\sum a_r=m^{k-1}$ ⑤

在 ③ 中令 $x=1+y$,则 ③ 的右边成为

$$\sum a_r(1+y)^r=\sum a_r(1+ry+a_r^2y^2+\cdots) \quad ⑥$$

则$\sum ra_r$ 就是上式中 y 的系数.

另外,③ 的左边成为

$$[1+(1+y)+\cdots+(1+y)^{m-1}]^{k-1}$$

$$=[m+\frac{(m-1)m}{2}y+\cdots]^{k-1}$$

$$=m^{k-1}+m^{k-2}\cdot(k-1)\cdot\frac{(m-1)m}{2}y+\cdots \quad ⑦$$

比较 ⑥、⑦ 可得

$$\sum ra_r = \frac{m^{k-1}(m-1)(k-1)}{2} \quad ⑧$$

由 ④、⑤、⑧ 可得本题答案

$$(n-k+1)m^{k-1} - \frac{m^{k-1}(m-1)(k-1)}{2}$$

$$= m^{k-1} \cdot \{n - \frac{1}{2}(k-1)(m+1)\}$$

例 10 设 $n > 1$,两个自然数的集合

$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$

和集 $\{a_i + a_j \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\} = \{b_i + b_j \mid 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$ ①

这里的相等计数及元素的重数,即如果元素 S 在 ① 的左边出现 k 次(用 k 种方法表示成 $a_i + a_j$ 的形式),那么 S 也在 ① 的右边出现 k 次,证明存在自然数 h,使 $n = 2^h$

解:考虑母函数

$f(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$

又 $g(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}$

(注意,这里的 a_i 与 b_i 不是母函数的系数,而是指数)

$$(f(x))^2 - f(x^2)$$

$$= (x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n})^2 - (x^{2a_1} + \cdots + x^{2a_n}) = 2\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{a_i + a_j} \quad ②$$

同样

$$(g(x))^2 - g(x^2) = 2\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{b_i + b_j} \quad ③$$

②、③ 中系数表示和 $a_i + a_j, b_i + b_j$ 出现的次数,由题设知

$$f^2(x) - f(x^2) = g^2(x) - g(x^2)$$

即 $$f^2(x) - g^2(x) = f(x^2) - g(x^2) \quad ④$$

由于 $f(1) - g(1) = n - n = 0$,所以 $(x-1) \mid (f(x) - g(x))$,从而存在自然数 h_1,使

$$f(x) - g(x) = (x-1)^{h_1} p(x), p(1) \neq 0 \quad ⑤$$

因此 $$f(x^2) - g(x^2) = (x^2 - 1)^{h_1} p(x^2) \quad ⑥$$

即 $$f(x) + g(x) = \frac{(x+1)^{h_1} p(x^2)}{p(x)}$$

令 $x = 1$,得 $2n = 2^{h_1}$,即 $n = 2^{h_1 - 1}$

由于 $n > 1$,所以 $h_1 > 1$,$h_1 - 1$ 为某一自然数,从而有 $n = 2^h$

例 11 (1987.第 28 届 IMO 预选题)设 A_1, A_2, A_3 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的具有如下性质的分划:

(1) 若将每个子集的元素按递增顺序排列,则每两个相邻元素的奇偶性不同;

(2) A_1, A_2 和 A_3 中恰有一个的最小元素是偶数.

试求这种分划的个数.

提示 集合的分划是由一族集合 A_1, A_2, A_3 确定的,它们满足:

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,\cdots,n\}$

$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_3 \cap A_1 = \varnothing$

集合的另一排列,如 A_2, A_3, A_1 和 A_1, A_2, A_3 是同一划分.

解:显然,题目中的条件(1) 和(2) 等价于对每个分划集决定可能放入该集的下一个数的奇偶性,而且,如果是还没有放进元素的,则由(2) 可知放进它的第一个数必是与 A 中的最小数有不相同的奇偶性;而对非空子集,下一个数的奇偶性由(1) 决定.

不失一般性.假设 $1 \in A_1$,而 A_2 的最小元素小于 A_3 的最小元素,于是 2 有两种放法:或放入 A_1,或放入 A_2.更进一步地,一旦 $k-1$ 被放入 A_2 后,则 k 就有两种可能的放法:或放入 A_2,或放入 A_3.假设在某一步,$k-1$ 可放入 A_{i_1} 或 A_{i_2},不妨放入 A_{i_1}(i_1, i_2, i_3 是集合 $\{1,2,3\}$ 的一种排列).因为 $k-1$ 与 k

有不同的奇偶性，所以 A_{i_3} 成为可放入的，而 A_{i_2} 却不能放入，而且 k 放入A_{i_1} 也是可能的. 如此继续下一步仍有两种可能放法. 以上给出了归纳推理的步骤.

综上，除 1 以外，每个数 k 均有两种放法. 所以分划的个数为 2^{n-1}

例 12 （中国台北第 1 届数学奥林匹克试题）试确定具有下述性质的最小正整数 A：把从 1001 至 2000 的所有正整数任作一个排列，都可从其中找出连续的 10 项，使这 10 项之和大于或等于 A.

解：设 $b_1,b_2,\cdots,b_{1000}$ 是 1001,1002,⋯,2000 的任一个排列.

$S_i = b_i + b_{i+1} + \cdots + b_{i+9}.(i = 1,2,\cdots,991)$

则 $S_1 + S_{11} + S_{21} + \cdots + S_{991} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{1000}$

$= \dfrac{(1001 + 2000) \times 1000}{2} = 1500500.$

于是 $S_1,S_{11},S_{21},\cdots,S_{991}$ 中至少有一个 $S_{i0} \geqslant \dfrac{1500500}{100} = 15005$. 从而 $A \geqslant 15005$

下面，把 1001 至 2000 这 1000 个自然数排成 10 行，每行 100 个数，奇数列从左到右，偶数行从右到左排可得下表：

1001	1002	1003	⋯	1099	1100
1200	1199	1198	⋯	1102	1101
1201	1202	1203	⋯	1299	1300
			⋮		
1801	1802	1803	⋯	1899	1900
2000	1999	1998	⋯	1902	1901

从左到右按列的顺序，每一列又从上到下记上述数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{1000}$

令 $S_i = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+9},(i = 1,2,\cdots 991)$，则 $S_1 = 15005, S_2 = 15006$，而且容易证明，当 i 为奇数时，$S_i = 15005$，当 i 为偶数时，$S_i = 15006$

所以可得 $A = 15005$

例 13 （第 41 届 IMO 中国队选拔赛试题）设 n 为正整数，记集合 $M = \{(x,y) \mid x,y$ 是整数，$1 \leqslant x,y \leqslant n\}$，定义在 M 上的函数 f 具有性质：

(a) $f(x,y)$ 取值于非负整数；

(b) 当 $1 \leqslant x \leqslant n$ 时，有 $\sum\limits_{y=1}^{n} f(x,y) = n - 1$

(c) 若 $f(x_1,y_1)f(x_2,y_2) > 0$，则 $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqslant 0$

试计算这样的函数 f 的个数 $N(n)$，并求出 $N(4)$ 的具体数值.

思路导拨：

对于这个组合计数问题，最重要的是转化，下面用两种不同的方法进行解答.

解法一：

首先证明引理

引理 在一个 m 行 n 列的方格表的每个方格中填入一非负整数，位于第 i 行第 j 列的方格中所填的数用 a_{ij} 表示，$r_i(1 \leqslant i \leqslant m)$ 与 $S_j(1 \leqslant j \leqslant n)$ 是非负整数，满足 $\sum\limits_{i=1}^{m} r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} S_j$，那么，同时具有如下性质的填数方法存在且惟一：

① $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = r_j \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$

② $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} = S_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$

③ 若 $a_{ij}a_{kl} > 0$，则 $(k - i)(l - j) \geqslant 0$

引理的证明：我们对 $m + n$ 进行归纳，当 $m = n = 1$ 时，显然只能有 $a_{11} = r_1 = s_1$，命题成立.

设命题对行数与列数之和小于 $m+n$ 的方格表成立，下面考虑 m 行 n 列方格的填法.

如图 Ⅱ－6－3－4 块 A_1 中的数具有形式 $a_{ij}(j\geqslant 2)$，块 A_2 中的数具有形式 $a_{ij}(i\geqslant 2)$，注意到 $(i-1)(1-j)<0$，故由条件③知 A_1 或 A_2 中有一个部分内的数全为零.

又 A_1 中各数之和 $+a_{11}=r_1$，A_2 中各数之和 $+a_{11}=S_1$，因此必有 $a_{11}=\min(r_1,S_1)$，由对称性不妨设 $r_1\leqslant S_1$，这样 A_1 中的各数均为零.

考虑此方格表中后 $n-1$ 行构成的子方格表，其各行的和依次为 $r_2,\cdots,r_m$，各列的和依次为 $S_1-r_1,S_2,\cdots S_n$，这些数均为非正整数，且成立 $r_2+r_3+\cdots+r_m=(S_1-r_1)+S_2+\cdots+S_n$

图 Ⅱ－6－3－4

于是，对此子方格表运用归纳假设即知这部分的填法是惟一的.

第一行各数已经确定，其中仅有 a_{11} 非零，不等式 $(i-1)(j-1)\geqslant 0$，对任意 a_{ij} 成立，故整个方格表的填法还满足条件③，命题得证.

下面我们运用引理来解原题.

集合 M 可以看作一个 n 行 n 列的方格表，而每个 M 上的函数 f 对应于方格表的一种填数方法，现在表中各数的列和给定，且表中所有数之和为 $n(n-1)$，故由引理，任取 n 个和 $n(n-1)$ 的非负整数组作为行和，使惟一对应一个函数 f，从而本题的答案为方程组、

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=n(n-1)$$

的非负整数解的个数，即

$$N(n)=C_{n(n-1)+(n-1)}^{n-1}=C_{n^2-1}^{n-1}$$

特别地，$N(4)=C_{15}^{3}=455$

解法二：

设对给定 $x_i\in[1,n]$，$f(x_0,y)(1\leqslant y\leqslant n)$ 中不为 0 的最大 y 为 y_i

则由条件(C)，如若 $f(x_{i+1},y)>0$，则必有 $y\geqslant y_i$，故而因数表来表示为如图 Ⅱ－6－3－5 其中 a_i 为非负整数，$a_{y_1},a_{y_1+y_2},\cdots,a_{y_1+y_2+\cdots+y_{1n}}$ 不为 0. 每行数之和为 $n-1$，而对固定的 r，有 $a_1+a_2+\cdots+a_r=n-1$

其中 $a_r>0,a_1,a_2,\cdots,a_r$ 均为非负整数的解有 C_{n-2+r}^{r-1} 组

a_1	$\cdots$	ay_1	0	0	0	0	0
0	0	ay_{1+1}	$\cdots$	$ay_{1+}y_2$	0	0	0
0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0
0	0	0	0	0	$a\sum_{i=1}^{n-1}y_1$	$\cdots$	$a\sum_{i=1}^{n}y_1$

图 Ⅱ－6－3－5

故 f 函数的个数

$$N(n)=\sum_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_n=2n-1\\ y_i\geqslant 0,y_i\in Z}}C_{n-2+y_1}^{y_1-1}\cdot C_{n-2+y_2}^{y_2-1}\cdot\cdots\cdot C_{n-2+y_n}^{y_n-1}$$

再利用

$$\sum_{\substack{i+j=t\\ ij\in z,ij\geqslant 0}}C_r^iC_s^j=C_{r+s}^{i+j}$$

知 $N(n)=C_{n^2-1}^{n-1}$

特殊地，有 $N(4)=C_{15}^{2}=455$

§3.3 针对性训练

A组

1.(1993.第11届AIME)若$0 < a < b < c < d < 500$,问有多少个有序的四元整数组(a,b,c,d)满足$a + d = b + c$及$bc - ad = 93$?

2.(1986.全国高中数学竞赛试题)设S是平面上的有限点集,$C_1,C_2,\cdots,C_7$是平面上7个不同的圆,其中C_7恰好经过S中的7个点,C_6恰好经过S中的6个点,$\cdots$,C_1恰好经过S中的1个点,集合S至少含有多少个点?

3.(1998.第3届中国国家集训队选拔考试题)把正三角形ABC的各边等分,过各分点在$\triangle ABC$内作各边的平行线,得到的图形叫做正三角形ABC的n格点阵.

(1) 求其中所有边长为$\frac{1}{n}|BC|$的菱形个数.

(2) 求其中所有平行四边形的个数.

4.(1993.第11届AIME试题)在4000到7000之间有多少个四个数字均不相同的偶数?

5.空间有n个平面,最多能把空间分割成几个部分?

6.(1985.第3届AIME试题)选定整数序列$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$使得$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}(n \geqslant 3)$.如果前1492项之和是1985,而前1985项之和是1492,那么前2001项之和是多少?

7.有红、白、黑3种球,每项允许重复地选取5只,要求红球至多选取2次,白球至多选取3次,黑球至多选取1次,问有多少种不同的选取方式?

8. 10个大学生按照下列条件组织运动队：

(1) 每个人可以报名参加几个运动队；

(2) 任一运动队不能完全包含在另一个队中或者与其他队重合(允许部分重合). 则最多可组成多少个运动队?

B组

9.(1970.第12届IMO) 平面上有100个点,其中任意三点不共线,用其中任意三点为顶点作三角形. 证明:所作的所有的三角形中至多70% 是锐角三角形.

10.(1989.第30届IMO试题) 设 n 是正整数,我们说集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有性质 P 是指在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$当中至少有一个 i,使得 $|x_i - x_{i+1}| = n$. 求证对于任何 n,具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.

11.(1988.第6届AIME试题) 老板将要打印的信件交给秘书,每次给一封,且放在信封的最上面,秘书一有空就从最上面拿一封来打,有一天共有9封信要打,老板按第一封,第二封,……,第九封的顺序交给秘书,午饭的时候,秘书告诉同事,已把第八封信打印好了,但未透露上午工作的其他情况,这个同事很想知道还剩下哪些信件没有打,还想知道按什么样的顺序来打印.

根据以上的信息,上午打的信的顺序有多少种可能?(没有要打的信也是一种可能).

12. 把圆分成 n 个不相等的扇形,并且用红、蓝、黄三种颜色给扇形染色,但不许相邻的扇形有相同的颜色. 问共有多少种染色法?

13. 要从一、二、三这三个年级中选拔10名学生担任学生会干部，要求三年级不得多于5名，二年级不得少于4名，问有多少种不同的选法？

14.（1990.第31届IMO预选题）求正整数 k，使得集合 $X=\{1990,1990+1,\cdots,1990+k\}$ 能被分拆为两个互不相交的子集 A 与 B，且 A 中元素之和等于 B 中元素之和.

第四章

组合恒等式,组合不等式

§4.1 知识、方法、技能

Ⅰ. 组合恒等式

竞赛数学中的组合恒等式是以高中排列组合、二项式定理为基础,加以推广、补充而形成的一类组合问题.组合恒等式的证明要借助于高中常见的基础组合等式.例如

①$C_n^r = C_n^{n-r}$

②$C_{n+1}^{r+1} = C_n^{r+1} + C_n^r$

③$C_n^r = \frac{n}{r}C_{n-1}^{r-1}$

④$C_n^r C_r^m = C_n^m \cdot C_{n-m}^{r-m}$

⑤$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

⑥$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$

组合恒等式的证明方法有:

① 恒等变形,变换求和指标;

② 建立递推关系;

③ 数学归纳法;

④ 考虑组合意义;

⑤ 母函数.

Ⅱ. 组合不等式

组合不等式以前我们见的不多,在其他一些书籍中组合不等式的著述也很少,但是近年来组合不等式的证明却出现在国内、国际大赛上.例如1993年中国高中数学联赛二试第二大题为:

设A是一个有n个元素的集合,A的m个子集$A_1, A_2, \cdots, A_m$两两互不包含,试证:

(1)$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{|A_i|}} \leqslant 1$

(2)$\sum_{i=1}^{m} C_n^{|A_i|} \geqslant m^2$

其中$|A_i|$表示A_i所含元素的个数,$C_n^{|A_i|}$表示n个不同元素取$|A_i|$的组合数.

再如1998年第39届国际数学奥林匹克竞赛中第二大试题为:

在某一次竞赛中,共有a个参赛选手与b个裁判,其中$b \geqslant 3$,且为奇数.每个裁判对每个选手的评分只有"通过"或"不及格"两个等级,设k是满足条件的整数;任何两个裁判至多可对k个选手有完全相同的评分.证明:$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$

因此我们有必要研究组合不等式的证明方法.组合不等式的证明方法有:

1. 在集合间建立单射、满射,利用集合阶的不等关系

定理 设X和Y都是有限集,f为从X到Y的一个映射

(1)若f为单射,则$|X| \leqslant |Y|$

(2) 若 f 为满射,则 $|X| \geqslant |Y|$

2. 利用容斥原理

例如:设元素 a 属于集族 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 的 k 个不同集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$,则在 $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$ 中 a 被计算了 k 次,当 $k \geqslant 2$ 时,集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 两两的交集共有 C_k^2 个.由于 $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2} \geqslant k-1$,故 a 在 $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$ 中至少被计算了 $k-1$ 次,这样我们得到下面的不等式:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \qquad (*)$$

组合不等式(*)可由容斥公式:

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{(n-1)} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$ 删去右边第三个和式起的所有和式得到.

采用这种办法,我们可以从容斥公式得到另外一些组合不等式,只是要注意这些不等式的方向的变化.

3. 利用抽屉原则

由于抽屉原则的结论本身就是组合不等式关系,所以我们利用抽屉原则,巧妙构造抽屉的方法证明组合不等式.

4. 利用组合分析

在复杂的组合计数问题、离散极值问题和实际应用问题等问题中,会出现一些组合不等式,这时可运用组合分析方法证明之.

例如 2003 年中国数学奥林匹克就是这类问题,题目是:

某公司需要录用一名秘书,共有 10 人报名,公司经理决定按照求职报名的顺序逐个面试,前 3 个人面试后一定不录用,自第 4 个人开始将他们与前面面试过的人相比较,如果他的能力超过了前面所有已面试过的人,就录用他,否则就不录用,继续面试下一个.如果前 9 人都不录用,那么就录用最后一个面试的人.

假定这 10 个人的能力各不相同,可以按能力由强到弱排为第 1,第 2,……,第 10.显然该公司到底录用哪一个人,与这 10 个人报名的顺序有关,大家知道,这样的排列共有 10!种.我们以 A_k 表示能力第 k 的人能够被录用的不同报名顺序的数目,以 $\frac{A_k}{10!}$ 表示他被录用的可能性.

证明:在该公司经理的方针之下,有

(1) $A_1 > A_2 > \cdots > A_8 = A_9 = A_{10}$

(2) 该公司有超过 70% 的可能性录取到能力最强的 3 个人之一,而只有不超过 10% 的可能性录用到能力最弱的 3 个人之一.

解答见赛题精讲的例 18.

§4.2 赛题精讲

例 1 证明:$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k} = 2^{2n-1} + \frac{(2n)!}{2 \cdot n!n!}$

【分析】 把 $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{k}$ 变形为 $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^{k}$,而对于 $\sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^{k}$,变换求和指标.

证明：$\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}-\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}=2^{2n}-\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}$，对于和式$\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}$，令$j=2n-k$，则$\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}$
$=\sum_{j=0}^{n-1}C_{2n}^{j}=\sum_{j=0}^{n}C_{2n}^{j}-C_{2n}^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}-C_{2n}^{n}$

所以 $\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}=2^{2n}-\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}+C_{2n}^{n}$

即 $2\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}=2^{2n}+C_{2n}^{n}$，从而有

$\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}=2^{2n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}$

例 2 求证：$\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{m+n+1}C_n^n=\frac{1}{(m+n+1)C_{m+n}^n}$，其中$n\in\mathbf{N}$

证明：设$a_n=\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{m+n+1}C_n^n$，则由基本恒等式$C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$及$C_n^{r-1}=\frac{r}{n}C_n^r$得

$a_n=\frac{1}{m+1}C_{n-1}^0-\frac{1}{m+2}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^0)+\frac{1}{m+3}(C_{n-1}^2+C_{n-1}^1)-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{m+n}(C_{n-1}^{n-1}+C_{n-2}^{n-2})+\frac{(-1)^n}{m+n+1}C_{n-1}^{n-1}$

故 $a_n=a_{n-1}-\frac{m+1}{n}a_n$，即 $a_n+\frac{m+1}{n}a_n=a_{n-1}$

所以 $a_n=\frac{n}{m+n+1}a_{n-1}=\frac{n(n-1)}{(m+n+1)(m+n)}a_{n-2}=\cdots$

$=\frac{n!}{(m+n+1)(m+n)\cdots(m+3)}a_1$

而 $a_1=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{(m+2)(m+1)}$

从而有 $a_n=\frac{n!}{(m+n+1)(m+n)\cdots(m+2)(m+1)}=\frac{1}{(m+n+1)C_{m+n}^n}$

【说明】 注意到a_n中各项的系数均与n无关，且符号正负相同，由此想到a_n与a_{n-1}之间必定存在着某些联系，且是递推关系.

例 3 求证：$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}C_{2n-k+1}^{k}=n+1$

【分析】 考虑到恒等式$C_{2n-k+1}^{k}=C_{2n-k}^{k}+C_{2n-k}^{k-1}$，仿例 2 解决.

证明：令 $a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}\cdot C_{2n-k+1}^{k}$

因为 $C_{2n-k+1}^{k}=C_{2n-k}^{k}+C_{2n-k}^{k-1}$

所以 $a_n=2^{2n}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}C_{2n-k+1}^{k}$

$=2^{2n}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}(C_{2n-k}^{k}+C_{2n-k}^{k-1})$

$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1}$

令 $r=k-1$，则

$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1}=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\cdot2^{2(n-1)-2r}C_{2(n-1)-r+1}^{r}$

$$= -\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r 2^{2(n-1)-2r}C_{2(n-1)-r+1}^{r} = -a_{n-1}$$

令 $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot 2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k} = b_n$,则

$$b_n = a_n + a_{n-1} \qquad ①$$

$$\text{又 } b_n = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \cdot 2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k} + (-1)^n$$

$$= 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \cdot 2^{2n-2k}(C_{2n-k-1}^{k} + C_{2n-k-1}^{k-1}) + (-1)^n$$

$$= 4a_{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \cdot 2^{2(n-1)-2j}C_{2(n-1)-j}^{j}$$

$$= 4a_{n-1} - b_{n-1}$$

于是由 ① 式得 $b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2}$,从而推知 $a_n + a_{n-1} = 4a_{n-1} - a_{n-1} - a_{n-2}$,即 $a_n + a_{n-2} = 2a_{n-1}$

这说明 $\{a_n\}$ 为等差数列,而 $a_0 = 1, a_1 = 2$,故公差 $d = 1$,且 $a_n = n + 1$

【说明】 此题运用变换求和指标的方法,找出了 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} 之间的线性关系式,再由初始条件求得 a_n.这种利用递推关系求组合数的方法,在解决较复杂的计算或证明组合恒等式时经常用到.

例 4 求证:$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

【分析一】 此题若考虑用基本组合恒等式来证明是比较困难的,注意到左端各项恰好是二项展开式中各项系数的平方,考虑二项展开式 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n$

$(1+\frac{1}{x})^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{x} + C_n^2\frac{1}{x^2} + \cdots + C_n^n\frac{1}{x^n}$,这两个展开式乘积中的常数项恰好就是 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$

证法一:因为 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n$

$$(1+\frac{1}{x})^n = C_n^0 + C_n^1\frac{1}{x} + \cdots + C_n^n\frac{1}{x^n}$$

两展开式右边乘积中的常数项恰好等于 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2$,而 $(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$,$(1+x)^{2n}$ 中含 x^n 的项是展开式中的第 $n+1$ 项,它的二项式系数 C_{2n}^n 就是 $(1+x)^n(1+\frac{1}{x})^n$ 中的常数项,所以 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

【分析二】 注意到恒等式 $C_n^r = C_n^{n-r}$,要证的等式的左边可以变形为 $C_n^0C_n^n + C_n^1C_n^{n-1} + \cdots + C_n^nC_n^0$,右端 $\dfrac{(2n)!}{n!n!} = \dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = C_{2n}^n$,因此,我们可以通过建立适当的组合计数模型来证明.

证法二:设有 n 个白球,n 个红球,从这 $2n$ 个球中取出 n 个球的取法种数为:$C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$.另一方面,可以看成 $n+1$ 次如下的取球活动:从 n 个白球中取 r 个,再从 n 个红球中取 $(n-r)$ 个,取法种数为 $C_n^r \cdot C_n^{n-r} = (C_n^r)^2, r = 0,1,2,\cdots,n$,所以,符合题意的取球种数是 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)2$.

故 $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

【说明】 证法二采用了"算两次"的基本思想方法,这是解决竞赛问题时常用的方法.

例 5 计算 $\frac{1}{2^{1998}}(1 - 3C_{1998}^2 + 3^2C_{1998}^4 - 3^3C_{1998}^6 + \cdots + 3^{998}C_{1998}^{1996} - 3^{999}C_{1998}^{1998})$

【分析】 考查各项的绝对值 $(\frac{1}{2})^{1998} \cdot 3^r \cdot C_{1998}^{2r}$,它可以写成 $C_{1998}^{2r}(\frac{1}{2})^{1998-2r}(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2r}$,再注意到复数单位 i 的乘方的性质:$i^2 = -1, i^4 = 1$,就不难发现它实质上是一个复数 $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1998}$ 的实部,因此

可以化为复数三角式来进行计算.

解:原式 $=(\frac{1}{2})^{1998}+C_{1998}^{2}(\frac{1}{2})^{1996}(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2}+C_{1998}^{4}(\frac{1}{2})^{1994}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{4}+\cdots+C_{1998}^{1996}(\frac{1}{2})^{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1996}+C_{1998}^{1998}(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1998}$,它恰好等于复数 $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1998}$ 展开式的实部.

又 $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{1998}=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^{1998}=\cos\frac{1998\pi}{3}+i\sin\frac{1998\pi}{3}$,其实部等于 $\cos\frac{1998\pi}{3}=\cos 666\pi=1$

所以,原式 $=1$

例 6 证明:(1) $\sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^{r}C_{n}^{r}(x-r)^{n}=n!$

(2) $\sum\limits_{r=0}^{n+1}(-1)rC_{n+1}^{r}(x-r)^{k}=0$

其中 x 为实数,n,k 为自然数,$k\leqslant n$

【分析】 观察题中式子,感觉难以运用组合恒等式或直接运用二项式定理给出证明,这时考虑用数学归纳法来证明.

证明:当 $n=1$ 时,

(1) $C_{1}^{0}x-C_{1}^{1}(x-1)=x-x+1=1!$

(2) $C_{2}^{0}x-C_{2}^{1}(x-1)+C_{2}^{2}(x-2)=x-2x+2+x-2=0$,命题成立.

假设 $n=m$ 时,对一切实数 x 有

$\sum\limits_{r=0}^{m}(-1)^{r}C_{m}^{r}(x-r)^{m}=m!$ 及 $\sum\limits_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{k}=0$

其中 $k\leqslant m$,则当 $n=m+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&(1)\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{m+1}\\
&=\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{m}[(x-m-1)+(m+1-r)]\\
&=(x-m-1)\cdot 0+\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}[(m+1)C_{m+1}^{r}-rC_{m+1}^{r}](x-r)^{n}\\
&=(m+1)\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{m}-\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{m}\\
&=(m+1)(x-r)^{m}+(m+1)\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r}(C_{m+1}^{r}-C_{m}^{r-1})(x-r)^{r}\\
&=(m+1)(x-r)^{m}+(m+1)\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r}C_{m}^{r}(x-r)^{m}\\
&=(m+1)m!=(m+1)!
\end{aligned}$$

(2) 当 $k\leqslant m+1$ 时,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{m+2}(-1)^{r}C_{m+2}^{r}(x-r)^{k}\\
&=x^{k}+\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+2}^{r}(x-r)^{k}+(-1)^{m+2}C_{m+2}^{m+2}\cdot(x-m-2)^{k}\\
&=x^{k}+(-1)^{m+2}(x-m-2)^{k}+\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{k}+\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r-1}(x-r)^{k}\\
&=\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{k}-[\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}C_{m+1}^{j}((x-1)-j)^{k}+(-1)^{m+1}((x-1)-(m+1))^{k}]\\
&=\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}(x-r)^{k}-\sum_{r=0}^{m+1}(-1)^{r}C_{m+1}^{r}((x-1)-r)^{k}
\end{aligned}$$

$= 0$

综上所述,原命题(1),(2)对 $n \in \mathbf{N}$ 均成立.

例 7 求证:$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^n = n!$

证明:右边显然是 n 个元素的(无重复元素的)排列个数,下面我们寻找计算这个量的另一种方法.

n 个元素的允许重复的排列个数为n^n,其中至少有1个元素不出现的有 $C_n^1(n-1)^n$ 种,至少有2个元素不出现的有 $C_n^2(n-2)^n$ 种,……,$n-1$ 个元素不出现的有 $C_n^{n-1} \cdot 1^n$.因此,根据容斥原理,恰有 n 个元素出现的(全)排列数为 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^n C_n^k(n-k)^n$

这也就是 n 个元素的(无重复元素的)排列数,从而原式成立.

例 8 对正整数 n,求证:

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k C_{n-k}^{[\frac{n-k}{2}]} = C_{2n+1}^n$,其中 $C_0^0 = 1$,$[\frac{n-k}{2}]$ 表示$\frac{n-k}{2}$ 的整数部分.

证明:考虑母函数$(x+1)^{2n}$,它的 x^n 及x^{n-1} 的系数和为 $C_{2n}^n + C_{2n}^{n-1} = C_{2n+1}^n$

另一方面

$$(x+1)^{2n} = (x^2+2x+1)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!}(x^2)^i(2x)^j$$

$$= \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}(2^j)x^{2i+j}$$

这里 i,j,k 为非负整数,上式右端 x^n 及x^{n-1} 的系数之和是

$$\sum_{\substack{0 \leqslant i+j \leqslant n \\ 2i+j=n}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}2^j + \sum_{\substack{0 \leqslant i+j \leqslant n-1 \\ 2i+j=n}} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}2^j = \sum_{0 \leqslant i+(n-2i) \leqslant n} \frac{n!}{i!(n-2i)!i!}2^{n-2i} + \sum_{0 \leqslant i+(n-1-2i) \leqslant n} \frac{n!}{i!(n-1-2i)!(i+1)!}2^{n-2i-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i} C_{2i}^i 2^{n-2i} + \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} C_n^{2i+1} C_{2i+1}^i 2^{n-2i-1}$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k\text{取偶数}}} C_n^k 2^{n-k} C_k^{[\frac{k}{2}]} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\text{取奇数}}} C_n^k 2^{n-k} C_k^{[\frac{k}{2}]}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} C_k^{[\frac{k}{2}]}$$

在上式右端,令 $n-k=s$,则有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} C_k^{[\frac{k}{2}]} = \sum_{s=0}^{n} C_n^{n-s} 2^s C_{n-5}^{[\frac{n-s}{2}]} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k C_{n-k}^{[\frac{n-k}{2}]}$$

从而得到了所要证明的恒等式.

例 9 求证:$C_{n+1}^1 + 2^2 C_{n+2}^2 + 3^2 C_{n+3}^3 + \cdots + n^2 C_{2n}^n = \frac{n(n+1)^3 C_{2n+1}^{n+1}}{(n+2)(n+3)}$

证明:考虑一个由 $2n+1$ 名棋手组成的俱乐部,从1到 $2n+1$ 排列,从中选出 $n+1$ 人组成一个组参加与另一俱乐部的竞赛,此外,从剩下的 n 名棋手中,选出一名领队和1名教练,同一棋手可以担任两个职务,但每一个职务必须至少排位在一名组员之前(将领队和教练统称作职员).

令 k 是排在最后的组员,则 $n+2 \leqslant k \leqslant 2n+1$,对每一个这样的 k,其余的 n 个组员可以有$C_{k-1}^n = C_{k-1}^{k-1-n}$ 种选法,而职员的选法有$(k-1-n)^2$ 种,因此,选法的总数为

$C_{n+1}^1 + 2^2 C_{n+2}^2 + \cdots + n^2 C_{2n}^n$

一个不同的选择过程选择组员有 C_{2n+1}^{n+1} 种方式,同时选择职员有 n^2 种方式,但是,我们将去掉那些至少有一名职员排位在所有组员之后的选择,假定两个职员的位置被同一棋手占据,那么,我们可以选择组员加上这名职员用 C_{2n+1}^{n+2} 种方式,并令排位最后的是这名职员,假定领队和教练不是同一棋手,我

们可以有 C_{2n+1}^{n+3} 种方式选择组员加两名职员，并令 $n+3$ 名棋手中排位最后的是两职员之一，而任意选择另外的 $n+2$ 名棋手的一位为另一职员，由此推出方式总数为

$$n^2C_{2n+1}^{n+1}-C_{2n+1}^{n+2}-2(n+2)C_{2n+1}^{n+3}=\frac{n(n+1)^3C_{2n+1}^{n+1}}{(n+2)(n+3)}$$

故知原式成立.

例 10 (1992.第33届IMO试题5)设 O_{xyz} 是空间直角坐标系，S 是空间中的一个有限点集，S_x,S_y,S_z 分别是 S 中所有点在坐标平面 O_{yz},O_{zx},O_{xy} 上的正投影所成的集合，求证：$|S|^2\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$

证明：对每 $(i,j)\in S_x$，令

$T_{ij}=\{(x,i,j)\mid(x,i,j)\in S\}$

显然有 $S=\bigcup_{(i,j)\in S_x}T_{ij}$

由柯西不等式有 $|S|^2\leqslant\sum_{(i,j)\in S_x}1\cdot\sum_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2=|S_x|\sum_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2$ ①

考虑集合 $V=\bigcup_{(i,j)\in S_x}(T_{ij}\times T_{ij})$，其中 $T_{ij}\times T_{ij}=\{(t_1,t_2)\mid t_1,t_2\in T_{ij}\}$

显然 $|V|=\sum_{(i,j)\in S_x}|T_{ij}|^2$

定义映射 f 如下

$V\ni((x,i,j),(x',i,j))\mapsto((x,j),(x',i))\in S_y\times S_z$

不难看出 f 为单射，因此有 $|V|\leqslant|S_y|\cdot|S_z|$ ②

由 ① 和 ② 即得 $|S^2|\leqslant|S_x|\cdot|S_y|\cdot|S_z|$

【评注】 例10曾是1992年IMO六道试题中得分率最低的一道试题，但本例解法，巧妙地应用映射法，即可简捷得到证明，因此映射法是证明组合不等式的重要方法之一.

例 11 设 $D_1=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$D_2=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$ 是集合 M 的两个划分，又对任何两个不变的子集 $A_i,B_j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 有 $|A_i\cup B_j|\geqslant n$，求证：$|M|\geqslant\frac{1}{2}n^2$，并说明等号能否成立？

证明：令 $k=\min\{|A_i|,|B_j|,1\leqslant i,j\leqslant n\}$，不妨设 $|A_i|=k$，因 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两不交，故 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中至多有 k 个 B_j，使 $A_1\cap B_j=\varnothing$. 设 $A_1\cap B_j\neq\varnothing$，$j=1,2,\cdots,m$，$m\leqslant k$

由 k 的选取知 $|B_j|\geqslant k(j=1,2,\cdots,m)$，从而 $|\bigcup_{j=1}^{m}B_j|\geqslant mk$

又因 $A_1\cap B_i=\varnothing$，$i=m+1,\cdots,n$

故 $|A_1|+|B_i|=|A_1\cup B_i|\geqslant n$

即 $|B_i|\geqslant n-k$

所以 $|M|=|\bigcup_{j=1}^{n}B_j|=|\bigcup_{j=1}^{m}B_j|+|\bigcup_{j=m+1}^{n}B_j|\geqslant mk+(n-m)(n-k)=n(n-k)-m(n-2k)$

若 $k<\frac{n}{2}$，因 $m\leqslant k$，故

$$|M|\geqslant n(n-k)-m(n-2k)\geqslant n(n-k)-k(n-2k)$$
$$=2(\frac{n^2}{2})+2(\frac{n}{2}-k)^2\geqslant\frac{n^2}{2}$$

若 $k\geqslant\frac{n}{2}$，则 $|A_i|\geqslant\frac{n}{2}(i=1,2,\cdots,n)$

从而 $|M|=|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|\geqslant\frac{n^2}{2}$

下面说明 $|M|=\frac{n^2}{2}$ 是可以取到的. 显然这时 n 为偶数，取 $n=4$，则 $|M|=8$，令

$M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，易验证 M 的两个划分

$D_1=\{\{1,2\}\{3,4\}\{5,6\}\{7,8\}\}$

$D_2=\{\{1,2\}\{3,5\}\{4,6\}\{7,8\}\}$，

满足题目条件.

例 12 (1989.第 30 届 IMO 试题 6) 设 n 是正整数,我们说集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$具有性质 P,是指在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$当中至少有一个 i,使得$|x_i-x_{i+1}|=n$.求证:对于任何 n,具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.

证明:设 A 为不具有性质 P 的排列的集合,B 为具有性质 P 的排列的集合,显然$|A|+|B|=(2n)!$.为了证明$|A|<|B|$,只要得到$|B|>\frac{1}{2}(2n)!$就够了.使用容斥原理.

设$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$中,x_k与x_{k+n}相邻的排列的集合为A_k,$k=1,2,\cdots,n$.则$|A_k|=2\cdot(2n-1)!$,$|A_k\cap A_j|=2^2\cdot(2n-2)!$,$1\leqslant k<j\leqslant n$,由容斥原理得

$$\begin{aligned}|B|&\geqslant\sum_{k=1}^{n}|A_k|-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n}|A_k\cap A_j|=n\cdot 2\cdot(2n-1)!-C_n^2\cdot 4\cdot(2n-2)!\\&=(2n)!-2n(n-1)\cdot(2n-2)!=2n\cdot n\cdot(2n-2)!\\&>2n\cdot\frac{2n-1}{2}\cdot(2n-2)!=\frac{1}{2}(2n)!\end{aligned}$$

例 13 平面上给定 n 个点,其中任何三点不共线,任意地用线段连接某些点(这些线段称为边),则确保图形中出现以给定点为顶点的 $m(m<n)$ 阶完全图的条件是图形中的边的条数

$$x\geqslant\frac{C_n^m(C_m^2-1)+1}{C_{n-2}^{m-2}}$$

证明:构造抽屉:每个抽屉里有 m 个相异点,共可得 C_n^m 个抽屉,又由于同一条边会在 C_{n-2}^{m-2} 个抽屉里出现,根据抽屉原则知,当 $x\cdot C_{n-2}^{m-2}\geqslant C_n^m\cdot(C_m^2-1)+1$ 时,才能确保有一个抽屉里有 C_m^2 条边,而这 C_m^2 条边恰好与其中不共线的相异 m 点构成一个 m 阶完全图.

这就是说,确保图形中出现 m 阶完全图的条件是其中边的条数$x\geqslant\frac{C_n^m(C_m^2-1)+1}{C_{n-2}^{m-2}}$

评述:"完全图",是图论中的基本概念,(此处从略).

例 14 (1987.第 28 届 IMO 试题 3) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为实数,满足 $x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_n^2=1$,求证:对于每一个整数 $k\geqslant 2$,存在不全为零的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,使得$|a_i|\leqslant k-1(i=1,2,3,\cdots,n)$,并且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

证:由柯西不等式得

$(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)^2\leqslant(1^2+1^2+\cdots+1^2)(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_n{}^2)$

即 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}$

所以,当$0\leqslant a_i\leqslant k-1$时,有

$a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|\leqslant(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant(k-1)\sqrt{n}$

把区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$等分成 k^n-1 个小区间,每个小区间的长度$\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$,由于每个 a_i 能取k 个整数,因此 $a_1|x_1|+a_2|x_2|+\cdots+a_n|x_n|$

共有 k^n 个正数,由抽屉原则知必有二数会落在同一小区间之内,设它们分别是

$\sum_{i=1}^{n}a_i'|x_i|$ 与 $\sum_{i=1}^{n}a_i''|x_i|$

因此有

$$|\sum_{i=1}^{n}(a_i'-a_i'')|x_i^1|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}\qquad ①$$

很明显,我们有

$|a_i'-a_i''|\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n$

现在取

$$a_i=\begin{cases}a_i'-a_i'' & 如果\ x_i\geqslant 0\\ a_i''-a_i' & 如果\ x_i<0\end{cases}$$

这里 $i=1,2,\cdots,n$，于是 ① 可表示为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

其中 a_i 为整数，适合 $|a_i|\leqslant k-1,i=1,2,\cdots,n$

例 15 （1993.全国高中数学联赛二试第二大题）设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含，试证：

$$(1)\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1;(2)\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant m^2$$

其中 $|A_i|$ 表示 A_i 所含元素的个数，$C_n^{|A_i|}$ 表示 n 个不同元素取 $|A_i|$ 个的组合数.

【分析】 若(1)式已证，由柯西不等式立即可得(2)式，因此，关键是证(1)式，又据组合公式知

$$(1)式\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|A_i|!(n-|A_i|)!\leqslant n! \qquad ①$$

我们用组合分析的方法来证明不等式 ①.

证明：(1) 对于 A 的子集 $A_i=\{x_1,x_2,\cdots,x_{|A_i|}\}$，我们取补集 $\overline{A}_i=\{y_1,y_2,\cdots,y_{n-|A_i|}\}$，并取 A_i 的元素在前，$\overline{A}_i$ 元素在后，作排列

$$x_1,x_2,\cdots,x_{|A_i|},y_1,y_2,\cdots,y_{n-|A_i|} \qquad ②$$

这样的排列共有 $|A_i|(n-|A_i|)!$ 个

显然，② 中每一个排列，也是 A 中的一个排列，若 $j\neq i$ 时，A_j 对应的排列与 A_i 对应的排列互不相同，则 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 所对应的排列总数便不会超过 A 中排列的总数 $n!$，现假设 A_j 中对应的某一排列

$$x'_1,x'_2,\cdots,x_{|A_j|}',y'_1,y'_2,\cdots,y_{n-|A_j|}' \qquad ③$$

与 $A_i(j\neq i)$ 中对应的某一排列 ② 相同(指出现的元素及元素位置都相同)，则当 $|A_j|\leqslant|A_i|$ 时，$A_j\subseteq A_i$；当 $|A_j|>|A_i|$ 时，$A_j\supseteq A_i$，这都与 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不包含，矛盾.

由于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 对应的排列 ② 互不相同，而 A 中 n 个元素的全排列有 $n!$ 个，故得

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i|!(n-|A_i|)!\leqslant n!$$

即 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\leqslant 1$$

(2) 由上证及柯西不等式，有

$$\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m}C_n^{|A_i|}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|A_i|}}\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m}1\right)^2=m^2$$

【评注】 本题取自著名的 *Sperner* 定理：

设 Z 为 n 元集，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为 Z 的子集，互不包含，则 m 的最大值为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$

例 16 （第 40 届 IMO 预选题）设 $S=\{0,1,2,\cdots,N^2-1\}$，A 是 S 的一个 N 元子集. 证明存在 S 的一个 N 元子集 B，使得集合 $A+B=\{a+b\mid a\in A,b\in B\}$ 中的元素模 N^2 的余数的数目不少于 S 中元素的一半.

证明：设 $|X|$ 为子集 $X\subset S$ 中元素的个数；又为 $S-X$，是 X 的补集；C_i 是 $a+i$ 模 N^2 的余数所构成的集合，其中 $a\in A,i\in S$

由 $|C_i|=N$，$\bigcup_{i\in S}C_i=S$，则每个 $x\in S$ 恰出现在 N 个集合 C_i 中，下面用两种方法计算集合.

$$\{(x,(i_1<i_2<\cdots<i_N))\mid x\in S,x\notin C_{i_1},x\in C_{i_2},\cdots,x\notin C_{i_N}\}$$

一方面，

$$\sum_{x\in S}|\{(i_1<i_2<\cdots<i_N)\mid x\notin C_{i_1},x\notin C_{i_2},\cdots,x\notin C_{i_N}\}|$$
$$=\sum_{x\in S}C_{N^2-N}^{N}=C_{N^2-N}^{N}|s|$$

另一方面,

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_N}|\{x\in S\mid x\notin C_{i_1},x\notin C_{i_2},\cdots,x\notin C_{i_N}\}|$$
$$=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_N}|\bar{C}_{i_1}\cap\bar{C}_{i_2}\cap\cdots\cap\bar{C}i_N|=C_{N-N}^{N_2}|s|$$

于是,有

$$\sum_{0\leqslant i_1<\cdots<i_N\leqslant N^2-1}|C_{i_1}\cup C_{i_2}\cup\cdots\cup Ci_N|$$
$$=\sum_{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant N^2-1}(|S|-|\bar{C}_{i_1}\cap\bar{C}_{i_2}\cap\cdots\cap\bar{C}_{i_N}|)$$
$$=C_{N^2}^{N}|S|-C_{N^2-N}^{N}|s|$$
$$=(C_{N^2}^{N}-C_{N^2-N}^{N})N^2$$

所以,存在 $0\leqslant i_1<i_2<i_2<\cdots<i_N\leqslant N^2-1$,使得

$$|C_{i_1}\cup C_{i_2}\cup\cdots\cup C_{i_N}|\geqslant(1-\frac{C_{N^2-N}^{N}}{C_{N^2}^{N}})N^2$$

因为

$$\frac{C^2N_{N^2}}{C_{N^2-N}^{N}}=\frac{N^2(N^2-1)\cdots\cdots(N^2-N+1)}{(N^2-N)(N^2-N-1)\cdots\cdots(N^2-2N+1)}$$
$$\geqslant(\frac{N^2}{N^2-N})^N=(1+\frac{1}{N-1})^N$$
$$=1+\frac{N}{N-1}+\cdots+(\frac{1}{N-1})^N$$
$$>2$$

故 $|C_{i_1}\cup C_{i_2}\cup\cdots\cup C_{i_N}|>(1-\frac{1}{2})N^2=\frac{N^2}{2}$

于是,集合 $B=\{i_1,i_2,\cdots,i_N\}$ 满足要求.

例 17 (1998.第 39 届 IMO 试题二)在某一次竞赛中,共有 a 个参赛选手及 b 个裁判,其中 $b\geqslant3$ 且为奇数.设每个裁判对每一位参赛选手的判决方式只有"通过"或"不通过".已知任意两个裁判至多对 k 个参赛选手有相同的判决,证明:

$$\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}$$

解:设裁判 $B_i(i=1,2,\cdots,b)$ 对参赛选手 $A_j(j=1,2,\cdots,a)$ 的判决为 d_{ij},其中

$$d_{ij}=\begin{cases}0, & 若“通过”\\ 1, & 若“不通过”\end{cases}$$

则$(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_a})$中 B_i 对 a 个参赛选手判决的记录$(i=1,2,\cdots,b)$,它是一个长度为 a 的$(0-1)$序列.

我们来考虑这 b 个序列中每两个序列的相同的项的总数 M.

一方面,由已知条件每两个序列的相同的项不超过 k 个,故

$$M\leqslant C_b^2\cdot k=\frac{1}{2}b(b-1)k \qquad ①$$

另一方面,设 A_j 得到 b_0 个 0(通过),b_1 个 1(不通过),即$(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_a})$的第 i 个分量中 b_0 个 0,b_1 个 1,则 $b_0+b_1=b$

由这个分量产生的序列的相同的项有

$$C_{b_0}^2 + C_{b_1}^2 = \frac{1}{2}b_0(b_0-1) + \frac{1}{2}b_1(b_1-1)$$

$$= \frac{1}{2}[(b_0{}^2 + b_1{}^2) - (b_0 + b_1)] = \frac{1}{2}[(b_0{}^2 + b_1{}^2) - b]$$

$$= \frac{1}{2}[(b_0 + b_1)^2 - b - 2b_0b_1] = \frac{1}{2}(b^2 - b - 2b_0b_1)$$

但 $b_0 + b_1 = b$ 且 b 为奇数($b \geqslant 3$),因此

$$b_0b_1 \leqslant \frac{1}{4}(b+1)\cdot(b-1)$$

故 $\quad C_{b_0}^2 + C_{b_1}^2 \geqslant \frac{1}{2}[b(b-1) - \frac{1}{2}(b+1)(b-1)] = \frac{1}{2}(b-1)\cdot\frac{1}{2}(b-1) = \frac{1}{4}(b-1)^2$

从而 $\quad M \geqslant a\cdot\frac{1}{4}(b-1)^2 \qquad ③$

综合 ①、② 得 $\quad \frac{1}{4}a(b-1)^2 \leqslant \frac{1}{2}b(b-1)k$

即 $\quad \frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}$

例 18 (2003.中国数学奥林匹克第五大题)

解:在报名顺序中,将前3个面试者中能力最强的排名名次记为 a,显然 $a \leqslant 8$.将此时能排名第 k 的人被选上的排列集合记作 $A_k(a)$.相应的排列数目记作 $|A_k(a)|$

(1) 易知,当 $a = 1$ 时,必然放过前面9个人,录用最后一个面试的人,此时除能力第1的人之外,其余各人机会均等,不难算得

$|A_k(1)| = 3\times 8!$记为 $r_1, k = 2,3,\cdots,10$

当 $2 \leqslant a \leqslant 8$ 时,对于 $a \leqslant k \leqslant 10$,能力排名第 k 的无录用机会.对于 $1 \leqslant k < a$,此时机会均等.

事实上,此时能力排名第 a 的人排在前三个,有3种选择位置的办法,而能力排名第1至第 $a-1$ 的人都排在后7个位置上,并且谁位于他们之首就是谁被录用,有排法 $C_7^{a-1}(a-2)!$种;其余 $10-a$ 个人可以在剩下的位置上任意排列,有$(10-a)!$种排法,故有

$$|A_k(a)| = \begin{cases} 3C_7^{a-1}\cdot(a-2)!(10-a)!\text{记为 } r_a, & k = 1,\cdots,a-1 \\ 0 & k = a_n,\cdots,10 \end{cases}$$

上述结果表明:

$$|A_8| = |A_9| = |A_{10}| = r_1 = 3\times 8! > 0 \qquad ①$$

$$|A_k| = r_1 + \sum_{a=k+1}^{8} r_a, k = 2,\cdots,7 \qquad ②$$

$$|A_1| = \sum_{a=2}^{8} r_a \qquad ③$$

由式 ① 和 ② 知

$$|A_2| > |A_3| > \cdots > |A_8| = |A_9| = |A_{10}| > 0$$

而由式 ② 和 ③ 知

$$|A_1| - |A_2| = r_2 - r_1 = 3\times 7\times 8! - 3\times 8! > 0$$

综上所述,问题(1) 获证.

(2) 由式 ① 知

$$\frac{|A_8| + |A_9| + |A_{10}|}{10!} = \frac{3\times r_1}{10!} = \frac{3\times 3\times 8!}{10!} = 10\%$$

由式 ② 和 ③ 可知

$$|A_1| = \sum_{a=2}^{8} r_a = \sum_{a=2}^{8} 3C_7^{a-1}(a-2)!(10-a)!$$

$$= 3\times 7!\cdot\sum_{a=2}^{8}\frac{(9-a)(10-a)}{a-1}$$

$$= 3 \times 7! \cdot \sum_{S=1}^{7} \frac{(8-S)(9-S)}{S}$$

$$= 3 \times 7! \times (56 + 21 + 10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7})$$

$$= 3 \times 7! \times 95\frac{24}{25} > 3 \times 7! \times 95\frac{2}{3}$$

$$= 287 \times 7!$$

$$|A_2| = r_1 + \sum_{a=3}^{8} r_a$$

$$= 3 \times 8! + 3 \times 7! \times (21 + 10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7})$$

$$= 3 \times 7! \times 47\frac{24}{25} > 3 \times 7! \times 47\frac{2}{3}$$

$$= 143 \times 7!$$

$$|A_3| = r_1 + \sum_{a=4}^{8} r_a$$

$$= 3 \times 8! + 3 \times 7! \times (10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7})$$

$$= 3 \times 7! \times 26\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 26\frac{2}{3}$$

$$= 80 \times 7!$$

所以

$$\frac{|A_1|+|A_2|+|A_3|}{10!} > \frac{287 + 143 + 80}{720}$$

$$= \frac{510}{720} = \frac{17}{24} > 70\%$$

即录用到能力最强三人之一的可能性大于 70%

§4.3 针对性训练

A组

1. 求证：$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

2. 求$\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^k$的值.

3. 求证：$\sum\limits_{k=m}^{n}C_n^kC_k^mx^k(1-x)^{n-k}=C_n^mx^m$

4. 求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^{k-1}C_n^k=C_{2n}^{n-1}$

5. 求证：$\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^kC_m^kC_m^{2n-k}=(-1)^nC_m^n$

6. 求证：当$n=4m$时，
$C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots=(-1)^m2^{2m}$

7. 求证：$C_{m+n}^k=C_m^0C_n^k+C_m^1C_n^{k-1}+C_m^2C_n^{k-2}+\cdots+C_m^kC_n^0$

8. 设X为一个n元集，$F=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$是X的一个子集族，且满足$|A_i\cap A_j|=1(i\neq j)$，求证：$m\leqslant n$

9. 在半径为1的圆周上，任意给定两个点集 A，B，它们都由有限段互不相交的弧组成，其中 B 的每段弧的长度都等于$\frac{\pi}{m}$，m 是自然数，用 A_j 表示将集合A沿逆时针方向在圆周上转动$\frac{j\pi}{m}$弧度所得的集合($j=1,2,\cdots$)，求证：存在自然数 k，使得

$$L(A^k \cap B) \geqslant \frac{1}{2\pi}L(A)L(B).$$

这里 $L(X)$ 表示组成点集 X 的互不相交的弧段的长度之和.

10. 设 α,β,γ 是三实数，求证：三个数 $\cos\alpha(1+\sin\beta)$，$\cos\beta(1+\sin\gamma)$，$\cos\gamma(1+\sin\alpha)$ 中至少有一个数在区间$[-\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}]$内.

11. 已知一个 n 元集合X，Y 的某些三元子集组成了集合S，且 S 中每两个元素(子集)之间至多有一个公共元. 证明：存在集合 A，$A\subset X$，$A \notin S$，使得 $|A| \geqslant [\sqrt{2n}]$

B 组

12. 求证：$C_{2^m-1}^k$ 是奇数，其中 $k \geqslant 1$

13. 计算：$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\cdot\frac{n-k}{C_{2n}^k}$

14. 求证：$\sum_{p=1}^{n}p(C_n^p)^2 = n\cdot C_{2n-1}^{n-1}$

15. 求证：$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(C_n^k - C_n^{k-1})^2 = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

16. 求证：$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$

17. 设$1\leqslant r\leqslant n$，考虑组合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有r元子集及每一个这样的子集中最小的数，用$F(n,r)$表示这些最小数的算术平均数，证明：$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$

18. 求证：$\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}=C_{p+q+n+1}^{p+q+1}$

19. 平面上有定点A,B和任意四点P_1,P_2,P_3,P_4，求证：这四点中一定有两点$P_i,P_j(i\neq j)$使得$|\sin\angle AP_iB-\sin\angle AP_jB|\leqslant\frac{1}{3}$

20. 平面上给定n个点，其中任何三点不共线，任意地用线段连接某些点（这些线段称为边），则确保图形中出现以给定点为顶点的三角形的条件是图形中的边的条数

$x\geqslant\frac{2C_n^3+1}{C_{n-1}^1}$ 即 $x\geqslant\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}$

21. 是否存在非零复数a,b,c及正整数h，使得只要整数k,l,m满足$|k|+|l|+|m|\geqslant1996$，就必定成立$|ka+lb+mc|>\frac{1}{n}$？

22.（第43届IMO(2002年)试卷第四大题）设n为大于1的整数，全部正因数为$d_1,d_2,\cdots,d_k$，其中$1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$，记

$D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k$

(a) 证明：$D<n^2$

(b) 确定所有的n，使得D能整除n^2

23.(2002.中国数学奥林匹克第六道大题) 给定 $c \in (\frac{1}{2},1)$,求最小常数 M,使对任意整数 $n \geqslant 2$ 及实数 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,只要满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_n = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_n \quad ①$$

总有 $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k$,其中 $m = [cn]$ 表示不超过 cn 的最大整数.

第五章

设计与构造

§5.1 知识、方法、技能

组合数学问题,从内容上讲,大体可归结为两大类问题:一类是组合计数问题,这类问题在前几讲中已经充分研究过了;另一类是组合设计问题,我们在本讲和下一讲对此作深入的探讨.

组合设计问题的基本含义是,对有限集合 A,按照某性质 P 做出"安排".对这种"安排",有时是指需要我们设计一个方案,这个方案满足某些条件;有时是指对组合问题进行构造性证明的具体构造方法.这就是我们这一讲要讲的《设计与构造》.对这种"安排",有时不容易给出,需要我们对问题的条件重新调整,甚至反复调整;也有时需要对问题的条件重新组合搭配;这种安排在二人对策(游戏)问题中需要取胜,需要给出至胜策略,这就是我们下一讲要研究的《调整与对策》.

Ⅰ. 设计

有关"设计"的问题近几年来是热点竞赛问题,例如1999年中国数学奥林匹克第三大题:MO 太空城由99个空间站组成,任两空间站之间有管形通道相连,规定其中99条通道为双向通行的主干道,其余通道严格单向通行.如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站,则称这四个站的集合为一个互通四站组.

试为 MO 太空城设计一个方案,使得互通四站组的数目最大(请具体算出该最大数,并证明你的结论).

像这样的问题就是一个典型的奥数组合设计问题.组合设计问题的特点是(1)来源于实际;(2)组合基础知识要扎实.

Ⅱ. 构造

也就是构造方法解决组合问题.是组合问题的解决中一种十分重要、十分奏效的方法.经常需要构造的有:构造映射,构造集合,构造恒等式,构造组合模型,构造集合划分,构造抽屉,构造子集类,构造图形,构造实例,…,等等.

§5.2 赛题精讲

例1 (1990.全国联赛二试题3)某市有 n 所中学,第 i 所中学派出 C_i 名学生($1\leqslant C_i\leqslant 39,1\leqslant i\leqslant n$)来到体育馆观看球赛,全部学生总数为 $\sum_{i=1}^{n}C_i=1990$,看台上每一横排有199个座位,要求同一学校的学生必须坐在同一横排.问体育馆最少要安排多少横排才能保证全部学生都能坐下?

解:让学生按学校顺次入坐,每排坐满后再转入下一排,共用10($=1990\div199$)排.这时有的学校学生已坐在同一排,有的学校学生坐在两排.后一种学校至多9个.再增加两排座位,每排可容纳5个学校.将上述(至多)9个学校移到这两排,则每个学校的学生都坐在同一排,因此,12排足够.

另一方面,$1990=34\times58+18$.如果58个学校各有34名学生,1个学校18名学生,那么每排至多安排34名学生的学校5所($34\times6>199$),11排至多安排34名学生的学校55所,所以11排是不够的.

例2 (1999.中国数学奥林匹克试题三)题目请见"知识、方法、技能".

证明:在下面的讨论中,设 n 是大于3的奇数,并记 $m=\frac{n-3}{2}$.我们将讨论 n 个空间站和 n 条双行主干道的更一般情形.对于本题而言,$n=99,m=\frac{n-3}{2}=48$

(1) 如果某四个空间站中,有一个站与其他三站间的通道都从该站单向发出,那么,这四站的集合必定是不互通的四站组.约定将所有这样的不互通四站组归入 S 类;并将所有不属 S 类的不互通四站组归入 T 类.则互通四站组的总数为

$C_n^4-|S|-|T|$

用 $1,2,\cdots,n$ 给 n 个空间站编号.设从第 i 号空间站发出的单行通道数为 S_i,则 S 类不互通四站组的总数为

$|S|=\sum_{i=1}^{n}C_{s_i}^3$,这里 $C_k^3=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$

(2) 对于如上定义的 C_k^3 和 $C_k^2=\frac{k(k-1)}{2}$,熟知有关系(可直接验证):$C_k^3=C_{k-1}^3+C_{k-1}^2$

如果 $s>t+1$,那么 $C_s^3-C_{s-1}^3=C_{s-1}^2>C_t^2=C_{t+1}^3-C_t^3$

即　$C_s^3+C_t^3>C_{s-1}^3+C_{t+1}^3$

根据以上探讨,通过"调整法"可以断定

$|S|=\sum_{i=1}^{n}C_{s_i}^3\geqslant nC_m^3$,其中 $m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i=\frac{1}{n}(C_n^2-n)=\frac{n-3}{2}$

据此估计互通四站组总数的上界为

$C_n^4-|S|-|T|\leqslant C_n^4-nC_m^3$

(3) 如果能设计一个方案,使得 S 类不互通四站组的数目降到最少(实际降到0),那么,该方案的互通四站组的数目达到最大.

为此目的,首先将编号为 $1,2,\cdots,n$ 的空间站依顺时针次序安排在一个圆周上.下面将给出满足要求的两种方案.

第一方案　首先将沿圆周相邻的空间站对之间的通道定为主干道.这样设定了 n 条主干道:$\{1,2\},\{2,3\},\cdots,\{n-1,n\},\{n,1\}$

对于 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j$,如果圆周上沿顺时针方向从 i 到 j 的弧经过奇数个中间站,那么,规定 i 号站与 j 号站之间的通道为 $i\to j$ 单行道.因为 n 是奇数,从 k 到 l 的顺时针圆弧和从 l 到 k 的顺时针圆弧当中,恰有一条经过奇数个中间站,所以上述单行约定不会导致矛盾情形.

按照此方案,从每个空间发出的单行道都为 $m=\frac{n-3}{2}$ 条,因此,S 类不互通四站组总数降至最小 $|S|=nC_m^3$

下面将指出,按照此方案 $|T|=0$

如果四站组中某两站间有主干道相连,那么,四站组中其余任一站都与这两站互通.因此,这样的四站组为互通四站组.

考察从四站组的某三站到剩下一站的三条通道都单向通往剩下的一站的情形,设在除去剩下一站 D 的圆周上,所述的三站按顺时针方向依次为 A,B,C.因为 $A\to D,B\to D,C\to D$,根据方案的单行规定可以判断 A 与 B 之间和 A 与 D 之间的顺时针圆弧上各经过奇数个中间站,我们判明通道 $A\to B,A\to C,A\to D$ 的单行方向,因此,这样的不互通四站组 $\{A,B,C,D\}$ 应归入 S 类.

根据以上的讨论,可以断定 $|T|=0$

最后算出互通四站组数的最大值.

$C_n^4-nC_m^3=\frac{n(n-3)}{48}(n^2+6n-31)$

对于 $n=99$,互通四站数组的最大值为

$99\times\frac{96}{48}\times(9801+594-31)=99\times2\times10364=2052072$

第二方案 （同样先将编号为 $1,2,\cdots,n$ 的空间站按顺时针次序安排于一个圆周上.）

如果从 a 号空间站到 b 号空间站的顺时针圆弧恰经 $\frac{n-3}{2}$ 个或者 $\frac{n-1}{2}$ 个中间站，那么，规定 a 与 b 间的通道为双行主干道. 如果从 i 号空间站到 j 号空间站的顺时针圆弧经过的中间站数少于 $\frac{n-3}{2}$，则规定 i 和 j 之间的通道单向从 i 通往 j.

按照此方案，从每个空间站发出的单行通道数都为 $m=\frac{n-3}{2}$ 条. 因此，S 类不互通四站组数降至最小值 $|S|=nC_m^3$

按照此方案，同样可证 $|T|=0$. 事实上，与第一方案类似的验证讨论，可以判定：如果某四站组中有两站间的通道是主干道，那么这四站组是互通的. 还可以判定：如果从四站组中某三站到剩下的一站 D 的通道都单向通往该站，那么这三站在除去 D 点的圆周上顺时针方向排头的一站 A 通往其他三站 B,C,D 的通道都单向发出：$A\to B,A\to C,A\to D$. 因此，这类四站组 $\{A,B,C,D\}$ 应归入 S 类.

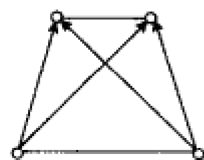


图 Ⅱ－6－5－1

因此，按照此方案建造的太空城，没有 T 类不互通四站组，并且互通四站组数达到最大. 剩下的计算同第一方案.

【评注】 有一些不正确的设计方案虽然能使各站发出的单行通道数目相等，却不能排除如图 Ⅱ－6－5－1 所示的那种不互通四站组，因而不能使互通四站组的数目达到最大.

例 3 （1992. IMO33－3）给定空间中的9个点，其中任何 4 点都不共面，在每一对点之间都连有一条线段，这些线段可染为蓝色或红色，也可不染色. 试求出最小的 n 值，使得将其中任意 n 条线段中的每一条任意地染为红蓝二色之一，在这 n 条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形.

解：本题的背景是以下两个熟知的结果.

引理 1 对五阶完全图的边作二染色，存在一种染色方法，使得染色后的图中没有单色边三角形，如图 Ⅱ－6－5－2 所示，虚、实线分别表示两种颜色的边，这时，图中无单色边三角形.

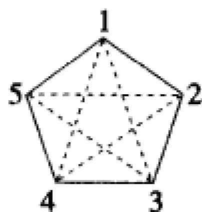


图 Ⅱ－6－5－2

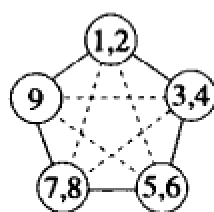


图 Ⅱ－6－5－3

引理 2 对边作二染色的六阶完全图中一定存在单色边三角形.

为了求解本题，借助于引理 1，我们构造一个 9 点图如图 Ⅱ－6－5－3所示，这个图的顶点编号为 $1,2,\cdots,9$，其中边 $\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}$ 染成红色（实线），顶点 1 与 2 之间没有边连接，类似地，圆圈内的顶点 3 与 4，顶点 5 与 6，顶点 7 与 8 均没有边相连，显然，这个图中没有单色边三角形，容易算出，这个图中的边数是 $C_9^2-4=32$，所以，$n\geqslant 33$

另一方面，没染色的线段至少有 33 条，则由于线段共 $C_9^2=36$ 条，不染色的线段至多 3 条.

若点 A_1 引出不染色的线段，则去掉 A_1 及所引出的线段，若剩下的图中还有 A_2 引出不染色的线段，则去掉 A_2 及所引出的线段，依此进行，由于不染色的线段至多有 3 条，所以至多去掉 3 个顶点（及从它们引出的线段），这时至少剩下 6 个点. 每两点之间的连线染上红色或蓝色，由引理 2 知，必存在一个同色三角形.

综上所述，n 的最小值为 33

例 4 对 $n\geqslant 2$，求证：$2^n<C_{2n}^n<4^n$ ①

证明：构造集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1},\cdots,a_{2n}\}$，则 C_{2n}^n 表示从 A 中取 n 个元素的组合数，即由 n 个元素组成的 A 的真子集有 C_{2n}^n 个，而 A 的所有子集数是

$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n} = 4^n$

个,故有 $C_{2n}^n < 4^n$

又设集合 $B_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

$B_2 = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{2n}\}$

对于集合 B_1 的一个子集,设其有 r 个元素,若 $r < n$,则从集合 B_2 中任取 $n - r$ 个元素;再连同取出 B_1 的全部元素,这种取法实际上是从集合 A 中取出 n 个元素的一种方式.注意到,若 $1 \leqslant r < n$,则从集合 B_2 中取出 $n - r$ 个元素的方式不是惟一的.因此,集合 B_1 的全部子集数少于从集合 A 中取出 n 个元素组成的子集数,即 $2^n < C_{2n}^n$,故不等式 ① 成立.

例 5 给定集合 $S = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$,其中 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是非零复数(可看做平面上的非零向量).求证:可以把 S 中的元素分成若干组,使得

(1) S 的某个元素属于且仅属于其中一组

(2) 每一组中任一复数与该组所有复数之和的夹角不超过 $90°$

(3) 将任意两组中的复数分别求和,所得的和数之间的夹角大于 $90°$

证法一:对 S 的任何非空子集,我们将其中所有复数之和的模称为该子集的和模.在 S 的所有非空子集中(仅有有限个),选择和模最大的一个非空子集记为 A_1,并以 a_1 记 A_1 中所有复数之和.

可以证明 A_1 中任何复数与 a_1 的夹角均不超过 $90°$,若不然,某个 $z \in A_1$ 与 a_1 的夹角大于 $90°$,则 $-z$ 与 a_1 的夹角小于 $90°$,于是

$|a_1 + (-z)| > |a_1|$

但 $|a_1 + (-z)|$ 是 $A_1 \backslash \{z\}$ 的和模,与 A_1 的选择矛盾.

若有 $A_1 = S$,则结论得证,否则对集合 $S \backslash A_1$ 进行与 S 同样的处理,得 A_2,并以 a_2 记 A_2 的所有复数之和,同理可证 A_2 中任一复数与 a_2 之夹角不超过 $90°$,下证 a_1 和 a_2 的夹角大于 $90°$.

事实上,若 a_1 和 a_2 的夹角不超过 $90°$,则有 $|a_1 + a_2| > |a_1|$,这与 $|a_1|$ 的选取矛盾.

若有 $S = A_1 \cup A_2$,则结论得证.否则可以用同样的方法得 A_3 及其所有复数之和 a_3.同理可证 A_3 中任一复数与 a_3 的夹角不超过 $90°$,且 a_1, a_3 与 a_2 的夹角均大于 $90°$.

这时,有结论:$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,因为否则的话,用同样的方法可得 A_4 及 a_4,使 a_1, a_2, a_3, a_4 成为平面上两两夹角均大于 $90°$ 的四个非零复数,这是不可能的.

证法二:将 $S = \{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 任意分为三组(允许有一组或两组为空集),满足题述要求(1).

设三组的向量和分别为 s_1, s_2, s_3,考虑 $|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2$,由于分组的方法仅有有限种,所以 $|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2$ 必有最大值.设 $|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2$ 达到最大值,我们来证明这样的分组符合要求(2)、(3).

为此,引入数量积,即定义向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的数量积为

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\alpha$

其中 α 是 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 的夹角.

易知 $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$,当且仅当 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 之间的夹角为钝角时,$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$,此外 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$,即分配率成立.

如果 s_1 与 s_2 之间的夹角不大于 $90°$,那么,$s_1 \cdot s_2 \geqslant 0$

从而 $s_1{}^2 + s_2{}^2 \leqslant s_1{}^2 + s_2{}^2 + 2s_1 \cdot s_2 = (s_1 + s_2)^2$

即我们可将第一、二组并为一组,而 $s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3^2$ 不减少,所以可设(2) 成立.

如果(3) 不成立,不妨设第一组中 z_1 与 s_1 的夹角为钝角,即 $z_1 \cdot s_1 < 0$.由于 4 个钝角之和大于 $360°$,所以 z_1 必与 s_2 或 s_3 的夹角不为钝角,设 $z_1 \cdot s_3 \geqslant 0$,则将 z_1 并入第三组,这时

$(s_1 - z_1)^2 + (s_3 + z_1)^2 = s_1{}^2 + s_3^2 - 2z_1 \cdot s_1 + 2z_1 \cdot s_3 + 2z_1^2 > s_1{}^2 + s_3^2$

与 $s_1{}^2 + s_2{}^2 + s_3^2$ 最大矛盾(以上证明在第二、三组中有空集时仍然有效).所以(3) 成立.

【说明】 上述两种证法都是利用极端情形,构造出满足要求的分划,在论证的过程中多次用到反

证法.

例 6 对于给定的自然数 k,求具有以下性质的最小自然数 n,使得对任给的 n 个整数必然能从中找出两个数,这两个数的和或差被 $2k+1$ 整除.

【分析】 显然 n 依赖于 k,n 是 k 的函数,我们知道,两个数之差被 $2k+1$ 整除时,这两个数对 $2k+1$ 同余,由此启发我们考查整数被 $2k+1$ 除所得余数的集合(共 $2k+1$ 个元素)

$M=\{0,1,2,\cdots,2k-1,2k\}$

由抽屉原理知,任取 $2k+2$ 个整数,其中必存在两个数,他们对 $2k+1$ 同余,这时他们的差可被 $2k+1$ 整除,因此 $n\leqslant 2k+2$

注意到我们还没有用到"两个数的和被 $2k+1$ 整除"这一条件,看来 $2k+1$ 大了,如果两个数中,一个数被 $2k+1$ 除余数为 $2k$,另一个余 1,则它们的和可被 $2k+1$ 整除,同理,两个数中,一个数被 $2k+1$ 除余数为 $2k-1$,另一个余数为 2,它们的和也能被 $2k+1$ 整除,…… 由此启发我们把 M 分划为如下 $k+1$ 个子集.

$M=\{0\}\cup\{1,2k\}\cup\{2,2k-1\}\cup\cdots\cup\{k,k+1\}$,容易看出,任取 $k+2$ 个整数,如果它们被 $2k+1$ 除所得的余数都不相同,则其中至少有两个落入 $\{0\},\{1,2k\},\{2,2k-1\},\cdots,\{k,k+1\}$ 中的一个集合内,当然不会落入 $\{0\}$ 内,这样的和被 $2k+1$ 整除,如果它们被 $2k+1$ 除所得的余数中有两个相同,那么这两个相同余数对应的两个整数之差可被 $2k+1$ 整除,由此可见 $n\leqslant k+2$

$k+2$ 能否减小,首先应当考虑 $k+1$ 是否具有题目所说的性质:(对于给定的自然数 k) 对于任意 $k+1$ 个整数,必能从中找出两个数,这两个数的和或差可以被 $2k+1$ 整除.考虑下述 $k+1$ 个数:$\{k+1,k+2,\cdots,2k+1\}$,其中任两个数的差值在 $1,k$ 之间,因此任两个数之差不能被 $2k+1$ 整除,任两个数的和在 $2k+3,4k+1$ 之间,也不能被 $2k+1$ 整除.这表明:存在 $k+1$ 个数,不具有题目中所说的性质.

$\therefore n=k+2$

【说明】 为了得到最小的(确界)n,必须指出 $k+1$ 不具备题目中所述性质,为此,构造出适当的 $k+1$ 个数,它们不具备题述性质,这说明 $n\geqslant k+2$

本题也可以颠倒一下叙述方式:首先取 $k+1$ 个数,它们不具备题述性质,这说明 $n\geqslant k+2$,然后论证 $k+2$ 具备题述性质.

例 7 设 $X=\{1,2,\cdots,2001\}$,求最小正整数 m 适合要求:对 X 的任何一个 m 元子集 W 都存在 u,$v\in W$(u 和 v 可以相同),使得 $u+v$ 是 2 的方幂.

解:将 X 分成以下 5 个子集进行考察

$2001=1024+977\geqslant x\geqslant 1024-977=47$

$46=32+14\geqslant x\geqslant 32-14=18$

$17=16+1\geqslant x\geqslant 16-1=15$

$14=8+6\geqslant x\geqslant 8-6=2$

$x=1$

为了构造一个使题中要求不被满足又含元素最多的例子.这个子集不能含 2 的任一方幂且每对数 $\{2^r+a,2^r-a\}$ 中只能有 1 个含在集中,令

$Y=\{2001,2000,\cdots,1025\}\cup\{46,45,\cdots,33\}\cup\{17\}\cup\{14,13,\cdots,9\}\cup\{1\}$,则有 $|Y|=998$ 且对任何 $u,v\in Y$,$u+v$ 都不是 2 的方幂.

事实上,当 $u,v\in Y$ 时,不妨设 $u\geqslant v$ 且有 $2^r<u\leqslant 2^r+a<2^{r+1}$,其中当 r 分别取值 10,5,4,3 时,相应的 a 值依次为 977,14,1,6

(1) 若 $2^r<v\leqslant u$,则 $2^{r+1}<u+v<2^{r+2}$,$u+v$ 不能是 2 的方幂.

(2) 若 $1\leqslant v<2^r$,则当 $2^r<u\leqslant 2^r+a$,$1\leqslant a<2^r$ 时,$1\leqslant v<2^r-a$,于是

$2^r<u+v<2^{r+1}$

这表明 $u+v$ 也不能是 2 的方幂,所以,子集 Y 中任何两数之和都不是 2 的方幂.

故知所求的最小正整数 $m\geqslant 999$

将 X 划分成下列 999 个互不相交的子集：$A_i = \{1024 - i, 1024 + i\}, i = 1, 2, \cdots, 977$

$B_j = \{32 - j, 32 + j\}, j = 1, 2, \cdots, 14$

$C = \{15, 17\}$

$D_k = \{8 - k, 8 + k\}, k = 1, 2, \cdots, 6$

$E = \{1, 8, 16, 32, 1024\}$

对于 S 的任何一个 999 元子集 W，若 $W \cap E \neq \varnothing$，则从其中取一个元素的 2 倍都是 2 的方幂；若 $W \cap E = \varnothing$，则 W 中的 999 个元素分属于前面的 998 个 2 元子集. 由抽屉原理知 W 中必有不同的 u 和 v，属于其中同一子集，显然，$u + v$ 为 2 的方幂.

综上可知，所求的最小正整数 $m = 999$

§5.3 针对性训练

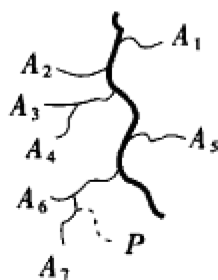
A组

1.(1978.北京市赛二试题4)如图Ⅱ-6-5-4是一个工厂区的地图,一条公路(粗线)通过这个地区,七个工厂 $A_1,A_2,\cdots,A_7$ 分布在公路两侧,由一些小路(细线)与公路相连,现在要在公路上设一个长途汽车站,车站到各工厂(沿公路,小路走)的距离总和越小越好.

(1)这个车站设在什么地方最好?

(2)证明你所作的结论.

(3)如果在 p 的地方又建立了一个工厂,并且沿着图上的虚线修了一条小路,那么这时车站设在什么地方好?



图Ⅱ-6-5-4

2.(1978.全国联赛二试题)设有十人各拿提桶一只同到水龙头前打水,设水龙头注满第 $i(i=1,2,\cdots,10)$ 个人的提桶需时 T_i 分钟,假定这些 T_i 各不相同,问:

(1)当只有一个水龙头可用时,应如何安排这十个人的次序,使他们的总的花费时间(包括各人自己接水所花的时间)为最小?这时间等于多少?(须证明你的论断)

(2)当有两个水龙头可用时,应如何安排这十个人的次序,使他们的总的花费时间为最少?这时间等于多少?(须证明你的论断)

3.(1)若平面上的每个点都涂上三种颜色中的一种,是否存在涂有同一种颜色的两个点,它们之间的距离恰为一英寸?

(2)在(1)中若用"九种颜色"代替"三种颜色",会有什么结果?

证明你的结论.

4.某新建城市购进大批公共汽车,用以解决市内交通问题,他们计划在1983个不同地点建立汽车站,并通过开辟若干线路的公共汽车沟通它们,他们的愿望是:(1)尽可能多开辟一些线路;(2)每两条线路至少有一个公用的汽车站;(3)每个公共汽车站至多经过两条不同线路.问:照此愿望,他们最多可以开设多少条线路的公共汽车?每条线路至少应经过多少个车站?

5.某个县下属的每两个区都恰好由汽车、火车、飞机三种交通方式中的一种直接联系,已知在全县中三种交通方式全有,但没有一个区三种方式全有;并且没有任何三个区中两两联系的方式完全相同.问:这个县最多有几个区?

6. 证明:集合$\{1,2,\cdots,1991,1992\}$中存在一个由1593个元素组成的子集,其中没有一个元素是另一个的4倍.

B组

7.(1986.全国联赛二试题3)平面直角坐标系中,请设计一种方案将所有的整点染色,每一整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色,使得

(1)每一种颜色的点出现在无穷多条平行于横轴的直线上;

(2)对于任意白点A、红点B及黑点C,总可以找到一个红点D,使$ABCD$为一平行四边形,证明你设计的方案符合上述要求.

8.(1989.第30届IMO)设n为正整数,我们称集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\}$具有性质$P$,如果在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$中至少有一个$i$,使得$|x_i-x_{i+1}|=n$,求证对于任何$n$,具有性质$P$的排列比不具有性质$P$的排列的个数多.

9. 平面上有n个点,它们不全在一条直线上,试证:一定有一条恰好通过其中两点的直线.

(西勒维斯特问题)

10.(1987.全国高中数学联赛试题)$n(n>3)$名乒乓球选手举行单打比赛若干场后,任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同,试证明:总可以从中去掉一名选手,而使在余下的选手中任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同.

11.(1994.全国高中数学联赛试题)给定平面上的点集$P=\{p_1,p_2,\cdots,p_{1994}\}$,$P$中任$i$点均不共线,将$P$中所有的点任意分成83组,使得每组至少有3个点,且每点恰好属于一组,然后将在同一组的任两点用一条线段相连,不在同一组的两点不连线段,这样得到一个图案G,不同的分组方式得到不同的图案,将图案G中所含的以P中的点为顶点的三角形的个数记为$M(G)$

(1) 求 $M(G)$ 的最小值 m_0

(2) 设 G^* 是使 $m(G^*) = m_0$ 的一个图案,若将 G^* 中的线段(指以 P 的点为端点的线段)用4种颜色染色,每条线段恰好染一种颜色,证明存在一个染色方案,使 G^* 染色后不含以 P 的点为顶点的三边颜色相同的三角形.

12. 试卷上共有4道选择题,每题有3个可供选择的答案,一群学生参加考试,结果是:对于其中任何三人,都有一个题目的答案互不相同,问参加考试的学生最多有多少人?

第六章

调整操作与博弈对策

§6.1 知识、方法、技能

Ⅰ 调整操作

如果我们将所讨论的问题看作一个系统，需要探求这一系统的初始状态与终止状态之间的变化规律，依照这一规律逐步进行调整操作，从而使问题获得解决，这样的问题称为调整操作问题.

在国内外数学竞赛中，经常遇到一些富有趣味的调整操作性问题，这类题目的调整操作过程实际上是一个变换过程，一个递推过程，但是调整操作规则一般无法表达为明显的递推公式. 它涉及面很广，解决它们常不需要很多专门的知识，但却具有一定技巧. 这正是命题者的用意 —— 考查学生的能力.

如果数学竞赛中出现的一些调整操作性问题的求解方法作一总结归纳的话，那么大体上方法有："实验法"、"递推法"、"赋值法"、"枚举法""归纳法"、"倒推法"、"观察法"、"反证法"、"猜想法"、"构造法"等.

Ⅱ 博弈对策

在二人博弈对策(游戏)中，对局双方依规则轮流操作，预先规定终局状态及胜负判定. 此类对策的结果由初态完全确定，问题就是在给出规则与初态时确定是先走的一方还是后走的一方必胜，并求出致胜策略，所谓策略不是固定的时刻表，而是对各种局面的应对方案，而致胜策略是不管对方如何走将均可保证获胜的策略.

我们介绍三种对策：

(1) 取火柴型对策 —— 递归方法

取火柴对策泛指数量型的对策，它的状态可用一组非负整数表示，而操作是单向的，故可从终局状态递归得出任一初态的胜负性质，如果从某一初态起步的一方必输，称这一初态为奇异态；如果从某一初态起步的一方必胜(如果必胜方取正确的策略)，则称这一初态为非奇异态，记全体奇异态的集合为 L，全体非奇异态的集合为 W. 例题分析见例 9、例 10

(2) 位置型对策 —— 配对方法

在涉及几何图形的对策中，操作不具单向性，不能递归. 在这种博弈游戏中，如某一步走向未被判输，则称这样的步为活步. 如果一方的策略能保证自己总能在对方走出活步后仍有活步可走，则必胜(假设无平局).

保证有活步可走的一种方法是将所有可走的位置配对，使每对位置 a，b 满足：只要对方能走到一个位置比如 a，自己就能从 a 走到 b

配对应根据图形的几何特征及走步规则而定，常用的有对称、相邻等条件. 应抢占无法配对的多余位置及对称中心. 实例分析详见例 11 和例 12

(3) 支付型对策 —— 平衡方法

这类对策结束时不是规定胜负，而规定双方的得分，通常只规定一方的得分 a，认为另一方得 $-a$，称为零和对策. 双方分别追求自己的最优值，如果 A 方有策略能保证至少得 a 分，但同时对方有策略保证使 A 至多得 a 分，则称 a 为 A 方的最优值，常见的游戏是平衡的，即双方同时达到各自的最优值，实例分析详见例 13 和例 14

§6.2 赛题精讲

关于调整操作性问题.

1. 利用试验法解调整操作性问题.

例1 在黑板上写上三个整数,然后将其中一个擦去,换上其他两数之和与1之差,将这个过程重复若干次之后得到(17,1999,2015),则一开始黑板上写出的三个数是否可能是

(1) (2,2,2) (2) (3,3,3)

【策略】 本题操作过程是一个使数组的数逐渐变大的过程,由此可知,逆推过程则是擦去最大数,使中间数为前一状态的最大数的过程.本题不妨可考虑操作过程中奇偶性的变化关系及在递推过程中用试验法来解决.

解: 由于三个数在题述操作过程中奇偶性的变化关系为

(偶,偶,偶)→(偶,偶,奇)→(偶,偶,奇)

所以 (2,2,2)无法经过若干次操作达到(17,1999,2015)

由于 (奇,奇,奇)→(奇,奇,奇)→(奇,奇,奇)

则 (3,3,3)有可能是操作过程的初始状态

若先考虑(3,3,3)经过若干次变化后达到$(17,a,b)(17 < a < b)$

则有 $b = a + 17 - 1 = a + 16$

显然 $2015 = 1999 + 16$ 也满足

固定17,选择尽量小的 $a > 17$,使$(17,a,a+16)$经若干次调整操作能达到(17,1999,2015)

对$(17,a,a+16)$,若擦去 $a+16$,则操作后仍为自己不动,故应考虑擦去 a,此时经操作后得

$(17,a+16,a+2\times 16)$

再擦去 $a+16$,经操作后得$(17,a+2\times 16,a+3\times 16)$,…,经过 n 次操作后,得$(17,a+n\times 16,a+(n+1)\times 16)$

由于 $1999 = 31 + 123\times 16$,若取 $a = 31$,(17,31,47)需经123次擦去中间数的操作可达(17,1999,2015)

又同为有如下递推:

(17,31,47)←(15,17,31)←(3,15,17)←(3,13,15)←(3,11,13)←(3,9,11)←(3,7,9)←(3,5,7)←(3,3,5)←(3,3,3)

知(17,31,47)可由(3,3,3)经9次变换达到,所以(17,1999,2015)可由(3,3,3)经 $123 + 9 = 132$ 次变换达到.

2. 利用递推探求调整操作性问题

例2 在一个圆的直径两端都写上数1,并由此直径分得两个半圆,把每个半圆再对分,在每个分点上写上相邻两数之和(即写上 $1+1=2$),然后,再把所得的四个$\frac{1}{4}$圆对分,在每个分点上写上相邻两数之和(即写上 $1+2=3$ 或写上 $2+1=3$)等等.依此手续进行8次后,试写出圆周分点上的所有数字之和.

【策略】 本题先使用不完全归纳法探求操作规则如下:第一次操作后,所有数字之和为 $S_1 = 1 + 1 = 2$;第二次操作后,所有数字之和为 $S_2 = S_1 + (1+1) + (1+1) = S_1 + 2S_1 = 3S_1$;第三次操作后,所求数字之和为 $S_3 = S_2 + (1+2) + (1+2) + (1+2) + (1+2) = S_2 + 2S_2 = 3S_2$,…,通过以上探求,不难发现本题可用递推法来解决.

解: 易求 $S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 18, \cdots$,设第 k 次操作后和为 S_k 则在进行第 $k+1$ 次操作时,每一个填上去的数都是第 k 次手续后,已出现相邻两数之和,因而这些数字的每一个都正好被加了两次,即新

填上的数之和为 $2S_k$，于是，有递推式：

$$S_{k+1}=S_k+2S_k=3S_k, S_1=2$$

所以 $S_n=3S_{n-1}=3^2S_{n-2}\cdots=3^{n-1}\cdot S_1$
$=2\times 3^{n-1}$

表：

1	4	7	10	13	16	19	22
9	12	15	18	21	24	3	6
17	20	23	2	5	8	11	14

易见，表中每行中相邻两数所代表的两个分点间所夹的弧长为 3，每列相邻两数所代表的两个分点间所夹的弧长都是 8(首尾两数也算作相邻)，这样一来，题中对所取 8 点的要求化为要求所取 8 点的号码在数表中互不相邻，所以，每列恰取 1 个数，每行至多取 4 个互不相邻的数.

于是从第 1 列取 1 个数，共有 3 种不同取法，第 2 列所取的数不能与第 1 列所取的数同行，故只有两种不同取法，以后每列都有两种不同取法，共有 3×2^7 种不同取法. 但其中第 8 列所取的数与第一列所取的数同行的所有取法都不满足要求，不满足要求的取法数为 3×2^6

若记从 $3\times n$ 数表中每列恰取一个数且任何相邻两列(包括第 n 列与第 1 列)所取的数都不同行的不同取法种数为 x_n，则上述结论恰为：$x_8=3\times 2^7-x_7$

类似可以得到 $x_n=3\times 2^{n-1}-x_{n-1}$ 由此递推关系即得

$x_8=3\times 2^7-x_7$

$=3\times 2^7-(3\times 2^6-x_6)$

$=3\times(2^7-2^6)+x_6$

…

$=3\times(2^7-2^6+2^5-2^4+2^3-2^2+2)$

$=3\times 86$

$=258$

即满足题中要求的不同取法种数为 258

【评注】 上述解题方法的关键构建 3×8 数表.

3. 利用赋值法巧解调整操作性问题

例 4 给出一个国际象棋盘，把位于内部而为 2×2 的正方形的每个方格改变成另外的颜色，问到最后能否使棋盘里恰好剩下一个白色方格？

【策略】 赋值法与涂色法是一对姊妹花，本例为涂色题，不妨将某些几何元素赋予一个数值，赋值作为辅助解答来实现本题的解法.

解：8×8 的国际象棋盘中有 32 个黑格 32 个白格，我们给每个黑格赋以数值 1，给每个白格赋以数值 -1，初始状态有 32 个 1，32 个 -1，它们的乘积 $S_0=1^{32}\times(-1)^{32}=1$，每次操作改变 $2\times 2=4$ 个方格的颜色，相当于改变 4 个方格的数值符号，对于 64 个格子中的数值的乘积 S 来说，每次操作相当于乘以一个 $(-1)^4$，如果先后共进行了 k 次操作，k 次操作后格子中数值的乘积 $S_k=S_0\times\underbrace{(-1)^4\times(-1)^4\times\cdots\times(-1)^4}_{k=1}$，不可能为 $1^{63}\times(-1)=-1$，所以，到最后棋盘里恰好只剩下一个白色方格是不可能的.

4. 利用枚举法解调整操作性问题

例 5 $n(n\geqslant 3)$ 个学生坐成一圈，按一个指定的方向顺次编为 $1,2,3,\cdots,n$ 号，老师按下述规则叫号：设某一次叫到第 i 号，则下一次被叫到的是第 i 号后面的第 i 个学生，试证：不论第一次叫到哪一号，至少有一个学生永远叫不到.

【策略】 设继 i 号之后被叫到的是 j 号，则 $j=\begin{cases}2i & (2i\leqslant n)\\ 2i-n & (2i>n)\end{cases}$

此问题较复杂，设想把它分割成 n 个小问题（情况），用枚举法来解决它.

解：(1) 当 $i = n$ 时，则 $j = n$，从而当第一次被叫到的第 n 号时，其余学生将永远叫不到；

(2) 当 $i \neq n$ 时，分两种情况：

① 若 n 是偶数，由于 $2i$ 及 $2i - n$ 都是偶数，且 $n \geqslant 3$，因此，至少有一个奇数号学生永远叫不到；

② 若 n 是奇数，则 $2i \neq n$，并由 $i \neq n$，可得 $2i - n \neq n$，所以 $j \neq n$，即第 n 号学生永远叫不到.

5. 利用归纳法证明调整操作性问题

例 6 设有2^n 个球分成了许多堆，我们可以任意选择甲、乙两堆按照以下规则挪动：若甲堆的球数 p 不小于乙堆的球数 q，则从甲堆拿 q 个球放到乙堆里去，这样算是挪动一次，证明：可以经过有限次挪动把所有的球合并成一堆.

【策略】 由于本题是有自然数 n 的一个命题，且最后结论是将所有的球合并成一堆，不妨考虑用归纳法来证明.

证明：(1) 当 $n = 1$ 时，总共只有两个球，可能只有一堆，则不必挪动；可能分为两堆，只经挪动一次就并成一堆，即 $n = 1$ 时，命题成立.

(2) 假设 $n = k$ 时命题成立，即 2^k 个球已分成若干堆，经过有限次挪动能并成一堆，则当 $n = k + 1$ 时，2^{k+1} 个球分成的各堆的球数可能是偶数，也可能是奇数，但有奇数个球的堆数必定是偶数，否则总球数是奇数，与已知矛盾. 把奇数个球的堆任意两两配合，在每两堆之间挪动一次，就使得各堆球数都是偶数了，这时总堆数不超过原来的堆数，且每堆都有偶数个球了，于是，可把同一堆中的两个球看作已捆成的一个大球，问题归纳为共有 2^k 个大球的情况，根据归纳假设，可以按规则把它们在挪动若干次后并成一堆，即原来的 2^{k+1} 个球也可以按规则挪动后并成一堆，亦即 $n = k + 1$ 时，命题也成立.

由(1)、(2) 可知命题对 $n \in N$ 都成立.

下面一个例子是“第 58 届莫斯科数学奥林匹竞赛题”，能很好的说明数学归纳的方法在调整操作问题中的应用.

例 7 指示板上有若干个电灯泡，且都亮着，今有若干个按钮，揿动按钮，可以改变与该按钮相连接的所有灯泡的亮灭状态，现知对任何一组灯泡，都有一个按钮与该组内的奇数个灯泡相连，证明：可通过揿动这些按钮熄灭所有的灯泡.

解：首先指出，最终的结果与揿动按钮的顺序无关.

设灯泡的个数为 n，我们对 n 作归纳.

当 $n = 1$ 时结论显然成立.

假设对于 $n - 1$ 个灯泡结论已证，我们来看 n 个灯泡的情形.

由归纳假设，可以通过揿动一组按钮，熄灭其中至多除了预先指定的一盏之外的其余所有灯泡，将预先指定的灯泡为第 i 号的所需揿动的按钮集合记为S_i(即在揿过 S_i 中所有按钮之后，至多只有第 i 号灯泡还亮着)，如果有某个 i_o，使得在揿过 S_{i_o} 中所有按钮之后，所有灯泡会熄灭，则结论已成立.

否则，对每个 i，在揿过 S_i 中所有按钮之后，就确切地知道仅有第 i 号灯泡还亮着，下面就来讨论这种情形.

不难看出，当揿过 S_i 与S_j 中所有按钮之后，仅有第 i 号与第j 号灯泡被改变了状态(实际上，如果有某个按钮既属于 S_i 又属于S_j，那么它就被揿了两次，因此等于没有揿)，由题意可知，存在一个按钮 T，它连接着奇数个灯泡，设这些灯泡为 $i_1, i_2, \cdots, i_{2k-1}$ 号，我们先揿动 S_{i_1} 中所有按钮，于是仅有第 i_1 号灯泡还亮着，接着再揿动 S_{i_2} 与 S_{i_3} 中所有按钮，于是仅有第 i_2 号与第 i_3 号灯泡被改变状态，因而亮了起来，然后揿动 S_{i_4} 与 S_{i_5} 中所有按钮，并如此做下去，于是，我们确切地使得凡与 T 相连的灯泡都亮着(其余的灯泡则都灭着)，这时，只要再揿一下 T，便可使所有灯泡全都熄灭.

故结论成立.

6. 利用反证法证明调整操作性问题.

例 8 已知任意一个正整数，将其数码相加，其和可为一位数或多位数，如果不是一位数，再将其和

数码相加，按此做下去，最后得到一位数为止，若该一位数是2,3,5,6,四数之一，试证原给的整数决不可能某正整数的平方或立方.

【策略】 本题操作，恰与一个整数能否被9整除的利定法则中的操作一致，且本题论证的是不可能的问题，由此可知，不妨用反证法来证明.

证明:因为任一正整数可表示为下列五种形式之一

$9n, 9n\pm1, 9n\pm2, 9n\pm3, 9n\pm4$

用反证法，设原给的正整数为下列形式之一的数

$(9n)^2=9k,(9n\pm1)^2=9k+1,(9n\pm2)^2=9k+4,(9n\pm3)^2=9k,(9n\pm4)^2=9k+7$

或$(9n)^3=9k,(9n\pm1)^3=9k\pm1,(9n\pm2)^3=9k\pm8,(9n\pm3)^3=9k,(9n\pm4)^3=9k\pm1$

这就是说，如果所给的正整数是某一个正整数的平方或立方，那么，它被9除的余数必为0,1,4,7,8中之一，而一个整数它的各位数码之和被9除所得的余数与原整数被9除所得的余数相等，这就与操作结果状况:该一位数是2,3,5,6四数之一矛盾，得证.

7. 利用猜想法解调整操作性问题

例9 （第27届国际数学奥林匹克竞赛试题）正五边形的每个顶点对应一个整数使得这五个整数的和为正，若其中三个相连顶点相应的整数依次为x,y,z，而中间的$y<0$，则要进行如下的操作：整数x,y,z分别换为$x+y,-y,z+y$，只要所得的五个整数中至少还有一个为负的，这种操作就继续进行，问：这样的操作是否进行有限后必定终止?

【策略】 所述操作并不改变各数的和，而这五个数的和为正，因此猜想：有可能当五数为非负时，操作终止.

解:为方便计算，把五个数写成一列：v,w,x,y,z，注意到z与v是相邻的，不妨设$y<0$，操作后，得$v,w,x+y,-y,y+z$，这没有影响各数之和，但影响了各数的平方和，因为

$v^2+w^2+(x+y)^2+(-y)^2+(y+z)^2-(v^2+w^2+x^2+y^2+z^2)=2y(x+y+z)$.这里看不出来是变大还是变小(我们希望变小)，如果再考虑加上每相邻两项和的平方(称为双平方和)，便有

$2y(x+y+z)+(v+w)^2+(w+x+y)^2+x^2+z^2+(y+z+v)^2-[(v+w)^2+(w+x)^2+(x+y)^2+(y+z)^2+(z+v)^2]$

$=2y(v+w+x+y+z)$

由于$y<0, v+w+x+y+z>0$，故上式差为负，即操作后，五数的双平方和减少，然而，双平方和是一个有限正数，每次减少五数和的$2|y|$倍，显然是不能无限地减少下去的，故到有限次以后，操作即将停止.

【评注】 解本题关键是从题设条件发现进行调整操作并不改变各数的和.

关于博奕对策问题

例9 两人轮流取一堆(n根)火柴，每步可取$1\sim p(2\leqslant p<n)$，分别规定：

(1) 取走最后一根的人胜；

(2) 取走最后一根的人输.

解:本题的结果是众所周知的.

(1)$L=\{k(p+1)\mid k\in N_0\}$，$N_0$为非负整数集.

当$n\in L$即，$(p+1)\mid n$时乙必胜，$(p+1)\nmid n$时甲必胜，致胜策略是每步走到L的状态.

(2)$L=\{k(p+1)+1\mid k\in N_0\}$，其余类似.

【评注】 我们的目的是由此引出一般的方法以便求解较难的问题.首先，上述结论的证明基于如下事实：L中任二状态之差至少为$p+1$，故由L的状态一步上能走到$W(=N_0/L)$，但由W的状态一步可走到L，而终局奇异态〔(1)的0和(2)的1〕属于L，故只要一方某步走到L，对方只能回到W.依次类推，前者必可步步走到L而使后者步步走到W.但游戏操作步数有限.前者必定到终局奇异态而获胜.由此可总结出：

引理 若一对策的状态集合可分为两个子集L、W，且满足：

(1) 终局奇异态属于 L；

(2) 从 L 的每个非终局态一步只能走到 W；

(3) 从 W 的每个状态都可一步走到 L，则当初态属于 L 时乙必胜，初态属于 W 时甲必胜，致胜策略是每步走到 L.

求 L、W 的递归方法可写成算法：

① 将终局奇异态置入 L，非奇异态置入 W；

② 将一步可走入 L 的状态置入 W；

③ 将未置的最小状态置入 L，返回 ②.

一般经不多的试算可以发现规律（如周期性）而猜出 L、W，再证明满足引理的条件(2)、(3) 即可.

例 10　如图 Ⅱ－6－6－1，1×100 方格纸左边格子中放一枚棋子. 两人轮流走子，每步可向右走 1、10 或 11 格，不得走出纸外，走最后一步到达右边的人胜，求取胜策略.



图 Ⅱ－6－6－1

解：本题等价于 99 根火柴每步取 1,10 或 11 根，取最后一根者胜. 如图 Ⅱ－6－6－2，试算猜测.

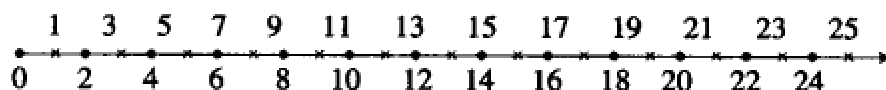


图 Ⅱ－6－6－2

$L=\{0,2,4,6,8(mod\ 20)\}$

证明：L 中任二状态之差为偶数且不等于10，故一步只能走到 W，而 W 中每一状态 $20k+r(r=1,3,5,7,9$ 或 $10\sim19)$. 当 $r<10$ 时取一根，$r\geqslant10$ 且为偶数时取 10 根，$r\geqslant11$ 且为奇数时取 11 根变到 L.

因此，由 $99\in W$ 知甲必胜. 取胜策略：第一步走 11 格，以后每步走后与右端格子相距为 0,2,4,6,8，$(mod\ 20)$.

推广：若每步可取 1 或 $a\sim b$ 根$(2\leqslant a\leqslant b)$，则

当 $2\mid a$ 时，$L=\{0,2,4,\cdots,a-2(mod\ (a+b-1))\}$

当 $2\nmid a$ 时，$L=\{0,2,4,\cdots,a-2(mod\ (a+b-1))\}$

请自证之，并讨论取最后一根者输的情况.

例 11　在 $m\times n$ 棋盘的一个格子中放一枚棋子，两人轮流走. 每步将棋子移到另一格子中，但要求棋子移过的直线距离大于对方刚才一步移过的距离. 无法走者输.

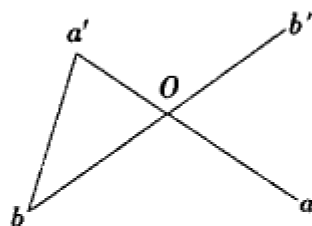


图 Ⅱ－6－6－3

解：取每个格子的中心，本游戏可看成在这些中心之间移动. 令整个棋盘的对称中心为 O，如图 Ⅱ－6－6－3，假定 A 方某步从一格 a 走到 a 关于 O 的对称点 a'，对方接着走到 b，则 $\overline{a'b}>\overline{aa'}$，故 $\overline{Ob}>\frac{1}{2}\overline{a'b}$. 即 A 下一步又可走到 b 关于 O 的对称点 b'. 因此，只要有一步实现这种对称跳，就保证以后步步可作对称跳，即总有活步可走. 但棋盘格子间的两两距离只有有限多种值，游戏必会终止，故对称跳的一方必胜.

于是，游戏的胜负取决于哪一方先作对称跳. 显然只要棋子不在 O 点就可对称跳. 故

当 $2\mid mn$（此时 O 点不是格子的中心）或者 $2\nmid mn$，但开始时棋子不放在棋盘的中央格子时，甲第一步就可对称跳，故甲必胜.

当 $2\nmid mn$ 且初始棋子放在棋盘的中央格子时，乙必胜.

例 12　在 $m\times n$ 棋盘的一个格子中放一枚棋子,两人轮流走.每步可从一格走到与它有公共边的邻格中,但已经到过的格子以后不能第二次进入,无法走者输.分别假定:

(1) 开始时棋子放在左下角格子中;

(2) 开始时棋子放在左下角格子的邻格中.

解:(1) 明显的配对方法是邻格,即用 1×2 骨牌铺砌棋盘,保持每步在骨牌内部走的人必胜.

当 $2\mid mn$ 时骨牌可铺满棋盘,甲第一步就可在一块骨牌内部走,故甲必胜;

当 $2\nmid mn$ 时,可用骨牌铺满去掉左下角格子外的棋盘,故乙必胜.

(2) 无论 m,n 奇偶性如何,总是甲必胜.

当 $2\mid mn$ 时,理由同(1);

当 $2\nmid mn$ 时仍用骨牌铺满除左下角格子外的棋盘,甲第一步就可在一块骨牌内走,此时左下角的格子未配对,如乙走入此格甲将无处可走,但由格子间染色可以看出乙每步只能走入白色格子,故左下角的格子虽无法配对,只要不走入就形同虚设,而按甲的策略他不会走入这一格,因此,仍是甲必胜.

一般,开始时棋子可放在任一格子中.当 $2\mid mn$ 时总是甲必胜;当 $2\nmid mn$ 时棋盘(如图 Ⅱ-6-6-4)中黑色格子比白色格子多一个,若棋子初始在任一黑色格子中,则乙必胜;若棋子初始在白色格子中,则甲必胜.

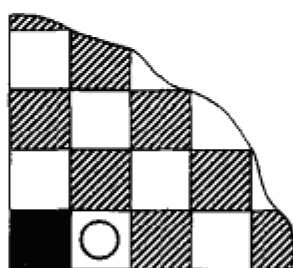


图 Ⅱ-6-6-4

【评注】　配对法中胜负的关键在于谁先消除失配的位置(比如对称中心)而造成匹配状态.在无法配对的图形(位置型)对策中,往往也有这种关键的奇异位置.这种位置的发现需要几何或图论的知识.例如在一类连线或闭路游戏中常要用到:n 个顶点的图,若有不少于 n 条棱,则必有回路;而若棱少于 $n-1$ 条,则必不连通(即至少有两个顶点之间无通路).

例 13　两人分工往下图的四位数减法式子中填数码.每步由甲报一个数码,由乙将它填入空位(允许首位为 0).甲要使最后得到的差 δ 尽量大,乙要使 δ 尽量小.求证:

$$\begin{array}{r} (\quad)(\quad)(\quad)(\quad) \\ -(\quad)(\quad)(\quad)(\quad) \\ \hline \end{array}$$

(1) 不管甲怎么报数,乙总能使 $\delta\leqslant 4000$

(2) 不管乙如何放,甲总能使 $\delta\geqslant 4000$

证明:(1) 各位数码标记如下,显然,关键在 a_1 与 b_1

$$\begin{array}{r} a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4 \\ -\,b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4 \\ \hline \end{array}$$

若甲取的头一个数为 $0\sim 4$,乙将它放于 a_1.以后若有非 0 数码就立即放于 b_1,若全是 0 则依次放入 $a_2,a_3,a_4,b_4,b_3,b_2,b_1$,必有 $\delta\leqslant 4000$

若头一个数为 $5\sim 9$,放入 b_1,以后若有非 9 的数码立即放于 a_1,若全是 9 就依次放于 $b_2,b_3,b_4,a_4,a_3,a_2,a_1$,亦使 $\delta\leqslant 4000$

(2) 由(1) 可知甲只能报 4 或 5,第一个数任意,比如报 4

若填于 a_1,以后全报 0,得 $\delta=4000$

若填于 b_1,以后全报 9,得 $\delta=5000$

若填于后面几位,甲以后的策略分二阶段:

当首位未填入时,从高位往低位寻找有无只填一数但未填满两个的数位,如有(a_i),就报 4;如有(b_i),就报 5;如两种都没有可任报 4 或 5

一旦有一数先被放入 a_1,以后一直报 0;一旦先放入 b_1,以后一直报 9

这样,最后首位之差不小于 4,而且当首位为 $\binom{4}{0}$ 或 $\binom{9}{5}$ 时,后面若有 $\binom{4}{5}$,它的前面必有 $\binom{5}{4}$,

$\binom{9}{4}$或$\binom{5}{0}$,故必有 $\delta \geqslant 4000$

评述一般若是 n 位减法,平衡值是 $4 \times 10^{n-1}$

例 14 两人轮流删数,到剩下两个为止.

(1) 从 $1,2,3,\cdots,100,101$ 中每步删去 9 个数;

(2) 从 $0,1,2,3,\cdots,1023,1024$ 中各步依次删去 $2^9,2^8,2^7,\cdots,2,1$ 个数.

甲能保证使剩下两数之差 δ 最大是多少?

解:(1)δ 等于剩下两数的间隙,即它们之间被取走数的个数加 1. 甲删 6 步共删去 54 个数,使之相连可积累得至少 55 的间隙. 为保证剩下两数在两侧可用对称补偿法:第一步删去中心区间$[47,55]$余下二对称区间 $A=[1,46]$ 与 $B=[56,101]$. 以后当乙从 A 中删 a 个,从 B 中删 $9-a$ 个时,甲接着从 A 删 $9-a$ 个. 从 B 删 a 个,因此甲必可使 $\delta \geqslant 55$.

另一方面,乙可使$[1,45]$全被删去,从而使 $\delta \leqslant 101-46=55$. 故甲的最优值是 55

一般地,若从 $1,2,3,\cdots,n$ 中每步删去 p 个数,$n=(2k+1)p+2$,则平衡值是$(k+1)p+1$

(2) 现在正相反,由于每步删去近一半,乙可通过消除一侧使甲无法积累间隔. 设甲某步长为 2^k 的有数区间.

$[a,a+2^k]=[a,a+2^{k-1}-1]\cup\{a+2^{k-1}\}\cup[a+2^{k-1}+1,a+2^k]$ 中删去 2^{k-1} 个数,必至少有 2^{k-2} 个在左或右半区间中,乙再删 2^{k-2} 个可将这个半区间删光而使有数的区间为$[b,b+2^{k-1}]$. 因此,乙第五步后可使 $\delta \leqslant 2^5=32$

另一方面,甲每步将 2^k+1 个数间隔删去偶数号上的 2^{k-1} 个,余下的最小间隔至少是刚才的两倍,五步后可使 $\delta \geqslant 2^5=32$

【评注】 一般地,从 $0,1,2,3,\cdots,2^{2k}$ 各步依次删去 $2^{k-1},2^{2k-2},\cdots,2,1$ 个数,平衡值为 2^k

§6.3　针对性训练

A组

1. 设有2^n个球分成了许多堆，我们可以任意选甲乙两堆来按照以下规则挪动：若甲堆的球数p不少于乙堆的球数q，则从甲堆拿q个球放到乙堆里去，这样算是挪动一次．证明：可以经过有限次的挪动把所有球合并成一堆．

2. 给定一组2^n个数，其中每一个数都是$+1$和-1．将每一个数都乘以它后面的一个数，而第2^n个数则乘以第一个数．由此得到一组仍由$+1$和-1组成的新的2^n个数，按照此法一直做下去，证明：最终必能得到一组全由$+1$组成的数．

3.（1989．高中联赛）有$n \times n(n \geqslant 4)$的一张空白方格表，在它的每一个方格内任意地填入$+1$或$-1$两个数中的一个．现将表内$n$个两两不同行（横）又不同列（竖）的方格中的数之乘积称为一个基本项．试证：按上述方式所填成的每一个方格表，它的全部基本项之和总能被4整除（即总能表示成$4k$的形式，其中$k \in \mathbf{Z}$）．

4.（1986．国家集训队练习题）将一条长为n的线段AB分成n段，两端端点染蓝色，其余分点染红色或蓝色，求证：端点被染上两种颜色的小线段（称为“标准线段”）有偶数条．

5.（1982．高中联赛）已知边长为4的正$\triangle ABC$，D,E,F分别是BC,CA,AB上的点，且$|AE|=|BF|=|CD|=1$，连接AD,BE,CF交成$\triangle QRS$，P点在$\triangle QRS$内及其边上移动，P到$\triangle ABC$三边的距离记为x,y,z，求证：当点在$\triangle QRS$的顶点位置时，积xyz有极小值．

6.（1990．高中联赛题变形）某市有n所中学，第i所中学派出C_i名学生（$1 \leqslant C_i \leqslant 39$；$1 \leqslant i \leqslant n$）到体育馆观看球赛．设观看学生总数为$\sum_{i=1}^{n} C_i = 1990$．看台上每一横排有199个座位，要求同一学校的学生必须坐在同一横排，求证：体育馆安排了12横排，必能保证全部学生都能坐．

7. 两堆糖果分别为33、35 粒,两人轮流取,每步可取走任一堆,此时若另一堆多于一粒,将它任分成两小堆,若另一堆只有一粒,就再取走并获胜.

8. 两人轮流在 $m \times n$ 方格纸上画线,每步将二相邻格子点连成一条单位格子线(可在内部,也可沿边界),已画过的线不得重复

(1) 先画出一条闭路者胜;

(2) 先画出一条闭路者输.

9. 两人轮流在1,2,3,……,20 的每个数前放“+”或“-”号,每步放一个,20 步后计算所得代数和的绝对值 S,甲要使 S 尽量小,乙则要使 S 尽量大.乙能保证的最大 S 是多少?

10.(第 25 届全俄中学生数学奥林匹克竞赛题) 盒子里放着整副骨牌,两个游戏者依次从中选取一张骨牌,并将其摆到桌面上,并按照“接龙”的规则,将牌接在已摆成一串的骨牌两端中的任意一端,谁要是接不下去就算输,在正确策略下,谁能获胜?

B组

11.(1985. IMO 预选题) 平面上有 100 条直线,它们之间能否有 1985 个不同的交点.

12. 空间有1989 个点,其中任何三点不共线,把它们分成点数各不相同的 30 组,在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形,问要使这种三角形的总数为最大,各组的点数应为多少?

13. $n(n \geqslant 4)$ 个盘子里放着总数不少于 4 的糖块,从任选的两个盘子中各取一块糖,放入另一个盘子中去,称为一次操作,问能否经过有限次操作,把所有糖块集中到一个盘子里去.证明你的结论.

14. (1985. IMO) 设 n, k 为互素正整数，$0 < k < n$，在集合 $M = \{1,2,\cdots,n-1\}$ 中的各数，要么着蓝色，要么着白色，已知（ⅰ）对于各 $i \in M$，i 和 $n-i$ 同色；（ⅱ）对于各 $i \in M, i \neq k$，i 和 $|i-k|$ 有同色．证明：在 M 中的所有数均为同色．

15. 两人在 $n \times n$ 棋盘（$n \geqslant 3$）上玩猫抓老鼠游戏，A 方有若干枚棋子代表猫，B 方一枚棋子代表老鼠．每步每方可将自己的所有棋子分别向上、下、左、右的任一方向走一格．如猫走入老鼠所在格子，就将它吃掉；如老鼠走到边界，下一步可逃离棋盘．

(1) 若有两只猫，老鼠已放在某个内部格子中，能否在边界上放猫使老鼠无法逃离？

(2) 若有三只猫，但 B 可先连走两格，求证，不论如何放置，老鼠总可逃离．

16. 400 张卡片上分别写着数 1,2,3,…,400．甲任选 200 张，另 200 张给乙，以后每步从对方及自己手中各任选 100 张，其余 200 张给对方，乙作 200 步后计算两人手上的总和．设甲为 S_1，乙为 S_2，乙能保证 $S_2 - S_1$ 最大是多少？

第七章

染色与覆盖

§7.1　知识、方法、技能

Ⅰ 染色问题与染色方法

一、笼统地讲，根据问题的情境，将问题所研究的对象适当地染上若干种颜色，从而所研究的问题就变成了染色问题；而将所研究的问题转化为染色问题加以解决的方法称为染色方法.

染色问题是数学竞赛中较为典型的问题，其主要原因是这类问题比较有趣，解决起来也不要求具备许多专门的数学知识；并且染色问题大多具有较为深刻的数学背景，需要用到数论、组合、图论等一些重要数学思想方法.

二、拉姆赛型问题简介

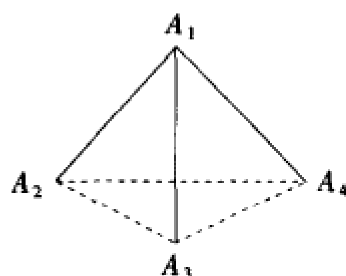
我们把与图的染色，拉姆赛(*Ramsey*，英国逻辑学家）数，抽屉原则关联的问题称为拉姆赛型问题.

我们首先看1947年匈牙利数学奥林匹克中的一个试题：

例1　证明：在任何六个人中，总可以找到三个相互认识的人或三个相互不认识的人.

证明：用六个顶点表示六个人，如果某两个人互相认识，就在相应的两点间连一条边并染以红色，如果某两个人互相不认识，就在相应的两点间连一条边并染以蓝色，这样便得到一个涂了二种颜色的完全图 K_6，要证明的结论就是这个 K_6 中一定有一个同色三角形(即三条边的颜色相同的三角形)

设六个顶点是 $A_1,A_2,\cdots,A_6$，考虑由 A_1 出发的5条边 $A_1A_2,A_1A_3,\cdots,A_1A_6$，同为这5条边只有红，蓝两种颜色，因此至少有3条边染成同一种颜色，不妨设这3条边是 A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4，且它们都染成红色，如图Ⅱ-6-7-1(实线表示红色，虚线表示蓝色). 如果 $\triangle A_2A_3A_4$ 三边都是蓝色，它即为同色三角形. 如果 $\triangle A_2A_3A_4$ 至少有一条边，例如 A_2A_3 为红色，那么 $\triangle A_1A_2A_3$ 是同色三角形，总之，无论哪种情况都有同色三角形.

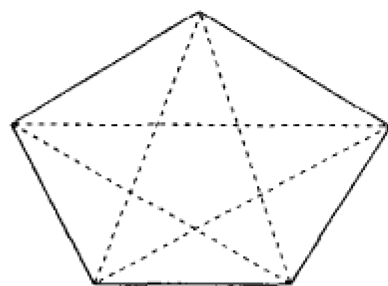


图Ⅱ-6-7-1

由此很自然地考虑：(1) 如果把例1中六边改为五边，结论是否还成立？(2) 二染色 K_6，同色三角形至少有几个？(3) 若三染色 K_m，为了仍要恒存在同色三角形，m 至少要多大？下面逐个解决这些问题.

例2　二染色完全图 K_5 是否一定存在同色三角形？

解：答案是否定的，反例如图Ⅱ-6-7-2所示. 其中实线表示染红色的边，虚线表示染蓝色的边，显然，图中无同色三角形.


图Ⅱ-6-7-2

例3　二染色完全图 K_6，证明至少有两个同色三角形.

证明：设 K_6，的六个顶点为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6 由例1知，二染色 K_6 必存在同色三角形，不妨设 $\triangle A_1A_2A_3$ 为同色三角形，且染成红色，现在考虑 $\triangle A_4A_5A_6$ 的三条边，有两种情形.

(1) $\triangle A_4A_5A_6$ 的三条边均为红色，那么结论成立.

(2) $\triangle A_4A_5A_6$ 的三条边中至少有一条为蓝色，不妨设为 A_4A_5，对于边 A_4A_1,A_4A_2,A_4A_3，如果其中有两条红边，那么又出现了一个红色三角形，如果其中有两条蓝边，则存在一个蓝色三角形，若 A_5A_1、A_5A_2 都是红色，那么 $\triangle A_5A_1A_2$ 为红色三角形，于是命题得证.

图 Ⅱ - 6 - 7 - 3,所示是二染色 K_6 恰有两个同色三角形的情形.

其实,早在 1959 年,$A \cdot W \cdot Goodman$ 就证明了如下定理.

定理 1 二染色完全图 K_n,其中的同色三角形的个数 f_n 满足

$$f_n \geqslant \begin{cases} \frac{1}{3}m(m-1)(m-2), & \text{当 } n = 2m \text{ 时} \\ \frac{2}{3}m(m-1)(4m+1), & \text{当 } n = 4m+1 \text{ 时} \\ \frac{2}{3}m(m+1)(4m-1), & \text{当 } n = 4m+3 \text{ 时} \end{cases}$$

这个定理的证明留给读者

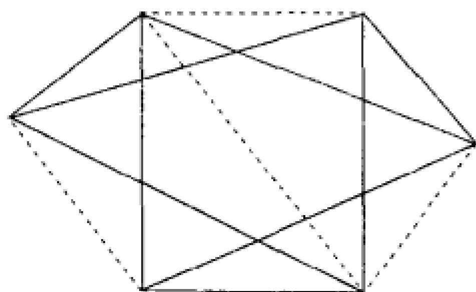


图 Ⅱ - 6 - 7 - 3

例 4 三染色 K_{17} 必定存在一个同色三角形,而三染色 K_{16},结论不成立.

证明:设完全图 K_{17} 的 17 个顶点为 $A_1, A_2, \cdots, A_{17}$,在由 A_1 引出的 16 条边 $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, \cdots, A_1A_{17}$ 中,由抽屉原则知,至少有 $\left[\frac{16}{3}\right]+1=6$ 条是同色的,不妨 $A_1A_2, A_1A_3, \cdots, A_1A_7$ 这 6 条边是红色的,如果 $A_2, A_3, \cdots, A_7$ 中有两个点之间的连线是红色的,那么就有一个红色三角形,如果 $A_2, A_3, \cdots, A_7$ 中任意两点的连线都不是红色,那么这六点的两两连线被染了蓝、黄两种颜色,由例 1 知,其中必存在一个同色三角形,从而命题得证.

由例 1、例 2、例 4 得到如下结论:

(1) 二染色完全图 K_n 必存在同色三角形的最小 n 是 6

(2) 三染色完全图 K_n 必存在同色三角形的最小 n 是 17

一般地,用 K 种颜色 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 去染完全图 K_n 的边,每条边只染其中一种颜色,这得到的完全图 K_n 称为 K 色完全图 K_n,可以想象当 n 充分大时,K 色完全图 K_n 中必然会出现同色三角形,使得每一个 K 色完全图 K_n 都含有同色三角形的最小 n 记为 r_k. r_k 的存在性由英国的数学家,数理逻辑学家拉姆塞首先证明,所以 r_k 称为拉姆塞数,易知 $r_1 = 3$,由前面的结论知 $r_2 = 6, r_3 = 17$

对 r_k,我们有:

定理 2 (1) 对于自然数 k,拉姆赛数 r_k 存在,并 $k \geqslant 2$ 时

$r_k \leqslant k(r_{k-1}-1)+2$

(2) 对一切自然数 k,

$r_k \leqslant 1+1+k+k(k-1)+\cdots+\frac{k!}{2!}+\frac{k!}{2!}+k!$

定理 2 之证明留作习题.

三、染色问题的分类

(一) 区域染色

当问题的对象是一些平面区域(方格,三角形等),有的采用适当种类的颜色对这些区域巧妙地染色,可有利于问题的解决. 其中最常见的是一种从民间游戏中发展而来的方格盘的染色,例如国际象棋盘的染色. 例题详见例 1 和例 2.

(二) 线段染色

数学中有这么一类问题,当我们把问题中的对象抽象为点,把对象间的关系抽象为点间连接的线段,同时根据对象间不同的关系采用不同种颜色把对应点间的连线染色,即得到图论中的所谓"边染色"(也可称"线段染色")问题. 例题详见例 3、例 4、例 5

(三) 点染色

例题详见例 6、例 7、例 8

Ⅱ、图形覆盖问题

一、基本概念与性质如下

用一张或几张纸去盖一个平面图形，用数学语言描述，就是研究一个或 n 个平面区域与平面点集的相互关系.

定义 1：$G_1, G_2, \cdots, G_n$ 是 n 张纸片，F 是一个平面点集，若存在一种放置这 n 张纸片的方法，使 F 中每一点都至少与某个 G_i 的点重叠，则称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 能覆盖点集 F.

定义 2：如果无论怎样放置 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，都至少有 F 中一个点不能与这 n 张纸片中任一张纸片的点相重叠，就称这 n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 盖不住平面图形 F.

从点集观点看问题，覆盖实质上是平面点集之间的包含关系，n 张纸片 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 覆盖点集 F，等价于

$F \subseteq (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_n)$

定义 3：如果区域 G 覆盖点集 F，我们也称 F 可以嵌入在 G 中.

从点集包含关系来理解图形覆盖可以把 $F \subseteq G$ 读作"G 覆盖 F"或"F 可嵌入 G 中"，于是很容易得出以下性质：

性质 1 $G \subseteq G$（纸片 G 可以盖住与 G 全等的平面图形）.

性质 2 $G_2 \subseteq G_1$ 且 $G_1 \subseteq G \Rightarrow G_2 \subseteq G$（图形覆盖的传递性）

性质 3

$$\left.\begin{array}{l} F \subseteq G_1 \\ F \subseteq G_2 \\ \cdots \\ F \subseteq G_n \end{array}\right\} \Rightarrow F \subseteq (G_1 \cap G_2 \cap \cdots\cdots \cap G_n)$$

性质 4 若 $\zeta(G)$、$\zeta(F)$ 分别表示平面区域面积，如果 $F \subseteq G$，则有 $\zeta(F) \leqslant \zeta(G)$.

为了研究点集的需要，我们引入平面点集直径的概念.

定义 4：所谓平面点集的直径是这样的一个正数 d，点集中任意两点的距离都不超过它，而对比 d 小的任意正数 d'，点集中至少有两个点的距离超过 d'.

定义 4 虽然精确，但使用起来很不方便，由于我们经常研究的是有限点或是包含边界在内的平面区域，对这类点集，其中任两点距离的最大值 d 就是该点集的直径. 比如，边长为 1 的正三角形三个顶点的集合的直径为 1，边长为 4，5，6 的三角形的直径是 6；单位圆及单位圆域的直径都是 2. 一般地，凸多边形的直径等于它的顶点之间距离的最大值.

有关覆盖问题的证题技巧请见例 9、例 10、例 11、例 12.

二、面积重叠原则

在一个指定区域中放入若干张纸片，可能会发生重叠.

面积重叠原则：假定有 n 张纸片，它们的面积分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果我们把这 n 张纸片嵌入到一个面积为 A 的平面区域中，若 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n > A$，则至少有两张纸片发生重叠（即存在面积不为 0 的公共部分）

覆盖问题的综合性例题请见例 13、例 14、例 15、例 16.

§7.2 赛题精讲

例 1 如图 Ⅱ－6－7－4(1) 是 4 个 1×1 的正方形组成的"L"形，用若干这样的"L"形硬纸片无重叠地拼成一个 $m \times n$（长为 m 个单位，宽为 n 个单位）的矩形，如图 Ⅱ－6－7－4(2)，试证明 mn 必是 8 的倍数.

证： 因为 $m \times n$ 矩形由"L"形拼成，所以 $m \times n$ 是 4 的倍数，所以 m, n 中必有一个是偶数，不妨设为 m.

现把 $m \times n$ 矩形中的 m 列按一列黑，一列白间隔染色（如图 Ⅱ－6－7－4(2)），则不论"L"形在这

矩形中的放置位置如何（"L"形的放置，共有 8 种可能），"L"形成占有三白一黑四个单位正方形（记为第一种），或占有三黑一白四个单位正方形（记为第二种）.

设第一种"L"形共 p 个，第二种"L"形共有 q 个，则 $m \times n$ 矩形中的白格单位正方形数为 $3p + q$，而它的黑格单位正方形数为 $p + 3q$.

因为 m 为偶数，所以 $m \times n$ 矩形中黑、白列数相等，从而黑、白单位正方形总数必相等. 故有 $3p + q = p + 3q$，从而 $p = q$. 所以"L"形的总数为 $2p$ 个，$m \times n = 2p \times 4 = 8p$，即 $m \times n$ 一定是 8 的倍数.

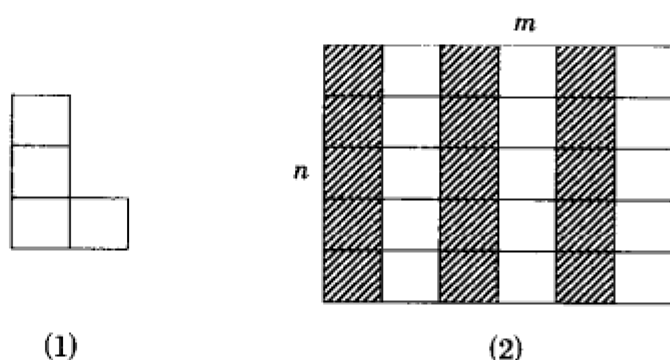


图 Ⅱ - 6 - 7 - 4

例 2 （第26届独联体数学奥林匹克11年级竞赛题）给定边长为10的正三角形，用平行于其边的直线将它分画为若干个边长为 1 的正三角形，现有 m 个形如图 Ⅱ - 6 - 7 - 5(1) 所示的三角形块，且有 $25 - m$ 个形如图 Ⅱ - 6 - 7 - 5(2) 所示四边形块，问：

(1) 若 $m = 10$，能否用它们拼出原三角形？

(2) 求能拼出原三角形的所有 m.

解：按照类似国际象棋盘的染色方法把小正三角形块染上黑白两种颜色（如图 Ⅱ - 6 - 7 - 5(3)）. 设 m 个图(1) 中，能覆盖图 Ⅱ - 6 - 7 - 5(3) 中 3 个白三角块的个数为 x，则白三角形个数为

$$3x + (m - x) + 2(25 - m) = 2x + 50 - m$$

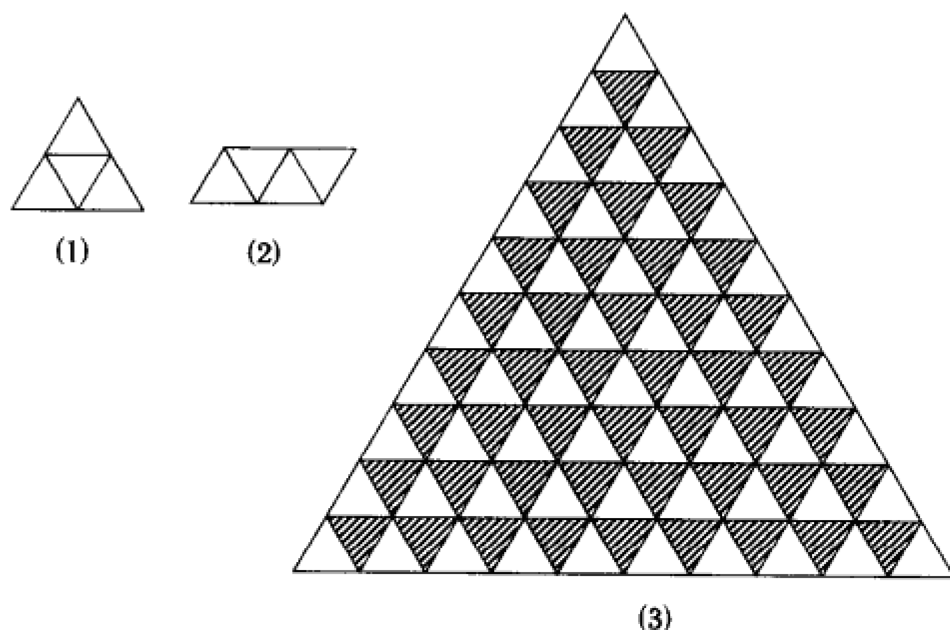


图 Ⅱ - 6 - 7 - 5

又图 Ⅱ - 6 - 7 - 5(3) 中共有55个白三角形，若 m 个图(1)，$25 - n_1$ 个图(2) 可盖住图 Ⅱ - 6 - 7 - 5(3)，则有

$$25x + 50 - m = 55$$

即

$$2x = 5 + m$$

由此可知，m 为奇数，

(1)$m = 10$ 为偶数，故 $m = 10$，不能拼出原三角形.

(2) 显然 $m \geqslant x$，则 $2m \geqslant 2x = 5 + m$，即 $m \geqslant 5$，又 $25 - m \geqslant 0$，所以 $m \leqslant 25$. 故可知：$m \in \{n \mid 5 \leqslant n \leqslant 25, n \in \mathbf{Z}$ 且 n 为奇数$\}$

例 3 (1989. 加拿大 IMO 训练题) 求最小正整数 n，使在任何 n 个无理数中，总有 3 个数，其中每两数之和都仍为无理数.

解：显然，$\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$ 这 4 个数中的任何三个数中均含有一对相反数，二者之和为 0 不是无理数，故满足要求的最小正整数 $n \geqslant 5$.

设 x, y, z, u, v 是 5 个无理数，把它们看作是 5 个顶点，若两数之和为有理数，则在相应两点间连一红线，否则连一蓝线，于是得到一个二染色的 k_5，显然，只须证明此图中必存在蓝色三角形即可.

(1) 有同色三角形，若不然，我们知 k_5 中每点恰引出四条线段，若其中某点引出的线段中有三条同色，则象"知识，方法，技能" 中例 1 那样可以证明同色三角形存在，与假设矛盾，故从每点引出的四条线段都必两红两蓝，整个图中恰有 5 条红边 5 个蓝边，只看图中红线段，每点都引出两条，故它们构盛成一个每点度数(即引出边的条数) 都为 2 的偶图，故构成一个或 n 个图，但每个图至少有 3 条边，故 5 条线段只能构成一个图，即 k_5 中必存在红图，也顶点所对应的 5 个数中，两两之和均为有理数，即 $x + y, y + z, z + u, u + v, v + x$ 为有理数，则

$$x = \frac{1}{2}[(x + y) - (y + z) + (z + u) - (u + v) + (v + x)]$$

为有理数，与已知矛盾，故 k_5 中无 5 条边的红图，从而 k_5 中有同色三角形.

(2) 同色三角形必为蓝色三角形，若不然，则必为红色三角形，于是它们的顶点所对应的 3 数中有两两之和均为有理数，不妨设.

$$x + y, y + z, z + x$$

均为有理数，则

$$x = \frac{1}{2}[(x + y) + (z + x) - (y + z)]$$

为有理数，与已知矛盾. 可见，k_5 中没有红色三角形，由(1) 知，k_5 中必有蓝色三角形，其顶点对应的三个无理数两两之和仍为无理数.

综上所述，最小正整数 $n = 5$.

例 4 平面上有六个点，任何三点都是一个不等边三角形的顶点，求证：这些三角形中一个的最短边同时是另一个三角形的最长边(波兰数学竞赛题)

证：设 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 是已知点，在每个三角形 $A_iA_jA_k$ 中，把最短边染成红色，于是每个三角形中至少有一条边为红色边，现只须证明：在(1) 已知点为顶点的三角形中有一个三边均为红色的三角形.

(因为这个三角形的最长边为红色，而它同时又是另一个三角形的最短边).

从每点可作 5 条线段与其余已知点相连，由抽屉原则知，这 5 条线段中或者至少有 3 条红边，或者至少有三条未染色的边.

(1) 若经过点 A_1 的 5 条线段中至少有 3 条染成红色，不妨设为 A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 为红边，那么考虑 $\triangle A_2A_3A_4$，因为其中至少有一边为红边(即其最短边)，不妨设 A_2A_3 为红色边，那么 $\triangle A_1A_2A_3$ 三边均为红边.

(2) 若经过点 A_1 的线段中至少有 3 条未染色，不妨设 A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 未染色，现考察 $\triangle A_1A_2A_4, \triangle A_1A_3A_4, \triangle A_1A_2A_3$，它们每个中至少有一边是红色的(即最短边)，但这边不经过 A_1 点，故知线段 A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4 必是红色的，从而 $\triangle A_2A_3A_4$ 三边均被染成红色.

例 5 在协会里有9 个人，其中任意三个人中总有两个人是相互认识的，证明，其中总有 4 个人，他们相互认识.(波兰数学竞赛题)

证：用平面上无三点共线的 9 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_9$ 表示 9 个人，9 点间两两连线，现对这些线段染色：若两人相互认识，则把对应两点间的连线染成红色，否则染成蓝色，得到二色完全图 k_9，现只须证其中

必存在红色 k_4.

由题设知,二色完全图 k_9 中无蓝色三角形.

现任取一点,由抽屉原则知,此点与另八点所连的 8 条线段中,至少有 4 条同色.

(1) 若由任一点出发的 8 条线段中有 4 条蓝色线段,不妨设由 A_1 出发的四条线段 $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1A_5$ 为蓝色,由于不存在蓝色三角形,故 $A_2A_3,A_2A_4,A_2A_5,A_3A_4,A_4A_5,A_3A_5$,均为红色,于是四点 A_2,A_3,A_4,A_5 组成的完全图 k_4 为红色的.

(2) 若由任一点出发的 8 条线段中至多只有三条蓝色线段,即其中至少有 5 条线段为红色.显然,从每点出发所引的 8 条线段恰有 5 条为红色这种情况是不存在的,否则 k_9 中共有红边数为

$$\frac{9\times 5}{2}$$

这是不可能的,从而知,必有某一点,从此点出发的 8 条线段中至少有 6 条是红色的,不妨设从 A_1 出发的6条线段 $A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4,A_1A_5,A_1A_6,A_1A_7$ 是红色的,考察六点 A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7 组成的二色完全图,由"知识,方法,技能"中例 1 的结论知,其中必存在同色三角形,不妨设 $\triangle A_2A_3A_4$ 为同色三角形,又由于不存在蓝色三角形,故 $\triangle A_2A_3A_4$ 为红色三角形,于是顶点为 A_1,A_2,A_3,A_4 的完全图 k_4 为红色的.

综合(1),(2) 知,命题得证.

例 6 能否把1,1,2,2,3,3,……,1986,1986,这些数排成一行,使得两个 1 之间夹着一个数,两个 2 之间夹着 2 个数,……,两个 1986 之间夹着一千九百八十六个数?请证明你的结论.(CMO,1986 年)

证:将 1986×2 个位置看成是 1986×2 个点,并对这些点染色:处于奇数位置的点染白色,处于偶数位置的点染上黑色,于是黑白点各有 1986 个.

若题设要求的排法存在,则知,同一个偶数,必定其中之一占据一个黑点,另一个占据一个白点,而同一个奇数,要么都占据黑点,要么都占据白点,于是993个偶数,占据白点数 $B_1=993$ 个,黑点数 $H_1=993$ 个

993 个奇数,占据白点数 $B_2=2a$ 个,黑点数 $H_2=2b$ 个,其中 $a+b=993$ 个

于是 1986×2 个数共占据白点数 $B=B_1+B_2=993+2a$ 个,黑点数 $H=H_1+H_2=993+2b$ 个

因为 $a+b=993$(非偶数),所以 $a\neq b$,从而得 $B\neq H$,这与黑,白点各有 1986 个矛盾.

所以满足题设要求的排法不可能.

例 7 (1960.第 2 届 IMO) 设 $\triangle ABC$ 为正三角形,E 为三条线段 BC,CA,AB 上的点,(包括 A,B,C 在内) 所组成的点集,将 E 分成两个子集,是否总有一个子集中含有一个直角三角形的顶点?证明你的结论.

证:如图 Ⅱ-6-7-6 将 E 中的点分别染上红、蓝两种颜色之一,则问题转化为:证明 E 中一定存在一个直角三角形,其三个顶点的颜色相同.

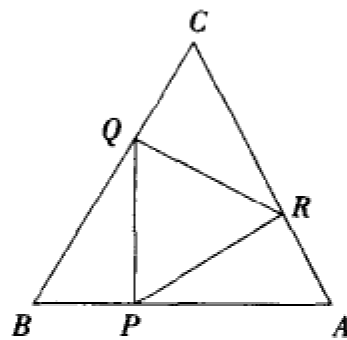


图 Ⅱ-6-7-6

在边 AB,BC,CA 上分别取点 P,Q,R 使 $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2$,则有 $PQ\perp AB,QR\perp BC,PR\perp CA$

对点集 E 进行红、蓝二染色,则 P,Q,R 中至少有两点同色,(由抽屉原则知),不妨设 R,Q 为红色.

(1) 如果 BC 边上,除 Q 点外,还有红色点 X,则 $\triangle RQX$ 组成红色顶点的直角三角形.

(2) 若 BC 边上,除 Q 点外没有红色点,现考虑 AB 边(包括 A,B 在内).

$\because BC$ 边除点Q 外没有红点,所以点 B 为蓝色点,若 AB 边上除B 点外还有蓝色点Y,则过 Y 作 $YM\perp BC$,M 为垂足,因为显然有 M 与Q 不重合,则 M 必在为蓝色点,于是 $\triangle YBM$ 组成蓝色顶点的直角三角形.

若 AB 边上(包括 A 点)除 B 点外都是红点,这时过 R 作 $RN \perp AB$ 于 N,因为显然 N 不与 P 重合,所以 N 必为红色点,于是 $\triangle RAN$ 组成红色顶点的直角三角形.

综上所述,命题得证.

例 8 (43 届国际 IMO 试题 1) 弗明斯克城的每一条道路均连接着两个十字路口,且都限定为单向行车线,市政局为布列加油站网点开展了一次设计竞赛,要求自每一个十字路口均可不违反行车规则地到达加油站之一,但由任何一个加油站都不可以抵达另外任何一个加油站.证明:在所有应征的设计方案中,全都布列了相同数目的加油站.(列宁格勒数学奥林匹克试题,1988 年).

证: 任取两个设计方案,将其中一个方案中的加油站网点染上红色,将另一方案中的加油站网点染上蓝色.由题设知:在任一十字路口,必可到达两种设计方案中相应的加油站.

设由某个"蓝色"加油站 B 可抵达某两个"红色"加油站 A 和 C,即由某一"红色"加油站 A,可抵达某"蓝色"加油站 B,反之,由 B 又可抵达某个"红色"加油站 C,故由"红色"加油站 A 可抵达"红色"加油站 C,由题意知,这只有在 A 与 C 重合时才能实现.即由某个"蓝色"加油站,只能到达某一个"红色"加油站.

同理可证:由某一个"红色"加油站也只能抵达某一个"蓝色"加油站.

由上知,"红色"加油站与"蓝色"加油站间可以一一搭配成对,每一对中的两个加油站可以相互抵达,故"红色"加油站与"蓝色"加油站数目相等.

例 9 在边长为12 的正方形中分布1993 个点.证明:可以用一个边长为 11 的等边三角形纸片盖住其中至少 499 个点.

【分析】 由于 $1993 = 498 \times 4 + 1$,只要我们将边长为 12 的正方形适当地分成 4 等分,则至少有"一份"中含有 499 个点,我们只要证明边长为 11 的正三角形纸片可以盖住这一份即可.

证: 如图 Ⅱ-6-7-7 所示,过正方形 $ABCD$ 的中心,作直线交 DC 于 M,交 AB 与 N,且使 $\angle MNA = 60°$,过 O 作 MN 的垂线交 AD 于 P,交 BC 于 Q,这样正方形 $ABCD$ 被 MN,PQ 分成了全等的四块,根据抽屉原则,其中至少有一块(不妨设为 $APON$ 这一块)至少含有 499 个点,我们只须证明,边长为 11 的正三角形可以盖住 $APON$ 即可.

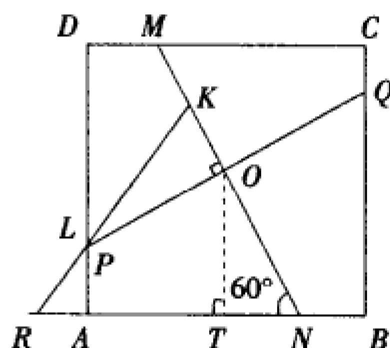


图 Ⅱ-6-7-7

将边长为 11 的正三角形纸片一个顶点与 N 重合,角的两边与 NA,NO 重合并落在正三角形 NKR 的位置,过 O 作 $OT \perp AB$ 于 T,则 T 为 AB 中点,$NB = TB - TN = 6 - \frac{6}{\sqrt{3}} = 6 - 2\sqrt{3}$,所以 $NA = AB - NB = 12 - (6 - 2\sqrt{3}) = 6 + 2\sqrt{3} < 11$.故 A 在线段 RN 上,又 $RA = 11 - AN = 11 - (6 + 2\sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3}$,可求得 $LA = \sqrt{3}RA = 5\sqrt{3} - 6$,因 $LA - PA = LA - NB = (5\sqrt{3} - 6) - (6 - 2\sqrt{3}) = 7\sqrt{3} - 12 > 0$,所以 P 点在三角形 RNK 内,由凸图形性质,PA,PO 都在正 $\triangle RNK$ 内,所以以边长为 11 的正方三角形纸片盖住了区域 $APON$,即盖住了至少 499 个点.

例 10 能在半径为2 的圆中放入8 个边长为1 的不相重叠的正方形纸片吗?

【分析】 这个问题是嵌入问题,我们化成等价的覆盖问题:找一种把八个边长为 1 的正方形纸片放在一起的排列方法,能用一个半径为 2 的圆纸片盖住它们,由于圆纸片的对称性,这八张正方形纸片也应如图 Ⅱ6-7-8 所示对称地放置:八个单位正方形不相重叠且关于 l 直线轴对称,所以要用圆来覆盖,圆心 O 应在 l 上,且 OA,OE,OB 若都不超过 2,问题就解决了.

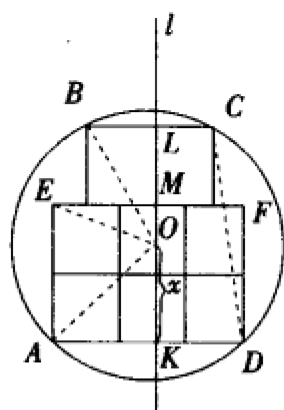


图 Ⅱ-6-7-8

解: 如图关于 l 对称地放置八个单位正方形,其中四个顶点 $ABCD$ 形成一个等腰梯形,它的外接圆圆心 O 在 l 上,设 $OK = x$,则 $LO = 3 - x$,$AO^2 = AK^2 + KO^2 = \frac{9}{4} + x^2$,$BO^2 = BL^2 + LO^2 = 1 + (3 - x)^2$.由于 $OA = OB$,得 $\frac{9}{4} + x^2 = 1 + (3 - x)^2$,解得 $x = \frac{31}{24}$,所以

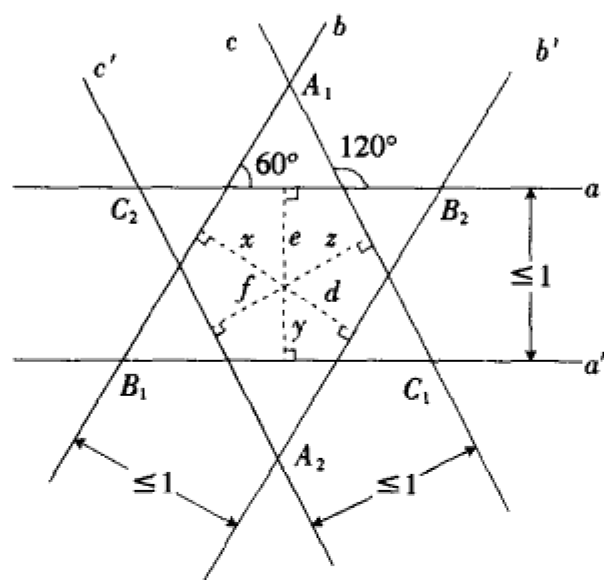
$$AO = \sqrt{\frac{9}{4} + \left(\frac{31}{24}\right)^2} = \sqrt{\frac{2257}{576}} < \sqrt{\frac{2304}{576}} = 2$$

进而 $MO = 2 - x = \frac{17}{24}$，$MO < OK$，所以 $OE < AO$，即 A,E,B 均在以 O 为中心，2 为半径的圆内，由对称性知，C,F,D 也在以 O 为中心半径为 2 的圆内. 因此，半径为 2 的圆中能够放入边长为 1 的八个不相重叠的正方形纸片.

例 11 平面有限点集 S 的直径为 1，证明 S 可以被一个边长为$\sqrt{3}$ 的正三角形纸片覆盖住.

【分析】 由于点集 S 的直径为 1，我们作两条承托直线(a,a') 将 S 夹在以 a,a' 为边界的带形域中，a,a' 之间距离 $\leqslant 1$.

再作 S 的另两组的平行的承托直线$(b,b',)$ 与$(c,c',)$，使 b 对 a 的倾角为 60°，c 对 a 的倾角为 120°，显然，b,b'，之间距离 $\leqslant 1$，c,c'，之间距离 $\leqslant 1$，S 夹在以 b,b'，为边界的带形域中，也夹在 c,c'，为边界的带形域中，因此由覆盖性质 3 知，S 包含于三个带形域的公共部分 —— 如图Ⅱ－6－7－9所示的一个六边形的区域中，并且交得两个正三角形. 设这两个正三角形是：正 $\triangle A_1B_1C_1$ 与正 $\triangle A_2B_2C_2$，我们只要能证明这两个正三角形中有一个的边长不超过$\sqrt{3}$ 即可.



图Ⅱ－6－7－9

证：如分析中指出的方法，作出三组平行承托直线$(a,a',)$，$(b,b',)$，$(c,c',)$；每组平行线宽度不超过 1；三组平行线交得两个正三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$.（图Ⅱ－6－7－9）

从六边形中任取一点向六边形的六条边分别引垂线，垂线段分别如图中所示，记为 $d,e,f;x,y,z$.

又设正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的高为 h_1，正 $\triangle A_2B_2C_2$ 的高为 h_2. 根据正三角形一点到三边距离之和等于正三角形的高，可得

$$x + y + z = h_1, d + e + f = h_2$$

相加得　$(x + d) + (y + e) + (z + f) = h_1 + h_2$

但　$x + d \leqslant 1, y + e \leqslant 1, z + f \leqslant 1$

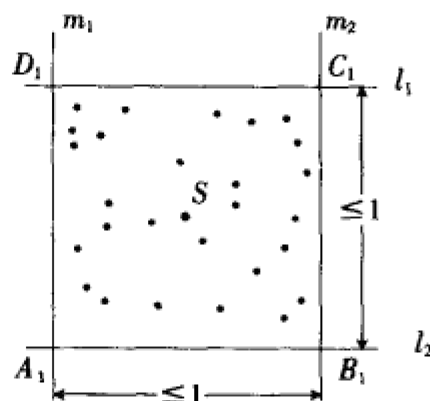
因此　$h_1 + h_2 \leqslant 3$.

由抽屉原则，可以断定 h_1,h_2 中至少有一个不大于$\frac{3}{2}$，为了确定起见，不妨设 $h_1 \leqslant \frac{3}{2}$，经计算知正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长不大于$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}$

所以点集 S 可被一个边长不大于$\sqrt{3}$ 的正三角形 $A_1B_1C_1$ 纸片覆盖住，由位似变换可知 S 更可被一个长为$\sqrt{3}$ 的正三角形纸片覆盖住.

例 12 证明：直径为1 的平面点集 S 可以被一个单位正方形纸片适当地切去两个"角" 后剩下的部分(一个凸六边形形状的纸片) 所覆盖.

证：由于点集 S 的直径为 1，可作 S 的两条平行的承托直线(l_1,l_2)，使以 l_1,l_2 为边界的带形域覆盖 S，在垂直 l_1 的方向上，再作 S 的两条平行的承托直线(m_1,m_2)，使以 m_1,m_2 为边界的带形域覆盖 S，易知，这两个带形域的宽度不超过 1. 这样的两个带形域的交，一边长不超过 1 的矩形 $A_1B_1C_1D_1$，可盖住 S(如图Ⅱ－6－7－10)



图Ⅱ－6－7－10

在射线 A_1B_1 上取点使 $A_1B=1$，在射线 A_1D_1 上取点 D，使 $A_1D=1$. 完成正方形 A_1BCD，易知正方形纸片 A_1BCD 是覆盖点集 S 的边长为 1 的正方形.

作正方形 A_1BCD 的内切圆(如图 Ⅱ－6－7－11)，则内切圆直径是 1，截 A_1，C 两"角"作该圆的一组平行切线，显然平行切线之间距离为 1. 在二平行切线截成的"角 A_1"与"角 C"中不能同时存在 S 中的点(否则与 S 直径 = 1 矛盾). 即"角 A_1"与"角 C"中至少有一个没有 S 中的点，为确定起见，不妨设"角 C"中没有 S 中的点，于是可切掉"角 C"(阴影部分). 同理，在"角 B"与"角 D"中也可切掉一个角(比如切掉"角D"). 这样，单位正方形纸片适当切去两个"角"后剩下的六边形 A_1BPQRK 仍可覆盖点集 S.

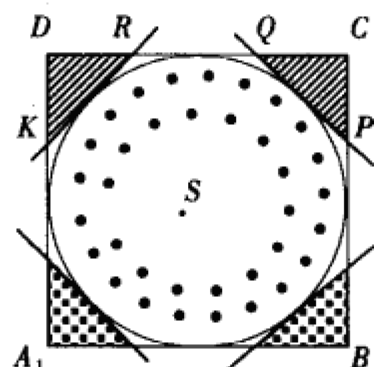


图 Ⅱ－6－7－11

【注】 本题所使用的技巧是"切角术"，这是覆盖证题中的一个很精巧的技艺.

例 13 在半径为 R 的圆桌面上摆放一些同样大小的、半径为 r 的硬币，要求硬币不准露出圆桌面边缘，并且所摆硬币彼此不能重叠，当摆放 n 枚硬币之后，圆桌面上就不再多摆放一枚这种硬币了. 求证：

$$\sqrt{n}r < R < (2\sqrt{n}+1)\cdot r$$

证：由于 n 枚半径为 r 的硬币不重叠地摆放在半径为 R 的圆面内，所以

$$n\pi r^2 < \pi R^2 \Rightarrow \sqrt{n}r < R \quad ①$$

现在设想把 n 枚硬币的半径都扩大一倍，成为半径为 $2r$ 的"加层硬币"，则这 n 枚"加层硬币"必完全覆盖住了半径为 $R-r$ 的圆面，如若不然，设在 $R-r$ 为半径的圆面上至少有一点P没被这n个半径为$2r$的"加层硬币"覆盖住(如图 Ⅱ－6－7－12)，则 P 点到诸半径为r 的硬币之间的距离均不小于 r. 所以以 P 为中点可以与前面所放的n 枚硬币无重叠地放入一个半径为r 的圆(硬币)在圆桌上，这与题设的条件矛盾，所以 n 枚"加层硬币"必完全覆盖住了半径为 $R-r$ 的圆面. 由性质 4 得

$$n\pi(2r)^2 > \pi(R-r)^2$$

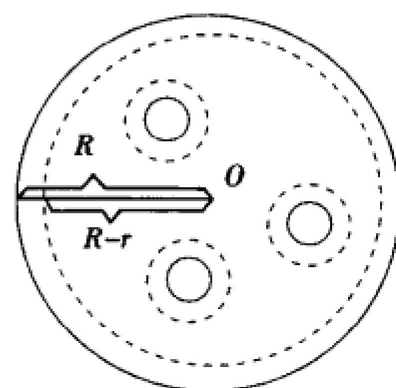


图 Ⅱ－6－7－12

解得

$$R < (2\sqrt{n}+1)r \quad ②$$

综合 ①、② 得

$$\sqrt{n}r < R < (2\sqrt{n}+1)r$$

例 14 在边长为20×25 的矩形内，任意放入120 个边长为 1 的正方形纸片.

证明：在矩形内还可以放入一个直径为 1 的圆纸片，它和这 120 个小正方形的任何一个都不相重叠.

分析与解：

(1) 若直径为 1 的小圆纸片放入边长为 20×25 的矩形 $ABCD$ 内，则圆心 O 应在边长为 19×24 的矩形 $A'B'C'D'$ 内，如图 Ⅱ－6－7－13 所示，即从矩形 $ABCD$ 边上剪去一个宽为$\frac{1}{2}$ 的长条.

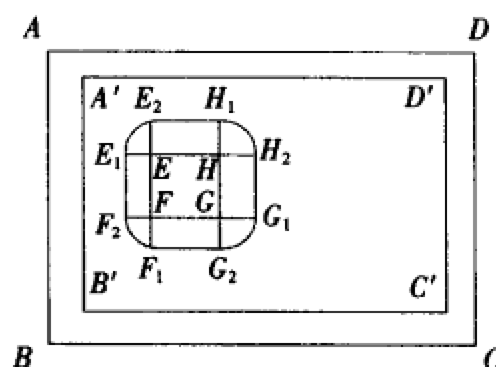


图 Ⅱ－6－7－13

(2) 若放入的小圆纸片不与某个正方形 $EHGF$ 重叠，则我们在这小正方形外边镶上宽为$\frac{1}{2}$ 的边，再在小正方形 $EFGH$ 的四角装上半径为$\frac{1}{2}$ 的圆弧，这圆弧所对圆心角为 90°，这样，就得到了一个镶边图形 $E_1E_2H_1H_2G_1G_2F_1F_2$，这个圆形面积是

$$1 + 4 \times \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{12 + \pi}{4}$$

由于圆纸片不与小正方形重叠,则圆心 O 应在这镶边圆形之外.

(3) 将放人的 120 个单位正方形按照上法都镶上边,这时,如果 $ABCD$ 中若放不进一个直径为 1 的圆纸片 O,这表明 $A'B'C'D'$ 已被这 120 个镶边小正方形覆盖住(即找不到 O 点的位置),因此,这 120 个镶边小正方形面积总和 $S \geqslant 19 \times 24$,但事实上

$$S = 120 \times (\frac{12 + \pi}{4})$$

$$< 120 \times (\frac{12 + 3.2}{4}) = 456 = 19 \times 24$$

于是得出矛盾,这表明,在边长为 20×25 的矩形中,当放人 120 个单位正方形之后,还可以无重叠地,完整地放人一个直径为 1 的圆纸片.

【注】 在解答本题中,把直径为 1 的小圆缩小为一点 O 进行考察,把每个小正方形镶边,这种“缩”“放”的构思是一种非常重要的证题技巧.例 14 中采用的正是这种“放”、“缩”技巧.

例 15 设平面上有有限个正三角形覆盖着面积为 S 的区域,求证:可以从中取出若干个互不重叠的正三角形,使其覆盖面积大于 $S/16$.

证:在 这个有限正三角形中,一定存在一个边长最大(即面积最大)的正三角形 Δ_1,设 Δ_1 的边长为 a_1.如图 Ⅱ-6-7-14 所示作出将 Δ_1 加“保护层”后的圆形,则所有与正三角形 Δ_1 相重叠的所有正三角形都在所示圆形的范围之内,则这个最大正三角形 Δ_1 加“保护层”后的圆形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3a^2 + \pi a^2$

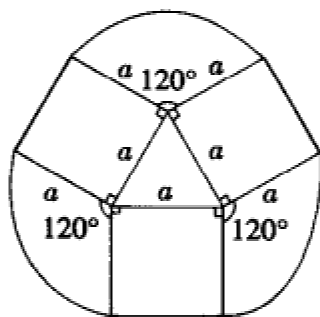


图 Ⅱ-6-7-14

设 Δ_1 及与 Δ_1 重叠的正三角形覆盖的总面积为 S_1.则

$$S_1 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3a^2 + \pi a^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2(1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi)$$

所以

$$\Delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \geqslant \frac{S_1}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi} \quad ①$$

除去 Δ_1 及与 Δ_1 重叠的正三角形,在所余的正三角形中取边长最大的一个为 Δ_2,同样作法可得

$$\Delta_2 \geqslant \frac{S_2}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi} \quad ②$$

其中 S_2 是 Δ_2 及与 Δ_2 重叠的正三角形覆盖的总面积.

如此继续下去,至第 k 步全部取完,这样取出彼此不相交的 k 个正三角形序列.

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_k$

其中 Δ_i 及与Δ_i 相重叠的所有正三角形覆盖的总面积为$S_i(i = 1,2,\cdots,k)$,则由

$$\Delta_1 \geqslant \frac{S_1}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}$$

$$\Delta_2 \geqslant \frac{S_2}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}$$

……

$$\Delta_k \geqslant \frac{S_k}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}$$

相加得

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k$$

$$\geqslant \frac{1}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi}(S_1 + S_2 + \cdots + S_k)$$

但$S_1 + S_2 + \cdots + S_k \geqslant S$

$$1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi < 16$$

$$\therefore \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k \geqslant \frac{S}{1 + 4\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\pi} > \frac{S}{16}$$

【注】 本题类型称为"维他利型问题",若把"正三角形"的条件改为"正方形"或"圆",其结果请读者自行探求.

例 16 有甲、乙、丙、丁四张纸片,甲是边长为 1 的正三角形,乙是边长为 1 的正方形;丙是边为长 1 的正五边形;丁是边长为 1 的正六边形,请证明:

(1) 用甲、乙、丙合在一起不能盖住半径为 1 的圆面;

(2) 用甲、乙、丙、丁合在一起能盖住半径为 1 的圆面.

(**【注】** 用几张纸片去盖圆面时,纸片可重叠,但不能剪开.)

证:(1) 这是证不能覆盖的问题,只须证圆周无论如何不能被盖住就可以.

证半径为 1 的圆面为 $\odot O$,当我们用丙去盖 $\odot O$ 的圆周时,易证丙不可能盖住半个圆周(实际丙至多只能盖住 $108°$ 的圆弧),而用甲至多盖住不超过 $60°$ 的圆弧,用乙至多盖住 $90°$ 的圆弧,合起来不会超过 $330°$ 的圆弧,因此,甲、乙、丙一起连圆周都盖不住,就更谈不上盖住整个圆面了.

(2) 这是证明能盖住的问题,需要构造设计一种放置甲、乙、丙、丁的方法.

$\odot O$ 仍表示半径为 1 的圆面,如图 Ⅱ - 6 - 7 - 15,设 MN 与 PQ 是 $\odot O$ 互相垂直的两条直径,我们将乙、丙、丁如图所示放好,其中乙的相邻两边与 OM,OQ 重合,因此乙盖住了圆面的$\frac{1}{4}$——扇形 MOQ,丙的相邻两边中一边与 OQ 重合,另一边 OR 的顶点在$\overset{\frown}{PN}$上,丙盖了含圆心角为 $108°$ 的扇形 QOR,丁的一个顶点在 M,且过 M 的一边垂直于直径 MN.设这边所对的边为 ST,T 在MN 上,此时,由于 $ST \parallel PO$,故可设 ST 与半圆弧$\overset{\frown}{MPN}$交于G,与 OR 交于H,则丁盖住了 $\odot O$ 中的$MPGHO$ 图形.

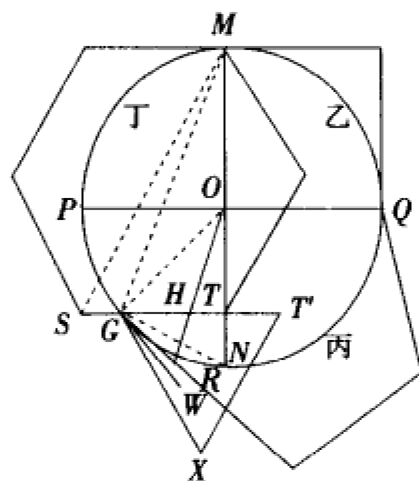


图 Ⅱ - 6 - 7 - 15

至此 $\odot O$ 未被盖住的部分是圆形GHR,其中$\overset{\frown}{GR}$ 是弧段,这时我们用甲去盖 GHR,让甲的一个顶点与 G 点重合,一边与 G 重合延长至T',甲的另一顶点为 X,过 G 沿$\overset{\frown}{GN}$ 的方向作 $\odot O$ 的切线GW,此时,由于$\angle GMT < \angle SMT = 30°$,故$\angle TGW = \angle GOT = 2\angle GMT < 2 \times 30° = 60°$.即 $\angle TGW < \angle TGX$,故$\overset{\frown}{GR}$ 不能与GX 相交.

我们再证 N 在甲的内部.

事实上

$$GT^2 = OG^2 - OT^2 = 1 - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2\sqrt{3} - 3$$

$$GN^2 = GT^2 + TN^2$$

$$= 2\sqrt{3} - 3 + (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

因 G 点到XT' 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,而

$$GN^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 4 - 2\sqrt{3} - \frac{3}{4} = 3.25 - 2\sqrt{3} < 3.25 - 2 \times 1.7$$
$$= -0.15 < 0$$

故 $GN < \frac{\sqrt{3}}{2}$,由凸图形的性质知 N 在甲的内部,GRH 部分被甲盖住,因此用甲、乙、丙、丁合在一起可以盖住半径为 1 的圆面.

【注】 本题是应用定义证明覆盖与不能覆盖的典型例题,寻找甲、乙、丙、丁适当的放置方法是证题的依据,在证明不能覆盖时,攻其边界上至少有一点盖不住是解题的突破口.

§7.3 针对性训练

A组

1.(1973.波兰数学竞赛题) 凸 n 边形被一些对角线分划为三角形,满足下列条件:

(1) 从每个顶点出发的对角线的条数都是偶数;

(2) 任两对角线除顶点外没有其他公共点,证明:数 n 是3的倍数.

2. 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是一个不减的正整数序列,对于 $m \geqslant 1$,定义 $b_m = \min\{n: a_n \geqslant m\}$,即 b_m 是使 $a_n \geqslant m$ 的 n 的最小值.若 $a_q = p_1 p_2, q$ 为正整数,证明:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_q + b_1 + b_2 + \cdots + b_q = p(q+1)$.

(若令 $q = 19, p = 85$,即为美国1985.数学竞赛试题)

3.(波兰数学竞赛题) 已知空间中六条直线,其中任何三条不平行,任何三条不交于一点,必不共面.求证:在这6条直线中总可选出3条,其中任二条异面.

4. 几个大城市的每两个城市都恰好由汽车、火车、飞机三种交通方式中的一种直接联系.已知在这几城市间三种交通方式全有,但没有一个城市三种方式全有,并且没有任何三个城市间两两联系的方式完全相同,问最多有几个城市?

5.(1989.第25届莫斯科数学奥林匹克试题) 证明:任何一群人均可分为两组,使得同组中的朋友总对数小于异组间的朋友对数.

6. 直径为1的圆纸片一定能盖住一个直径为1的点集吗?

7. 有限点集 M 的直径为1,证明:半径为$\sqrt{2}/2$ 的圆纸片能覆盖点集 M

8. 平面上有100个点,其中任意两点间的距离都不超过1,又其中任意三个点均构成钝角三角形.求证:可以用一个半径为 $1/2$ 的圆纸片将这100个点完全盖住.

9. 证明:两个边长为0.99的正三角形纸片不能盖住一个边长为1的正三角形纸片.

10. 平面上有一周长为 $2l$ 的线圈.求证:这个线圈可被一个半径为 $l/2$ 的圆纸片所覆盖.

11. 四边形纸片 $ABCD$, $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 12$, $AD = 13$, $\angle ABC = 90°$.求证:这张四边形纸片可以盖住一个半径为 $\sqrt{5}$ 的圆纸片而盖不住一个半径为 $\sqrt{6}$ 的圆纸片.

12. 设平面上有有限个圆纸片覆盖着面积为 S 的区域.求证:从中可以选出若干互不相交的圆纸片使之覆盖面积不小于 $S/9$

13. 证明:三张边长为1的正方形纸片一定可覆盖住一个边长为 $5/4$ 的正方形纸片.

B 组

1.(1998.莫斯科数学奥林匹克竞赛题)在平面上画一个凸多边形,它的各边外侧涂上颜色.(即线段一侧涂色,另一侧不涂色).引这个多边形的任意一些对角线,其中每条对角线也是一侧涂色.求证:由原多边形的边或对角线所成的多边形中有一个也是外侧涂色的.

2.(第25届全俄中学生数学奥林匹克竞赛题)将网络平面中所有的格染成5种颜色使得任意形如 ┼ 的图形中,各格是不同的颜色.证明:任意形如 □□□□□ 的图形上各格也是不同的颜色.

3. 对怎样的正整数 m, n, $m \times n$ 方格表可以分割为若干个" ⊞□□ ".(第52届波兰数学奥林匹克竞赛题)

4.(第22届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题)用边长是2的正方形去掉一个边长是1的正方形所得到的图形去覆盖两邻边长分别是5和7的矩形(矩形被分成5×7个边长为1的小方格),可以重叠但不可超出矩形,那么,是否可能使矩形中的每个边长是1的小方格上覆盖的图形的层数都相等?证明你的结论.

5.(第22届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题)在坐标平面上有4个棋子,它们的中心的坐标都是整数,每个棋子都可按以另外任意两个棋子的中心分别为起点和终点的向量移动.证明:任何两个棋子都可以按这种规则设法最终重叠在一起.

6.(第26届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题)100×100方格表的方格被分别染成为4种不同的颜色,使得每一行、每一列中都恰有每种颜色的方格各25个.证明:可以从表中找出两行和两列,它们所交成的4个方格分别被染为4种不同颜色.

7.(第27届美国奥林匹克竞赛题)一电脑屏幕上显示了一个98×98的棋盘,其格子依常用方式染色(类似于国际象棋棋盘,进行黑白染色).允许用鼠标任意选择一个矩形.(矩形的边都在格子线上),然后按鼠标键,则被选中的矩形中的每个小方格改变颜色(黑变白,白变黑).求出并证明,至少需要多少次上述操作,才能使棋盘上的格子均同色.

8.(第22届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题)已知一个凸多边形,它的任意两边都不平行,对它的每一条边都取距它所在直线最远的一个顶点.证明:所有顶点对相应的边的张角和等于180°.

第八章

组合几何及其应用

§8.1 知识、方法、技能

组合几何诞生于20世纪中叶，是用组合数学的成果来解决几何学中的问题，主要研究几何图形的拓扑性质和有限制条件的欧几里得性质.

这一讲，我们介绍数学竞赛中的有关问题，以介绍组合几何中的一些基本方法，体现在竞赛题中的某些基本方法，或称“招式”，虽然经常有用，但在许多场合，需要自己针对问题的具体情境，创造“新的招术”，“以无招胜有招”，这正是组合几何问题的显著特点.

Ⅰ. 凸图形与凸包

平面图形是平面上点的集合，就其性质而言，可分离散点集与连续点集，比如，一个有限 n 点组就是离散点集；而一条曲线则是连续点集，如图Ⅱ－6－8－1所示的一条封闭曲 l 包围的平面部分叫平面区域，其中 l 叫区域的边界；包括边界在内的区域叫做闭区域，简称区域.

此外我们还将平面图形分为凸图形和非凸图形两类来进行研究.

定义1：如果对于平面图形 M 中的任意两点 A,B，线段 AB 上的每一点均属于 M，则称图形 M 为凸.

容易验证：线段、直线、射线、半平面、(非优) 角域、圆域、全平面等都是凸图形，以平面凸多边形为边界的区域也是凸图形.

凸图形有两个重要性质.

定理1 两个凸图形的交仍是凸图形.

定理2 任意个凸图形的交仍是凸图形.

(证明从略)

特别指出：两个凸图形的并不一定是凸图形！

对于每个点集 M，都有包含它的凸图形，(至少全平面包含它)，所有包含 M 的凸图形的交仍然是凸图形，并且是包含 M 的最小凸图形，于是有定义2.

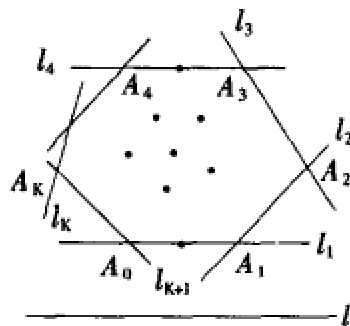
定义2：包含点集(图形) M 的最小凸图形称为点集(图形) M 的凸包.

这里的“最小”，是指凸包能包含于任何其它的包含 M 的凸图形之内.

对于有限点组 M，当 M 的点共一直线时，M 的凸包是一条线段，当 M 中的点是不全共线的 n 点组时，可依下法作出 M 的凸包(图Ⅱ－6－8－2)



图Ⅱ－6－8－1



图Ⅱ－6－8－2

第 1 步　画直线 l，使有限 n 点组M的点均在l的同一侧；平移 l 向M靠近，使 l 遇到M中的点为止，此时 l 的位置为l_1，l_1 上至少有 M 中一个点，也可能有 k 个点($1 \leqslant k \leqslant n-1$). 设这 k 个点所在线段的左端点为 A_0，右端点为 A_1.

第 2 步　以 A_1 为旋转中心，逆时针旋转 l_1，使其遇到 M 中的点为止，这时 l_1 变到新位置 l_2，l_2 上 M 中的点所在线段的右端点为A_2.

第 3 步　依上述操作程序进行下去，最后以 A_k 为旋转中心，逆时针旋转 l_k 使其遇到M 中的点为止. 这时 l_k 变到l_{k+1} 的位置. 而 l_{k+1} 恰遇 A_0. 这时，我们就作出了有限点组 M 的凸包$\overline{M}$，易知，有限 n 点组的凸包至多是以这 n 个点为顶点的凸 n 边形，由此有：

定理 3　有限 n 点组的凸包存在而且唯一(证明从略)

定义 3：平面图形 M 的点位于直线l 的一侧且与l 有公共点，则称 l 为图形M 的承托直线.

在图 Ⅱ－6－8－2 中所作的直线 $l_1, l_2, \cdots, l_k, l_{k+1}$ 实际上都是点组 M 的承托直线.

对于任何有限 n 点组F 及给定直线m，n 点组F 恰有两条平行于m 的承托直线，使点组 F 夹在这两条平行的承托直线 l_1 和 l_2 形成的带形域中间(如图Ⅱ－6－8－3)

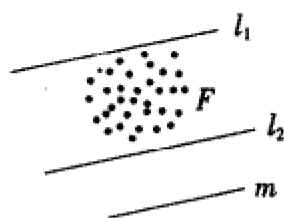


图 Ⅱ－6－8－3

对于平面有限 n 点组，都可放置在一个有着"最小性"的凸多边形区域内. 便于对问题的研究.(有关凸包方面的例题见例 1－例 5)

Ⅱ. 组合方法

在组合几何问题中常用的组合方法有：计数、原理、算两次、抽屉原理(在这里更多地表现为从总和经平均到单独，也有人称为平均原则)极端原理等.(有关例题见后例 6— 例 9)

Ⅲ. 构造法处理几何中某些存在性命题.

存在性命题，要求证明存在某个事物具有问题中所要求的性质，构造性论证就是直接，具体地造出这样的事物，(有关例题请见例 10— 例 15)

Ⅳ. 两种论证法

类似于传统的平面几何，组合几何中，也有不少问题，基于几何的想法和代数的工具都能给予论证或解答.(有关例题请见例 16，例 17)

Ⅴ. 方法的变通

组合几何的内容较为复杂，这正是组合几何的特点：问题灵活多样，解法千差万别，虽有某些"基本招式"，但确无"定法定则"，所以解这类问题时必须通变灵活，最忌执一.(有关例题请见例 1— 例 2)

§8.2　赛 题 精 讲

有关凸图形与凸包的问题

例 1　给定平面6 个点，任三点均不共线，求证：在以这些点为顶点的三角形的所有内角中，至少有一个内角不超过 30°.

【证】　由于任三点不共线，这 6 个点的凸包是凸多边形.

(1) 若凸包为凸六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，由于六边形内角和为$(6—2)\times 180° = 720°$，所以抽屉原则可知：① 至少有一个内角不超过 120°，不妨设$\angle A_2A_1A_6 \leqslant 120°$，进而有②$\angle A_2A_1A_3$，$\angle A_3A_1A_4$，$\angle A_4A_1A_5$，$\angle A_5A_1A_6$中至少有一个不超过 30°，(如图Ⅱ－6－8－4)

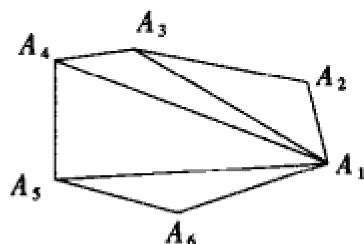


图 Ⅱ－6－8－4

(2) 若凸包为三角形，四边形或五边形时，由凸包的定义 2 可知，都会找到一个点在某三点组成的三角形中，不妨设点 A_6 在 $\Delta A_1A_2A_3$ 内，设 $\angle A_2A_1A_3$ 为 $\Delta A_1A_2A_3$ 的最小内角，由抽屉原则可知有

$\angle A_2A_1A_3 \leqslant 60°$,进而可知,$\angle A_2A_1A_6$ 与 $\angle A_3A_1A_6$ 中至少有一个不超过 30°(如图 Ⅱ-6-8-5)

【注】 此处所应用的抽屉原则是指:"若 $a_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$,则必存在 $a_k,a_l(1 \leqslant k \neq l \leqslant n)$,使 $a_k \geqslant \frac{S}{n}$,$a_l \leqslant \frac{S}{n}$.

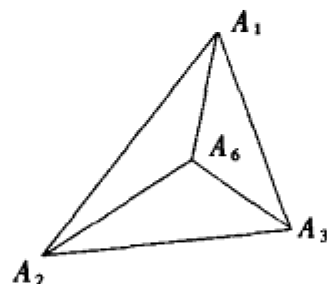


图 Ⅱ-6-8-5

例 2 平面上给定五个点,其中无三点共线,试证每三点确定的三角形面积中,最大与最小的比不小于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

【分析】 论证的想法是,在所说的 C_5^3 个三角形中指出两个面积比不小于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 的三角形(由此显然推出了结论),不宜着眼于最大(最小) 面积的三角形.

证明:设五个点为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,考虑其凸包(这只能是三角形、凸四边形或凸五边形).

(1) 凸包为三角形或凸四边形的情形一并处理.此时必有一个点落在某个三角形内部(凸包为三角形时显而易见,凸包为四边形时,可作一条对角线).

不妨设 A_4 在三角形 $A_1A_2A_3$ 中,则三角形 $A_1A_4A_2$、$A_2A_4A_3$、$A_3A_4A_1$ 中面积最小者,设为 $\Delta A_1A_4A_2$,不超过$\frac{1}{3}\Delta A_1A_2A_3$,即

$$\frac{\Delta A_1A_2A_3}{\Delta A_1A_4A_2} \geqslant 3 > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(2) 若凸包为凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$,在对角线 A_1A_3 及 A_1A_4 上依次取点 P、Q,使得

$$\frac{A_1P}{PA_3} = \frac{A_1Q}{QA_4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

则直线 $PQ \parallel A_3A_4$(请读者自己画一个图).

如果 A_2,A_5 中有一个与点 A_3,A_4 位于 PQ 同侧,不妨设为点 A_2,则

$$\frac{\Delta A_1A_3A_4}{\Delta A_2A_3A_4} \geqslant \frac{A_1A_3}{PA_3} = 1 + \frac{A_1P}{PA_3} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

如果 A_2,A_5 与点 A_1 位于直线 PQ 的同一侧,对角线 A_2A_5 与 A_1A_3 必相交,设交点为 O,则 $A_1O \leqslant A_1P$(我们用到了五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的凸性),于是

$$\frac{\Delta A_2A_3A_4}{\Delta A_1A_2A_5} = \frac{OA_3}{A_1O} \geqslant \frac{PA_3}{A_1P} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

【注】 对于更一般的情形,即为中国科技大学李文志先生提出的下列问题:

"平面上 $n(n \geqslant 3)$ 个点,无三点共线,它们构成的集合记为 K,这些点组成的 C_n^3 个三角形中,其最大面积是 T,最小面积是 t,设 $E(k) = \frac{T}{t}$ 且 $E_n = lnf_kE(k)$

(1) 求证:$E_6 = 3$

(2) 证明或否定 $E_n \geqslant \frac{n^2}{16\log_4 n}$

例 3 平面上给定了五个点,任三点不共线,则可选出四个点,这四点能够成一个凸四边形的四个顶点:

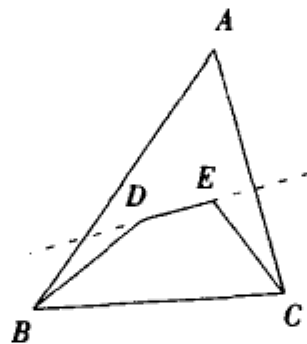


图 Ⅱ-6-8-6

证:由于任三点不共线,这五个点的凸包为多边形,分情况讨论如下:

(1) 凸包为五边形,则其中任意四点都组成凸四边形的四个顶点;

(2) 凸包为凸四边形,该四边形的四个顶点即为所求;

(3) 凸包是三角形 ABC,设另两点 D、E 在 ΔABC 内,则直线 DE 不过 A,B,C,必与 ΔABC 的两边相交.设直线 DE 与边 AB,AC 相交而与 BC 边不相交,则 B,C,E,D 四点就是一个凸四边形的四个顶点

（如图 Ⅱ－6－8－6 所示）

【评注】 本例可作如下推广.

推广:“在平面上给出 n 个点($n>4$),且无三点共线,则至少能找到$\frac{1}{n-4}C_n^5$ 个凸四边形,其顶点为已给的点.”

证明:因为平面上给出 n 个点($n>4$),且无三点共线,n 个点中每 5 个点至少找到 4 个点构成一个凸四边形的四个顶点,总计至少可以找到 C_n^5 个五点组,即至少有 C_n^5 个凸四边形.但其中有重复,因为对构成凸四边形顶点的4个点来说,其余 $n-4$ 个点每一点都可以与这4点组成5点组,因此每个凸四边形至多被重复计数了 $n-4$ 次,所以至少可以找到$\frac{1}{n-4}C_n^5$ 个凸四边形.

若将推广再引申即可解出第 11 届 IMO 题 5:“在平面上已给 n 个点,其中 $n>4$,且无三点共线,求证:至少能找到 C_{n-3}^2 个凸四边形,其顶点为已给的点.”

证明:事实上令 $f(n)=\frac{1}{n-4}C_n^5$,$g(n)=C_{n-3}^2$,只要证明 $f(n)\geqslant g(n)$ 即可,也就是当 $n>4$ 时,证明:$\frac{f(n)}{g(n)}\geqslant 1$ 即可.

由于$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}$,易知当 $n\geqslant 9$ 时$\frac{f(n)}{g(n)}>1$,又容易验算

$\frac{f(5)}{g(5)}=1$,$\frac{f(6)}{g(6)}=1$,$\frac{f(7)}{g(7)}=\frac{7}{6}>1$

$\frac{f(8)}{g(8)}=\frac{56}{40}>1$

所以当 $n>4$ 时,总有 $f(n)\geqslant g(n)$ 成立.

例 4 (*Heilbron* 猜想)设平面上任给 n 个点,每两点之间有一个距离,最大距离与最小距离之比记为 λ_n,则 $\lambda_n>2\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$.

【注】 *Heilbron* 猜想被我国徐州院数学系吴强先生证明,为了说明这类问题的一般解决过程,我们先给出 $\lambda_5\geqslant 2\sin 54^\circ$(即我国 1985. 全国高中数学联赛试题)的证明过程如下:

考虑五点 A、B、C、D、E 的凸包.

(1) 若其中有三点,比如 A,B,C 共线,且 B 在 A,C 之间,则

$$\lambda_5\geqslant\frac{AC}{min(AB,BC)}\geqslant 2>2\sin 54^\circ$$

(2) 若五个点中任三点均不共线,设凸包为 H.

① 若 H 为凸五边形(如图 Ⅱ－6－8－7),由于五边形内角和为 540°,所以它的最大内角不小于 108°,设最大角顶点为 A,又 B,C 是与 A 相邻的两个顶点,不妨设 $AB\leqslant AC$,则有 $\angle ACB\leqslant\angle ABC$,在 ΔABC 中

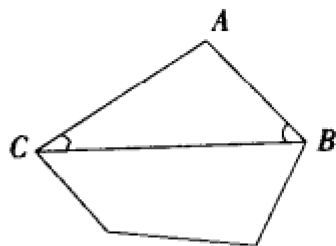


图 Ⅱ－6－8－7

$$\frac{1}{2}\angle A+\angle C\leqslant 90^\circ$$

$$\therefore\angle C\leqslant 90^\circ-\frac{\angle A}{2}$$

由于锐角的正弦是增函数,所以

$$\sin C\leqslant\sin(90^\circ-\frac{A}{2})=\cos\frac{A}{2}$$

据正弦定理有

$$\lambda\geqslant\frac{BC}{AB}=\frac{\sin A}{\sin C}\geqslant\frac{\sin A}{\cos\frac{A}{2}}=2\sin\frac{A}{2}\geqslant 2\sin 54^\circ$$

② 若 H 为三角形或四边形时,总能找到一点在某三点组成的三角形内部,不妨设 D 在 ΔABC 内部,则 $\angle ADB,\angle BDC,\angle CDA$ 中至少有一个不于 120°,仿 ① 中的证法,可得 $\lambda\geqslant 2\sin 60^\circ>2\sin 54^\circ$.

综上所述,总有 $\lambda\geqslant 2\sin 54^\circ$ 成立.

其中等号成立的充要条件是"所给的五个点是一个正五边形的五个顶点",请读者自行分析证明.

下面我们给出 *Heilbron* 猜想的证明.在证明中要用一个引理:

在 ΔABC 中,若某内角 $\alpha \leqslant \frac{\pi}{5}$,则

$$\lambda_{ABC} = \frac{\Delta ABC\text{ 的最大边}}{\Delta ABC\text{ 的最小边}} \geqslant 2\cos\alpha$$

证明:(1) 若这 n 个点中存在三点在一条直线上,不妨假定它们是 A_1,A_2,A_3,且 A_2 在 A_1,A_3 之间,则有

$$\lambda_n \geqslant \lambda_{A_1A_2A_3} = \frac{A_1A_3}{min\{A_1A_2,A_2A_3\}} \geqslant 2 > 2\cos\frac{\pi}{n}$$

(2) 这 n 个点中任意三点都不在一直线上,设它们的凸包为凸 k 边形($3 \leqslant k \leqslant n$)$A_1A_2\cdots A_k$(如图 Ⅱ-6-8-8).取这 k 边形中最小内角的顶点,不妨设这点为 A_2,则 $\angle A_3A_2A_1 \leqslant \frac{(k-2)\pi}{k} \leqslant \frac{(n-2)\pi}{n}$,连接 A_2A_4,$A_2A_5,\cdots,A_2A_n$,由于没有三点在一直线上,故 $A_2A_4,\cdots,A_2A_n$ 将 $\angle A_3A_2A_1$ 分成 $n-2$ 个小角,在这 $n-2$ 个小角中,至少有一个小角(例如 $\angle A_iA_2A_j$)不超过 $(k-2)\pi/(n-2)k \leqslant \frac{\pi}{n}$,由引理知

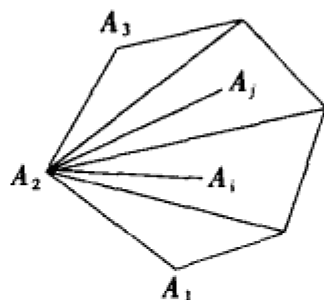


图 Ⅱ-6-8-8

$$\lambda_n \geqslant \lambda_{A_iA_2A_j} \geqslant 2\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin\frac{n-2}{2n}\pi$$

证毕.

【说明】 (1) 在上述证明中,事实上我们已得到了更为精确的定理:

平面上任给 n 个点.(ⅰ) 若存在三个点在一条直线上,则 $\lambda_n \geqslant 2$;(ⅱ) 若任意三点均不在一直线上,它们的凸包为 k 边形($3 \leqslant k \leqslant n$),则 $\lambda_n \geqslant 2\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi$

易知 $\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi \geqslant \sin\frac{n-2}{2n}\pi$,且等号当且仅当 $k = n$ 时成立.

(2) 上述证明(2) 中的关键是证明下述命题:给定平面上 n 个点($n \geqslant 3$),无三点共线.那么在这 n 个点中可以挑出三个点,使得从其中一个点引出的通过其他两个点的射线之间的夹角不超过 $\frac{\pi}{n}$

对此命题给出如下证明.

证明:记给定的 n 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$

(1) 先考虑特殊情形:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成凸 n 边形的顶点,此时问题较为容易.

由于 n 个内角之和为 $(n-2)\pi$,故必有一个内角 $\leqslant \frac{n-2}{n}\pi$,不妨设 $\angle A_1 \leqslant \frac{n-2}{n}\pi$,过顶点 A_1 引出所有的对角线(共 $n-3$ 条,由于多边形的凸性,对角线都位于多边形的内部),这 $n-3$ 条对角线将 $\angle A_1$ 分成 $n-2$ 个部分,因此确定了一个角 $\leqslant \frac{1}{n-2} \times (\frac{n-2}{n})\pi = \frac{\pi}{n}$

(2) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不构成凸 n 边形的顶点,考虑其凸包,便将问题化归为上述特殊情形.

由于凸包是一个凸 k 边形($3 \leqslant k < n$),$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有 $n-k$ 个点在此 k 边形的内部,凸 k 边形必有一个内角 $\leqslant \frac{k-2}{k}\pi$.不妨设 $\angle A_1 \leqslant \frac{k-2}{k}\pi = (1-\frac{2}{k})\pi$,它显然 $\leqslant (1-\frac{2}{n})\pi = \frac{n-2}{n}\pi$.过 A_1 引出 k 边形的 $k-3$ 条对角线,并连接 A_1 与 k 边形内部的 $n-k$ 个已知点,与(1) 相同,共有

$$(k-3)+(n-k) = n-3$$

条线段,由于凸性,它们均在凸 k 边形的内部,从而将 $\angle A_1$ 分成 $n-2$ 个部分,所以决定了一个角 $\leqslant \frac{1}{n-2}(\frac{n-2}{n})\pi = \frac{\pi}{n}$

说明的说明:(ⅰ)解答中的(1)是多余的,我们的目的在于提供一个比较,以说明就本题而言,一般情形(借助凸包)与特殊情形的论证并无差异.

(ii) 我们所应用的熟知的结论：凸 n 边形的内角之和为 $(n-2)\pi$，但这并未刻划多边形的凸性．事实上，对于非凸（即凹的）多边形，同样的结论也成立（证明并不容易）．请读者留意一下，论证中哪些地方用到了多边形的凸性．

例 5　在平面上，设 $M_1,M_2,\cdots,M_n(n\geqslant 3)$ 都是凸图形，如果其中每三个凸图形都有公共点，那么这 n 个凸图形必有公共点．

证：对凸图形个数 n 用数学归纳法，

当 $n=3$ 时命题显然成立．

设 $n=k(k>3)$ 时命题成立，我们证明命题对于 $n=k+1$ 成立．

由于 k 个凸图形 $M_2,M_3,M_4,\cdots,M_k,M_{k+1}$ 中每三个有公共点，根据归纳假设，这 k 个凸图形有公共点 A_1，同样设 $M_1,M_3,M_4,\cdots,M_{k+1}$ 这 k 个凸图形有公共点 A_2，$M_1,M_2,M_4,\cdots,M_{k+1}$，这 k 个凸图形有公共点 A_3，$M_1,M_2,M_3,M_5,\cdots,M_{k+1}$ 这 k 个凸图形有公共点 A_4

如果 A_1,A_2,A_3,A_4 这四个点中有相同的，比如 A_1 和 A_2 相同，那么 A_1 就是 $M_1,M_2,M_3,M_4\cdots$，M_{k+1} 这 $k+1$ 个凸图形的公共点，命题成立．

如果 A_1,A_2,A_3,A_4 是互不相同的四点，考察它们凸包 H

(1) H 为凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$，这时线段 A_1A_3 与 A_2A_4 相交于点 A．因为 $A_1\in M_2$，$A_3\in M_2$，M_2 是凸图形，所以 $A_1A_2\subseteq M_2\Rightarrow A\in M_2$，同理 $A\in M_4$，$A\in M_5,\cdots,A\in M_{k+1}$．又因为 $A_2\in M_1$，$A_4\in M_1$，M_1 是凸图形，所以有 $A\in M_1$，同理可证 $A\in M_3$．因此，A 是 $M_1,M_2,M_3,M_4,\cdots,M_{k+1}$ 这 $k+1$ 个凸图形的公共点．

(2) H 为 $\triangle A_1A_2A_3$，这时因为 A_1,A_2,A_3 都属于 M，所以 $\triangle A_1A_2A_3\subseteq M_4$，从而由 $A_4\in\Delta A_1A_2A_3\Rightarrow A_4\in M_4$．因此 A_4 是 $M_1,M_2,M_3,M_4,\cdots,M_{k+1}$ 个凸图形的公共点．

(3) H 为一线段 A_1A_2，这时 $A_4\in A_1A_2\subseteq M_4$，所以 A_4 是 $M_1,M_2,M_3,M_4,\cdots,M_{k+1}$ 这 $k+1$ 个凸图形的公共点．

综上所述，问题得证．

【评注】　(1) 例 5 是凸集理论中著名的海莱定理，也是应用凸包证明点集性质的一个典型例题；

(2) 在把每三个凸集具有的某种性质推广到 n 个凸集时，往往要利用海莱定理，因此这一定理的应用十分广泛．另外，它的各种特例常常被用作数学奥林匹克试题，例如：

(i)（1987．苏州市高中数学竞赛试题．）平面上有四个圆，其中任意三个圆面都有公共点．求证：这四个圆必有公共点．

(ii)（1951．匈牙利 IMO 试题）同一平面上的 4 个半平面完全覆盖了这个平面，即平面上的任一点至少和 4 个半平面中的一个半平面的某一内点重合．证明：从这些半平面中，可以挑选 3 个半平面，它们仍能覆盖平面．

(iii)（第 31 届 IMO 预选题）设 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 4)$ 是平面内的 n 个凸集，其中每三个集合有一个公共点．求证：必有一个点属于所有的集合．

有关组合方法的例．

例 6　设 n 和 k 是正整数，S 是平面上 n 个点的集合，满足条件，对 S 中每一点 P，S 中存在 k 个点与 P 距离相等．证明：

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$$

	P_1	P_2	· · ·		P_n
C_1	0	1			1
C_2	1	1			
⋮					
C_n	0				

证明：设 $S=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$ 由已知条件，以 S 中每一个 P_i 为中心可以作一个圆，使圆上至少有 S 中的 k 个点，记这个圆为 $C_i(1\leqslant i\leqslant n)$，假定 P_1 出现．

在由 n 行、n 列构成的方格表中，如果点 P_j 在圆 C_i 上，就在第 i 行与节 j 列交叉处的方格中填上 1，否则填 0，得到一个数表，由定义易见，第 i 行中 1 的个数等于 C_i 包含的 S 中有点数（这至少是 k），第 i 列中 1 的个数恰为 a_i，我们用两种方法计算数表中所有数的和．一方面，按列相加，它是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$，

另一方面，逐行相加，这至少是 nk，综合起来.得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant nk \quad ①$$

下面来估计 $a_1 + \cdots + a_n$ 的上界，我们先从两个方面计数诸圆 C_i 确定的（无序）圆对，一方面，共有 n 个圆，所以不同的圆对恰有 C_n^2 对.

另一方面，如果 a_i 个圆均过一点 P_i（即 P_i 在 a_i 个圆上），则这一点确定了 $C_{a_i}^2 = \frac{1}{2}a_i(a_i - 1)$ 个不同圆对（当 $a_i = 0,1$ 时这恰好为 0）. 由于任两个圆至多有两个交点，故由点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 至少决定了 $\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\right)\frac{a_i(a_i - 1)}{2}$ 个不同的圆对.

综合两个方面，得出

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i - 1) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 - \sum_{i=1}^{n}a_i \leqslant 2n(n-1)$$

由柯西不等式，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$，代入上式得到

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) - 2n^2(n-1) \leqslant 0$$

解出

$$\sum_{i=1}^{n}a_i \leqslant n\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}}\right) \quad ②$$

综合 ①、② 即得

$$k \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2n - \frac{7}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

【注1】 本题的结论是从（上、下）两个方向估计 $\sum a_i$ 而得到的，而 $\sum a_i$ 的上，下界又都是通过“算两次”获得，值得寻思.

【注2】 估计下界用的包含关系表，在处理某些有限集合的问题时常用到，请读者留意.

例7 直角坐标系中，给定边平行于坐标轴的整点矩形（即顶点坐标均为整数）. 我们总可以将它划分为若干个基本三角形，这里，基本三角形是这样的三角形，其顶点都是整点，但内部及边界上没有（除顶点外的）整点. 求证：包含在整点矩形中的基本三角形的个数不依赖于将这个矩形划分为这样三角形的方式.

证明：我们用两种方法计算所有的三角形的内角和，一方面，这些三角形的内角和等于 $k \times 180°$，k 是三角形的个数.

另一方面，由于这些三角形的顶点是在矩形内或边界上的整点，可以将这些三角形的顶点分成如下几类计算：

(1) 顶角的顶点是矩形的顶点，显然这些顶角之和等于 $4 \times 90°$

(2) 顶角的顶点是矩形边上的整点（但不与矩形顶点重合）. 这样的顶角之和显然等于 $m \times 180°$，其中 m 是矩形四条边上（除顶点外）的整点个数.

(3) 顶角的顶点是矩形内的整点，这样的顶角之和等于 $n \times 360°$，其中 n 是矩形内整点个数.

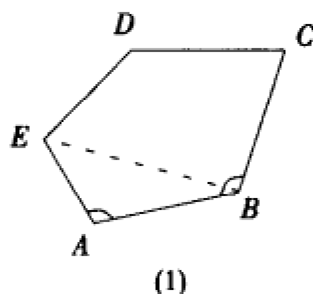
因此，所有三角形的内角之和等于 $4 \times 90° + m \times 180° + n \times 360°$，综合两种方法的计算结果，可见 $k = m + 2n + 2$，它只依赖于给定矩形内及边界上的整点个数，从而与划分为三角形的方式无关.

例8 在一个平面上有100 个点，其中任意三点均不共线，考察以这些点为顶点的所有三角形. 证明：其中至多只有 70% 的三角形是锐角形.

分析与证明：我们从简单情况入手，看 5 个点中没有三点共线，至少可以产生多少个非锐角三角形.

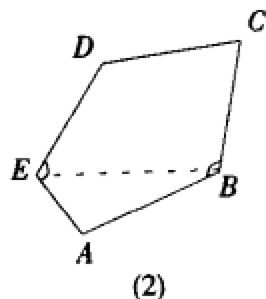
对这五个点的凸包分类讨论：

(1) 凸包为凸五边形，则五个内角中至少有两个非锐角，它们可能相邻(图 Ⅱ－6－8－9)，也可能不相邻(图 Ⅱ－6－8－10)．在两个圆中都连上 EB，在四边形 $EBCD$ 至少有一个非锐角，所以当凸包为凸五边形时，至少找到三个不同的非锐角，相应地得到三个非锐角三角形．



(1)

图 Ⅱ－6－8－9

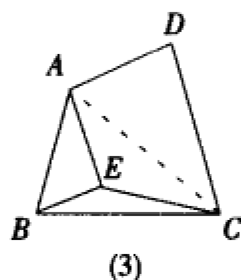


(2)

图 Ⅱ－6－8－10

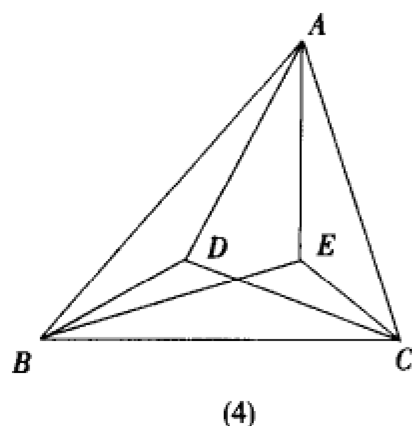
(2) 凸包为凸四边形 $ABCD$，点 E 在四边形之中．凸四边形 $ABCD$ 中至少有一个内角为非锐角．设 E 在 ΔABC 中，则 $\angle AEB$，$\angle BEC$，$\angle CEA$ 中至少有两个非锐角(图 Ⅱ－6－8－11)，所以当凸包为四边形时，也至少能找到三个非锐角，相应地得到三个非锐角的三角形．

(3) 凸包为三角形，设 D、E 在凸包三角形 ABC 内，易知 $\angle ADB$、$\angle BDC$、$\angle CDA$ 中至少有两个非锐角，$\angle AEB$、$\angle BEC$、$\angle CEA$ 中至少有两个非锐角，$\angle AEB$，$\angle BEC$，$\angle CEA$ 中也至少有两个非锐角，这时五点组中至少含有四个非锐角，相应地至少含有四个非锐角三角形(如图 Ⅱ－6－8－12)．



(3)

图 Ⅱ－6－8－11



(4)

图 Ⅱ－6－8－12

综上所述可得："平面上五个点，其中任三点不共线，则在以这 5 个点为顶点的三角形中，至少有 3 个非锐角三角形．"

对于平面上 100 个点的情况，由于每五点组中至少含有 3 个非锐角三角形，而每个非锐角三角形至多属于 C_{97}^2 个五点组，所以不重复的非锐角三角形至少有 $3C_{100}^5/C_{97}^2$ 个．由于总共有 C_{100}^3 个三角形，所以非锐角三角形至少占

$$\frac{3C_{100}^5}{C_{97}^2\cdot C_{100}^3}=\frac{3\times\dfrac{100\times 99\times 98\times 97\times 96}{120}}{\dfrac{97\times 96}{2}\times\dfrac{100\times 99\times 98}{6}}=\frac{3}{10}.$$

因此在这 100 个点为顶点的三角形中，锐角三角形不多于三角形总数的 $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}=70\%$．

例 9　边长为1 的正方形内部有一条长度为1000 的不自身相交的折线．证明：存在一条直线，它垂直于正方形的某一条边，并且与折线至少有 500 个交点．

证明：设折线共有 n 节，l_i 表示第 i 节的长度，考虑它在正方形两条互相垂直边上的投影．记 l_i 的投影长度分别为 a_i 及 b_i，显而易见 $l_i\leqslant a_i+b_i(1\leqslant i\leqslant n)$．于是(平均！)

$1000=l_1+\cdots+l_n$

$\leqslant (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)$

$= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)$,

这样,$a_1 + \cdots + a_n$ 与 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ 中有一个 $\geqslant 500$

由于每个投影长不超过 1,如果在长度为 1 的边上,折线各节投影长度之和不小于 500.由重叠原理,这个边上必有一点为至少 500 个不同折线节的投影所覆盖(即至少有 500 个投影线段有公共点),过该点作正方形一边的垂线,叫它与折线至少有 500 个交点,由于折线不自身相交,故这些交点互不相同.

【评注】 本题的解法值得注意,我们是分为两步论证,第一步,投影将二维平面上的一个"整体"(折线)转化到一维直线上的"局部"—— 正方形的两条边,利用平均则将两者的整体信息过渡到某一边上.第二步,由这条边上的结果推断出折线本身所具有的某种性质,即从"局部"回到"整体".

有许多联系着整体与局部的方法,投影是其中的一种几何方法.前面说过的"从平均到单独"则是代数角度的方法,在处理一些几何问题时,两者经常结合使用.

有关构造的例题分析如下.

例 10 (第42届 IMO预选试题)由三个非负整数构成的集合 $\{x,y,z\}(x<y<z)$ 被称为"历史"的,如果 $\{z-y,y-x\}=\{1776,2001\}$.证明:所有非负整数构成的集合可以分成两两不交的"历史"的集合的并.

证明:为方便起见,设 $a=1776, b=2001$.实际上,只要满足 $0<a<b$ 即可.

定义 $A=\{0,a,a+b\}, B=\{0,b,a+b\}$,则 A 和 B 都是"历史"的,且集合 X 是"历史"的,当且仅当 $X=x+A$ 或 $x+B$,其中 x 是某个非负整数,而 $x+S=\{x+S \mid S\in\zeta\}$

实际上,若 $X=x+A$ 或 $x+B$,则 X 显然是"历史"的,反之,若 X 是历史的,设 $X=\{x,y,z\}$,且 $x<y<z$,则 $\{z-y,y-x\}=\{a,b\}$

若 $z-y=a, y-x=b$,则 $X=x+B$

若 $z-y=b, y-x=a$,则 $X=x+A$

我们将构造一个由两两不交的"历史"的集合组成的无限序列 $X_0, X_1, X_2, \cdots$,使得:如果 K 是在 X_0 到 X_m 中没有出现过的非负整数中最小的一个,则让 K 属于 X_{m+1}.于是,这无限个集合的并包含了每个非负整数.

设 $X_0=A$,假设我们已经构造了 X_0 到 X_m,设 K 是在这些集合的并 $\cup=\bigcup_{i=0}^{m}X_i$ 中没有出现过的最小的非负整数,若 $K+a\notin\cup$,则设 $X_{m+1}=K+A$;否则设 $X_{m+1}=K+B$

假设构造到 X_m 就无法构造了,由于 X_0 到 X_m 中每一个集合中最小的元素都小于K,所以元素都小于 K,所以元素 K 和$K+a+b$ 均不在 $\cup$ 中,故若构造失败,必有 $K+b\in\cup$.因为若 $K+a\notin\cup$,则可以继续构造 $X_{m+1}=K+A$,所以 $K+a\in\cup$,从而取 $X_{m+1}=K+B$.因为构造失败,且 $K\in\cup$,$K+a+b\in\cup$,则必有 $K+b\in\cup$,且 $K+b$ 一定是某个X_j 中最大的元素,其中 $j\leqslant m$,设 l 表示X_j 中最小的元素,则 $K+b=l+a+b$

所以 $K=l+a$.因为$K\notin\cup$,所以 $l+a\notin\cup$.于是有 $X_j=l+B$,但是我们前面已经约定,当$l+a\notin\cup$ 时,$X_j=l+A$,矛盾.

因此,构造可以无限地进行下去.

例 11 证明:直角坐标系中,存在一个由无穷多个圆组成的集合 C,具有下述性质:

(i)C 中任意两个圆至多有一个交点(相切);

(ii) 横轴上的任一个有理点都包含在 C 中的某个圆上.

证明:我们来构造一个符合要求的集合 C(如果只要求(i) 或者(ii),问题是容易的).

对于 x 轴上任一有理数$(r,0)$,有理数 r 可唯一地写成$\frac{p}{q}$ 的形式,其中 p,q 为元素的整数且$q>0$,且 $C(\frac{p}{q})$ 表示圆心在$\left(\frac{p}{q},\frac{1}{2q^2}\right)$,从而包含这一点,所有的圆 $C\left(\frac{p}{q}\right)$显然互不相同,下面证明,它们中任两个至多有一个交点.

假设有两个不同的圆 $C\left(\frac{p}{q}\right)$与$C\left(\frac{p'}{q'}\right)$交于两点，则其圆心之距小于半径之和，由此推出

$$\left(\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}\right)^2+\left(\frac{1}{2q^2}-\frac{1}{q'^2}\right)^2<\left(\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{2q'^2}\right)^2$$

即 $(pq'-p'q)^2<1$

由上式易知，必须成立 $pq'-p'q=0$，即$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'}$. 但是 p 与 q 互素，p' 与 q' 也互素，且 $q,q'>0$. 所以 $p=p',q=q'$. 从而两圆 $c\left(\frac{p}{q}\right)$与$c'\left(\frac{p'}{q'}\right)$重合，与上面的假设矛盾.

于是，集合 $c=\left\{c\left(\frac{p}{q}\right)\mid p,q\text{ 为任一互素整数},q>0\right\}$便符合要求.

【注】 解答中构造的圆称为 *Ford* 圆. 有时颇为有用.

探索是解题的灵魂，构造也是离不开探索，在它的背后，往往隐蔽着反反复复的尝试. 其方法是先在(与问题有关的)熟悉的事物中寻找，在特殊的事物中寻找，结合目标，不断地调整甚至改变方案，直至实现构造.

例 12 证明：平面上存在一个面积为 1 的四边形 $ABCD$，使得对于其内部任一点 O，三角形 OAB，OBC，OCD，OAD 的面积中都至少有一个为无理数.

证明： 我们先尝试较简单的四边形：正方形，矩形，平行四边形. 然而，容易看出，这些图形均不符合要求(只要取 O 点为它们的中心，得出的四个三角形的面积都是有理数$\frac{1}{4}$).

限制四边形中两边平行，或许会有某些益处，至少这种四边形的面积与其边长的关系较为简单. 我们考察如图 Ⅱ－6－8－13 所示的直角梯形，其高为1，上、下底边长度分别为(待定的) $x,y,y<x$，探索的大纲是：如果这梯形不合要求，确定 x,y 应满足怎样的(必要)条件.

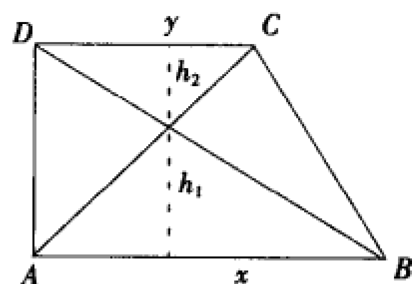


图 Ⅱ－6－8－13

由梯形面积公式得出

$$x+y=2 \quad ①$$

若三角形 OAB，OCD 的面积都是有理数，设边 AB、CD 上的高分别为 h_1,h_2，则

$$h_1+h_2=1 \quad ②$$

$$h_1x=a,h_2y=b \quad ③$$

这里 a,b 都是有理数，由 ①、②、③ 消去 h_1,h_2,y，得出

$$2-\frac{2a}{x}-x+a=b$$

即 $x^2-(a-b+2)x+2a=0$

这表明，x 应满足一个有理系数二次方程，于是，上述梯形符合问题要求的一个充分条件为 $1<x<2$，并且 x 不满足任一个有理系数的二次方程，我们可以取 $x=\sqrt[3]{2}$，易证它符合所述的充分条件. 还能证明，这样的 x 有无穷多个.

论证也表明，考虑直角梯形并不必要，任何一个高为 1，两底边长为$\sqrt[3]{2}$，$2-\sqrt[3]{2}$ 的梯形都符合要求.

【注】 例12的证明体现了一个重要的想法，即限制某事物满足一个充分条件以保证它符合问题中的要求(或部分要求). 这种以退求进的策略用处很多.

有些问题可以用归纳法来构造，归纳构造与熟知的归纳证明并无实质的区别，其特色在于用(假设)已构造出的第 k 个事物去构造第 $k+1$ 个符合要求的事物，请看下面的例子.

例 13 证明：对于每个整数 n，平面上存在符合下述要求的点集 X_n：

(i) X_n 中恰好有$\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]$个点($[x]$表示不大于 x 的最大整数).

(ii) 对每一个 $k=1,2,\cdots,n$，存在一条直线，该线上刚好包含 X_n 中的 k 个点.

证明： 对 $n\geqslant 1$，我们用归纳法来构造符合要求的点集 X_n，对于 $n=1$ 及 $n=2$，一个点的点集与两

个点的点集显然满足要求，假设对 $n \geqslant 2$，点集 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，已构造出来，下面利用 X_n 构造 X_{n+2}

由于 X_n 满足(i)，(ii)两个要求，对 $k = 1,2,\cdots,n$ 有直线 l_k 恰含 X_n 中 k 个点，因直线 l_k 只有有限条，且 X_n 中只包含有限个点，所以可取一条直线 l，它不与任一条 l_k 平行，也不经过诸 l_k 之间的任一交点或 X_n 中任一点，设 l 与 l_k 交于 p_k 点($k = 1,2,\cdots,n$). 再取 p_{n+1}, p_{n+2} 为 l 上与 $p_1,\cdots,p_n$ 不同的两点，将点 $p_1,\cdots,p_{n+1},p_{n+2}$ 与 X_n 中的点并在一起，便可作为 X_{n+2}

首先，直线 l_k 与 X_{n+2} 恰好交于 $k+1$ 个点($k = 1,\cdots,n$)，直线 l 恰与其交于 $n+2$ 个点(即上述的 $p_1,p_2,\cdots,p_{n+2}$). 自然，总可以找一条直线，它与 X_{n+2} 只交于一点，即对于 X_{n+2} 要求(ii)得以满足，另一方面，X_{n+2} 所包含的点数等于 X_n 中的点数加上 $n+2$，由归纳假设，这是

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right] + n + 2 = \left[\frac{n+3}{2}\right]\left[\frac{n+4}{2}\right],$$

即 X_{n+2} 也符合要求(i)，证毕.

在稍复杂的问题中，构造法需要用到数论等知识，构造的原理不是很明显，这时就需要给出引理，这引理是"构造"的直接根据.

例 14 是否存在一个实数 L，使得，如果 m 是大于 L 的整数，则 $m \times n$ 矩形可表为若干 4×6 与 5×7 的矩形之并，且任何两个小矩形至多只在边界上相交？

解：存在，首先需要一个引理.

引理 如果 a,b 是正整数，则存在数 L_0，使得任何比 L_0 大的 (a,b)（a 与 b 的最大公约数）的倍数，都可表为 $ra + sb$，其中 r,s 是非负整数.

引理的证明：先假定 $(a,b) = 1$，则 $0,a,2a,\cdots,(b-1)a$ 是模 b 的完全剩余类. 于是，对任何大于 $(b-1)a-1$ 的整数 k，都有某个 $q \geqslant 0$，使 $k - qb = ja, j = 0,1,2,\cdots,b-1$. 故引理成立.

一般地，由于 $\frac{a}{(a,b)}$ 与 $\frac{b}{(a,b)}$ 互质，由上述结果知对某个 L_1，任何大于 L_1 的整数，都可表为 $\frac{ra}{(a,b)} + \frac{sb}{(a,b)}$，把有关的量都乘以 (a,b)，便可证明引理.

为解答本题，我们先构造 20×6 与 20×7 的矩形，由引理知，对充分大的 n，$20\times n$ 矩形可由若干这样的矩形构成，然后，再构造 35×5 与 35×7 的矩形，进而可对充分大的 n，由它们构造出 $35\times n$ 的矩形，然后再构造 42×4 与 42×5 的矩形，以及对充分大的 n，构造 $42\times n$ 的矩形.

由于 $(20,35) = 5$，存在 5 的倍数 m_0 与 42 互值，这一点与充分大的 n 无关. 由此，可构造 $m_0\times n$ 矩形，最后，由于 $(m_0,42) = 1$，可以形成所有的 $m\times n$ 矩形，只要 m,n 充分大.

构造反例也是数学中的重要内容，为了能指出一个命题不真，常用的办法是举出一个满足命题条件但使其结论不成立的例子. 由于 A 与 $\overline{A}$（A 的否定命题）有且只有一个为真，因此，构造 A 的反例就等价于用构造法证明 $\overline{A}$

例 15 证明或否定命题：如果平面上有 12 个点，其中任意两点之间的距离不超过 3，则从 12 个点中可选出 4 点，使得这 4 点中任意两点的距离都不超过 2.

解：这个命题不正确，我们举一个反例，即用构造法证明下述命题：

平面上存在 12 个点，其中任意两点的距离不超过 3，并且从这 12 个点任意选出的 4 点中必有两点，它们的距离大于 2.

在直径为 3 的圆周上依次取点 $A_1, A_2, \cdots, A_{12}$，使得这些点是该圆内接正十二边形的顶点. 显然，对任意的 $i \neq j, 1 \leqslant i,j \leqslant 12$，线段 A_iA_j 不超过 3（圆的直径）. 此时，$A_1A_4A_7A_{10}$ 是圆内正方形，不难得知

$$A_1A_2 < A_1A_3 < 2 < \frac{3}{\sqrt{2}} = A_1A_4 < A_1A_5 < \cdots < A_1A_7 = 3$$

从而，在 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任取 4 个点中必有两点，它们之间的距离不小于

$$A_1A_4 = \frac{3}{\sqrt{2}} > 2$$

于是，上述 12 个点符合我们要求.

借助于代数工具和几何工具分别论证或解答的有关例题如下.

例 16　直角坐标系中，若一个圆上有三个有理点，则圆周上有无穷个有理点.

证法一：几何法.

记圆的半径为 r，圆上三个有理点为 A,B,C，作出以 A 为中心，半径为 r 的反演变换(即对任一点 M)，在射线 AM 上取一点 M'，使得 $AM \cdot AM' = r^2$，M' 称为 M 的反演). 设有理点 B,C 的反演为 B'、C'，则易知圆在这个反演下成为通过 B'、C' 的直线，由于 $AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = r^2$，并且 r^2 为有理数，故 B'、C' 的横、纵坐标都是有理数，即所说的直线上有两个有理点 B'、C'，从而有无穷多个有理点，进而推知圆上也有无穷多个有理点.

【注】　反演有许多美妙的性质，是极其有用的几何变换，在上述解法中，反演，将我们的问题化归为一个显然的事情：若一条直线上有两个有理点，则有无穷多个有理点，这正是问题的实质.

证法二：

从圆上有三个有理点可知，其圆心为有理点，作平移，可设此圆的圆心在原点(0,0)，即它的方程为

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{*}$$

圆上仍有三个有理点，我们证明，若圆(*)上包含有一个有理点(a,b)，则包含了无穷多个. 实际上，在恒等式

$$(x_1{}^2 + y_1{}^2)(x_2{}^2 + y_2{}^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

中取 $x_1 = a, y_1 = b, x_2 = \dfrac{2n}{n^2+1}, y_2 = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$，得到(注意 $a^2 + b^2 = r^2$)

$$\left(\frac{2an + (n^2-1)b}{n^2+1}\right)^2 + \left(\frac{(n^2-1)a - 2nb}{n^2+1}\right)^2 = r^2$$

于是，对任意正整数 n，点(x,y) 都是圆

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

上的有理点，其中

$$x = \frac{2an + (n^2-1)b}{n^2+1}, y = \frac{(n^2-1)a - 2bn}{n^2+1}$$

这显然包含了无穷多个互不相同的有理点.

例 17　将正 n 边形的顶点染成若干种颜色，使得同一种颜色的顶点构成一个正多边形，证明，在这些正多边形中必有两个全等.

证法一：设正 n 边形的顶点为 $A_1,\cdots,A_n$，其中心为 P，假设染成 k 种颜色，且顶点同色的正多边形中没有全等的，记它们分别是正 $m = m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ 边形.

考虑旋转 f，它定义在正 n 边形的顶点集合上，将顶点 A_t 变为顶点 A_{mt}，即 $f(A_t) = A_{mt}(1 \leqslant t \leqslant n)$，这里约定 $A_{p+qn} = A_p$(p,q 为整数)，设正 m 边形的顶点为 $A_{l+i\cdot\frac{n}{m}}$($i = 0,1,\cdots,m-1$，l 是某个整数)，则 $f(A_{l+i\cdot\frac{n}{m}}) = A_{ml+in} = A_{ml}$，即 m 个顶点由 f 都变为一个点 A_{ml}. 因此向量和 $\sum\limits_{i=1}^{m-l}\overrightarrow{pf(A_{l+i\cdot\frac{n}{m}})} = m\overrightarrow{PA_{ml}}$ 不为零.

另一方面，若 A_i,A_j 是一个边数大于 m 的正多边形的相邻顶点，则 $\angle A_{mi}PA_{mj} = m\angle A_iPA_j$(用复数表示顶点，这显而易见). 因 $\angle A_iPA_j < \dfrac{2\pi}{m}$，故 $\angle A_{mi}PA_{mj} < 2\pi$. 故 A_{mi} 与 A_{mj} 不会重合. 这样，边数大于 m 的正多边形的顶点，在所说的旋转下仍是某个正多边形的顶点(不会蜕化为同一点). 因此，沿 n 边形所有顶点的向量 $\overrightarrow{Pf(A_i)}$ 之和等于零. 同样，沿 m_2 边形，$\cdots$，m_k 边形的顶点的类似向量之和都等于零. 又易见，正 n 边形的每个顶点是且仅是某一个正 $m_t(1 \leqslant t \leqslant k)$ 边形的顶点，由此推出沿正 m 边形的顶点的向量之和也为零，与已得的结论矛盾，证毕.

证法二：为方便起见，将正 n 边形的顶点顺次记为 $0,1,\cdots,n-1$. 设染了 k 种颜色，第 t 种颜色的顶点构成正 m_t 边形，则 m_t 整除 n. 设 $m_t' = \dfrac{n}{m_t}$，这 m_t 边形的顶点可记为 $a_t + jm_t'$($j = 0,1,\cdots,m_t-1$)，a_t 为某个整数，易见

$$\{0,1,\cdots,n-1\}=\bigcup_{t=1}^{k}\{a_t+jm_t' \mid j=0,1,\cdots,m_t-1\}$$

并且右边的各个集合互不相交,所以

$$1+x+\cdots+x^{n-1}=\sum_{t=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_t-1}X^{a_t+jm_t'}$$

将上式变形为

$$\frac{1-x^n}{1-x}=\sum_{t=1}^{k}\frac{x^{a_t}(1-x^n)}{1-x^{m_t'}}$$

即$$\frac{1}{1-x}=\sum_{t=1}^{k}\frac{x^{a_t}}{1-x^{m_t'}} \qquad (\triangle)$$

如果结论不成立,则 $m_1,\cdots,m_k$ 互不相同,所以 $m_1',m_2',\cdots,m_k'$ 也互不相同,不妨设 $1<m_t'<\cdots<m'_1$.令 $X=re^{\frac{2\pi R}{m_i}}$,$r\to 1^-$,则($\triangle$) 式右边的$\frac{x^{a_1}}{1-x^{m_1'}}\to\infty$,而其余各项及($\triangle$) 的左边均保持有界,矛盾.

方法的便通例题如下.

例 18 (第 42 届 IMO 预选题) 定义一个"K-团" 为一个 K 个人的集合,使得他们中的每一对都互相认识,在某次集会上,每两个"3-团" 中至少有一个人是公共的,且不存在"5-团",证明:在这次集会上存在两个(或更少的) 人,当他们离开后,不再有"3-团" 出现.

本题涉及到图论的基本知识.

证明:为方便起见,我们来用图论的语言,将集会上的每个人用一个点表示,如果两个人相互认识,则在两个顶点之间连一条边,于是,一个"m-团" 对应着一个 m 个点的集合,每两个顶点之间连一条边,换言之,这样一个"m-团" 存在,就意味着所绘图中包含一个有 m 个点的子图为完全图 k_m,特别地,一个"3-团" 对应着一个三角形(k_3).我们需要证明:

在任意一个图 G 中,任意两个三角形至少有一个顶点是公共点,且不存在 k_5,则存在两个(或更少的) 点,移去这些点之后,不再有三角形出现.

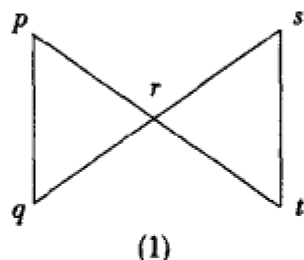
设 G 是满足上述条件的一个图,如果在 G 中最多有一个三角形,结论显然成立.

我们分别讨论两种情况(如图 Ⅱ-6-8-14、图 Ⅱ-6-8-15)

(1) 设 $T_1=\{p,q,r\}$、$T_2=\{r,s,t\}$.如果删去 r,则毁掉了所有的三角形.

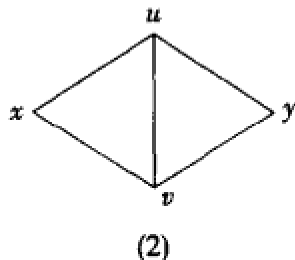
如若不然,有第三个三角形 T_3,当删去 r 后设被毁掉,这个三角形一定与 T_1 和 T_2 均有公共点,则这样的三角形转化为情形(2)(如图 Ⅱ-6-8-15),且 $x=r,u\in T_1,v\in T_2$

(2) 设 $T_1=\{u,v,x\}$,$T_2=\{u,v,y\}$,如果删去 u、v,则毁掉了所有的三角形.



(1)

图 Ⅱ-6-8-14



(2)

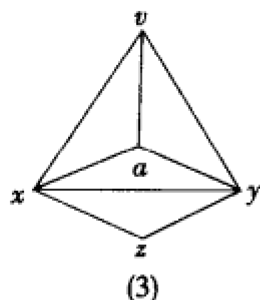
图 Ⅱ-6-8-15

如若不然,则存在某个子 $z\notin\{u,v,x,y\}$,且三角形 $\{x,y,z\}$ 出现.特别地,xy 是一条边,此时 G 包含下列子图(如图 Ⅱ-6-8-16).

我们证明删去 x,y 后,毁掉了所有的三角形.

假设没有全部毁掉,则存在一个三角形 T 与 $\{x,y\}$ 无公共点,因为 T 与 $\{x,y,z\}$ 有一个公共点,则 T 包含 z,同理 T 也包含 u 和 v,于是 $T=\{z,u,v\}$.又因为 G 中没有 k_5,矛盾.

所以,存在两个(或更少的)点,移去之后不再有三角形出现.



(3)

图 Ⅱ-6-8-16

例 19 证明:可以在正 n 边形的顶点上放置不等于零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得对于顶点都是原正 n 边形顶点的任意正 k 边形,放在顶点上的数字之和都是零.

这是一个利用投影来"构造"的例子.

证明:记所有的正 n 边形为 $A_1\cdots A_n$,其中心为 O,过 O 引一条直线,使它不平行于正 n 边形的任一条边,也不经过其任一顶点,以这条直线作为横坐标轴,在顶点 A_i 上放置数 x_i,x_i 等于向量 $\overrightarrow{OA_i}$ 在横轴上的投影,由横轴的选取可见,这些 x_i 均不为 0,且互不相等,此外,熟知对于任一正 k 边形,向量 $\overrightarrow{OA_i}$ 之和为零(向量),这里 A_i 经过正 k 边形的所有顶点,故这些向量在横轴上的投影之和为 0,即正 k 边形顶点上所放置的 x_i 之和为 0.

【评注】 投影方法之特色,读者或许已看出它与数论中同余方法的某些类似之处.同余,即是将问题放在整数集的一个局部(某个完全剩余类)中考虑,这和几何中的投影方法异曲同工,实际上,一个完全剩余类正是全体整数集合的"投影"之集.

例 20 (第 41 届 IMO 试题)设 $n\geqslant 2$ 为正整数,开始时,在一条直线上有 n 只跳蚤,且它们不全在同一点,对任意给定的一个正实数 λ,可以定义如下的一种"移动":

(a) 选取任意两只跳蚤,设它们分别位于点 A 和 B,且 A 位于 B 的左边;

(b) 令位于点 A 的跳蚤跳到该直线上位于点 B 右边的点 C,使得 $\frac{BC}{AB}=\lambda$.

试确定所有可能的正实数 λ,使得对于直线上任意给定的点 M 以及这 n 只跳蚤的任意初始位置,总能够经过有限多次移动之后令所有的跳蚤都位于 M 的右边.

解:要使跳蚤尽可能远地跳向右边,一个合理的策略是在每一个移动中都选取最左边的跳蚤所处的位置作为点 A,最右边的跳蚤所处的位置作点 B.

按照这一策略,假设在 k 次移动之后,这跳蚤之间距离的最大值为 d_k,而任意两只相邻跳蚤之间距离的最小值为 δ_k.显然有:

$$d_k\geqslant(n-1)\delta_k$$

经过第 $(k+1)$ 次移动,会产生一个新的两只相邻跳蚤之间的距离 λd_k.如果这是新的最小值,那么有 $\delta_{k+1}=\lambda d_k$;如果它不是最小值,则显然有 $\delta_{k+1}\geqslant\delta_k$.无论哪种情形,总有

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k}\geqslant\min\left\{1、\frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\}\geqslant\min\{1,(n-1)\lambda\}$$

因此,只要 $\lambda\geqslant\frac{1}{n-1}$,就有 $\delta_{k+1}\geqslant\delta_k$ 对任意 k 都成立,这意味着任意两只相邻跳蚤之间距离的最小值不会减小.

故每次移动之后,最左边的跳蚤所处的位置都以不小于某个正的常数的步伐向右平移.最终,所有的跳蚤都可以跳到任意给定的点 M 的右边.

下面证明:如果 $\lambda<\frac{1}{n-1}$,那么对任意初始位置都存在某个点 M,使得这些跳蚤无法跳到点 M 的右边.

将这些跳蚤的位置表示成实数,考虑任意的一系列移动,令 S_k 为第 k 次移动之后,表示跳蚤所在位置的所有实数之和,再令 ω_k 为这些实数中最大的一个(即最右边的跳蚤的位置).显然有 $S_k\leqslant nW_k$,我们要证明序列 $\{\omega_k\}$ 有界.

在第$(k+1)$次移动时,一只跳蚤从点A跳过点B落在点C,分别用实数a,b,c表示这三点,则$S_{k+1}=S_k+c-a$,根据移动的定义,$c-b=\lambda(b-a)$,进而得到$\lambda(c-a)=(1+\lambda)(c-b)$.于是,$S_{k+1}-S_k=c-a=\frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$

如果$c>w_k$,那么刚跳过来的这只跳蚤占据了新的最右边位置$\omega_{k+1}=c$,再由$b\leqslant\omega_k$,可得

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)\geqslant\frac{1+\lambda}{\lambda}(\omega_{k+1}-\omega_k)$$

如果$c\leqslant\omega_k$,那么有

$$\omega_{k+1}-\omega_k=0,S_{k+1}-S_k=c-a>0$$

故上式仍成立.

考虑下列数列

$z_k=\frac{1+\lambda}{\lambda}\cdot\omega_k-S_k,k=0,1,2,\cdots$

则有$z_{k+1}-z_k\leqslant 0$,即该数列是不升的.

因此,对所有的k总有$z_k\leqslant z_0$

假设$\lambda<\frac{1}{n-1}$,则$1+\lambda>n\lambda$.可以把z_k写成

$z_k=(n+\mu)\omega_k-S_k$,其中$\mu=\frac{1+\lambda}{\lambda}-n>0$.于是得到不等式$z_k=\mu\omega_k+(nw_k-S_k)\geqslant\mu\omega_k$

故对于所有的k,总有$\omega_k\leqslant\frac{z_0}{\mu}$.这意味着最右边跳蚤的位置永远不会超过一个常数,这个常数与n,λ和这些跳蚤的初始位置有关,而与如何移无关.

最终得到结论:所求λ的可能值为所有不小于$\frac{1}{n-1}$的实数.

【评注】 此例在知识上是"距离,策略,递推"数列的综合运用;其解题关键是按照策略,在每一个移动中都选取最左边的跳蚤所处的位置作为点A,最右边的跳蚤所处的位置作为点B.继之,任意两只相邻跳蚤之间的距离的最小值不会减小,接着证明,如果$\lambda<\frac{1}{n-1}$,那么对任意初始位置都存在某个点M,使得这些跳蚤无法跳到点M的右边.

§8.3　针对性训练

A 组

1. 在正1989 边形的顶点中任意取定64 个顶点，证明：必存在以这些点作为顶点的梯形.

2. 边长为1 的正方形内部有一条长度为1000 的不自身相交的折线，证明：存在一条直线，它垂直于正方形的某一条边，并且与折线至少有 500 个交点.

3. 凸四边形的内部取定5 个点，使得这5 个点与凸四边形的顶点（共九个点）中，任何三点都不共线. 证明：从这九个点中可选出五个点，它们构成一个凸五边形的顶点.

4. 证明：任意凸 n 边形能够划分成凸五边形的并. 这里 $n \geqslant 6$.

5. 一个凸 n 边形的顶点都是整点，并且多边形内部和边上没有其它整点，证明 $n = 3$ 或 4.

B 组

1.（1999. 世界城市数学竞赛题）在一张长方形的纸上有一些黑点，现要将这张纸沿直线折几次，折线不穿过任何黑点，然后用针插进折好的纸，使针穿过所有的黑点，而不穿过其它的点，求证在如下两种情况均能成功.

(1) 所有黑点共线.

(2) 只有三个黑点.

2. 将一些整数排在数轴的一切有理点上，求证：可找到这样一个区间，使这区间两个端点上的数之和不大于区间中点上的数的 2 倍.

（第 25 届全俄数学奥林匹克竞赛题）

3.(2000.(第61届)Putnam大学数学竞赛题) 设 B 为 $n(n \geqslant 3)$ 维空间中坐标形如 $(\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1)$ 的点构成的集合,且 B 中不同元素的个数大于 $\frac{2^{n+1}}{n}$. 证明:B 中必有三点,它们为某个正三角形的顶点.

4.(第25届全俄数学奥林匹克竞赛题) n^2 个筹码放在一个无限棋盘的含 $n \times n$ 个小方格的正方形上,每个小方格放一个筹码. 任一筹码越过邻格的筹码跳到一个空格上称为走一步. 这时被越过的筹码从棋盘上取下. 求证:不能走下一步的情况不会在走 $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ 步前发生.

5.(第41届IMO预选题) 设正整数 $\geqslant 4$,由平面上 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 所构成的集合 S 满足:任意三点不共线,任意四点不共圆,设 $a_t(1 \leqslant t \leqslant n)$ 表示包含 P_t 的圆 $P_iP_jP_k$ 的数目,且 $m(s) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,证明:存在依赖于 n 的正整数 $f(n)$,使得 S 中的点是凸 n 边形的顶点的充分必要条件是 $m(s) = f(n)$.

6.(2001.CMO题) 在正 n 边形的每个顶点上各停有1只喜鹊,偶受惊吓,众喜鹊都飞去,一段时间后,它们又都回到这些点上,仍是每个顶点上1只,但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数 n,使得一定存在3只喜鹊,以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形,或同为直角三角形,或同为钝角三角形.

第九章

离散最值与组合优化

§9.1 知识、方法、技能

Ⅰ. 离散最值

1. 近年来，竞赛数学中的最值问题的内容其重点已经转移到离散对象上来了. 具体而言，以素数、整数、点、线、三角形、四边形、圆的集合与子集以及有穷数列等等离散对象为背景，求它们满足某些约束条件的最值. 这类问题称之为离散最值问题. 通常课本中所讲的函数和不等式等常见的方法不再适用. 故这类问题大多是非常规极值问题. 为参赛者的聪明才智开僻了奔腾驰骋的广阔天地.

2. 常用的知识

(1) 设 N 是全体自然数组成的集合，则 N 的子集必有最小数.

(2) 如果一个对象 x 满足：$x \leqslant a$（a 是常数），且等号成立，则 x 的最大值是 a.

同理，对 $x \geqslant a$ 的情况也有类似的结论.

3. 主要方法.

离散最值问题，不仅研究的对象离散，方法也离散，往往因题而异，但总体上可归为“不等式法”.

但应指出，离散最值问题中的不等式法，与连续最值问题中的不等式法大不相同，连续最值问题中使用最多的均值不等式和柯西不等式在离散最值问题中几乎不再使用. 离散最值问题中的不等式法是指：要求解最值问题，归根到底是要建立一个带有等号的不等式，然后再指出等号确实成立.

那么第一步建立一个带有等号的不等式，就需要建立的准确，恰如其份，因此对最值的估计常常是解决问题的关键. 常见的估计最值的方法有：

1. 构造法
2. “特殊”分析
3. 逻辑分析
4. 整体分析
5. 综合分析

于是准确的估计最值，建立合理的不等式.

第二步：通过推导，论证等号成立，论证方法除构造实例外相伴正面推理，反证，抽屉原理，数学归纳，容斥原理等等.

Ⅱ. 组合优化

1. 所谓“组合优化”是指在某些特定条件下，力求获得“最优结果”的一种思想.

2. 常用知识

(1) 组合优化如果把目标限定在数值上，往往就是函数的最值问题，或是一些离散极值问题.

(2) 在设计一些方案时，往往要优化各种可变的量，最后综合得出最佳方案.

3. 主要方法

求解组合优化问题的基本策略是先估界，再构造实例或通过论证说明这个界能达到，在解题过程中，常常用到构造法、反证法、归纳法、极端原理、抽屉原理、估计、分类、数举局部调整等手段.

§9.2 赛题精讲

关于离散最值.

1. 构造法

将离散变量满足的条件尽可能构造出来,运用组合方法作出最值判断,再行证明.

例1 (2000.中国数学奥林匹克)某次考试有5道选择题,每题都有4个不同答案供选择,每人每题恰选择1个答案.在2000份答案中发现存在一个n,使得任何n份答案中都存在4份,其中每两份的答案都至多有3题相同,求n的最小可能值.

【分析】 由于答案情况复杂,使得参赛选手难于找到问题的突破口,较好的处理方法是用字母表示每份答案,使每份答案数组化,构造一个四元数组的抽屉,$\{(1,h,i,j,k),(2,h,i,j,k),(3,h,i,j,k),(4,h,i,j,k)\}$(其中$h,i,j,k=1,2,3,4$),多次利用抽屉原则,得$n\geqslant 25$;然后再举特例说明"="成立即可.

解: n的最小值为25

将每道题的4种答案分别记为1,2,3,4,每份试卷上的答案记为(g,h,i,j,k),其中$g,h,i,j,k\in\{1,2,3,4\}$,令四元组$\{1,h,i,j,k),(2,h,i,j,k),(3,h,i,j,k),(4,h,i,j,k)\}$,$h,i,j,k=1,2,3,4$.

(注,其中"元"是每个数组,四元组指有4个数组)

共得256个四元组.

由于$2000=256\times7+208$,故由抽屉原理知有8份考卷的答案属于同一个四元组,取出这8份考卷后,余下的1992份中仍有8份属于同一个四元组;再取出这8份考卷,余下的1984份中又有8份属于同一个四元组;取出这8份考卷,连同前两次取出的考卷共24份,在这24份考卷中,任何4份中总有两份的答案属于同一个四元组,当然不满足题目要求,所以n的最小可能值$\geqslant 25$.

另一方面,令

$\zeta=\{(g,h,i,j,k)\mid g+h+i+j+k\equiv0(mod\ 4),g,h,i,j,k\in\{1,2,3,4\}\}$,则$|\zeta|=256$,且$\zeta$中任两种答案都至多有3题相同.从$\zeta$中去掉6个元素,当余下的250种答案中的每一种答案恰有8人选用时,共得到2000份考卷其中任何25份答案中,总有4份不相同,由于它们都在ζ中,当然满足题中要求,这表明$n=25$时可满足题目要求.

综上论述可知,n的最小可能值为25

例2 对于介限集A,存在函数$f:N\to A$,具有下述性质:若$i,j\in\mathrm{N}$,且$|i-j|$是素数,则$f(i)\neq f(j)$,问集合A中至少有n个元素?

解: 因为1,3,6,8这四个数中的两个数的差的绝对值均为素,由题意知$f(1),f(3),f(6),f(8)$是A中四个两两不等的元素,从而$|A|\geqslant4$

另一方面,若令$A=\{0,1,2,3\}$,$f:N\to A$的对应关系为:若$x\in\mathrm{N}$,$x=4k+r$,则$f(x)=r$,其中$k\in\mathrm{N}\cup\{0\}$,$r=0,1,2,3$,任取$x,y\in\mathrm{N}$,若$|x-y|$为素数,假设$f(x)=f(y)$,则$x\equiv y(mod\ 4)$,于是$4\mid|x-y|$,这与$|x-y|$是素数矛盾.

故集合A中至少有4个元素.

例3 (2003.中国数学奥林匹克)求出同时满足如下条件的集合ζ的元素个数的最大值.

(1)ζ中的每个元素都是不超过100的正整数;

(2)对于ζ中任意两个不同的元素a,b,都存在ζ中的元素c,使得a与c的最大公约数等于1,并且b与c的最大公约数也等于1;

(3)对于ζ中任意两个不同的元素a,b,都存在ζ中异于a,b的之素d,使得a与d的最大公约数大于1,并且b与d的最大公约数也大于1

【分析】 (1)常规解决离散最值的基本模式为其一完成$n\leqslant a$,其二论证"="成立,但是具体问题

要具体分析，这个例题的第一步我们可构造一个满足条件的集合，并且可算出 ζ 中元素的个数 $=72$，这相当于完成了基本模式的第二步，然后为了说明 72 是所求的最大值，这个例子的第二步是证明集合 ζ 中元素个数不会超过 72. 这相当于基本模式中的第一步. 这样处理同样可达到基本模式中的两步要求.

(2) 解决这个题目有两个关键，其一是构造出满足题目三个条件的集合 ζ；其二是运用条件(2)，(3)证明 ζ 的元素数目不会超过 72.

解：答案是 72

将不超过 100 的每个正整数 n 表成

$n = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot q$

其中 q 是不能被 2,3,5,7,11 整除的正整数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 为非负整数.

我们选取满足条件：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中恰有 1 个或 2 个非零的那些正整数组成集合 S，即 S 中包括：

①50 个偶数 $2,4,6,\cdots\cdots,98,100$，但除去 $2\times3\times5, 2^2\times3\times5, 2\times3^2\times5, 2\times3\times7, 2^2\times3\times7, 2\times5\times7, 2\times3\times11$ 这 7 个数；

②3 的奇数倍：$3\times1, 3\times3, \cdots, 3\times33$ 共 17 个数；

③ 最小素因子为 5 的奇数：$5\times1, 5\times5, 5\times7, 5\times11, 5\times13, 5\times17, 5\times19$ 共 7 个数；

④ 最小素因子为 7 的奇数：$7\times1, 7\times7, 7\times11, 7\times13$ 共 4 个数；

⑤ 素数 11.

从而 ζ 中总共有 $(50-7)+17+7+4+1=72$ 个数

下面证明如此构造的 ζ 满足题述条件.

条件(1) 显然满足.

对于条件(2)，注意在 $[a,b]$ 的素因子中至多出现 2,3,5,7,11 中的 4 个数，记某个未现的素数为 p，显然 $p\in\zeta$，并且

$(p,a)\leqslant(p,[a,b])=1$

$(p,b)\leqslant(p,[a,b])=1$

于是，取 $c=p$ 即可.

对于条件(3)，当 $(a,b)=1$ 时，取 a 的最小素数因子 p 和 b 的最小素因子 q，易见 $p\neq q$，并且 $p,q\in\{2,3,5,7,11\}$，于是，$pq\in\zeta$，并且

$(pq,a)\geqslant p>1, (pq,b)\geqslant q>1$

a,b 互质保证了 pq 异于 a,b，从而，取 $c=pq$ 即可.

当 $(a,b)=e>1$ 时，取 p 为 e 的最小素因子，q 为满足 $q\nmid[a,b]$ 的最小素数，易见 $p\neq q$，并且 $p,q\in\{2,3,5,7,11\}$，于是，$pq\in\zeta$，并且

$(pq,a)\geqslant(p,a)=p>1$

$(pq,b)\geqslant(p,b)=p>1$

$q\nmid[a,b]$ 保证了 pq 异于 a,b，从而，取 $d=pq$ 即可.

下面证明"任意满足题述条件的集合 ζ 的元素数目不会超过 72"

显然，$1\notin\zeta$

对于任意两个大于 10 的质数 p,q. 因为与 p,q 均不互质的数最小是 pq，已大于 100.

据条件(3)知，10 与 100 之间的 21 个质数 $11,13,\cdots,89,97$ 中最多有一个出现在 ζ 中，记除 1 和这 21 个质数外的其余 78 个不超过 100 的自然数构成集合 T，我们断言 T 中至少有 7 个数不在 ζ 中，从而 ζ 中最多有 $78-7+1=72$ 个元素.

(i) 当有某个大于 10 的质数 p 属于 ζ 时，ζ 中所有各数最小素因子只可能是 2,3,5,7 和 p，运用条件(2) 可得出以下结论：

① 若 $7p\in\zeta$，用 $2\times3\times5, 2^2\times3\times5, 2\times3^2\times5$ 与 $7p$ 包括了所有的最小素因子，故由条件(2) 知，$2\times3\times5, 2^2\times3\times5, 2\times3^2\times5\notin\zeta$；若 $7p\notin\zeta$，注意 $2\times7p>100$，而 $p\in\zeta$，故由条件(3) 知 $7\times1, 7\times7, 7\times11, 7\times13\in\zeta$

② 若 $5p \in \zeta$，则 $2\times3\times7, 2^2\times3\times7 \in \zeta$；若 $5p \notin \zeta$，则 $5\times1, 5\times5 \notin \zeta$

③$2\times5\times7$ 与 $3p$ 不同属于 ζ

④$2\times3p$ 与 5×7 不同属于 ζ

⑤ 若 $5p, 7p \notin \zeta$，则 $5\times7 \notin \zeta$

当 $p = 11$ 或 13 时，由 ①、②、③、④ 可分别得出至少有 3,2,1,1 个 T 中的数不属于 ζ，合计 7 个；当 $p = 17$ 或 19 时，由 ①、②、③ 可分别得出至少有 4,2,1 个 T 中的数不属于 ζ，合计 7 个；当 $p > 20$ 时，由 ①、②、③ 分别有至少 4,2,1 个 T 中的数不属于 ζ，合计也是 7 个.

(ii) 如果没有大于 10 的质数属于 ζ，则 ζ 中的最小素因子只可能是 2,3,5,7. 于是，下面 7 对数中的每对都不能同时在 ζ 中出现：

$(3, 2\times5\times7), (5, 2\times3\times7), (7, 2\times3\times5), (2\times3, 5\times7), (2\times5, 3\times7), (2\times7, 3\times5)(2^2\times7, 3^2\times5)$

从而，T 中至少有 7 个数不在 ζ 中.

综上所述，本题的答案为 72

【评注】 本题 ζ 所满足的条件是属于数论的内容，证明所构造的集合 ζ 满足题中条件要用到数论的知识，在证明 ζ 的元素数目不会超过 72 的过程中也用到数论的简单知识. 但又由于本题所求的极值问题在结构上属于组合中的离散极值问题，因此本问题属于"组合数论"问题.

2."特殊"分析

判断问题的一些特殊情形是否满足条件，再估计满足条件的最大(α)值.

例 4 (1990. 中国国家集训队选拔考试题) 平面上任给七点，过其中共圆的四点作圆，问最多能作几个不同的圆?

解：设 AD、BE、CF 是锐角 $\triangle ABC$ 的三条高，H 为垂心(如图 Ⅱ－6－9－1) 则过 A、B、C、D、E、F、H 这七点中的四点作圆，共可作出六个不同的圆，故所求的最大值不小于 6.

下面用反证法来证明所求的最大值就是 6. 如果过七个已知点能作出七个不同的四点圆，则七点中的每点都恰在四个圆上，这是因为

(1) 过两个固定点的圆至多两个；

(2) 过一个固定点的圆至多四个；

(3) 每圆上有四点，七圆上共有 28 个点(包括重复计算)，但由(2) 知每点至多在四个圆上，因而七点中每点都恰在四个圆上.

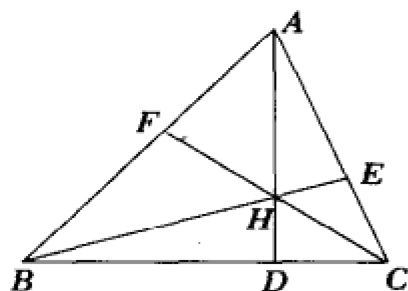


图 Ⅱ－6－9－1

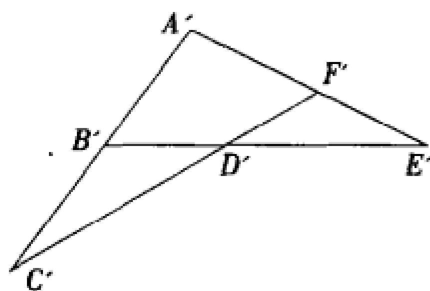


图 Ⅱ－6－9－2

设七点为 A, B, C, D, E, F, G，以 G 为中心进行反演变换，变为圆，设除 G 外其余六点的像点分别为 A', B', C', D', E', F'(图 Ⅱ－6－9－2) 这六点中的任何四个点要共圆，四点中的任何三点都不能共线，故三个四点圆只能是 $A'B'D'F'$，$B'C'E'F'$ 和 $A'C'D'E'$，但 D' 在 $\triangle A'C'E'$ 之内，当然不能共圆，矛盾. 从而证明了所求的最大值为 6.

例 5 (第 21 届俄罗斯数学竞赛) 开头 100 个自然数按某种顺序排列，然后按每连续三项计算和数，得到 98 个和数，其中为奇数的和数最多有几个?

解:首先,98 个和数不可能都是奇数,否则,这 100 个自然数的排列顺序只能是下列情况之一:

(1) 奇奇奇奇 …;

(2) 奇偶偶奇偶偶 …;

(3) 偶奇偶偶奇偶 …;

(4) 偶偶奇偶偶奇 ….

这四种情况与 100 个连续自然数矛盾,而把 1 ~ 100 个自然数按如下顺序排列:

$\underbrace{奇偶偶奇偶偶\cdots\cdots奇偶偶}_{25个奇数50个偶数}\underbrace{奇奇\cdots\cdots奇}_{25个奇数}$

可得到 97 个奇数,故和数为奇数的最多为 97 个.

3. 逻辑分析

对组合最值问题的条件和结论进行逻辑分析,估计并构造最大(小)值的情形.

例 6 (1996.上海市高中数学竞赛)平面上给定 n 个点 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n (n \geqslant 3)$,任意三点不共线,由其中 k 个点对确定 k 条直线(即过 k 个点对中的每一点对作一条直线),使这 k 条直线不相交成三个顶点都是给定点的三角形,求 k 的最大值.

解:设过点对 A_1, A_2 的直线为 l,则 A_1, A_2 不能同时与其余 $n-2$ 个点中的任意一点连结,即过 A_1 或 A_2 的直线至多只有 $n-1$ 条(包括 l)

同理,对 $A_3, A_4, \cdots, A_n$ 这 $n-2$ 个点而言,过 A_3 或 A_4 的直线至多只有 $n-3$ 条,…… 所以

$$k \leqslant (n-1)+(n-3)+\cdots$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4} & (n \text{ 为偶数})\\[2mm] \dfrac{n^2-1}{4} & (n \text{ 为奇数})\end{cases}$$

另一方面,把 n 个豆分成两组:n 为偶数时,每组 $\frac{n}{2}$ 个点;n 为奇数时,一组 $\frac{n-1}{2}$ 个点,另一组 $\frac{n+1}{2}$ 个点.然后,把第一组的每一点与第二组的任一点连成的 $\frac{n^2}{4}$ 或 $\frac{n^2-1}{4}$ 条直线,这些直线显然不相交成三个顶点都是给定点的三角形.

$$故\quad k_{\max}=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4} & (n \text{ 为偶数})\\[2mm] \dfrac{n^2-1}{4} & (n \text{ 为奇数})\end{cases}$$

例 7 (1993.中国数学奥林匹克)10 人到书店买书,已知

(1) 每人都买了三种书;

(2) 任何两人所买的书中,都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书最少有几个人购买?

解:设其中甲买了三种书,因他与其余 9 人中每人都至少有一种书相同,所以,甲的三种书中,购买人数最多的一种书不少于 4 人购买.

若购买人数最多的一种书有 4 人购买,则甲的三种书均为 4 人购买,其他 9 人的每种书也均有 4 人购买.因而,10 人买书的总数是 4 的倍数,即 $4 \mid 30$,矛盾,于是,购买人数最多的一种书至少有 5 人购买.

考虑下面的购买方式:

$\{B_1,B_2,B_3\},\{B_1,B_2,B_3\},\{B_2,B_3;B_5\},\{B_1,B_3,B_6\},\{B_1,B_4,B_5\},\{B_2,B_4,B_6\},\{B_3,B_4,B_5\},\{B_1,B_5,B_6\}\{B_2,B_5,B_6\},\{B_3,B_4,B_6\}$

可知,购买人数最多的一种书最少有 5 人购买.

例 8 (1999.第 40 届 IMO 预选题)将1 到 n^2 这 n^2 个自然数随机地排列在 $n \times n$ 的正方形方格内,其中 $n \geqslant 2$,对于在同一行或同一列中的任一对数,计算较大的数与较小的数之比,这 $n^2(n-1)$ 个分数中的最小值称为这种排列的"特征值",求"特征值"的最大值.

解:首先证明,对任一排列 A,其特征值 $C(A)\leqslant\frac{n+1}{n}$.如果最大的 n 个自然数 $n^2-n+1,n^2-n+2,\cdots,n^2-1,n^2$ 中有两个在某行或某列中,则

$$C(A)\leqslant\frac{a}{b}\leqslant\frac{n^2}{n^2-n+1}<\frac{n+1}{n}$$

其中 a,b 分别是这行或列中的最大数,且 $a>b$,如果所有这 n 个大数在不同的行和列中,当它们中的一个数与 n^2-n 在同一行或同一列中时,有

$$C(A)\leqslant\frac{a}{n^2-n}\leqslant\frac{n^2-1}{n^2-n}=\frac{n+1}{n}$$

其中 a 为与 n^2-n 在同一行.同一列中的两个最大数中的较小的一个.

对于排列

$$a_{ij}=\begin{cases}i+n(j-i-1) & 当\ i<j\ 时\\ i+n(n-i+j-1) & 当\ i\geqslant j\ 时\end{cases}$$

则 $C(A)=\frac{n+1}{n}$

事实上,在同一行的任意两个数的差是 n 的倍数,所以

$$\frac{a_{ik}}{a_{ij}}=\frac{a_{ij}+hn}{a_{ij}}\geqslant\frac{a_{ij}+n}{a_{ij}}=1+\frac{n}{a_{ij}}\geqslant1+\frac{n}{n^2-n}=\frac{n^2}{n^2-n}>\frac{n+1}{n}$$

在第一列,可得公差为 $d=n-1$ 的等差数列

$n\leqslant(n-1)+n\leqslant(n-1)+2n\leqslant\cdots\leqslant2+(n-2)n\leqslant1+(n-1)n$

于是,可得

$$\frac{a_{i_1}}{a_{k_1}}=\frac{1+id}{1+kd}\geqslant\frac{1+nd}{1+(n-1)d}=\frac{n^2-n+1}{n^2-2n+2}\geqslant\frac{n+1}{n}$$

当 $n=2$ 时,最后的一个等号成立.

在等 $j=2,\cdots,n-1$ 列,从小到大排列为

$j-1,j-2+n,j-3+2n,\cdots,1+(j-2)n$

$n+(j-1)n,\cdots,j+(n-1)n$

其中前 $j-1$ 项为公差为 $d=n-1$ 的等差数列,后 $n-j+1$ 项仍为公差为 $d=n-1$ 的等差数列,第 j 项与第 $j-1$ 项的差为 $2n-1$.于是,可得

$$\frac{a_{ij}}{a_{kj}}\geqslant\frac{j+(n-1)n}{j+1+(n-2)n}\geqslant\frac{n+1}{n}$$

当 $j=n-1$ 时,最后的一个等号成立.

在第 n 列,当 $n\geqslant3$ 时,$\frac{a_{in}}{a_{kn}}\geqslant\frac{n-1}{n-2}>\frac{n+1}{n}$

因此 $C(A)=\frac{n+1}{n}$

4. 整体分析

根据离散最值问题的结构,从整体上分析满足题目条件必须达到的状态,再估计或构造最大(小)值的情形.

例9 (1997.上海市高中数学竞赛)设 $\zeta=\{1,2,3,4\}$,n 项的数列:$q_1,q_2,\cdots,q_n$ 有下列性质,对于 ζ 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为 $|B|$),在该数列中有相邻的 $|B|$ 项恰好组成集合 B,求 n 的最小值.

解:首先,ζ 中的每个数在数列 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 中至少出现2次,否则,由于含某个数的二元子集共有3个,但在数列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法,因此 $n\geqslant8$

又8项数列:3,1,2,3,4,1,2,4 恰好满足条件,故 n 的最小值为8

例10 (1997.全国高中数学联赛)在 100×25 的长方形表格中每一格填入一个非负实数,第 i 行第

j 列填入的数为 x_{ij}，记为表 1，然后，将表 1 每列中的数按由大到小的次序从上到下重新排列为 $x_{1j}' \geqslant x_{2j}' \geqslant \cdots \geqslant x_{100j}'$，记为表 2

求最小的自然数 k，使得只要表 1 中填入的数满足 $\sum_{j=1}^{25} {}_{ij}x \leqslant 1(i = 1,2,\cdots,100)$，则当 $i \geqslant k$ 时，在表 2 中就能保证：$\sum_{j=1}^{25} x_{ij}' \leqslant 1$ 成立.

解：首先，考虑表 1 中有一行 $x_{r_1}, x_{r_2}, \cdots, x_{r_{25}}$ 必在表 2 中前几项，因为 $100 \times 24 = 2400$，而 $97 \times 25 = 2425$，可知，表 1 中必有一行在表 2 的前 97 项出现.

所以，当 $i \geqslant 97$ 时，$x_{ij}' \leqslant x_{97j}' \leqslant x_{ij}'(j = 1,2,\cdots,25)$

故当 $i \geqslant 97$，$\sum_{j=1}^{25} x_{ij}' \leqslant \sum_{j=1}^{25} x_{rj} \leqslant 1$

另一方面，取

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & (4(j-1)+1 \leqslant j \leqslant 4j) \\ \dfrac{1}{24} & (\text{其余的 } i) \end{cases}$$

$(j = 1,2,\cdots,25)$，这时 $\sum_{j=1}^{25} x_{ij} = 1(i = 1,2,\cdots,100)$

重排后 $x_{ij}' = \begin{cases} \dfrac{1}{24} & (1 \leqslant i \leqslant 96, j = 1,2,\cdots 25) \\ 0 & (97 \leqslant i \leqslant 100) \end{cases}$

有 $\sum_{j=1}^{25} x_{ij}' = 25 \times \dfrac{1}{24} > 1(1 \leqslant i \leqslant 96)$

故　$k \geqslant 97$，即 k 的最小值为 97

5. 综合分析

解决离散最值问题，往往需要多种策略综合运用，才能对最值作出准确判断.

例 11　(1991. 第 32 届 IMO) 设 $S = \{1,2,3,\cdots,280\}$，求最小的自然数 n，使得 S 的每个有 n 个元素的子集都含有 5 个两两互素的数.

【分析】　在完成第一步 $n \geqslant a$，即对 n 的最小值 a 作出估计判断的问题上，可首先从 2,3,5,7 的倍数集合入手，构造四个倍数集，再根据容斥原理和抽屉原理，得 $a = 217$；在第二步证明等号成立的问题上，要构造使得其中每两个元素都互素的六个集合，再利用抽屉原理，证明 217 个元素的子集中都含有 5 个两两互素的数，即说明等号成立，从而解决问题.

解：设 $A_1 = \{k \mid k \in \zeta, 2 \mid k\}$

$A_2 = \{k \mid k \in \zeta, 3 \mid k\}$

$A_3 = \{k \mid k \in \zeta, 5 \mid k\}$

$A_4 = \{k \mid k \in \zeta, 7 \mid k\}$

则　$|A_1| = \left[\dfrac{280}{2}\right] = 140$　　$|A_2| = \left[\dfrac{280}{3}\right] = 93$

$|A_3| = \left[\dfrac{280}{5}\right] = 56$　　$|A_4| = \left[\dfrac{280}{7}\right] = 40$

$|A_1 \cap A_2| = \left[\dfrac{280}{2 \times 3}\right] = 46$　　$|A_1 \cap A_3| = \left[\dfrac{280}{2 \times 5}\right] = 28$

$|A_1 \cap A_4| = 20$，$|A_2 \cap A_3| = 18$，$|A_2 \cap A_4| = 13$

$|A_3 \cap A_4| = 8$　　$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\dfrac{280}{2 \times 3 \times 5}\right] = 9$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 6$，$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 2$，

$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 2$，$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$

由容斥原理,知

$$|A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$$
$$= (140 + 93 + 56 + 40) - (46 + 86 + 20 + 18 + 13 + 8) + (9 + 6 + 4 + 2) - 1$$
$$= 216$$

对于 A 中任意5个元素,根据抽屉原理,必有两个元素属于同一个 $A_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$. 这两个元素不互素,故 $n > 216$,即 $n \geqslant 7$

另一方面,令

$B_1 = \{1\} \cup \{\zeta$ 中的素数$\}$

$B_2 = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2\}$

$B_3 = \{2 \times 131, 3 \times 89, 5 \times 53, 7 \times 37, 11 \times 23, 13 \times 19\}$

$B_4 = \{2 \times 217, 3 \times 83, 5 \times 47, 7 \times 31, 11 \times 19, 13 \times 17\}$

$B_5 = \{2 \times 113, 3 \times 79, 5 \times 43, 7 \times 29, 11 \times 7\}$

$B_6 = \{2 \times 109, 3 \times 73, 5 \times 41, 7 \times 23, 11 \times 13\}$

显然 $|B_1| = 60$,令 $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6$

则 $|B| = 60 + 6 + 6 + 6 + 5 + 5 = 88$

于是 $|S - B| = 192$

在 ζ 中任取217个元素,则至少有 $217 - 192 = 25$ 个元素属于 B,这25个元素中至少有 $\left[\frac{25}{6}\right] + 1 = 5$ 个元素属于某个 $B_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$,而 B_i 中的元素两两互素,即 ζ 中每个有217个元素的子集都含有5个两两互素的数.

综上可知,n 的最小值是217

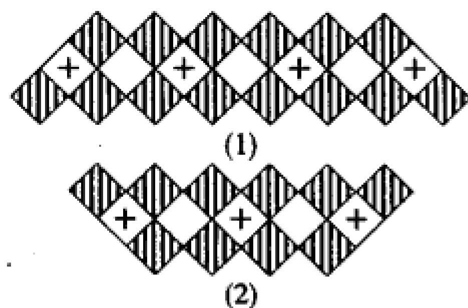
例12 (1999.第40届IMO试题3)设 n 是一个固定的正偶数,考虑一块 $n \times n$ 的正方板,它被分成 n^2 个单位正方格,板上两个不同的正方格如果有一条公共边,就称它们为相邻的.将板上 N 个单位正方格作标记,使得板上的任意正方格(作上标记的或者设有作标记的)都与至少一个作上标记的正方格相邻.确定 N 的最小值.

解:设 $n = 2k$,首先将正方板黑白相间地涂成像国际象棋盘那样,设 $f(n)$ 为所求的 N 的最小值,$f_w(n)$ 为必须作上标记的白格子的最小数目,使得任一黑格子都有一个作上标记的白格子与之相邻.同样地,定义 $f_b(n)$ 为必须作上标记的黑格子的最小数目,使得任一白格子都有一个作上标记的黑格子与之相邻.由于 n 为偶数,"棋盘"是对称的,故有

$$f_w(n) = f_b(n)$$
$$f(n) = f_w(n) + f_b(n)$$

为方便起见,将"棋盘"按照最长的黑格子对角线水平放置,则各行黑格子的数目分别为 $2, 4, \cdots, 2k, \cdots, 4, 2$

在含有 $4i - 2$ 个黑格子的那行下面,将奇数位置的白格子作上标记,当该行在对角线上方时,共有 $2i$ 个白格子作上了标记(见图Ⅱ-6-9-3(1))而当该行在对角线下方时,共有 $2i - 1$ 个白格子作上了标记(见图Ⅱ-6-9-3(2)),因而作上了标记的白格子共有



图Ⅱ-6-9-3

$2 + 4 + \cdots + k + \cdots + 3 + 1 = \frac{k(k+1)}{2}$(个)易见这时每个黑格子都与一个作上标记的白格子相邻,故得

$$f_w(n) \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$$

考虑这 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个作上标记的白格子,它们中的任意两个没有相邻的公共黑格子,所以,至少还需要将 $\frac{k(k+1)}{2}$ 个黑格子作上标记,以保证这些白格子中的每一个都有一个作上标记的黑格子与之相

邻.从而

$$f_b(n) \geqslant \frac{k(k+1)}{2}$$

故 $f_w(n) = f_b(n) = \dfrac{k(k+2)}{2}$

因此　$f(n) = k(k+1)$

关于组合优化我们给出如下两个例题.

例 13　(1996.中国数学冬令营)8位歌手参加艺术节,准备为他们安排 m 次演出,每次由其中4位登台表演,要求8位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多,请设计一种方案,使得演出的次数 m 最少.

【分析】　这种类型的题通常是通过各种手段确定 m 的范围,再构造出满足题意的最小 m 的方案.

解:设任意两位歌手都同时演出 r 次,有

$6m = mc_4^2 = rc_8^2 = 28r$

$3m = 14r$

由此可知 $3 \mid r$,因而 $r \geqslant 3, m \geqslant 14$

下面构造一种演出程序,说明 $m = 14$ 是可实现的:

$\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}$

$\{1,2,5,6\},\{3,4,7,8\}$

$\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\}$

$\{1,3,5,7\},\{4,2,6,8\}$

$\{1,3,6,8\},\{1,4,6,7\}$

$\{2,3,5,8\}$

可见,满足条件的演出的最小场数是14.

例 14　A、B、C 三国进行围棋擂台赛,每队9人,规则如下:每场由两队各出1人比赛,胜者守擂,负者被淘汰,并由另一队派1人攻擂,首先由 A,B 两队各派1人开始比赛并依次进行下去,若有某队9人已全部被淘汰,则剩下的两队继续比赛,直到又有一队全部被淘汰为止,最后一场比赛的胜者所在队为冠军队.回答以下问题并说明理由:

(1) 冠军队最少胜多少场?

(2) 如果比赛结束时,冠军队胜了11场,那么整个比赛最少进行多少场?

【分析】　由于 C 队最后出场,则 C 队获冠军可少胜一场,则应让 C 队成为冠军队,题目两问均要求所胜场数的最小值,即设计出最有利于 C 队获胜的情况即可.

解:(1)冠军队最后获胜时,另两队的18人已全部被淘汰出局,由于 C 队最后出场,因而 C 队获冠军时可以少胜一场,所以冠军队应是 C 队.

为使 C 队胜场最少,需要 A、B 队尽可能多地互相淘汰出局.

按比赛程序可知,A、B 两队互赛淘汰出局的每相邻两人之间必有1名 C 队成员被淘汰出局.又由于 C 队至多被淘汰8人,故 A、B 两队互赛淘汰出局的人数至多9人,而共需要淘汰 A、B 队的18人,所以 C 队至少胜9场.

另一方面,如果 A_1 战胜 $B_1, C_1, B_2, C_2, \cdots\cdots, B_8, C_8, B_9$,接着 C_9 全胜 A 队9人,则 C 队获冠军且恰胜9场.

综上可知,冠军队最少胜9场.

(2) 冠军队共胜11场,则 A、B 两队的18人中有11人负于冠军队成员,而剩下的7人则是 A、B 互赛而淘汰出局的,从而 C 队至少有6人被淘汰出局,至少共赛 $11 + 7 + 6 = 24$ 场比赛.

另一方面,如果 A_1 依次战胜 $B_1, C_1, B_2, C_2, \cdots\cdots, B_6, C_6, B_7$,然后 C_7 依次战胜 $A_1, B_8, A_2, B_9, A_3, A_4, \cdots\cdots, A_9$,则 C 队共胜11场取得冠军,而整个比赛共赛了24场.

综上可知,整个比赛最少进行24场.

§9.3 针对性训练

A组

1.(1991.中国数学奥林匹克题3)地上有100只小鸟在啄食,其中任意5只鸟中至少有4只在一个圆周上,问有鸟最多的一个圆圈上最少有几只鸟?

2.(第三十三届(1992年)国际数学奥林匹克题3,本题由中国提供)给定空间中的9个点,其中任何4点都不共面,在每一对点都连着一条线段,试求出最小的 n 值,使得将其中任意 n 条线段中的每一条任意地染为红、蓝二色之一,在这几条线段的集合中都必然包含有一个各边同色的三角形.

3.(1993.中国数学奥林匹克(第八届数学冬令营)题5)10人到书店买书,如果已知

(1)每人都买了三本书.

(2)任二人所买书中都至少有一本相同,问最受欢迎的书(购买人数最多者)最少有几人购得?为什么?

4.(第三届(1993年)澳门数学奥林匹克第三轮题5)某市发出车牌号码均由6个数字(从0到9)组成,但要求任意2个车牌至少有2位不同(如车牌038471和030471不能同时使用).试求该市最多能发出多少个不同车牌并证明.

5.(第二十五届(1993年)加拿大数学奥林匹克题4)若干个学校参加网球比赛,同一学校之间的选手不比赛,每两个学校的每两个选手都要比赛一场.在两个男孩或两个女孩之间进行的比赛称为单打;一个男孩和一个女孩之间的比赛称为混合单打.男孩的人数与女孩的人数至多相差1.单打的场数和混合单打的场数也至多相差1.问有奇数个选手的学校至多有几个?

6.(第十九届(1993年)全俄数学奥林匹克十年级二试题7)用水平和垂直的直线网把一块正方形黑

板分成边长为1的 n^2 个小方格,试问对于怎样的最大自然数 n,一定可以选出 n 个小方格,使得任意面积不小于 n 的矩形中都至少包含有上面选出的一个小方格?(矩形的边是沿着直线网的)

7. 设 $n,k\in\mathbf{N}$ 且 $k\leqslant n$ 并设 S 是含有 n 个互异实数的集合,设 T 是所有形如 $x_1+x_2+\cdots+x_k$ 的实数的集合,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 是 S 中的 k 个互异元素,求证 T 至少有 $k(n-k)+1$ 个互异的元素.

8.(第十二届(1994年)美国数学邀请赛题12)一块用栅栏围成的长方形的土地大小为24m×52m,一位农业科技人员欲将这块土地从内部分割为一些全等的正方形试验田.要求这块土地全部被划分而且分割成的正方形的边与土地的边界平行.试问若有1994m栅栏,最多可将这块土地分成多少块正方形试验田?

9.(1997.江苏省高中数学竞赛题5)已给集合 $S=\{1,2,3,\cdots,1997\}$, $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 是 S 的子集,具有下述性质:"A 中任意两个不同元素之和不能被117整除."试确定 k 的最大值.并证明你的结论.

10.(1997.日本数学奥林匹克预选赛题2)在平面上画出30条不同的线段时,线段的不同端点数至少有几个?

B组

1. 在 $n\times n$ 方格纸的每一方格中填入一个数,使得每一行和每一列都成等差数列,这样填好数的方格纸称为一个等差密码表,则称这些方格的集合为一把钥匙,该集合中的格子数称为钥匙的长度.

(1) 求最小的自然数 S,使得在 $n\times n$ 方格纸($n\geqslant4$)中任取 S 个方格都组成一把钥匙;

(2) 求最小的自然数 t,使得在 $n\times n$ 方格纸($n\geqslant4$)两条对角线上任取 t 个方格都组成一把钥匙.

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是任意10个两两不同的正整数,它们的和为1995,试求:
$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1$ 的最小值.

3. 21人参加一次考试,试卷共有15道是非题,已知每两人答对的题中至少有1道是相同的.问答对人数最多的题最少有多少人答对?请说明理由.

4. 设 $M=\{2,3,4,\cdots,1000\}$,求最小的自然数 n,使得 M 的任何 n 元子集中都存在3个互不相交的4元子集 S,T,U 满足下列三个条件:

(1) 对于 S 中任何两个元素,大数都是小数的倍数,对于 T 和 U 也同样的性质;

(2) 对任何 $s\in S$ 和 $t\in T$,都有 $(s,t)=1$;

(3) 对任何 $s\in S$ 和 $u\in U$,都有 $(s,u)>1$.

5. 设 $S=\{1,2,\cdots,98\}$,求最小自然数 n,使得 S 的任一 n 元子集中都可以选出10个数,无论怎样将这10个数均分成两组,总有一组中存在一个数与另外4个数都互质,而另一组中总有一个数与另外4个数都不互质.

6. $n(n\geqslant 5)$ 支足球队进行单循环赛,每两队赛一场,胜队得3分,负队得0分,平局各得1分,结果取得倒数第3名的队得分比名次在前面的队都少,比后两名都多;胜场数比名次在前面的队都多,却又比后两名都少,求队数 n 的最小值.

7. 某乒乓球俱乐部组织交流活动,安排符合以下规则的双打赛程表,规则为

(i) 每名参加者至多属于两个对子;

(ii) 任意两个不同对子之间至多进行一次双打.

(iii) 凡表中同属一对的两人就不在任何双打中作为对手相遇.

统计各人参加的双打次数,约定将所有不同的次数组成的集合称为"赛次集".

给定由不同的正整数组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,其中每个数都能被6整除,试问最少必须有多少人参加活动,才可能安排符合上述规则的赛程表,使得相应的赛次集恰为 A.请证明你的结论.

8. 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_{2001})$ 是一个正整数序列,m 为3元子序列 (a_i,a_j,a_k) 的数目,其中 $1\leqslant i<j<k\leqslant 2001$,且满足 $a_j=a_i+1$ 及 $a_k=a_j+1$.考虑所有这样的序列 A,求 m 的最大值.

参考答案

专题一 不等式 习题答案

第一章 重要不等式

A组

1. 提示:右/左再用 $A\cdot G$ 不等式立即得证.

2. 提示(1) 右边用 $A\cdot G$ 不等式,左边用 $a_k\cdot a_{n-k+1}\geqslant a_1a_n$.

提示(2) 利用 $A\cdot G$ 不等式和恒等式.

$$\sum\frac{d}{a_k}=\sum\frac{a_{k+1}}{a_k}-n=\frac{d}{a_1}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\leqslant \text{右边}$$

3. 简证:右边 − 左边 $=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a}-\frac{a_i}{1+a-a_i}\right)-\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-a_i)}{a(1+a-a_i)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a}(1-a_i)\cdot\prod_{j\neq i}(1-a_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-a_i)}{a(1+a-a_i)}[1-(1+a-a_i)\prod_{j\neq i}(1-a_j)]$$

$$\geqslant\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i(1-a_i)}{a(1+a-a_i)}\left[1-\left(\frac{1+a-a_i+n-1-(a-a_i)}{n}\right)^n\right]$$

$$=0$$

4. 提示:利用 $A\cdot G$ 不等式.

5. 提示:注意 $\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}y^2\geqslant 2\cot\alpha\cdot\cot\beta xy$ 等等.

6. 提示:利用柯西不等式.

7. 提示 :设 $a_i-b_i-c_i^2=d_i^2(d_i>0,i=1,2,\cdots,n)$,则由柯西不等式

$$(\sum a_i)(\sum b_i)\geqslant(\sum\sqrt{a_ib_i})^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}\cdot\sqrt{a_jb_j}$$

$$=\sum\sum\sqrt{c_i^2+d_i^2}\cdot\sqrt{c_j^2+d_j^2}\geqslant\sum\sum(c_ic_j+d_id_j)$$

$$=(\sum c_i)^2+(\sum d_i)^2$$

又 $(\sum d_i)^2(\sum d_i^{-2})\geqslant n^3$,故原不等式左边 $\leqslant\frac{n^3}{(\sum d_i)^2}\leqslant\sum d_i^{-2}=$ 右边.

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$

$b_1=b_2=\cdots=b_n;c_1=c_2=\cdots=c_n$

8. 答案:(1)$3(\sqrt{5}-1)$ (2) $\frac{47}{48}$

9. 答案:$(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$

10. 简证:由 $A\cdot C$ 不等式,得

$$\sqrt[m]{\frac{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}}{(\sum_{j=1}^{n}a_{j1})\cdots(\sum_{j=1}^{n}a_{jm})}}\leqslant\frac{1}{m}\left(\frac{a_{i1}}{\sum_{j=1}^{n}a_{j1}}+\cdots+\frac{a_{im}}{\sum_{j=1}^{n}a_{jm}}\right)$$

将以上 n 个不等式相加,得证.

B组

1. 简证:由 A 组 10 题的结论,有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{b_i^m}\cdot\underbrace{(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m})\cdots(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m})}_{k-1\text{个}}\geqslant\sum_{i=1}^{n}(a_i)^k.$$

$$\underbrace{(\sum_{i=1}^{n}b_i)\cdots(\sum_{i=1}^{n}b_i)}_{m\text{个}}\underbrace{\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{个}}\cdots\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\text{个}}}_{k-m-1\text{个}}$$

$$\geqslant(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[k-1]{b_i^m})^{k-1}$$

由以上两式立即得证.

2. 简证:由切比雪夫不等式,得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{b_i^s}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^r\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i^s}$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\cdot n^{1-r}(\sum_{i=1}^{n}a_i)^r\frac{n^{s+1}}{(\sum b_i)^s}$$

$$=n^{1+s-r}\frac{(\sum a_i)^r}{(\sum b_i)^s}$$

3. 提示:仿上题.

4. 提示:利用 A 组题 10 或函数 $f(t)=\ln(e+e^t)$ 的下凸性.

5. 提示:利用切比雪夫不等式.

6. 解:由于 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,所以有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,即 $a^2+b^2-ab\geqslant ab$.

从而得 $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\geqslant ab(a+b)$

同理 $a^3+c^3\geqslant ac(a+c)$,$b^3+c^3\geqslant bc(b+c)$

于是 $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}$

$$\leqslant\frac{1}{ab(a+b)+abc}+\frac{1}{bc(b+c)+abc}+\frac{1}{ca(c+a)+abc}=\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$=\frac{1}{abc}$$

故结论成立.

7. 解:令 $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$,其中 x,y,z 为正实数,则原不等式变为

$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz$

记:$u=x-y+z,v=y-z+x,w=z-x+y$

因为这三个数中的任意两个之和都是正数,所以它们中间最多只有一个是负数.

如果恰有一个是负数,那么 $uvw\leqslant 0<xyz$

不等式得证.

如果这三个数都大于 0,那么由算术平均 — 几何平均不等式可得

$\sqrt{uv}=\sqrt{(x-y+z)(x-z+y)}$

$$\leqslant \frac{1}{2}[(x-y+z)+(y-z+x)]$$
$$=x$$

同理，$\sqrt{vw}\leqslant y$，$\sqrt{wu}\leqslant z$

于是 $uvw\leqslant xyz$，不等式得证.

8. 证明：记 $ab+bc+ca=u$，$abc=v$，则

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2-ux-v, \quad ①$$

（这里记 $\sum f(a)=f(a)+f(b)+f(c)$；$f(a)$ 是关于 a 的代数式）.

注意到 ① 式左边在 $x=a,b,c$ 时均为零，所以

$$a^3-a^2+ua-v=0,b^3-b^2+ub-v=0,c^3-c^2+uc-v=0$$

于是 $\sum a^3=\sum a^2-u\sum a+3v$

$$=(\sum a)^2-2u-u+3v$$
$$=1-3u+3v$$

又对前面的三个式子分别乘以 a,b,c. 可知

$$\sum a^4=\sum a^3-u\sum a^2+v\sum a$$
$$=(1-3u+3v)-u(1-2u)+v$$
$$=1+2u^2-4u+4v$$

利用上述表示可知

$$\sum(1-a^2)^2=\sum a^4-2\sum a^2+3$$
$$=1+2u^2-4u+2v-2(1-2u)+3$$
$$=2+2u^2+4v$$

鉴于 $u\geqslant 0$，$v\geqslant 0$，可知 $\sum(1-a^2)^2\geqslant 2$，等号当且仅当 $u=v=0$ 时取到.

另一方面，$\Pi(1+a)=1+\sum a+\sum ab+abc=2+u+v$，所以，为证右边的不等式，只需证明

$$2u^2+3v\leqslant u \quad ②$$

由于 $u-2u^2=u(1-2u)=u((\sum a)^2-2u)=u\sum a^2$，

而 $u\sum a^2\geqslant \frac{1}{3}u(\sum a)^2=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$$\geqslant \frac{1}{3}(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2})(3\sqrt[3]{abc})=3abc=3v$$

所以 ② 式成立，并且易知 ② 式当且仅当 $a=b=c$ 或者 $u=v=0$ 时成立.

故命题成立，左边等量成立的条件为 a,b,c 中有两个数为 0，而另一个为 1；右边等号成立的条件为 $a=b=c$ 或者 a,b,c 中有两个数为 0，而另一个为 1.

第二章　不等式的基本方法与基本技巧

A 组

1. 提示：左 − 右 $=\sum ab\left[\frac{x}{\sqrt{a(b+c)}}-\frac{y}{\sqrt{c(c+a)}}\right]^2\geqslant 0$

2. 提示：由 $x+y+z=0$ 可设 $xy\geqslant 0$，配方即可得证.

3. 简解：令 $x_i=x_j=a>0$，其它 $x_k=0$ 可得 $a_i+a_j\geqslant 0$. 另一方面，可计算得：

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i)(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i)-(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq 1}(a_i+a_j)x_ix_j\geqslant 0$$

4. 答案:$A \geqslant 0, B \geqslant 0, C \geqslant 0$ 且 $A^2 + B^2 + C^2 \leqslant 2(AB + BC + CA)$

5. 简证:原式等价于 $2(a^2c + b^2a + c^2b) \geqslant a^2b + c^2a + b^2c + 3abc$. 而 $2(a^2c + b^2a + c^2b) - a^2b - c^2a - 3abc = b(a-c)(b-c) + c(a-b)(a-c) - a(b-c)(a-b) \geqslant b(a-b)(b-c) + c(a-b)(b-c) - a(a-b)(b-c) \geqslant 0$.

6. 提示:用反证法可推出 $1 = |1 - f(1) - g(1) + f(1) + g(0) + f(0) + g(1) - f(0) - g(0)| \leqslant |1 - f(1) - g(1)| + |f(1) + g(0)| + |f(0) + g(1)| + |f(0) + g(0)| < 1$,矛盾.

7. 提示:用数学归纳法先证 $n \in \{2^m \mid m \in N\}$ 成立.

8. 提示:先换元,$y_i = x_i^2/x_{i+1}x_{i+2}, i = 1,2,\cdots,n, x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$,再用数学归纳法证明命题:$y_1, y_2, \cdots, y_n > 0$,且 $y_1y_2\cdots y_n = 1$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+y_i} \geqslant 1$.

B组

1. 提示:右边可用数学归纳法.

2. 提示:不妨设$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqslant m$. 先证明对于正整数 $k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 有 $a_k + a_{m+1-k} \geqslant n + 1$(用反证法).

3. 简证:原不等式等价于

$$\sum_{j=1}^{n-1}(a_j - a_{j+1})\left(\frac{1}{a_j+1} - \frac{1}{a_1}\right) < n - 1$$

而 $\left|\sum\limits_{j=1}^{n-1}(a_j - a_{j+1})\left(\frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_1}\right)\right| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \left|\frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_1}\right|$

$\leqslant \sum\limits_{j=1}^{n-1}\left|\frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_1}\right| < \sum\limits_{j=1}^{n-1}\max\left\{\frac{1}{a_{j+1}}, \frac{1}{a_1}\right\} < n - 1$

4. 简证:由条件易证:$y + z > 0, \beta + \gamma > 0$,且左边 $= \frac{(y+z)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (y\gamma - \beta z)^2}{(y+z)(\beta+\gamma)} \geqslant$ 右边

5. 提示:构造数列 $x_n = 2C_n - D_n, y_n = D_n - C_n, n \in \mathbf{N}$

6. 提示:构造二次函数 $f(x) = A \cdot x^2 - 2Bx + c$,其中左边不等式的 $A = \sum a_i^2, B = \sum a_ib_i, C = \sum b_i^2$;右边不等式的 $A = \sum a_i^2, B = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}} + \sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right) \cdot \sum a_ib_i, C = \sum b_i^2$

7. 提示:构造二次函数.

第三章 递推不等式

A组

1. 易证 $P(3)$ 真,设 $P(k)$ 真,则对一切自然数 $m \geqslant 3$,有

$$f_{k+2}(m) = m^{f_{k+1}(m)} > (m^2)^{f_k(m+1)} > [2(m+1)]^{f_k(m+1)} > 2f_{k+1}(m+1)$$

2. 令 $a = 1 + h(h > 0)$,则

$$a^n = (1+n)^n > \frac{1}{2}n(n-1)n^2(n \geqslant 2)$$

即 $\frac{n}{a^n} < \frac{2}{(n-1)n^2}$

3. $a_3 = 1 + \frac{1}{3 \cdot 2} < \frac{5}{3}$. 设对一切 $3 \leqslant i \leqslant k, a_i < \frac{5}{3}$,则

$$a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} + a_k = \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} + \frac{a_{k-2}}{k(k-1)} + a_{k-1} = \cdots$$

$$= \frac{a_{k-1}}{(k+1)k} + \frac{a_{k-2}}{k(k-1)} + \cdots + \frac{a_2}{4 \cdot 3} + a_3$$

$$< \frac{5}{3}\left[\frac{1}{(k+1)k} + \frac{1}{k(k-1)} + \cdots + \frac{1}{5\cdot 4}\right] + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 1$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{5}{4} < \frac{5}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

4. 由 $a_1 = a_0 + \frac{1}{n}{a_0}^2 = \frac{2n+1}{4n}$,易证:$\frac{n+1}{2n+1} < a_1 < \frac{n}{2n-1}$.再由归纳法证明:对一切 $1 \leqslant k \leqslant n$,有 $\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}$

上式令 $k = n$,即得 $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} < \frac{n+1}{n+2} < a_n < 1$

5. 因 $|a_{pq} - qa_p| = |\sum\limits_{i=0}^{q-2} a_{p(q-i)} - a_{p(q-i-1)} - a_p| \leqslant q - 1$

故 $\left|\frac{a_{pq}}{pq} - \frac{a_p}{p}\right| \leqslant \frac{q-1}{pq} < \frac{1}{p}$

同理 $\left|\frac{a_p}{q} - \frac{a_{pq}}{pq}\right| < \frac{1}{q}$

所以 $\left|\frac{a_p}{p} - \frac{a_q}{q}\right| < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

6. 易证:$r^i + r^{n+1-i} \leqslant 1 + r^{n+1}(i = 1,2,\cdots,n+1)$,

所以 $(r + r^n) + (r^2 + r^{n-1}) + \cdots + (r^n + r) \leqslant n(1 + r^{n+1})$

7. 证法一:先让 $n = 1,2$ 时,不等式成立,于是,有

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \cdots + \frac{{a_k}^2}{b_k} + \frac{{a_{k+1}}^2}{b_{k+1}}$$

$$\geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_k} + \frac{{a_{k+1}}^2}{b_{k+1}} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1})^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}}$$

证法二:把下面 n 个易证的不等式

$$\frac{{a_i}^2}{b_i} + \frac{b_i(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2} \geqslant 2\frac{a_i(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

相加即得.

8. 先证明:若 $m \in \mathbf{N}$,则

$$m^{k+1} - (m-1)^{k+1} < (k+1)m^k < (m+1)^{k+1} - m^{k+1}$$

再将上述不等式对 $m = 1,2,\cdots,n$ 求和即得.

B组

1. 记所给和式为 S,$a_{n+1} = a_1$,则

$$S > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 1$$

又 $S + 1 = S + \sum \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} < \sum \frac{a_i}{a_i + a_{i+1}} + \sum \frac{a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}} = n$

取 $a_1 = t, a_2 = t^2, \cdots, a_n = t^n(t > 0)$,求得

$$S = \frac{n-1}{1+t} + \frac{t^{n-1}}{1 + t^{n-1}}$$

由于 $\lim\limits_{t\to 0^+} S(t) = n - 1$,$\lim\limits_{t\to +\infty} S(t) = 1$,所以,不等式是最优的.

2. 当 $n = 4$ 时,有

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geqslant 0$$

不妨设 $x_{n+1} \leqslant x_i(i = 1,2,\cdots,n)$,则由归纳法假设,有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1)$$

又 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1})^2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$

$$= -4x_1x_n + 4x_1x_{n+1} + 4x_nx_{n+1} + 2x_{n+1}(x_2 + \cdots + x_{n-1})$$
$$+ (x_{n+1} - 2x_1)(x_{n+1} - 2x_n)$$
$$\geqslant -4x_1x_n + 4x_1x_{n+1} + 4x_nx_{n+1}$$

两不等式相加得

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1})^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1)$$

3. 对任意 $n \in \mathbf{N}$,必有 $m \in \mathbf{N}$,使 $n \leqslant (m+1)^2 - 1$,所以

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{x_{k^2}}{k^2} + \frac{x_{k^2+1}}{k^2+1} + \cdots + \frac{x_{(k+1)^2-1}}{(k+1)^2-1} \right)$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} (2k+1) \frac{x_{k^2}}{k^2} \leqslant 3 \sum_{k=1}^{m} \frac{x_{k^2}}{k} < 3$$

4. 不妨设$1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$,若 $n = 2m+1$,则

$$S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i - x_j| = 2mx_1 + (2m-2)x_2 + (2m-4)x_3 + \cdots + 2x_m + 0 \cdot x_{m+1} - 2x_{m+2} - 4x_{m+3} - \cdots - 2mx_{2m+1}$$

显然,当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1, x_{m+2} = x_{m+3} = \cdots = x_{2m} = 0$ 时,S 取最大值,所以

$$S \leqslant S_{\max} = 2(1 + 2 + \cdots + m) = m(m+1) = \left[\frac{n^2}{4} \right]$$

若 $n = 2m$,可类似讨论.

5. 由数码$1,2,\cdots,9$组成的 k 位数共 9^k 个,其中第一个数字为 $i(i = 1,2,\cdots,9)$ 的,共 9^{k-1} 个,用 S_{ki} 表示题设和式 S 中,那些分母为 k 位数,且第一个数字为 i 的所有项的和,则

$$S_{k,i} < \frac{1}{i} \left(\frac{9}{10} \right)^{k-1}$$

所以

$$S = \sum_{k=1}^{100} (S_{k,1} + S_{k,2} + \cdots + S_{k,9})$$
$$< \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9}\right) \left[1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{99} \right]$$
$$< 2.9 \times 10 = 29$$

6. 原不等式等价于

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$> \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) > \frac{2n+1}{2n(n+1)}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

上面这个不等式显然成立.

7. 因为 $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$,故由均值不等式有

$$\sqrt{(1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1})(x_i + \cdots + x_n)}$$
$$\leqslant \frac{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{2} = 1$$

由此即得所求证的第一个不等式.

因为 $0 \leqslant x_0 + x_1 + \cdots + x_i \leqslant 1, i = 0,1,\cdots,n$

故可令 $\theta_i = \arcsin(x_0 + x_1 + \cdots + x_i), i = 0,1,\cdots,n$.

于是 $\theta_i \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$且有 $0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\frac{\pi}{2}$,因而有

$$x_i=\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}=2\cos\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}<2\cos\theta_i-\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}$$

因为对 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,有 $\sin x<x$,所以有

$$x_i<2\cos\theta_{i-1}\cdot\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}=(\theta_i-\theta_{i-1})\cos\theta_{i-1}$$

故得$\frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}}<\theta_1-\theta_{i-1},i=1,2,\cdots,n$

在上式两端对 i 从 1 到 n 求和,得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\cos\theta_{i-1}}<\theta_n-\theta_0=\frac{\pi}{2} \quad ①$$

由 θ_i 定义知 $\sin\theta_i=x_1+x_2+\cdots+x_i$,所以有

$$\begin{aligned}\cos\theta_{i-1}&=\sqrt{1-\sin^2\theta_{i-1}}\\&=\sqrt{1-(x_0+x_1+\cdots+x_{i-1})^2}\\&=\sqrt{(1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1})(x_i+\cdots+x_n)}\end{aligned} \quad ②$$

将 ② 式代人 ① 式即得所欲证.

第四章　分式不等式

A组

1. 以 S_m 记不等式左端.

$$\begin{aligned}S_{m+1}-S_m&=\left(\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{3m+4}\right)-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{3m+1}\right)\\&=\frac{1}{3m+4}+\frac{1}{3m+3}+\frac{1}{3m+2}-\frac{1}{m+1}\\&=\frac{2}{(3m+4)(3m+3)(3m+2)}>0\end{aligned}$$

$\therefore S_{m+1}>S_m$,又由 $S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$,有 $S_m>S_{m-1}>\cdots>S_1>1$

故不等式成立.

2. 对正数 $a,b,(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geqslant 0$ 显然成立.

$\therefore a^n+b^n\geqslant a^{n-1}b+b^{n-1}a$

故$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leqslant\frac{ab}{a^4b+ab^4+ab}=\frac{1}{a^3+b^3+1}\leqslant\frac{abc}{a^2b+b^2a+abc}=\frac{c}{a+b+c}$

同理　$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\leqslant\frac{c}{a+b+c}$

$\frac{ac}{c^5+a^5+ac}\leqslant\frac{b}{a+b+c}$

将上三式相加,即得所证不等式.

3. 由$\frac{1}{\sqrt{k}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}<2\cdot\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

$=2(\sqrt{2}-\sqrt{k-1})$

于是$\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2(\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{80}-\sqrt{79}=1+2(\sqrt{80}-1)<1+2(9-1)$
$=17.$

又由$\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$,有$\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{81}-\sqrt{80}) = 2(\sqrt{81}-1) = 16$

故结论成立.

4. 不妨设某 k 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为正,其余 $n-k$ 个数 $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots x_n$ 为负.

由$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

知 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = -(x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n)$

故 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_k| = |x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_n|$

即 $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_k| = |x_{k+1}| + |x_{k+2}| + \cdots + |x_n| = \frac{1}{2}$

于是$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right| = \left|\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_k}{a_k} + \frac{x_{k+1}}{a_{k+1}} + \cdots + \frac{x_n}{a_n}\right|$

(注意对和中 x_i 按正负做了调动,$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 某排列)

$= \left|\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_k}{a_k}\right) - \left(\frac{|x_{k+1}|}{a_{k+1}} + \frac{|x_{k+2}|}{a_{k+2}} + \cdots + \frac{|x_n|}{a_n}\right)\right|$

$= |A - B|$,若 $A \geqslant B$

则 $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right| = \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_k}{a_k}\right) - \left(\frac{|x_{k+1}|}{a_{k+1}} + \frac{|x_{k+2}|}{a_{k+2}} + \cdots + \frac{|x_n|}{a_n}\right)$

$\leqslant \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{1} + \cdots + \frac{x_k}{1}\right) - \left(\frac{|x_{k+1}|}{n} + \frac{|x_{k+2}|}{n} + \cdots + \frac{|x_n|}{n}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

若 $A < 13$

则 $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right| = \left(\frac{|x_{k+1}|}{a_{k+1}} + \frac{|x_{k+2}|}{a_{k+2}} + \cdots + \frac{|x_n|}{a_n}\right) - \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_k}{a_k}\right)$

$\leqslant (|x_{k+1}| + |x_{k+2}| + \cdots + |x_n| - \left(\frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_k}{n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$

故结论成立.

5. $M > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$

$M < \frac{a+c}{a+b+c+d} + \frac{b+d}{a+b+c+d} + \frac{c+a}{a+b+c+d} + \frac{d+b}{a+b+c+d} = 2$

6. 由$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$ 及$\frac{1}{2} > \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}}{n}$,各式相加:

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

$= \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

即 $\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$

7. 左边$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$

$> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

B 组

1. 左边$< 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4}$$

2. 考虑函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$，当 $a > b \geqslant 0$ 时，

$$f(a) - f(b) = \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a-b}{(1+a)(1+b)} > 0$$

故 $f(x)$ 当 $x > 0$ 时为增函数.

由 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

有 $$\frac{|x_1 + x_2 + \cdots + x_n|}{1 + |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|} \leqslant \frac{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}{1 + |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|} \leqslant \frac{|x_1|}{1 + |x_1|} + \frac{|x_2|}{1 + |x_2|} + \cdots + \frac{|x_n|}{1 + |x_n|}.$$

3. (1) $n = 1$ 时，结论成立（左边 $= \frac{1 + x_1}{1 + x_1} = 1$，右边 $\geqslant 1$）.

(2) 假设 $n = k$ 时成立，

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} + \frac{1 + x_k}{1 + x_1} \leqslant k + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{k} (x_j - a)^2$$

则 $n = k + 1$ 时，（此时 $x_{k+2} = x_1$）

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} + \frac{1 + x_k}{1 + x_{k+1}} + \frac{1 + x_{k+1}}{1 + x_1}$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} + \frac{1 + x_k}{1 + x_1} + \left(\frac{1 + x_k}{1 + x_{k+1}} - \frac{1 + x_{k+1}}{1 + x_1} - \frac{1 + x_k}{1 + x_1}\right)$$
$$\leqslant k + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{k} (x_j - a)^2 + \left(\frac{1 + x_k}{1 + x_{k+1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{1 + x_1}\right)$$
$$= k + 1 + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{k+1} (x_j - a)^2 + \left[\frac{1 + x_k}{1 + x_{k+1}} - 1 + \frac{x_{k+1} - x_k}{1 + x_1} - \frac{1}{(1+a)^2}(x_{k+1} - a)^2\right]$$
$$= k + 1 + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{k+1} (x_j - a)^2 + \left[(x_{k+1} - x_k) \cdot \frac{x_{k+1} - x_1}{(1 + x_{k+1})(1 + x_1)} - \frac{1}{(1+a)^2}(x_{k+1} - a)^2\right]$$
$$\leqslant k + 1 + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{k+1} (x_j - a)^2 + 0$$

故 $n = k + 1$ 也成立.

这里方括号内值小于或等于 0，是由 a 的定义确定的. 因分母 $(1+a)^2 \leqslant (1 + x_{k+1})(1 + x_1)$ 而分子 $(x_{k+1} - a)^2 \geqslant (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_1)$ 故所证结论成立（当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a$ 时取等号）.

4. ① 左边为顺序和，记为 S，则

$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$，

$S \geqslant a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1$，

$S \geqslant a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2$，

……

$S \geqslant a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}$

将上面 n 个式子相加，并按列求和得

$nS \geqslant a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + \cdots + a_n(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$,

$\therefore S \geqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$

② 证明同上(左边反序和不等号反向即可).

5. 令 $x = \tan\alpha, y = \tan\beta, z = \tan\gamma$,且 $\alpha,\beta,\gamma \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,依题设,有 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$,进而可得 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,根据柯西不等式,知

$$2 = (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$\geqslant (\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma)^2$$
$$= \frac{1}{4}(\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma)^2$$

于是 $\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma \leqslant 2\sqrt{2}$

根据万能公式,

$$\frac{\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} + \frac{\tan\beta}{1 + \tan^2\beta} + \frac{\tan\gamma}{1 + \tan^2\gamma} \leqslant \sqrt{2}$$

即得欲证不等式.

6. 设 $x_1 = k(x_2 + x_3 + x_4)$,依题设有 $\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant 1, x_3x_4 \geqslant 4$,原不等式等价于

$$(1 + k)^2(x_2 + x_3 + x_4)^2 \leqslant 4kx_2x_3x_4(x_2 + x_3 + x_4) \quad ①$$

不难证明函数 $f(k) = k + \frac{1}{k}\left(\frac{1}{3} \leqslant k \leqslant 1\right)$ 是减函数,从而 $\frac{(1 + k)^2}{4k}(x_2 + x_3 + x_4) = \frac{k + \frac{1}{k} + 2}{4}(x_2 + x_3 + x_4)$

$$\leqslant \frac{3 + \frac{1}{3} + 2}{4} \cdot 3x_2 = 4x_2 \leqslant x_2x_3x_4$$

故 ① 式成立,证得所要证的不等式.

7.
$$\frac{{x_i}^2}{{x_i}^2 + x_{i+1}x_{i+2}} = 1 - \frac{x_{i+1}x_{i+2}}{{x_i}^2 + x_{i+1}x_{i+2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{1 + \frac{{x_i}^2}{x_{i+1}x_{i+2}}}(1 \leqslant i \leqslant n)$$

这里 $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$

令 $y_i = \frac{{x_i}^2}{x_{i+1}x_{i+2}}$ 有 $y_i > 0$,及 $y_1y_2\cdots y_n = 1$ ①

于是原不等式的左端即为 $n - \left(\frac{1}{1 + y_1} + \frac{1}{1 + y_2} + \cdots + \frac{1}{1 + y_n}\right)$

现只须证明 $\frac{1}{1 + y_1} + \frac{1}{1 + y_2} + \cdots + \frac{1}{1 + y_n} \geqslant 1$ ②

由 ② 知,必存在 $0 < y_i \cdot y_j \leqslant 1(i \neq j)$,从而有

$$\frac{1}{1 + y_i} + \frac{1}{1 + y_j} = \frac{2 + y_i + y_j}{(1 + y_i)(1 + y_j)} = \frac{1 + y_i + y_j + 1}{1 + y_i + y_j + y_iy_j} \geqslant 1 \quad ③$$

根据 ③ 知 ② 成立,故原不等式得证.

8. $n = 1$ 时不等式显然成立,下面用数学归纳法证明 $n = 2^k(k = 1,2,\cdots)$ 时,不等式成立.

当 $k = 1$ 时有

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \frac{1}{r_2 + 1} - \frac{2}{\sqrt{r_1r_2} + 1} = \frac{(\sqrt{r_1r_2} - 1)(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2})^2}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)(\sqrt{r_1r_2} + 1)} \geqslant 0$$

若当 $k = m$ 时,不等式成立,我们证明 $k = m + 1$ 时结论也成立,即若对 n 个数原不等式成立,

我们证明对 $2n$ 个数原不等式也成立.

如果 $r_1,r_2,\cdots,r_{2n}\geqslant 1$,则有

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{r_i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i+1}+\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{r_i+1}$$
$$\geqslant\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}+\frac{n}{\sqrt[n]{r_{n+1}r_{n+2}\cdots r_{2n}}+1}$$
$$\geqslant\frac{2n}{\sqrt[2n]{r_1r_2\cdots r_{2n}}+1}$$

故当 $n=2^k(k=1,2,\cdots)$ 时,原不等式成立.

对任意自然数 n,存在正整数 k,满足 $m=2^k>n$,设 $r_{n+1}=r_{n+2}=\cdots=r_m=\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}$,

则$\dfrac{1}{r_1+1}+\cdots+\dfrac{1}{r_n+1}+\dfrac{m-n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$

$\geqslant\dfrac{m}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$

即原不等式成立.

第五章　对称不等式

A组

1. 由于所证不等式关于 a,b,c 对称,故不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,则 $a^4>b^4>c^4$,运用排序不等式有 $a^5+b^5+c^5=a\cdot a^4+b\cdot b^4+c\cdot c^4\geqslant a\cdot c^4+b\cdot a^4+c\cdot b^4$

又 $a^3\geqslant b^3\geqslant c^3>0$,且 $ab\geqslant ac\geqslant bc>0$,所以,

$a^4b+b^4c+c^4a=a^3\cdot ab+b^3\cdot bc+c^3\cdot ca\geqslant a^3bc+b^3ac+c^3ab$

即　$a^5+b^5+c^5\geqslant a^3bc+b^3ac+c^3ab$

2. 由于 a,b,c 的对称性,只须考虑两种情况:(1)$a\geqslant 1,b\leqslant 1,c\leqslant 1$;(2)$a\leqslant 1,b\geqslant 1,c\geqslant 1$,原不等式等价于 $b^2+c^2+\dfrac{1}{b^2c^2}+3\geqslant 2\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+bc\right)$. 由于 $b^2+c^2+\dfrac{1}{b^2c^2}+3-2\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+bc\right)=(b-c)^2+\left(\dfrac{1}{bc}-1\right)^2+2\left(1-\dfrac{1}{b}\right)\left(1-\dfrac{1}{c}\right)$.所以,无论是(1),(2)哪一种情况,上式总大于或等于零.

3. 由 $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e$ 得$a+b\leqslant a+c\leqslant b+d\leqslant c+e\leqslant d+e$

利用切比雪夫不等式有

$a(d+e)+b(c+e)+c(b+d)+d(a+c)+e(a+b)$

$\leqslant\dfrac{1}{5}(a+b+c+d+e)[(d+e)+(c+e)+(b+d)+(a+c)+(a+b)]$

$=\dfrac{2}{5}(a+b+c+d+e)^2=\dfrac{2}{5}$

即:$(ad+dc+cb+be+ea)\leqslant\dfrac{1}{5}$

4. 设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$,易知原不等式左边为顺序和,记为 S,则

$$S\geqslant\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_3}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_1}{\sqrt{1-x_n}}$$

$$S\geqslant\frac{x_3}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_4}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_n}}$$

…

$$S \geqslant \frac{x_n}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_1}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-x_n}}$$

将 $n-1$ 个不等式相加按列求和，有

$$(n-1)S \geqslant \frac{1-x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1-x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \cdots + \frac{1-x_n}{\sqrt{1-x_n}}$$
$$= \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_n}$$

要证原不等式只需证明不等式.

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \cdots + \sqrt{1-x_n} \geqslant \sqrt{n-1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}) \qquad ①$$

利用幂平均不等式有

$$\frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \cdots + \sqrt{x_n}}{n-1} \leqslant \sqrt{\frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n-1}} = \sqrt{\frac{1-x_1}{n-1}}$$

即 $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \cdots + \sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{1-x_1}$

同理可证：$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_3} + \cdots + \sqrt{x_n} \leqslant \sqrt{n-1}\sqrt{1-x_2}$

……

$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_{n-1}} \leqslant \sqrt{n-1}\sqrt{1-x_n}$

5. 不等式是关于 x,y 对称的，左边由两部分 $1+\frac{1}{x}$ 与 $1+\frac{1}{y}$ 的积组成，又 $x+y=1$，则

$$1+\frac{1}{x} = 1+\frac{x+y}{x} = 1+1+\frac{y}{x} \geqslant 3\sqrt[3]{1\times 1\times \frac{y}{x}}$$
$$1+\frac{1}{y} = 1+\frac{x+y}{y} = 1+\frac{x}{y}+1 \geqslant 3\sqrt[3]{1\times 1\times \frac{x}{y}}$$

两边相乘得

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geqslant 9\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 9$$

引申结论，设 $x_i \in \mathbf{R}^+ (1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

求证：$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geqslant (1+n)^n$

证明：$\because 1+\frac{1}{x_1} = 1+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_1}$

$$= 1+1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_1}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}$$
$$\geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{x_1x_3x_4\cdots x_n}{(x_2)^{n-1}}}$$

…

$$1+\frac{1}{x_n} \geqslant (n+1)\sqrt[n+1]{\frac{x_1x_2\cdots x_{n-1}}{(x_n)^{n-1}}}$$

$$\therefore \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{1}{x_i}\right) \geqslant n+1\sqrt[n+1]{\frac{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}}{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{n-1}}} = (n+1)^n$$

6. $\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geqslant 4a$

$\frac{b^2}{a-1} + 4(a-1) \geqslant 4b$，

两式相加得 $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geqslant 8$

B组

1. $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{4}a(b+c)$

$\geqslant\sqrt[2]{\dfrac{1}{a^3(b+c)}\cdot\dfrac{1}{4}a(b+c)}=\dfrac{1}{a}$

同理 $\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{4}b(c+a)\geqslant\dfrac{1}{b}$

$\dfrac{1}{c^3(a+b)}+\dfrac{1}{4}c(a+b)\geqslant\dfrac{1}{c}$

$\therefore\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}$

$\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}-\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\dfrac{3}{2}$

2. 先证明 $\alpha>0,\beta>0$ 时不等式成立.

不妨设 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$

则 $\dfrac{1}{x_1}\geqslant\dfrac{1}{x_2}\geqslant\cdots\geqslant\dfrac{1}{x_n}>0$

于是 $0<x_1{}^{\beta}\leqslant x_2{}^{\beta}\leqslant\cdots\leqslant x_n{}^{\beta}$

$\left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{\alpha}\geqslant\left(\dfrac{1}{x_2}\right)^{\alpha}\geqslant\cdots\geqslant\left(\dfrac{1}{x_n}\right)^{\alpha}>0$

根据排序不等式有

$x_1{}^{\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{\alpha}+x_2{}^{\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{x_2}\right)^{\alpha}+\cdots+x_n{}^{\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{x_n}\right)^{\alpha}$

$\leqslant x_1{}^{\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\alpha}+x_2{}^{\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{x_3}\right)^{\alpha}+\cdots+x_n{}^{\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{x_1}\right)^{\alpha}$

即 $x_1{}^{\beta-\alpha}+x_2{}^{\beta-\alpha}+\cdots+x_n{}^{\beta-\alpha}\leqslant\dfrac{x_1{}^{\beta}}{x_2{}^{\alpha}}+\dfrac{x_2{}^{\beta}}{x_3{}^{\alpha}}+\cdots+\dfrac{x_n{}^{\beta}}{x_1{}^{\alpha}}$

同理可证 $\alpha<0,\beta<0$ 时不等式成立.

3. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $a^2\geqslant b^2\geqslant c^2$，且

$\dfrac{1}{b+c}\geqslant\dfrac{1}{c+a}\geqslant\dfrac{1}{a+b}$

根据排序不等式，有

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{b+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}\qquad①$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{b+c}+\frac{a^2}{c+a}+\frac{b^2}{a+b}\qquad②$$

① + ② 得

$$2\left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)\geqslant\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}+\frac{a^2+b^2}{a+b}\qquad③$$

又 $(b+c)^2\leqslant2(b^2+c^2)$

即 $\dfrac{b^2+c^2}{b+c}\geqslant\dfrac{b+c}{2}$

同样 $\dfrac{c^2+a^2}{c+a}\geqslant\dfrac{c+a}{2}$，$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$，代入 ③ 即得 $2\left(\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\right)\geqslant a+b+c$

即为欲证不等式.

4. 记 $A_i = a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n(i=1,2,\cdots,n)$,根据排序不等式,我们只须证明以下情形:设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n, A_1 \geqslant A_2 \geqslant \cdots \geqslant A_n$ 有

$$b_1A_1 + b_2A_2 + \cdots + b_nA_n \leqslant \frac{p}{(n-1)^{n-1}}(n \geqslant 2) \quad ①$$

由于 $0 \leqslant b_i \leqslant p, b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1, \frac{1}{2} \leqslant p \leqslant 1$,所以

$$b_1A_1 + b_2A_2 + \cdots + b_nA_n$$
$$\leqslant b_1A_1 + (b_2 + b_3 + \cdots + b_n)A_2$$
$$= b_1A_1 + (1 - b_1)A_2 \quad ②$$

又 $\quad PA_1 + (1-p)A_2 - b_1A_1 - (1-b)A_2$
$$= P(A_1 - A_2) - b_1(A_1 - A_2)$$
$$= (P - b_1)(A_1 - A_2) \geqslant 0 \quad ③$$

由 ②,③ 知

$$b_1A_1 + b_2A_2 + \cdots + b_nA_n \leqslant PA_1 + (1-p)A_2$$
$$\leqslant p(A_1 + A_2) \quad ④$$

由平均值不等式有

$$A_1 + A_2 = a_3a_4\cdots a_n(a_1 + a_2)$$
$$\leqslant \left[\frac{1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right]^{n-1} \quad ⑤$$

注意到 $\quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 \quad ⑥$

由 ④、⑤、⑥ 即得 ①,故要证的不等式成立.

5. 由 x,y,z 之对称性,不妨设 $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$,则

$$\text{不等式左边} = \frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{z}{1+x+y} + \frac{1-z}{1+x+y}(1-x)(1-y)(1+x+y)$$
$$\leqslant \frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{z}{1+x+y} + \frac{1-z}{1+y+z}\sqrt[3]{\frac{(1-x)+(1-y)+(1+x+y)}{3}}$$
$$= \frac{x}{1+y+z} + \frac{y}{1+z+x} + \frac{1}{1+x+y}$$
$$\leqslant \frac{x}{1+y+x} + \frac{y}{1+y+x} + \frac{1}{1+x+y} = 1.$$

第六章　加强命题

A组

1. 提示:运用数学归纳法证明加强命题 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

2. 提示:将命题结论加强为 $b_n = \sqrt{\frac{2}{2{a_n}^2 - 1}}$ 和 $\sqrt{4 + 2b_n^2}$ 都是正整数.

3. 提示:将第二个条件减弱为 $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1$,则可用数学归纳法证明.

4. 提示:将命题强化为 $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$,用数学归纳法.

5. 提示:将命题强化为若 $0 < A_i < \pi(i = 1,2,\cdots,n)$,则 $\sin A_1 + \sin A_2 + \cdots + \sin A_n \leqslant n\sin\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{n}$.设 $n = k$ 时,不等式成立,则 $n = k + 1$ 时.

$\sin A_1 + \sin A_2 + \cdots + \sin A_k + \sin A_{k+1}$

$\leqslant k\sin\dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_k}{k} + \sin A_{k+1}$

$= (k+1)\left(\dfrac{k}{k+1}\sin\dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_n}{k} + \dfrac{1}{k+1}\sin A_{k+1}\right)$

$\leqslant (k+1)\sin\left(\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_k}{k} + \dfrac{1}{k+1}A_{k+1}\right)$

$= (k+1)\sin\dfrac{A_1 + A_2 + \cdots + A_k + A_{k+1}}{k+1}$

这里用到不等式$\dfrac{m}{m+n}\sin\alpha + \dfrac{n}{m+m}\sin\beta$

$\leqslant \sin\left(\dfrac{m}{m+n}\alpha + \dfrac{n}{m+n}\beta\right)$其中$0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi$,且$m > 0, n > 0$,此不等式可由凸函数定义推出.

6. 先用数学归纳法证明$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} = 2 - \dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$,注意$a_1 = 1, a_i \geqslant 2(i = 2,3,\cdots\cdots)$,故有

$0 < \dfrac{1}{a_1a_2\cdots\cdots a_n} < \dfrac{1}{2^{n-1}}$

7. 不妨设$a \leqslant b \leqslant c < a + b$

要证原式,即证:$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < (a+b+c) + \dfrac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c)$

$\dfrac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c) > \sqrt[n]{2}\cdot c = \sqrt[n]{c^n + c^n} \geqslant \sqrt[n]{b^n + c^n}$

于是只要证明

$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} \leqslant a + b + c$

下证　$\sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant \dfrac{a}{2} + b$

两边n次方,只要证:$a^n \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i\left(\dfrac{a}{2}\right)^i\cdot b^{n-i}$

只要证:$1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i\left(\dfrac{1}{2}\right)^i\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n-i}$

$\because$ 上式右边$\geqslant \sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i\left(\dfrac{1}{2}\right)^i\cdot 1^{n-i} = \left(\dfrac{1}{2} + 1\right)^n - 1$

$\geqslant \dfrac{9}{4} - 1 > 1$

所以　$\sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant \dfrac{a}{2} + b$成立.

同理可证:$\sqrt[n]{c^n + a^n} \leqslant \dfrac{a}{2} + c$

所以$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} \leqslant a + b + c$

于是原命题得证.

8. 因为$\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{k - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{k + \frac{1}{2}}$

所以$A = \dfrac{1}{l^2} + \dfrac{1}{(l+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{4l^2}$

$< \dfrac{1}{l - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{l + \frac{1}{2}} + \dfrac{1}{l + \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{l + \frac{3}{2}} + \cdots + \dfrac{1}{2l - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2l + \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{l - \frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2l + \frac{1}{2}} = \dfrac{l+1}{\left(l - \frac{1}{2}\right)\left(2l + \frac{1}{2}\right)}$

于是$\frac{1}{A} > \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2l+\frac{1}{2}\right)}{l+1}$,所以只要证明:

$\frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(2l+\frac{1}{2}\right)}{l+1} > 2l-3$

只要证$\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(2l+\frac{1}{2}\right) > (l+1)(2l-3)$,打开,化简,即证:$l+3 > \frac{1}{2}l+\frac{1}{4}$,显然成立.

于是只要证明$\frac{1}{A} < 2l-2$,即可.

用上述相似的方法.

假设$\frac{1}{k^2} > \frac{1}{k-a} - \frac{1}{k+1-a}$,其中$a$为小于$k$的正数,那么$a$满足$k > \frac{a(1-a)}{1-2a}$

于是,只要$l > \frac{a(1-a)}{1-2a}$,$l > a$就有,

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{l^2}+\frac{1}{(l+1)^2}+\cdots+\frac{1}{4l^2}\\ &> \frac{1}{l-a}-\frac{1}{l+1-a}+\frac{1}{l+1-a}-\frac{1}{l+2-a}+\cdots+\frac{1}{2l-a}-\frac{1}{2l+1-a}\\ &= \frac{1}{l-a}-\frac{1}{2l+1-a} = \frac{l+1}{(l-a)(2l+1-a)}\end{aligned}$$

所以$\frac{1}{A} < \frac{(1-a)(2l+1-a)}{l+1}$

于是,关键只要证明存在一个这样的a,满足$l > \frac{a(1-a)}{1-2a}$和$\frac{(1-a)(2l+1-a)}{l+1} < 2l-2$

因为$l > a$,

解$\frac{(l-a)(2l+1-a)}{l+1} < 2l-2$得

$\frac{3l+1-\sqrt{9l^2+2l-7}}{2} < a < 1$

解$l > \frac{a(1-a)}{1-2a}$,得$a < \frac{2l+1-\sqrt{4l^2+1}}{2}$

所以只要证明

$\frac{3l+1-\sqrt{9l^2+2l-7}}{2} < \frac{2l+1-\sqrt{4l^2+1}}{2}$

即证:$l+\sqrt{4l^2+1} < \sqrt{9l^2+2l-7}$,两边平方,化简,只要证$l.\sqrt{4l^2+1} < 2l^2+l-4$

再平方,只要证$4l^3-16l^2-8l+16 > 0$

由于$l \geqslant 5$,所以$4l^3-16l^2-8l+16 > 20l^2-8l+16 > 4l^2-8l+16 > 20-8l+16 > 0$

所以 $4l^3-16l^2-8l+16 > 0$,成立.

所以可以找到这样的一个a,满足

$l > \frac{a(1-a)}{1-2a}$和$\frac{(l-a)(2l+1-a)}{l+1} < 2l-2$

综上,证得$\left[\frac{1}{A}\right] = 2l-3$.

B组

1. 设$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}$,将命题强化为$a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$,用数学归纳法.

2. 易知$a_n > 0$,$a_{n+1} > a_n$,数列$\{a_n\}$递增,将命题结论强化为:当$n \geqslant 3$时,$a_n < \frac{5}{3}$.用第二数学归纳法,则$n = k+1$时,$a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k(k+1)}+\frac{a_{k-2}}{(k-1)k}+\cdots+\frac{a_2}{3\cdot 4}+\frac{a_1}{3\cdot 2}+\frac{a_0}{2}$

$$< \frac{5}{3}\left[\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k-1)k} + \cdots + \frac{1}{4 \cdot 5}\right] + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 1$$

$$= \frac{5}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{5}{4} < \frac{5}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

3. 将命题强化为:对满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的任意自然数k,都有

$\frac{n+1}{2n-k+2} < a_k < \frac{n}{2n-k}$.设 $n = k$ 时结论成立,则当 $n = k+1$ 时,

$$a_{k+1} = a_k\left(1 + \frac{1}{n}a_k\right) < \frac{n}{2n-k}\left(1 + \frac{1}{2n-k}\right)$$

$$= \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2} < \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2-1} = \frac{n}{2n-(k+1)}$$

$$a_{k+1} > \frac{n+1}{2n-k+2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n-k+2)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n-(k+1)+2} - \frac{n+1}{2n-(k+1)+2} + \frac{n+1}{2n-k+2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n-k+2)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n-(k+1)+2} + \frac{n+1}{2n-k+2}\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2n-k+2} - \frac{1}{2n-k+1}\right) > \frac{n+1}{2n-(k+1)^2+2}$$

4. 当 $r \in \mathbf{N}$ 时,不难证明

$$\sqrt{r+\frac{1}{2}} + \sqrt{r-\frac{1}{2}} < 2\sqrt{r} < \sqrt{r+1} + \sqrt{r}$$

所以 $$\frac{1}{\sqrt{r+1}+\sqrt{r}} < \frac{1}{2\sqrt{r}} < \frac{1}{\sqrt{r+\frac{1}{2}} + \sqrt{r-\frac{1}{2}}}$$

即 $$\sqrt{r+1} - \sqrt{r} < \frac{1}{2\sqrt{r}} < \sqrt{r+\frac{1}{2}} - \sqrt{r-\frac{1}{2}}$$

在上式中令 $r = 3,4,5,\cdots,n$,并将所得各式相加得.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \sqrt{n+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}$$

所以 $$2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 < \zeta_n < \sqrt{4n+2} - \sqrt{10} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

令 $n = 1999$ 得:$87.6857\cdots < \zeta_{1999} < 87.9763\cdots$

$\therefore [\zeta_{1999}] = 87$.

5. 当 $y = z = 1$,x 趋向于0时,$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 趋向于2.

下面证明对任意正实数,有

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

将$\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}$,$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 移到右边,即证

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} > \frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{\sqrt{x^2+z^2}-z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$,即证.

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} > \frac{x^2}{\sqrt{x^2+z^2}(\sqrt{x^2+y^2}+y)} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{x^2+z^2}+z)}$$

两边约去 x,并且由于$\sqrt{x^2+y^2}+y > 2y$,$\sqrt{x^2+z^2}+z > 2z$,

所以只要证明$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \frac{x}{2y\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{x}{2z\sqrt{x^2+y^2}}$

由于$\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}}$,所以$\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$ 随 x 增大而增大.

同样 $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 也随 x 增大而增大.

所以我们只需考虑 $x=y$ 时的情形.

令 $x=y$,即证 $\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}z}$

即 $\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{2}z}$

即证:$\sqrt{2}z\geqslant\sqrt{y^2+z^2}$,这显然是成立的,因为 $\sqrt{2}z=\sqrt{z^2+z^2}\geqslant\sqrt{y^2+z^2}$

所以 $\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\geqslant2$

$\therefore a=2$.

6. 只要证明 $[x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)]\cdot(x+y+z)+9xyz\geqslant0$

打开,整理,即证:$x^3+y^3+z^3-(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz\geqslant0$

即:$(x+y+z)^3\geqslant4(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz$ ……………………(*)

下证:对任意正数 x,y,z 上式成立.

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$

固定 z,并设 $x+y$ 为定值 $2a$,$x=a+t$,$y=a-t$.

由于(*)式左边不变,且右边 $yz^2+z^2x=z^2(x+y)$ 也不变,所以只要考虑 $4(x^2y+y^2z+xy^2+zx^2)+3xyz$ 的最大值.

猜测上式最大值在 $x=y$ 时取到,即

$4xy(x+y)+4z(x^2+y^2)+3xyz\leqslant4a^22a+8za^2+3a^2z$

将 $x=a+t$,$y=a-t$,代入上式,即

$8a(a^2-t^2)+4z(2a^2+2t^2)+3z(a^2-t^2)\leqslant8a^3+11za^2$.

整理得:$(5z-8a)\cdot t^2\leqslant0$,由于 $a\geqslant t$,所以 $5z-8a\leqslant0$,所以 $(5z-8a)\cdot t^2\leqslant0$ 成立.

于是只要证明在 $x=y$ 时,(*)式成立即可.

将 $x=y$ 代入 $x^3+y^3+z^3-(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz\geqslant0$

即证:$x^3+y^3+z^3-(x^2-x+x^2z+z^2x+x\cdot x^2+xz^2+zx^2)+3x\cdot xz\geqslant0$

即 $x^2z+z^3\geqslant2xz^2$

有基本不等式知,上式成立,所以原不等式得证.

第七章 参数与不等式

A组

1. 本题为 x 的一元二次不等式,a 为已知数,左边二次三项式二根为 $\frac{4-a\pm|a|}{2}$,通常情况下,解可表为 $x>\frac{4-a+|a|}{2}$ 或 $x<\frac{4-a-|a|}{2}$,但本题给出条件 $a\in[-1,1]$ 有何作用?此时,我们应对所求的解集作如下理解:求所有的 x,它对 $[-1,1]$ 内的任何实数 a,都使原不等式成立.这样的 x 应该大于 $\frac{4-a+|a|}{2}$ 的最大值或小于 $\frac{4-a-|a|}{4}$ 的最小值.

$\therefore a\in[-1,1]$ 时,$\frac{4-a+|a|}{2}$ 最大值为 $3(a=-1$ 时$)$,$\frac{4-a-|a|}{2}$ 最小值为 $1(a=1$ 时$)$

因而原不等式解集为 $\{x\mid x>3$ 或 $x<1\}$

2. 不等式有意义,须 $-3\leqslant x\leqslant3$

当 $0\leqslant x\leqslant3$ 时,$-ax^2\leqslant0$,显然是不等式的解.

当 $-3 \leqslant x < 0$ 时,平方:$9 - x^2 \geqslant a^4 x^2$

即 $(a^4+1)x^2 \leqslant 9$

得 $\frac{-3}{\sqrt{a^4+1}} \leqslant x < 0 \mid \sqrt{a^4+1} \geqslant 1$(此解属定义域内).

故不等式之解为 $\frac{-3}{\sqrt{a^4+1}} \leqslant x \leqslant 3$

解集区间长为 $\frac{3}{\sqrt{a^4+1}} + 3 = \frac{15}{4}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a^4+1}} = \frac{1}{4}$,得 $a = \pm \sqrt[4]{15}$

3. 第一式为 $(x-a)[x-(1-a)] < 0$

当 $a > \frac{1}{2}$ 时,解为 $1-a < x < a$

当 $a < \frac{1}{2}$ 时,解为 $a < x < 1-a$

当 $a = \frac{1}{2}$ 时,解为 ϕ.

故当 $a < \frac{1}{2}$ 时,不等式组为 $\begin{cases} a < x < 1-a \\ x > 1-2a \end{cases}$,因为原不等式组有解,必须 $1-2a < 1-a$,得 $a > 0$,此时由 $a < x < 1-a$ 知 x 为正纯小数,在 $(0,1)$ 内无整数值,不合题设条件.

当 $a > \frac{1}{2}$ 时,不等式组为 $\begin{cases} 1-a < x < a, \\ x > 1-2a. \end{cases}$

$\because a > \frac{1}{2} \quad \therefore 1-a > 1-2a$

$\therefore$ 不等式组解为 $1-a < x < a$

因原不等式组整数解恰有两个,当且仅当 $1 < a-(1-a) \leqslant 3$.

故 $1 < a \leqslant 2$ 为所求范围.

4. 因为 $|x| < 1. |y| < 1$,所以 $x^2 < 1, y^2 < 1$,

$$\begin{aligned} \text{故} \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} &= (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots) + (1 + y^2 + y^4 +, y^6 + \cdots) \\ &= 2 + (x^2 + y^2) + (x^4 + y^4) + (x^6 + y^6) + \cdots \\ &\geqslant 2 + 2xy + 2x^2y^2 + 2x^3y^3 + \cdots \\ &= \frac{2}{1-xy} \end{aligned}$$

5. 设 $A = \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{nk+2}}{a_{nk+1}}$. 因为 $a_{mk+2} > a_{mk+1} > 0$,公差 $d > 0$,所以

$\frac{a_{mk+2}}{a_{mk+1}} = \frac{a_{mk+1}+d}{a_{mk}+d} < \frac{a_{mk+1}}{a_{mk}} < \frac{a_{mk+1}-d}{a_{mk}-d} = \frac{a_{mk}}{a_{mk-1}}$

从而得 $A^k > \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \cdot \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{nk+2}}{a_{nk+1}} \cdot \frac{a_{nk+3}}{a_{nk+2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{(n+1)k+1}}{a_{(n+1)k}} = \prod_{i=k+1}^{(n+1)k} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{(n+1)k+1}}{a_{k+1}}$

又 $A^k = \left(\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right)^k \cdot \left(\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}}\right)^k \cdot \cdots \cdot \left(\frac{a_{nk+2}}{a_{nk+1}}\right)^k$

$< \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{(n-1)k+2}}{a_{(n-1)k+1}} \cdot \frac{a_{(n-1)k+3}}{a_{(n-1)k+2}} \cdot \cdots \cdot \frac{a_{nk+2}}{a_{nk+1}} = \prod_{i=2}^{nk+2} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{nk+2}}{a_2}$

从而 $\sqrt[k]{\frac{a_{(n+1)k+1}}{a_{k+1}}} < A < \sqrt[k]{\frac{a_{nk+2}}{a_2}}$.

6. 方法同例16.

7. 令 $a_i = 1 + \delta_i, \delta_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$左 = (2+\delta_1)(2+\delta_2)\cdots(2+\delta_n) = 2^n\left(1+\frac{\delta_1}{2}\right)\left(1+\frac{\delta_2}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\delta_n}{2}\right)$$

$$\geqslant \frac{2^n}{n+1}(n+1)\left(1+\frac{\delta_1}{2}+\frac{\delta_2}{2}+\cdots+\frac{\delta_n}{2}\right)$$

$$\geqslant \frac{2^n}{n+1}(n+1+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n) = 右$$

B组

1.(1) 若 $x < -a$(两边为负),原不等式等价于 $\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} < \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{ax}{x^2+a^2} < \frac{bx}{x^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{a}{x^2+a^2} > \frac{b}{x^2+b^2} \Leftrightarrow x^2(a-b) > ab(a-b) \Leftrightarrow x^2 > ab \Leftrightarrow x > \sqrt{ab}$ 或 $x < -\sqrt{ab}$.由 $a > b$ 及 $x < -a < -\sqrt{ab}$ 知这时不等式解为 $x < -a$.

(2) 若 $-a \leqslant x \leqslant -b$(原式左边 $\geqslant 0 \geqslant$ 右边),因 $a \neq b$ 等号不同时成立,这时不等式成立.

(3) 若 $x > -b$(原式两边为正),于是等价于 $\frac{(x+a)^2}{x^2+a^2} > \frac{(x+b)^2}{x^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{ax}{x^2+a^2} > \frac{bx}{x^2+b^2} \Leftrightarrow x(ax^2 + ab^2 - bx^2 - a^2b) > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - ab) > 0$.这时若 $x > 0$,则 $x > \sqrt{ab}$;若 $x < 0$,则 $0 > x > -\sqrt{ab}$,但因 $-b > -\sqrt{ab}$,故这时不等式解为 $-b < x < 0$.

综合以上讨论,原不等式解为 $(-\infty, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$

2.D

因 $x^2 - x + 1 > 0$,所以原不等式转化为

$$\begin{cases} 3x^2 - (p+6)x \geqslant 0 \\ 12x^2 + (p-9)x + 15 \geqslant 0 \end{cases}$$

恒成立,即 $p = -6$.

3. 用反证法,若所有 $a_i \geqslant 1 (i = 1,2,\cdots,8)$,令 $a_i = 1 + \delta_{i7}$,则 $\delta_i \geqslant 0$.代入题设的第一个条件等式,得

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_8 = 12$$

再由第二个条件等式,得

$$4 = (1+\delta_1)(1+\delta_2)\cdots(1+\delta_8)$$
$$= 1 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_8 + M = 13 + 8$$

这里 $M = \delta_1\delta_2 + \cdots + \delta_1\delta_2\delta_3 + \cdots + \delta_1\delta_2\cdots\delta_8 = -9$

但因 $\delta_i \geqslant 0$,故上式不可能成立,所得矛盾说明 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 中至少有一个小于 1.

4. 令 $a = 1 + h (h > 0)$,则

$$a^n = (1+h)^n > \frac{1}{2}n(n-1)h^2 (n \geqslant 2)$$

即 $\frac{h}{a^n} < \frac{2}{(n-1)h^2}$

5. 只须考虑 $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$

$$xy + 2yz + 2xz$$
$$\leqslant \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \lambda y^2 + \frac{1}{\lambda}z^2 + \frac{1}{\lambda}z^2 + \lambda x^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}+\lambda\right)y^2 + \frac{2}{\lambda}z^2 \qquad ①$$

取 $\frac{1}{2} + \lambda = \frac{2}{\lambda}$,得 $\lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{33} - 1)$ 代入 ① 即可.

6. 设 $a = 4 + \delta (\delta > 0)$,则

$$\frac{\lg a - \lg 3}{\lg 4 - \lg 3} - 1 = \frac{\lg(4+\delta) - \lg 4}{\lg \frac{4}{3}}$$

$$=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{4}\right)}{\lg\frac{4}{3}}=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{4}\right)^2}{\lg\frac{16}{9}}$$

$$=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{16}\right)}{\lg\frac{16}{9}}$$

且 $\frac{\lg(a-2)}{\lg 2}-1=\frac{\lg(2+\delta)-\lg 2}{\lg 2}=\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\lg 2}$

显见 $\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{16}\right)}{\lg\frac{16}{9}}>\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\lg 2}$

所以 $\frac{\lg a-\lg 3}{\lg 4-\lg 3}>\frac{\lg(a-2)}{\lg 2}$

第八章　最值问题与不等式

A组

1. 对于 $k=1,2,\cdots,2000$，有

$$|y_k-y_{k+1}|$$
$$=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right|$$
$$=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k-kx_{k+1}}{k(k+1)}\right|$$
$$=\frac{|(x_1-x_2)+2(x_2-x_3)+\cdots+k(x_k-x_{k+1})|}{k(k+1)}$$
$$\leqslant\frac{|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\cdots+k|x_k-x_{k+1}|}{k(k+1)}$$

按恒等式

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n}$$

和它的一个结果.

$$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

可得 $\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$

$$\leqslant|x_1-x_2|\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2000\cdot 2001}\right)+2|x_2-x_3|\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2000\cdot 2001}\right)$$
$$+\cdots+2000\cdot|x_{2000}-x_{2001}|\cdot\frac{1}{2000\cdot 2001}$$
$$=|x_1-x_2|\left(1-\frac{1}{2001}\right)+|x_2-x_3|\left(1-\frac{2}{2001}\right)+\cdots+|x_{2000}-x_{2001}|\left(1-\frac{2000}{2001}\right)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|\left(1-\frac{1}{2001}\right)=2000$$

等号当且仅当 $|x_1 - x_2| = 2001, x_2 = x_3 = \cdots = x_{2001}$ 时成立，特别取 $x_1 = 2001, x_2 = x_3 = \cdots = x_{2001} = 0$ 就能使等号成立.

故 $\sum_{k=1}^{2000} |y_k - y_{k+1}|$ 的最大值为 2000

2. 由条件有 $a + c = (1 - ac)b$，显然 $1 - ac \neq 0$，故 $b = \frac{a + c}{1 - ac}$，令 $\alpha = \arctan a, \beta = \arctan b, \gamma = \arctan c$，$\alpha、\beta、\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\tan\beta = \frac{\tan\alpha + \tan\gamma}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\gamma} = \tan(\alpha + \gamma)$$

又 $\beta, \alpha + \gamma \in (0, \pi)$，所以 $\beta = \alpha + \gamma$，从而

$$\begin{aligned}P &= \frac{2}{1 + \tan^2\alpha} - \frac{2}{1 + \tan^2\beta} + \frac{3}{1 + \tan^2\gamma} \\ &= 2\cos^2\alpha - 2\cos^2(\alpha + \gamma) + 3\cos^2\gamma \\ &= (\cos 2\alpha + 1) - [\cos(2\alpha + 2\gamma) + 1] + 3\cos^2\gamma \\ &= 2\sin\gamma \cdot \sin(2\alpha + \gamma) + 3\cos^2\gamma \leqslant 2\sin\gamma + 3\cos^2\gamma \\ &= \frac{10}{3} - 3\left(\sin\gamma - \frac{1}{3}\right)^2 \leqslant \frac{10}{3}\end{aligned}$$

且在 $2\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}, \sin\gamma = \frac{1}{3}$，即 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}, c = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，上式取等号，故 $P_{\max} = \frac{10}{3}$.

3. 提示：在原不等式中令 $x_1 = x_2 = 1$，得 $c \leqslant \frac{\lambda + 2}{4}$. 再考虑 $c = \frac{\lambda + 2}{4}$ 对原不等式是否成立. 分两种情况：1° 当 $\lambda < 2$ 时，利用比较法证明 $x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_1 x_2 \geqslant \frac{\lambda + 2}{4}(x_1 + x_2)^2$，从而得 $C_{\max} = \frac{\lambda + 2}{4}$；2° 当 $\lambda \geqslant 2$ 时，由 $x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_1 x_2 \geqslant x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2$ 得 $C_{\max} = 1$

4. 提示：注意到 $x = y$ 时上式显然成立，故不妨设 $x > y$，再利用均值代换：令 $m = \frac{k}{2}, x = m + t, y = m - t, 0 < t < m$. 将原不等式改写为

$$\left(m + t + \frac{1}{m + t}\right)\left(m - t + \frac{1}{m - t}\right) \geqslant \left(m + \frac{1}{m}\right)^2$$

即 $\quad t^2 \geqslant \frac{m^4 - 4m^2 - 1}{m^2}$

再解不等式 $\frac{m^4 - 4m^2 - 1}{m^2} \leqslant 0$ 即可

答案：$k_{\max} = 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}$

5. 提示：设 $G = \{(m, n) \mid m < \sqrt{7}n, m, n \in \mathbf{N}\}$，$\lambda_{\max} = \min\limits_{(m,n)\in G}\{7n^2 - m^2\}$，再对 $7n^2 - m^2$ 作 $mod\ 7$ 分析，可得 $\lambda_{\max} = 3$

6. 提示：令 $x = y = \frac{1}{2}, z = 0$，可得 $a \geqslant \frac{2}{9}$. 下面再证明 $a_{\min} = \frac{2}{9}$ 即可，证明时可利用原不等式关于 $x、y、z$ 的轮换对称性，不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$，则 $0 \leqslant z \leqslant \frac{1}{3}$. 将式子 $2(x^2 + y^2 + z^2) + 9xyz$ 变形为 $2[(1 - z)^2 + z^2] + 9xy\left(z - \frac{4}{9}\right)$. 固定 z，当且仅当 $x = y = \frac{1 - z}{2}$ 时上式取最小值，只需证明 $t \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$，$2(t^2 + t^2 + (1 - 2t)^2 + 9t^2(1 - 2t) \geqslant 1$，其中 $x = y = t$

7. 提示：令 $x_i = 2^{i-1}$，满足题设，可得 $c \geqslant \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2^n}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2^n}}}$. 令 $n \to \infty$，得 $c \geqslant \sqrt{2} + 1$，下面再利

用数学归纳法证明$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}$从而得$C_{\min}=\sqrt{2}+1$

8. 因为

$$x^2+\frac{1}{5}y^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}xy$$

$$\frac{4}{5}y^2+z^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}yz$$

所以 $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz)$

即 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$

又当 $x=1,y=\sqrt{5},z=2$ 时,上面不等式等号成立,从而$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$

9. 因为 $\frac{7}{8}<\frac{7+8}{8+9}<\frac{8}{9}$

即 $\frac{7}{8}<\frac{15}{17}<\frac{8}{9}$

由定义知 $f\left(\frac{15}{17}\right)=\frac{16}{17}$. 下面证明

$f(x)\leqslant\frac{16}{17},x\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$

(1) 若 $x\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$,且 x 是无理数,则

$f(x)=x<\frac{8}{9}<\frac{16}{17}$

(2) 若 $x\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$,且 x 是有理数,设 $x=\frac{p}{q}$,其中$(p,q)=1,0<p<q$,由于

$\frac{7}{8}<\frac{p}{q}<\frac{8}{9}$

所以,$\begin{cases}7q<8p\\9p<8q\end{cases}$

$\begin{cases}7q+1\leqslant8p\\9p+1\leqslant8q\end{cases}$

故 $7q+1\leqslant8p\leqslant8\cdot\frac{8q-1}{9}$

$63q+9\leqslant64q-8$

所以 $q\geqslant17$

因此
$$\begin{aligned}f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)&=\frac{p+1}{q}\\&\leqslant\frac{\frac{8q-1}{9}+1}{q}\\&=\frac{8q+8}{9q}\\&=\frac{8}{9}+\frac{8}{9q}\\&\leqslant\frac{8}{9}+\frac{8}{9\times17}\\&=\frac{16}{17}\end{aligned}$$

综上所述,$f(x)$ 在区间$\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$上的最大值为 $f\left(\frac{15}{17}\right)=\frac{16}{17}$.

10. $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)\leqslant 0$,所以,$x\in[-2,-1]\cup[2,3]$.当 $x\in[-2,-1]$ 时,$f(x)$ 是增函数,当 $x\in[2,3]$ 时,$f(x)$ 也是增函数.所以,$f_{\max}(x)=\max\{f(-1),f(3)\}=5$

11. 令 $3x^2-y^2+2z^2=t$,则 $3(1-3y-2z)^2-y^2+2z^2=t$,整理得 $26y^2+2(18z-9)y+(14z^2-12z-t+3)=0$,$\Delta=4(18z-9)^2-4\cdot 26(14z^2-12z-t+3)\geqslant 0$,所以 $40z^2+12z-(3+26t)\leqslant 0$,$\Delta'=12^2+4\cdot 40(3+26t)\geqslant 0$,故 $t\geqslant -\frac{3}{20}$.当 $x=-\frac{1}{20}$,$y=\frac{9}{10}$,$z=-\frac{3}{20}$ 时,$t=-\frac{3}{20}$,所以 $3x^2-y^2+2z^2$ 的最小值是 $-\frac{3}{20}$

12. 由平均不等式 $Q_n\geqslant A_n$,

$$x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n}=\frac{1}{n}$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ 时成立,即

$$(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)_{\min}=\frac{1}{n}$$

13. 应用幂平均不等式,求得最小值 $\frac{25}{2}$

14. 应用柯西不等式有

$$(2x+y)^2\leqslant\frac{11}{6}(3x^2+2y^2)$$

$\therefore |p|\leqslant\sqrt{11}$,此时,$x=\frac{4\sqrt{11}}{11}$,$y=\frac{3\sqrt{11}}{11}$

15. 易知 $f(x)$ 的定义域为 $x>0$

由于 $y_1=3+\log_{\frac{1}{4}}x_1$ 在定义域中是单调减函数,$y_2=\log_2 x$,在定义域中是单调增函数.当 $y_1=y_2$,即 $3+\log_{\frac{1}{4}}x=\log_2 x$ 时,$x=4$

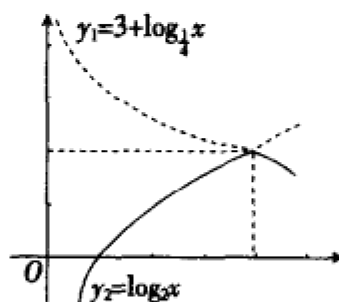


图 8-1

根据 y_1、y_2 的图象(图 8-1)可知

$$f(x)=\begin{cases}3+\log_{\frac{1}{4}}x & (x\geqslant 4)\\ \log_2 x & (0<x<4)\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $x=4$ 时,$f(x)$ 取最大值 2

16. $f(x)=|x^2-a|$ 是偶函数

$\therefore M(a)$ 是 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内的最大值.

当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2-a$,易知 $M(a)=1-a$

当 $a>0$ 时,从图象(图 8-2)可知

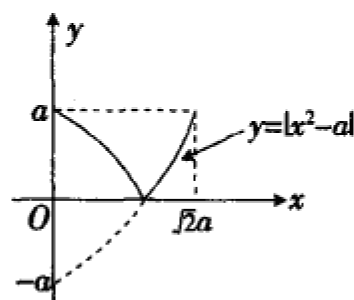


图 8-2

(1) 若 $\sqrt{2a}\geqslant 1$,则 $M(a)=a$.

(2) 若 $\sqrt{2a}\leqslant 1$,则 $M(a)=f(1)=1-a$

$$\therefore M(a)=\begin{cases}1-a & (a\leqslant\frac{1}{2})\\ a & (a\geqslant\frac{1}{2})\end{cases}$$

由于 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$M(a)\searrow$

$a\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$M(a)\nearrow$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 时,$M(a)$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

B组

1.(i) 记 $t_i=\frac{x_{i+1}}{x_i}(\geqslant 1),1\leqslant i\leqslant n+1$.题中的式子可写成

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_it_{i+1}}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)}$$

我们看到:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_it_{i+1}}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i{}^2}{t_i+t_{i+1}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)\\
&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_{i+1})\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}\sqrt{t_i+t_{i+1}}\right)^2\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)^2\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}t_{i+1}\right)\end{aligned}$$

因此,对符合条件的实数组 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$,题中的式子不小于1.

(ii) 上面推演中用到 cauchy 不等式,等号成立的充分必要条件是

$$\frac{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}{\frac{t_i}{\sqrt{t_i+t_{i+1}}}}=d(1\leqslant i\leqslant n)(\text{常数})$$

也就是$\frac{t_{i+1}}{t_i}=d-1=c,1\leqslant i\leqslant n$

记 $t_1=b$,有 $t_j=bc^{j-1},1\leqslant j\leqslant n+1$

相应地,有$\frac{x_{j+1}}{x_j}=t_j=bc^{j-1},1\leqslant j\leqslant n+1$

记 $x_1=a>0$,有

$x_k=t_{k-1}t_{k-2}\cdots+t_1a=ab^{k-1}c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}},2\leqslant k\leqslant n+2$

因为 $x_2>x_1$,所以 $b=\frac{x_2}{x_1}>1$

又因 $t_j=bc^{j-1}>1,1\leqslant j\leqslant n+1$,于是

$c>\sqrt[n]{\frac{1}{b}}\left(\geqslant\sqrt[j-1]{\frac{1}{b}},1\leqslant j\leqslant n+1\right)$

(iii) 得到结论:

对于符合条件的实数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$,题中式子的最小值是1,能使该式达到最小值的符合条件 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$ 的实数组 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$ 应该是

$x_1=a,x_k=ab^{k-1}c^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}},2<k\leqslant n+2$

其中 $a>0,b>1,c>\sqrt[n]{\frac{1}{b}}$

2. 任取一组满足题设条件的 $x_1,x_2,\cdots,x_{1997}$,若其中有 x_i 和 x_j 满足

$\sqrt{3}>x_i\geqslant x_j>-\frac{1}{\sqrt{3}}$,则记 $g=\frac{1}{2}(x_i+x_j)$

$h=\frac{1}{2}(x_i-x_j)=x_i-g=g-x_j, h>0$，由条件(1)知 $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}(i=1,2,\cdots,1997)$，所以 $(g+h)^{12}+(g-h)^{12}=2\sum_{0\leqslant k\leqslant 12}C_{12}^k m^{12-k}h^k$，当 $h>0$ 时其值随 h 的增大而增大.

取 $h=\min\{\sqrt{3}-g, g-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\}$，并以 $x_i{}^1=g+h. x_j{}^1=g-h$ 代替 x_i 和 x_j，则 $\sum_{m=1}^{1997}x_m^1=\sum_{m=1}^{1997}x_m$，且 $\sum_{m=1}^{1997}x_m^{12}\leqslant\sum_{m=1}^{1997}(x_m^1)^{12}$

因此，$\sum_{m=1}^{1997}x_m^{12}$ 的最大值只能由以下情形达到：至多有一个变元取值自 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$，其余变元均取 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $\sqrt{3}$.

设此时有 u 个变元取 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$；v 个变元取 $\sqrt{3}$；w 个变元取自 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right)$.

$w=0$ 或 1，当 $w=1$ 时，记此变元为 t.

所以由条件(2)得

$$\begin{cases}u+v+w=1997\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot u+\sqrt{3}\cdot v+tw=-318\sqrt{3}\end{cases}$$

由此得

$$4v+(\sqrt{3}t+1)w=1043$$

由于 $(\sqrt{3}t+1)w=1043-4v$，为整数，且由 $w=0$ 或 $1, w=1$ 时，$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\sqrt{3}$ 得 $0\leqslant(\sqrt{3}t+1)w<4$. 所以 $(\sqrt{3}t+1)w$，是 1043 除以 4 所得的余数，为 3. 由此求得 $v=260, t=\frac{2}{\sqrt{3}}, u=1736$

综上，得 $\sum_{m=1}^{1997}x_x^{12}$ 的最大值为

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12}\cdot u+(\sqrt{3})^{12}\cdot v+t^{12}$$

$$=\frac{1736+4096}{729}+729\times 260$$

$$=189548$$

即 $\sum_{m=1}^{1997}x_m^{12}$ 的最大值为 189548

3. 当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，不等式也成立，则，

$$c\leqslant\frac{x^6+y^6}{xy}=\frac{1}{2}$$

下证在 $x>0, y>0, x^2+y^2=1$ 条件下，不等式 $x^6+y^6\geqslant\frac{1}{2}xy$ ①

恒成立.

式 ① 等价于

$$(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]\geqslant\frac{1}{2}xy$$

即 $6(xy)^2+xy-2\leqslant 0$

令 $\mu=xy$，因 $0<xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{z}=\frac{1}{2}$，有

$$0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$$

设 $f(\mu)=6\mu^2+\mu-2, 0<\mu\leqslant\frac{1}{2}$,则 $f(\mu)$ 在$(0,\frac{1}{2}]$上是递增的.且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,故在$(0,\frac{1}{2}]$上有 $f(\mu)\leqslant 0$.从而

$6(xy)^2+xy-2\leqslant 0$

综上所述,c 的最大值为$\frac{1}{2}$

4. 利用算术——几何平均不等式可得

$$x(t)=\underbrace{(t+1)^2+\cdots+(t+1)^2}_{5个}+\frac{a}{2(t+1)^5}+\frac{a}{2(t+1)^5}\geqslant 7\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}}$$

当且仅当$(t+1)^2=\frac{a}{2(t+1)^5}$时,等号成立.

于是有 $7\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}}\geqslant 24$,即 $a\geqslant 2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$

另一方面,当 $a=2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$, $t=\sqrt{\frac{24}{7}}-1$ 时,$x(t)=24$,从而 a 的最小值为 $2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$

5. 先估计 k 的上界.

当 $a=b=c=d=1$ 时,有 $4k\leqslant 4+4, k\leqslant 2$

下面证明:对于 $a、b、c、d\in[0,1]$,恒有 $a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

先证一个引理.

引理　若 $x,y\in[0,1]$,则有

$$x^2y+1\geqslant x^2+y^2 \tag{①}$$

此不等式等价于$(y-1)(x^2-y-1)\geqslant 0$

从而式(1)成立.分别用 a,b 和 b,c 和 c,d 和 d,a 代替式①中的 x,y,得

$a^2b+1\geqslant a^2+b^2$　　　　$b^2c+1\geqslant b^2+c^2$

$c^2d+1\geqslant c^2+d^2$　　　　$d^2a+1\geqslant d^2+a^2$

把上面四个不等式相加,即得

$a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+4\geqslant 2(a^2+b^2+c^2+d^2)$

综上所述,k 的最大值为 2

6. 对 λ 分两种情况:

(i) 当 $\lambda\geqslant 2$ 时,有

$x^2+y^2+\lambda xy\geqslant x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$

当 $xy=0$ 时,上述不等式等号成立.

(ii) 当 $0<\lambda<2$ 时,有

$$\begin{aligned}x^2+y^2+\lambda xy&=(x+y)^2-(2-\lambda)xy\\&\geqslant(x+y)^2-(2-\lambda)\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\\&=\frac{2+\lambda}{4}(x+y)^2\end{aligned}$$

当 $x=y$ 时等号成立.

所以,最大的常数

$$c(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda\geqslant 2\\ \frac{2+\lambda}{4} & 0<\lambda<2\end{cases}$$

7. 当 $a=b$,即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时,原不等式为

$a^2(a+\sqrt{2}a)+a^2(\sqrt{2}a+a)+2a^2(a+a)\geqslant\sqrt{2}ka^3$

即　$k\leqslant 2+3\sqrt{2}$

猜测 k 的最大值为 $2+3\sqrt{2}$,下证:

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\geqslant(2+3\sqrt{2})abc.$ ①

不妨设 $c=1$,边 a 所对的角为 θ,则 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4}]$.令 $t=\sin\theta\cdot\cos\theta\leqslant\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{2}=\frac{1}{2}$

于是有

$$
\begin{aligned}
&a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\\
&=\sin^2\theta(\cos\theta+1)+\cos^2\theta(1+\sin\theta)+\sin\theta+\cos\theta\\
&=1+(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta\cdot\cos\theta+1)\\
&\geqslant 1+2\sqrt{t}(t+1)\\
&\geqslant 1+2\sqrt{2}t(t+1)(\text{由 } t\leqslant\frac{1}{2},\text{则}\sqrt{2}t\leqslant\sqrt{t})\\
&=(2\sqrt{2}t^2+\frac{\sqrt{2}}{2})+2\sqrt{2}t+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&\geqslant 2\sqrt{2}t+2\sqrt{2}t+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)t\\
&=(2+3\sqrt{2})t\\
&=(2+3\sqrt{2})\sin\theta\cdot\cos\theta\\
&=(2+3\sqrt{2})abc
\end{aligned}
$$

从而式 ① 得证,且当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立.故欲求的 k 的最大值为 $2+3\sqrt{2}$

8. 先设法消去一个参数 a,然后再求 k 的最小值就容易了.利用算术 — 几何平均不等式,得

$$\sqrt[n+k]{a^k\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]^n}\leqslant\frac{ka+n\left[\frac{k}{n}(1-a)\right]}{k+n}=\frac{k}{k+n}$$

所以 $\quad a^k(1-a)^n\leqslant\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}$

当且仅当 $a=\frac{k(1-a)}{n}$,即 $a=\frac{k}{n+k}$ 时等号成立.

于是,要求出最小的正整数 k,使得对任何正整数 n,都有

$$\frac{k^kn^n}{(n+k)^{n+k}}<\frac{1}{(n+1)^3} \quad ①$$

当 $k=1$ 时,取 $n=1$,式 ① 矛盾;

当 $k=2$ 时,取 $n=1$,式 ① 矛盾;

当 $k=3$ 时,取 $n=3$,式 ① 矛盾;

因此,$k\geqslant 4$.

下证 $k=4$ 时,式 ① 成立,即

$$4^4n^n(n+1)^3<(n+4)^{n+4} \quad ②$$

当 $n=1,2,3$ 时,容易验证式 ② 成立.

当 $k\geqslant 4$ 时,利用算术 — 几何平均不等式得

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n+4]{4^4n^n(n+1)^3}&=\sqrt[n+4]{16(2n)(2n)(2n)(2n)n^{n-4}(n+1)^3}\\
&\leqslant\frac{16+4\times 2n+n(n-4)+3(n+1)}{n+4}\\
&=\frac{n^2+7n+19}{n+4}<n+4
\end{aligned}
$$

综上所述,k 的最小值为 4.

9. 将原题中的式② 变为 ③ 式

$$(x-b)^2+(y-1)^2>b \quad ③$$

因对任意实数 x,y,式 ③ 均成立,故 $b<0$.

于是原题的式 ① 变为 ④ 式

$2[2\cos^2(x-y)-1]+8b\cos(x-y)+8b(b+1)+5>0$ ④

令 $z=\cos(x-y), z\in[-1,1]$，则式(4)为

$4z^2+8bz+8b^2+8b+3>0, z\in[-1,1]$.

作辅助函数 $f(z)=4z^2+8bz+8b^2+8b+3$，则 $f(z)$ 在 $[-1,1]$ 上恒大于 0.

因 $b<0$，所以，有如下两种情形：

(i) $\Delta=64b^2-4\times4(8b^2+8b+3)<0$

则 $b<-\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}<b<0$;

(ii) $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\-b>1\\f(1)>0\end{cases}$，有 $\begin{cases}-\frac{3}{2}\leqslant b\leqslant-\frac{1}{2}\\b<-1,\\b<-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ 或 }b>-1+\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$

则 $-\frac{3}{2}\leqslant b<-1-\frac{\sqrt{2}}{4}$

综合(i)、(ii)，可得 b 的取值范围为

$\left(-\infty,-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$

可见，利用函数的性质(单调性、最值等)来处理部分含参数的不等式问题是很有效的.

10. 对任意的 $x\in[0,1]$，有恒等式

$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)=-2x^2$ 成立

∵ 在闭区间上

$0<\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2$

$\leqslant\sqrt{1+x+\frac{x^2}{4}}+\sqrt{1-x+\frac{x^2}{4}}+2$

$=\left(1+\frac{x}{2}\right)+\left(1-\frac{x}{2}\right)+2$

$=4, 0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant1$

∴ 在 $[0,1]$ 上函数

$h(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)$

满足 $0\leqslant h(x)\leqslant4$

故对 $x\in[0,1]$ 有

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=\frac{-x^2}{h(x)}\leqslant-\frac{x^2}{4}$

如果对适合 $0<\alpha<2$ 的某数 α 及 $\beta>0$，下列与上述类似的不等式成立

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\leqslant-\frac{x^\alpha}{\beta}, x\in[0,1]$ ①

即 $-\frac{x^2}{h(x)}\leqslant-\frac{x^\alpha}{\beta}$，则 $x^{2-\alpha}\geqslant\frac{h(x)}{\beta}(x\in[0,1])$

令 $x\to0$，得 $0\geqslant\frac{h(0)}{\beta}$. 但 $h(0)=4$. 所得矛盾表明 $\alpha=2$ 是满足条件 ① 的最小数.

使不等式

$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\leqslant-\frac{x^2}{\beta}(x\in[0,1])$ ②

即 $-\frac{x^2}{h(x)}\leqslant-\frac{x^2}{\beta}$ 成立的最小正整数 β，等于满足 $h(x)\leqslant\beta(x\in[0,1])$ 的最小正整数 β. 因此，$\beta=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant1}h(x)$.

对任何 $u,v\geqslant 0$,有

$$\sqrt{u}+\sqrt{v}\leqslant\sqrt{2(u+v)} \quad ③$$

在 ③ 中,令 $u=1+x,v=1-x$,得

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\leqslant 2$$

于是,再次得到

$$h(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)\cdot(\sqrt{1-x^2}+1)$$

$$\leqslant 2(\sqrt{1-x^2}+1)\leqslant 4$$

另一方面,上面已经指出 $h(0)=4$,因此,有 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}h(x)=4$

故满足 ② 的最小正数 $\beta=4$.

综上知,适合条件的最小正数 $a=2$,此时一定存在 β(事实上 $\beta\geqslant 4$) 使原不等式成立.

11. 令 $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x}}$

则 $a\leqslant\max\{f(x)\}$,下面求$\max\limits_{x>1}\{f(x)\}$

$$\because f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}(x+\sqrt{x})}-\frac{\sqrt{x-1}}{(x+\sqrt{x})^2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x})-(x-1)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}(x+\sqrt{x})^2}$$

$$=-\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}(x+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow x\in\left(1,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$\therefore$ 当 $x\in\left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$时,$f(x)$ 是增函数;当 $x\in\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$时,$f(x)$ 是减函数.

$$\therefore f(x)_{\max}=f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$$

故 $a_{\max}=\sqrt{\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

12. $u=\sqrt{x}$ 是在$[0,+\infty)$ 上的凸函数,当 $p=q=2$ 时,$u_{\max}=3\sqrt{2}$

13. $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时,$\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)_{\min}=27$

14. 由 $M_1\leqslant M_2$,即

$$\frac{3x+3\cdot(2y)+5z}{9}\leqslant\left[\frac{(3x)^2+3\cdot(2y)^2+5z^2}{9}\right]^{\frac{1}{2}}$$

代入约束条件,有 $3x+6y+5z\leqslant 9$,当 $3x=2y=z=1$,也就是 $x=\dfrac{1}{3},y=\dfrac{1}{2},z=1$ 时 $u_{\max}=9$

15. 由于对任意实数 t、a、b,有

$$|t-a|+|t-b|\geqslant|a-b|$$

并且在 $t\in[a,b]$ 时等号成立,所以

$$\sum_{i=1}^{10}|x+y-10i|\geqslant|100-50|+|90-40|+|80-30|+|70-20|+|60-10|=250,$$

在 $50\leqslant x+y\leqslant 60$ 时,等号成立.

同样 $\sum_{j=1}^{10} |3x-6y-36j| \geqslant 25\times 36 = 900$

在 $60\leqslant x-2y\leqslant 72$ 时,等号成立.

令 $f(t)=\sum_{k=1}^{10}|k(t-k)|$,在 $t>10$ 的时候其值显然大于 $f(10)$ 的值,所以 $f(t)$ 的最小值在 $t\in[1,10]$ 时考虑.

因为 $n\leqslant t\leqslant n+1$, n 为 1 至 9 之间的自然数.

$f(t)^2(1+2+\cdots+n)t-1^2-2^2-\cdots-n^2-[10+9+\cdots+(n+1)]+10^2+\cdots+(n-1)^2$ 是 t 的单调函数,而且

$$f(n+1)-f(n)=1+2+3+\cdots+n-[10+9+\cdots+(n+1)]$$
$$=n(n+1)-55$$

所以在 $n\geqslant 7$ 时, $f(n)\leqslant f(n+1)$,在 $n<7$ 时, $f(n)>f(n+1)$. 因此 $f(t)$ 的最小值在 $t=7$ 时达到, $f(t)=112$

所以 $\sum_{k=1}^{10}|k(19x+95y-95k)| = 95\sum_{k=1}^{10}\left|k\left(\frac{19x}{95}+\frac{95}{95}y-k\right)\right|$

$$\geqslant 95\times 112 = 10640$$

所以 $P(x,y)=\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}|(x+y-10i)\cdot(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)k|$

$\geqslant 250\times 900\times 10640 = 2394\times 10^6$

当 $x=55, y=-4$ 时, $P(x,y)=2394\times 10^6$

所以 $P(x,y)$ 的最小值为 2394×10^6

16. 由 $2x^2+3xy+2y^2=1$ 得 $2(x+y)^2=1+xy$,即 $2(x+y)^2=k-(x+y)+1$,移项得

$2(x+y)^2+(x+y)-(1+k)=0$

将这一方程视为关于 $x+y$ 的二次方程,由 $x+y$ 为实数得

$\Delta=1+8(1+k)\geqslant 0$

解得 $k\geqslant -\frac{9}{8}$

故 $x+y+xy$ 的最小值为 $-\frac{9}{8}$

17. 由已知得

$5x^2-(10+4y)x+y^2+6y+5-s=0$

$\Delta_x=-4(y^2+10y-5s)\geqslant 0$

于是, $5s\geqslant y^2+10y=(y+5)^2-25\geqslant -25$

$\therefore s\geqslant -5$,故 s 的最小值为 -5

18. 设 $b+c+d=A, c+d+a=B, d+a+b=C, a+b+c=D$

以上四式相加,可得

$$a+b+c+d=\frac{1}{3}(A+B+C+D) \qquad ①$$

从式(1)分别减去所设四式,得

$$a=\frac{1}{3}(B+C+D-2A)$$

$$b=\frac{1}{3}(C+D+A-2B)$$

$$c=\frac{1}{3}(D+A+B-2C)$$

$$d=\frac{1}{3}(A+B+C-2D)$$

原式可转化为

$$S=\frac{B+C+D-2A}{3A}+\frac{C+D+A-2B}{3B}+\frac{D+A+B-2C}{3C}+\frac{A+B+C-2D}{3D}$$

即 $3S+12$

$$=\frac{A+B+C+D}{A}+\frac{A+B+C+D}{B}+\frac{A+B+C+D}{C}+\frac{A+B+C+D}{D}$$

$$=(A+B+C+D)\cdot\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}\right)$$

$$\geqslant 16$$

即 $3S+12\geqslant 16, S\geqslant\frac{4}{3}$

当且仅当 $A=B=C=D$(即 $a=b=c=d$)时取等号.

故 S 的最小值为$\frac{4}{3}$

19. 设 $z_1=a+bi, z_2=b+ci, z_3=c+ai$,则

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|\geqslant|z_1+z_2+z_3|=(a+b+c)|1+i|$$

即 $$w=\frac{|z_1|+|z_2|+|z_3|}{a+b+c}\geqslant|1+i|=\sqrt{2}$$

故当 $a=b=c$ 时,w 的最小值为$\sqrt{2}$

20. $x^2-y^2=16$ 是中心在原点的等轴双曲线,它的参数方程为

$x=4\sec\theta, y=4\tan\theta\left(\theta\text{ 为参数,且 }\theta\neq\pm\frac{\pi}{2}\right)$.将其代入得

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{y}{8x}+1$$

$$=\frac{1}{16\sec^2\theta}+\frac{\tan\theta}{8\sec\theta}+1=\frac{\cos^2\theta}{16}+\frac{2\sin\theta}{16}+1$$

$$=-\frac{(\sin\theta-1)^2}{16}+\frac{9}{8}$$

故 $f(x,y)$ 的最大值为$\frac{9}{8}$,最小值为$\frac{7}{8}$

21. $x^2-9y^2-4x+18y-9=0$ 可转化为$\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{\frac{4}{9}}=1$,它的参数方程为

$x=2+2\sec\theta, y=1+\frac{2}{3}\tan\theta\quad\left(\theta\text{ 为参数},0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

代人 $f(x,y)$ 得

$$f(x,y)=\frac{5(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-4}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{5\times 4\sec^2\theta+3\times 2\sec\theta\times\frac{2}{3}\mathrm{tg}\theta-4}{4\sec^2\theta}$$

$$=5+\sin\theta-\cos^2\theta$$

$$=\sin^2\theta+\sin\theta+4$$

$$=\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

故 $f(x,y)$ 的最大值和最小值分别为 6 和$\frac{15}{4}$

22. 令 $a(2x+y-z)+b(x-y+z)+c(x+2y-z)=7x+5y-2z$.比较两边的系数,可得 $a=1,b=2,c=3$.分别用 1、2、3 乘以已知三个条件,得 $-1\leqslant 2x+y-z\leqslant 8, 4\leqslant 2(x-y+z)\leqslant 18, -9\leqslant 3(x+2y-z)\leqslant 21$,此三个式子相加得

$$-6\leqslant 7x+5y-2z\leqslant 47$$

即 $-6 \leqslant u \leqslant 47$

故 u 的最大值和最小值分别为 47 和 -6

23. 不妨设 $x \geqslant y$，令 $x = \frac{1}{2} + t$，则 $y = \frac{1}{2} - t, 0 \leqslant t < \frac{1}{2}$

$$\therefore w = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$$

$$= \frac{3+2t}{1+2t} \cdot \frac{3-2t}{1-2t} = \frac{9-4t^2}{1-4t^2} \geqslant \frac{9-36t^2}{1-4t^2} = 9$$

当 $t = 0$ 即 $x = y$ 时，所求最小值为 9

24. 设 $x = 3 + t_1, y = 2 + t_2, z = 1 + t_3$，代入已知式得 $4t_1 + 5t_2 + 8t_3 = 0$

$$w = 8x^2 + 15y^2 + 48z^2$$

$$= 180 + 12(4t_1 + 5t_2 + 8t_3) + 8{t_1}^2 + 15{t_2}^2 + 48{t_3}^2$$

$$\geqslant 180$$

（当且仅当 $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ 时得）

即当 $x = 3, y = 2, z = 1$ 时，w 的最小值为 180

第一章　多项式的运算

A组

1. 提示:必要性可用恒等定理,充分性可用数学归纳法.

2. 提示:比较多项式的次数.

3. 答案:$p(x)=0, p(x)=1$ 或 $p(x)=x^n(n\in\mathrm{N})$.

4. 答案:当 $\deg f(x)=0$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}a & k=1 \quad (a\text{ 为非零常数})\\ 1 & k>1\end{cases}$$

当 $\deg f(x)>0$ 时, $f(x)=x^k$.

5. 提示:利用二进制,可求得"允许的多项式"有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个.

6. 简解:一般地, P 中第 $k+1$ 项具有形式

$P_{k,n}(x)=x^k(1-x^{k+1})(1-x^{k+2})\cdots(1-x^n)$

记: $\varphi_n=\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)$,则 $P=\varphi_{1997}(1997)$

(i) $k<n$ 时, $P_{k,n}(x)=(1-x^n)P_{k,n-1}(x)$

(ii) $k=n$ 时, $P_{k,n}(x)=x^n$

可见存在递归关系: $\varphi_n(x)=(1-x^n)\varphi_{n-1}(x)+x^n$

即　$\varphi_n(x)-1=(1-x^n)[\varphi_{n-1}(x)-1]$

$\therefore \varphi_n(x)-1=(1-x^n)(1-x^{n-1})\cdots(1-x^2)[\varphi_1(x)-1]$

因为 $\varphi_1(x)=P_{0,1}(x)+P_{1,1}(x)=(1-x)+x=1$

$\therefore \varphi_n(x)=1$

$\therefore P=\varphi_{1997}(1997)=1$

7. 在区间 $[-1,1]$ 上任取满足条件

$$0<|x_i-x_j|\leqslant 1\quad(0\leqslant i\leqslant j\leqslant 3) \tag{*}$$

的四个值 x_0,x_1,x_2,x_3,则有

$$|a|\leqslant\max_{0\leqslant i\leqslant 3}\{|p(x_i)|\}\left(\sum_{i=1}^{3}|a_i|\right)\leqslant\sum_{i=1}^{3}|a_i|\overset{令}{=\!=}k$$

而在条件(*)下,对每一 $0\leqslant i\leqslant 3$,有

$$|a_i|=\prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant 3\\ j\neq i}}(x_i-x_j)^{-1}\geqslant 1$$

所以 $k\geqslant 4$,故 $|a|\leqslant 4$

又因为 $P_0(x)=4x^3-3x$　满足 $P_0(-1)=-1, P_0(1)=1$,并且在它的极值点上有

$P_0\left(-\frac{1}{2}\right)=1, P_0\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

所以 $P_0(x)\in M$,于是 $|a|$ 可以取到 4,故 k 最小值为 4.

8. 令 $Q(x)=p(x)^{-1}$,于是 $Q(k)=-1^{k+1}, k=0,1,2,\cdots,2n$. 由拉格朗日插值恒等式有

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{2n}Q(x_k)\cdot\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{2n})}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{2n})}$$

其中 $x_k=k,k=0,1,2,\cdots,2n$，将 $x=2n+1$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}Q_{(2n+1)}&=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+1}\cdot\frac{(2n+1)\cdots(2n+1-k+1)(2n+1-k-1)\cdots(2n+1-2n)}{k(k-1)\cdots1\cdot(-1)(-2)\cdots[-(2n-k)]}\\&=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+1}(-1)^{2n-k}\frac{(2n+1)\cdots(2n+2-k)(2n-k)\cdots1}{k!(2n-k)!}\\&=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{2k+1}\frac{(2n+1)\cdots(2n+1-k+1)}{k!}\\&=-\sum_{k=0}^{2n}C_{2n+1}^{k}=-\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}+1=-2^{2n+1}+1\end{aligned}$$

所以 $P(2n+1)=Q(2n+1)+1=2-2\times4^n$

由已知 $p(2n+1)=-30$，所以 $2-2\times4^n=-30$

解得 $n=2$

设 $P(x)=ax^2+bx+c$，那么

$$\begin{cases}p_{(0)}=c=0\\p_{(1)}=a+b+c=2\\p_{(2)}=4a+2b+c=0\end{cases}$$

解得，$a=2,b=4,c=0$，于是 $P(x)=-2x^2+4x$

9. 先证明结论对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 成立.

构造一个次数不高于 $n-1$ 次的多项式，使它在每个点 a_i 处取值为 $a_j{}^k,i=1,2,\cdots,n$. 由拉格朗日公式，这个多项式为

$$P(x)=\sum_{j=1}^{n}a_i{}^k\frac{\prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\j\neq i}}(x-a_j)}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\j\neq i}}(a_i-a_j)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i{}^k}{p_i}\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\j\neq i}}(x-a_j)$$

其中 x^{n-1} 的系数是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i{}^k}{p_i}$

另一方面，多项式 $P(x)=x^k$(由多项式恒等)，当 $k<n-1$ 时，x^{n-1} 的系数为0，而当 $k=n-1$ 时，x^{n-1} 的系数为1，这就是说明当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i{}^k}{p_i}$ 都是整数.

对于 $k\geqslant n$，假设 $b_j=\frac{a_1^{k-j}}{p_1}+\frac{a_2^{k-j}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-j}}{p_n}$，$j=1,2,\cdots,n$，且 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是整数. 设多项式 $f(x)=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$ 的根为$a_1,a_2,\cdots,a_n$，即 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 则由上式易知，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 均为整数，且对每个 $j=1,2,\cdots,n$ 有 $a_j{}^n=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ia_j{}^{n-i}$

$$\begin{aligned}\text{从而}\sum_{i=1}^{n}c_ib_i&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_i\frac{a_j{}^{k-i}}{p_j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j{}^{k-n}}{p_j}\cdot\sum_{i=1}^{n}c_ia_j{}^{n-i}\\&=-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j{}^{k-n}}{p_j}a_j{}^n=-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j{}^k}{p_j}\end{aligned}$$

所以$\frac{a_1{}^k}{p_1}+\frac{a_2{}^k}{p_2}+\cdots+\frac{a_n{}^k}{p_n}=-\sum\limits_{i=1}^{n}c_ib_i$ 也是整数，故由数学归纳法原理知命题成立.

10. 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，$b_j=\frac{i}{n}$

$0\leqslant i\leqslant n$. 根据拉格朗日插值公式.

$$f(x)=f(b_0)\frac{(x-b_1)\cdots(x-b_n)}{(b_0-b_1)\cdots(b_0-b_n)}+\cdots+f(b_n)\frac{(x-b_0)\cdots(x-b_{n-1})}{(b_n-b_0)\cdots(b_n-b_{n-1})}$$

令 $S=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$,则

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2}|f(x)|\leqslant\left|f(b_0)\frac{(x-b_1)\cdots(x-b_n)}{(b_0-b_1)\cdots(b_0-b_n)}\right|+\cdots+\left|f(b_n)\frac{(x-b_0)\cdots(x-b_{n-1})}{(b_n-b_0)\cdots(b_n-b_{n-1})}\right|$$

$$\leqslant\left[\left|\frac{(2-b_1)\cdots(2-b_n)}{(b_0-b_1)\cdots(b_0-b_n)}\right|+\cdots+\left|\frac{(2-b_0)\cdots(2-b_{n-1})}{(b_n-b_0)\cdots(b_n-b_{n-1})}\right|\right]$$

因为 $\left|\frac{(2-b_0)\cdots(2-b_{i-1})(2-b_{i+1})\cdots(2-b_n)}{(b_n-b_0)\cdots(b_i-b_{i-1})(b_i-b_{i+1})\cdots(b_i-b_n)}\right|$

$$=\frac{2n(2n-1)\cdots n}{i!(n-i)!(2n-i)!}$$

$$=C_{2n}^{i}C_{2n-1-i}^{n-i}\leqslant C_{2n}^{i}C_{2n-1}^{n-i},$$

所以

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2}|f(x)|\leqslant S\cdot\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{i}C_{2n-1}^{n-i}<S\Big(\sum_{i=0}^{n}C_{2n}^{i}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n}C_{2n-1}^{n-i}\Big)<S\cdot 2^{2n}\cdot 2^{2n-1}<S\cdot(16)^n$$

故取 $C=16$ 便可.

B组

1. 提示: $C_n^r\cdot x^r-C_n^{r+1}x^{r+1}=C_n^r\cdot x^r\left(1-\frac{n-r}{r+1}x\right)$

$$\geqslant C_n^r\cdot x^r\left(1-\frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{1}{n}\right)=C_n^r\cdot x^r\frac{r(n+1)}{n(r+1)}\geqslant 0$$

2. 提示:(1) 利用恒等式 $(1-x^2)^n=(1+x)^n\cdot(1-x)^n$

(2) 左边和式是 $\sum\limits_{k=0}^{n}(1+x)^{n-k}(1+y)^k$ 展开式中 $x^{n-h}\cdot g^n$ 的系数.

3. 提示:用恒等定理.

4. 提示:对 n 用归纳法.

5. 答案: $\frac{1}{24}n(n+1)(5n^2+5n+2)$

6. 由二项式定理:

$$\sum_{r\geqslant 0}c_n^rx^r=(1+x)^n=(1+x)^m\cdot(1+x)^{n-m}$$

$$=\Big(\sum_{t\geqslant 0}c_m^t\cdot x^t\Big)\cdot\Big(\sum_{k\geqslant 0}c_{n-m}^kx^k\Big)$$

$$=\sum_{r\geqslant 0}x^r\Big(\sum_{\substack{k+t=r\\k\geqslant 0,t\geqslant 0}}c_{n-m}^kc_m^t\Big)$$

$$=\sum_{r\geqslant 0}x^r\Big(\sum_{k\geqslant 0}c_{n-m}^kc_m^{r-k}\Big)$$

比较上式两边 x^r 的系数,得证.

7. 证明:由于 $n\geqslant 2$,从而 $n^2-2n(n-1)\leqslant 0$,于是,对任何 $t>0$,有

$$\frac{n(n-1)}{2}t^2-nt+1\geqslant 0$$

由此得

$$(1+t)^n\geqslant 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2\geqslant 2nt \qquad ①$$

当 $x>\max(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 时,由于 $f(x)$ 是首 ① 多项式,从而 $f(x+1)=(1+x-b_1)(1+x-b_2)\cdots(1+x-b_n)>0$

由均值不等式可知

$$f(x+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}\geqslant nf(x+1)\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}}$$

$$= n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}}$$

由 ① 可得$\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i} \geqslant 2n$,所以 $f(x+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i} \geqslant 2n^2$

由此得 $f(x+1) \geqslant \frac{2n^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-b_i}}$

8. 解:x,y,z,w 能满足给定的方程组等价于 $t=2^2,4^2,6^2,8^2$,即 $t=4,16,36,64$ 满足方程:

$$\frac{x^2}{t-1}+\frac{y^2}{1-9}+\frac{z^2}{t-25}+\frac{w^2}{t-49}=1 \qquad ①$$

去分母,当 $t\neq 1,9,25,49$ 时,关于 t 的方程 ① 等价于方程:

$$(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)-x^2(t-9)(t-25)(t-49)-y^2(t-1)(t-25)(t-49)-z^2(t-1)(t-9)(t-49)-w^2(t-1)(t-9)(t-25)=0 \qquad ②$$

方程 ② 是关于 t 的 4 次方程,$t=4,16,36,64$ 是 ② 的根,也是它的全部根,故方程 ② 又等价于方程.

$$(t-4)(t-16)(t-36)(t-64)=0 \qquad ③$$

由方程 ②、③ 中的 t^4 的系数都是 1,故其余各同次项的系数也应相等,比较 t^3 的系数即得

$1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2=4+16+36+64$

$\therefore x^2+y^2+z^2+w^2=36$

9. 解:

$\because f(x)=ax^2-c$

$\therefore f(-1)=f(1)$

由拉格朗日插值多项式,有

$$f(x)=f(-1)\frac{(x-1)(x-2)}{(-1)(-1)(-1)(-2)}+f(1)\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}+f(2)\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2-4)f(1)+\frac{1}{3}(x^2-1)f(2)$$

从而 $f(3)=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2)$

$\because -4\leqslant f(1)\leqslant -1,\ -1\leqslant f(2)\leqslant 5$

$\therefore -1\leqslant f(3)\leqslant 20$

故选(C).

10. 解:因为 $P(x)$ 是四次多项式且至少有一个实根,故 $P(x)$ 可分解成两个二次多项式的积,于是可设

$$P(x)=(x^2+\lambda x+1)(x^2+\mu x+1)$$
$$=x^4+(\lambda+\mu)x^3+(\lambda\mu+2)x^2+(\lambda+\mu)x+1$$

比较两端的 x^3,x^2 的系数得

$\lambda+\mu=a,\lambda\mu=b-2$

因为方程有实根,不妨设 $x^2+\lambda x+1$ 有实根,于是 $\Delta=\lambda^2-4\geqslant 0$,即 $|\lambda|\geqslant 2$,且 λ 为实数,故 μ 也是实数.

$$a^2+b^2=(\lambda+\mu)^2+(\lambda\mu+2)^2$$
$$=(\lambda^2+1)\left(\mu+\frac{3\lambda}{\lambda^2+1}\right)^2+\lambda^2+\frac{9}{\lambda^2+1}-5$$
$$=(\lambda^2+1)\left(\mu+\frac{3\lambda}{\lambda^2+1}\right)^2+(\lambda^2+1)\left(1-\frac{3}{\lambda^2+1}\right)^2$$
$$\geqslant(2^2+1)\left(1-\frac{3}{2^2+1}\right)^2=\frac{4}{5}$$

当且仅当 $\lambda=\pm 2,\mu=-\frac{3\lambda}{1+\lambda^2}$ 时,等号成立,故 a^2+b^2 的最小可能值是 $\frac{4}{5}$

11. 证明:由于 $P(x)$ 不是常数,故 $deg(P)\geqslant 1$,又 $deg[p(x)]^2=2deg(x)$

由根的个数定理,$n(p)\leqslant deg[p(x)]^2$,所以 $n(p)-deg(p)\leqslant deg(p)$

故当 $deg(p)\leqslant 2$ 时,命题成立.

因为 $[p(x)]^2=1$ 可变形为 $[p(x)-1][p(x)+1]=0$,若可证得多项式 $p(x)-1$ 与 $p(x)+1$ 中至少有一个多项式的整数根的个数不超过 2,则 $n(p)\leqslant 2+deg(p)$,即 $n(p)-deg(p)\leqslant 2$.

下面证明:$p(x)-1$ 与 $p(x)+1$ 中至少有一个多项式的整数根的个数不超过 2.

(反证法)设 $p(x)-1$ 与 $p(x)+1$ 各有两个以上整数根分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t(s,t>2,s+t=n(p))$,它们互不相等,不妨设它们最小的整数根为 β_1,则

$$p(x)+1=(x-\beta_1)Q(x),Q(x)\in Z[x]$$

则 $$p(x)-1=(x-\beta_1)Q(x)-2$$

$\because a_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是 $p(x)-1$ 的根.

$\therefore (a_i-\beta_1)Q(a_i)-2=0$

即 $(a_i-\beta_1)Q(a_i)=2\quad(i=1,2,\cdots,s)$

$\because a_i-\beta_1,Q(a_i)\in Z\quad(i=1,2,\cdots,s)$

$\therefore a_i-\beta_1\mid 2$

$\because a_i-\beta_1(i=1,2,\cdots,s)$ 是互不相同的 $s(>2)$ 个正整数.

$\therefore Z$ 有多于 2 个的正约数,矛盾.

故 $p(x)-1$ 与 $p(x)+1$ 中至少有一个多项式的整数根的个数不超过 2. 由此可得:

$n(p)-deg(p)\leqslant 2$

第二章　多项式的除法

A组

1. 证明:对 $n\in Z^+$ 用归纳法证明.

当 $n=0$ 时,因为

$(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}\equiv x^2+x+1$

所以结论成立. 设对某个 $n-1$ 结论成立,即多项式 $(x+1)^{2n-1}+x^{n+1}$ 被多项式 x^2+x+1 整除,则多项式

$$\begin{aligned}(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}&\equiv(x+1)^2(x+1)^{2n-1}+xx^{n+1}\\&\equiv(x^2+2x+1)(x+1)^{2n-1}+xx^{n+1}\\&\equiv(x^2+x+1)(x+1)^{2n-1}+x((x+1)^{2n-1}+x^{n+1})\end{aligned}$$

同样被 x^2+x+1 整除. 于是结论对 n 成立.

2. 解:如果 $p(x)=c$(常数),则有 $c=c^k$,所以,当 k 是偶数时,$c=0$ 或 $c=1$;当 k 是奇数时,$c=0$ 或 $c=\pm 1$

如果 $p(x)$ 不是常数,则对 x 的无穷多个值,$y=p(x)$ 必须无穷多个值,即 $p(y)=y^k$. 对无穷多个 y 成立. 由定理 9 的推论 1,有 $p(x)=x^k$. 经验证知,以上所求这些多项式皆满足条件.

3. 提示:用反证法.

4. 设 $S_0,S_1,\cdots,S_n$ 是多项式 $S(x)$ 的系数,即设 $S_{(x)}=S_0+S_1x+\cdots+S_nx^n$、在所给的恒等式两端同乘以 $x-1$,得

$(x-1)(p(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5))\equiv(x^5-1)S(x)$,即 $p(x^5)+(x^5-1)S_1(x)\equiv-(x^5-1)S_2(x)+xp(x^5)+(x^2-x)Q(x^5)+(x^3-x^2)R(x^5)$,其中记

$S_1(x) = S_0 + S_5x^5 + S_{10}x^{10} + \cdots + S_m x^{5m}$

$S_2(x) = S(x) - S_1(x), m = \left[\frac{n}{5}\right]$

由于在上一恒等式左端变量 x 的指数是5的倍数,右端的却不是,所以恒等式两端都应等于零,由此得

$p(x^5) \equiv -(x^5 - 1)S_1(x)$

在上式中取 $x = 1$,得 $p(1) = 0$,因此由 Bézout 定理,多项式 $p(x)$ 被 $x - 1$ 整除

5. 证:因为次数是正整数,所以集合中有次数最小的多项式,设为

$w_1(x) = u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)$ ①

若 $w_1(x) \nmid f(x)$,则 $f(x) = w_1(x)Q(x) + r_1(x)$,其中 $r_1(x) \neq 0, degr_1(x) < degw_1(x)$,于是

$$\begin{aligned} r_1(x) &= f(x) - w_1(x)Q(x) \\ &= f(x) - Q(x)[u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x)] \\ &= [1 - Q(x)u_1(x)]f(x) + [-Q(x)v_1(x)]g(x) \end{aligned}$$

这说明 $r_1(x)$ 是已知集合中的元素,且 $degr_1(x) \geqslant degw_1(x)$

与假设矛盾,故 $w_1(x) \mid f(x)$

同理可证,$w_1(x) \mid g(x)$.因此,$w_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.

若 $w_2(x) \neq 0$,且 $w_2(x) \mid f(x), w_2(x) \mid g(x)$,则由 ① 式知,$w_2(x) \mid w_1(x)$.

因此,$w_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

6. 提示:由于 $x, x+1, 2x+1$ 两两互质,故只须证明 $x, x+1, 2x+1$ 都整除$(x+1)^{2m} - x^{2m} - 2x - 1$

7. 解:将 $x = 0,2$ 代入题中的恒等式,可知多项式 $p(x)$ 有根0和1,即它被多项式 $x^2 - x$ 整除.其次,将 $P(x) = (x^2 - x)Q(x)$ 代入恒等式,可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x) \equiv Q(x-1)$,由此得到.

$Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots$

因此 $Q(x) \equiv a$,其中 a 是常数,于是所求的多项式为 $p(x) = a(x^2 - x)$,反之,易验证,所有这样的多项式也都满足题中的恒等式.

8. 简解:设 $f(x) = (x^2+1)(x^2+2)q(x) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)$

则 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ 被$x^2 + 1$ 除的余式.

$(c-a)x + (d-b) = 4x + 4$

故 $c - a = d - b = 4$

同理,$f(x)$ 除以 $x^2 + 2$ 的余式为

$(c - 2a)x + d - 2b = 4x + 8$

故 $c - 2a = 4, d - 2b = 8$

由此可见 $a = 0, b = -4, c = 4, d = 0$

故 $r(x) = -4x^2 + 4x$

B组

1. 解:多项式 $P(x) = ax$ 满足题中条件,其中 a 是常数.下面对 $n \in Z^+$ 用归纳法证明,所欲求的多项式 $P(x)$ 满足条件 $P(n) = np(1)$,当 $n = 0$.和 $n = 1$ 时,等式显然成立.设等式对 $n-1$ 和 n 成立,其中 $n \in N^+$,则 $p(n+1) = 2p(n) - p(n-1) = (n+1)p(1)$

即等式对 $n+1$ 也成立.因此多项式 $p(x) - p(1)x$ 有无限多个根$x = 0,1,2\cdots$,由定理54,它应当恒等于零.于是所求的多项式具有 $P(x) = ax$ 的形式.

2. 解:将 $x = 1, -2, 0$ 代入题中的恒等式,可知多项式有根 $0, \pm 1$,即它被 $x^3 - x$ 整除.其次,将 $p(x) = (x^3 - x)Q(x)$ 代入恒等式,可知多项式 $Q(x)$ 满足恒等式 $Q(x) \equiv Q(x-1)$,由此得到,

$Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = \cdots$

因而 $Q(x)=a$，a 为常数，于是，所求的多项式 $p(x)=a(x^3-x)$. 反之，容易验证所有这种形式的多项式也都满足题中的恒等式.

3. 提示：用反证法.

4. 证：因为 $f(x)\in Z[x]$，$a,b\in Z$，由 $a\neq b$，所以，由定理3(余数定理)推论2，有 $a-b\mid f(a)-f(b)$

$\because f(a)=b, f(b)=c, \therefore a-b\mid b-c$

$\therefore b-c=m(a-b)(m\in Z)$ ①

同理 $c-a=n(b-c)(n\in Z)$ ②

$a-b=p(c-a)(p\in Z)$ ③

三式相乘得

$(b-c)(c-a)(a-b)=mnp(a-b)(b-c)(c-a)$

$\because a,b,c$ 互不相等，$\therefore mnp=1$

$\because m\in Z, \therefore$ 只有 $m=-1$ 或 1

若 $m=-1$，由 ① 得 $b-c=b-a$，$\therefore a=c$，矛盾.

若 $m=1$，由 $n=p=1$ 或 $n=p=-1$，均可推得 $a=b=c$，矛盾.

故命题成立.

5. 证：考虑多项式 $Q(x)=p(a-x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，

则由定理有

$$a_0=Q(0)=p(a)<0,\quad a_1=Q'(0)=-p(a)\leqslant 0$$

$$a_2=\frac{Q''(0)}{2}=\frac{(-1)^2p''(a)}{2}\leqslant 0$$

……，

$$a_n=\frac{Q^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^np^{(n)}(a)}{n!}\leqslant 0$$

因此，对所有 $x\geqslant 0$，有 $Q(x)<0$，即多项式 $p(x)$ 在 $x\in(-\infty,a]$ 上没有根. 同理，对多项式

$p(x)=p(b+x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$

应用定理有

$$b_0=R_{(0)}=P_{(b)}>0, b_1=R'_{(0)}=P'_{(b)}\geqslant 0$$

$$b_2=\frac{R''_{(0)}}{2}=\frac{P''_{(b)}}{2}\geqslant 0,\cdots,b_n=\frac{R^{(n)}_{(0)}}{n!}=\frac{P^{(n)}_{(b)}}{n!}\geqslant 0$$

因此，当 $x\geqslant 0$ 时有 $R(x)>0$，从而多项式 $P(x)$ 在 $x\in[b,+\infty)$ 上没有根，这就证明，多项式 $p(x)$ 所有的实根都在 (a,b) 上.

6. 简解：只须证明 $f(i)=g(i)=0(i^2=-1)$，事实上，有

$$\begin{cases}(i-1)f(i)+(i-2)g(i)=0\\(i+1)f(i)+(i+2)g(i)=0\end{cases}\Rightarrow f(i)=g(i)=0$$

7. 解：设

$p(x)=x^2+ux+v=(x-r)(x-s)$ ①

$Q(x)=x^2+wx+t$

由(2) $r^2+wr+t=s$ ②

$s^2+ws+t=r$ ③

②－③得 $w=-(r+s+1)$ ④

将④代入②得 $t=(r+s)+rs$ ⑤

由①及韦达定理得

$r+s=-u,\quad rs=v$

代入④，⑤，得

$w = u - 1, t = v - u$

$\therefore f(x) = P(x)Q(x)$

$= (x^2 + ux + v)[x^2 + (u - 1)x + (v - u)]$

$= x^4 + (2u - 1)x^3 + (u^2 - 2u + 2v)x^2$

$= (u^2 - 2uv + v)x + v(v - u)$

比较两端同次项的系数,得

$$\begin{cases} 2a + 1 = 2u - 1 & ⑥ \\ (a - 1)^2 = u^2 - 2u + 2v \\ b = -(u^2 - 2uv + v) & ⑦ \\ 4 = v(v - u) \end{cases}$$

解之得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -14 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

当 $a = -1, b = -2$ 时,由⑥、⑦解得 $u = 0, v = 2$,于是 $P(x) = x^2 + ux + v = x^2 + 2$ 无实根,与题设条件(1)不合,故舍去.因此 $a = 2, b = -14$ 为所求

8. 简解:用反证法.

如果可约,即 $f(x) = g(x)h(x)$,其中 g, h 之首项系数为 1

用 $x = a_j$ 代入,有

$g(a_j)h(a_j) = 1.$

由于 $g(a_j), h(a_j)$ 都是整数,所以有

$g(a_j) = h(a_j)$,而$[g(a_j)]^2 = 1, 1 \leqslant j \leqslant n$

另一方面,由于 f 是无实根,所以对一切实数 x 有

$g(x) > 0, h(x) > 0$

这证明了 $g(a_j) = h(a_j) = 1, 1 \leqslant j \leqslant n$

因此,$(x - a_j) \mid (g(x) - 1), (x - a_j) \mid (h(x) - 1)$

所以 $g(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j)g_1(x) + 1, h(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j)h_1(x) + 1$.其中 g_1, h_1 仍为首项系数等于 1 的整系数多项式,但是 $deg(g(x)) + degh(x) = 2n$.这证明了 $g(x) = h(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - a_j) + 1$,于是

$f(x) = [g(x)]^2$

即 $\prod_{j=1}^{n}(x - a_j)^2 + 1 = [\prod_{j=1}^{n}(x - a_j) + 1]^2$,矛盾.证毕.

第三章　多项式的根

A组

1. 答案:(1)当且仅当 $(n, m + 1) = 1$;(2) $m = 6k + 2$ 或 $m = 6k + 4$(k 为非负整数)

2. 提示:(1)由题设 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ 是 $g = (x + 1)p - x$ 的根,再由 $degg = n + 1$ 知,$g = ax(x - 1)\cdots(x - n)$,令 $x = -1$,得 $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n + 1)!}$(2)定义数列 $\{x_n\}: x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^2 + 1(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 用归纳法易证:$f(x_n) = x_n$,由恒等定理,得 $F = x$

3. 提示:由 $a + b\sqrt{c}$ 是无理数,可证 $degf \geqslant 2$,令 $g = (x - a)^2 + b^2c, f = gq + ax + b$,由 $f(a + b\sqrt{c}) = 0$,可证 $a = b = 0$,从而 $q \mid f$

4. 提示:设 f 有 $k(k \leqslant m)$ 个不同根 $x_i(i = 1, 2, \cdots, k)$.由此推出集合 $\{x_1^2, x_1x_2, \cdots, x_1x_k\} = \{x_1,$

$x_2,\cdots,x_k|$,再推出 $x_1^k=1$.由此及对称性知 x_j 恰是全部k 个单位根ϵ_i,再考虑到这些根可能是重根,得 $f=A\prod(x-\epsilon_i)^{m_j}$,这里 $A\neq 0,\sum m_j=m$

5. 简证:若有根 $a(|a|=1)$,由 $a^n(a-1)=1$ 知 $|a-1|=1$,由两圆的交点得 $a=e^{i\frac{\pi}{3}}$ 或 $e^{i\frac{\pi}{3}}$,无论哪种情形代入原方程都有 $6\mid n+2$.若 $6\mid n+2$ 易验证上述两个 a 值都是根.

6. 简证:设 $f-2=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)g$ 仅设有整数a,使 $f(a)$ 等于1,3,5,7,9中的某一个,则 $f(a)-2=(a-x_1)(a-x_2)(a-x_3)(a-x_4)g(a)$
等于 $-1,1,3,5,7$ 中的某一个.但这5个数中任何一个都不能分解成5个整数的乘积,矛盾.

7. 提示:(1) 设三根为 x_1,x_2,x_3,由韦达定理

$a^2-3b=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2]\geqslant 0$

(2) $\frac{1}{3}(2\sqrt{a^2-3b}-a)\geqslant -\frac{a}{3}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\geqslant \min(x_1,x_2,x_3)$

(3) 设 $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$,则$\sqrt{a^2-3b}\leqslant x_3-x_1\Leftrightarrow a^2-3b\leqslant (x_3-x_1)^2\Leftrightarrow (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2\leqslant (x_3-x_1)^2$

8. 提示:利用定理4.

9. 简解:由题设可知,$|r-a_1|\cdots|r-a_{2n}|=(ni)^2$,因 $r-a_1,r-a_2,\cdots,r-a_{2n}$ 是两两不相等的整数.为使

$|r-a_1|\cdot|r-a_2|\cdots|r-a_{2n}|=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdots\cdots n\cdot n$

必须且只须 $|r-a_1|,|r-a_2|,\cdots,|r-a_{2n}|$ 中恰好有两个1,两个2,……,两个 n.若 $|r-a_i|=|r-a_j|$,只能是 $r-a_i=-(r-a_j)$,故$(r-a_1)+(r-a_2)\cdots+(r-a_{2n})=0$,即 $r=\frac{1}{2n}\sum a_i$

10. 简证:因 $f(x)$ 的所有系数都是非负的,所以它的几个实根都不是正数,于是设 $f(x)=(x+r_1)(x+r_2)\cdots(x+r_n)$,其 $r_i>0,r_1r_2\cdots r_n=1$,于是 $f(2)=(2+r_1)(2+r_2)\cdots(2+r_n)\geqslant 3^n$

11. 简证:若 $f(x)$ 有有理根$\frac{p}{q}$,$(p,q)=1$,则 $p\mid a_n,q\mid a_0,p+q\mid f(-1),p-q\mid f(1)$,由 a_0,a_n 不是3的倍数,知 p、$q=\pm 1(mod\ 3)$,从而 $p-q$ 与$p+q$ 中必有一个能被3整除,矛盾.

12. 简证:原方程即 $nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+3x^2+2x-(n+1)(n-1)=0$,经验证:$x=\frac{n+1}{n}$为其根.

13. 提示:只须证(i),若 $a_0=a_1=\cdots=a_n$,则 $f(x)$ 的 n 个根为$n+1$次单位虚根,其模为1.若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 不全相等,则 $a_{n-1}-a_n,a_{n-2}-a_{n-1},\cdots,a_1-a_2,a_0-a_1$ 中至少有一个大于0.若 $|x|<1$,则 $|(x-1)f(x)|=1-a_0+(a_0-a_1)x+(a_1-a_2)x^2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)x^n+a_nx^{n+1}|\geqslant|a_0|-[|a_0-a_1||x|+|a_1-a_2|\cdot|x|^2+\cdots+|(a_{n-1}-a_n)||x|^n+|a_n|\cdot|x|^{n+1}]\geqslant a_0-[(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n+a_n]=0$.这说明,对任意 $|x|<1,|(x-1)f(x)|>0,|f(x)|>0$,故 $f(x)$ 的根的模$\geqslant 1$.

14. 提示:利用题13的解法.

15. 略.

16. 简解:论 $S_n=x^n+y^n+z^n$,则 $S_1=S_3=S_5=3$,构造以 x,y,z 为根的多项式$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-\sigma_1t^2+\sigma_2t+\sigma_3$,由已知 $\sigma_1=S_1=3,\sigma_2=\frac{1}{2}(S_1^2-S_1)=3$,再由牛顿公式,有 $S_5=3S_4-3S_3+\sigma_3S_2,S_4=3S_3-2S_2+\sigma_3S_1,S_3=2S_2-3S_1+\sigma_3S_0$.由以上三式可得 $S_5=30\sigma_3-27$,又 $S_5=3$,故 $\sigma_3=1$,从而 $f(t)=t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3$,所以 $x=y=z=1$

B组

1. 解:令$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}=q$

则 $a_2=a_1q,a_3=a_1q^2,a_4=a_1q^3,a_5=a_1q^4$

于是,由已知条件得

$$a_1(1+q+q^2+q^3+q^4)=\frac{4}{a_1q^4}(1+q+q^2+q^3+q^4)$$

(1) 若 $1+q+q^2+q^3+q^4=0$,则

$q^5-1=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)=0$

$\therefore q^5=1, |q|=1$

此时,$|a_1|=|a_2|=|a_3|=|a_4|=|a_5|$

故复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 对应的点都在以原点为圆心,$|a_1|$ 为半径的圆周上.

(2) 若 $1+q+q^2+q^3+q^4\neq 0$.则 $a_1^2q^4=4$,即 $a_3^2=4, a_3=\pm 2$,而 q 满足方程

$$1+q+\frac{1}{q}+q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{s}{a_3}=\pm\frac{s}{2} \quad ①$$

记 $x=q+\frac{1}{q}$,上式化为关于 x 的实系数二次方程

$$x^2+x-1\mp\frac{s}{2}=0 \quad ②$$

令 $f(x)=x^2+x-1\mp\frac{s}{2}$,注意当 $|s|\leqslant 2$ 时,有

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(5\pm 2s)<0$$

$$f(2)=s\mp\frac{s}{2}>0$$

$$f(-2)=1\mp\frac{s}{2}\geqslant 0$$

故方程 ② 的两根都是绝对值不大于 2 的实数.

对于 ② 的每个根 x,相应的 q 满足实系数二次方程 $q^2-xq+1=0$ ③

它的判别式 $\Delta=x^2-4\leqslant 0$,故两根 q_1,q_2 为共轭复数且 $|q_1|^2=|q_2|^2=q_1q_2=1$

因此,方程 ① 的每个根 q 都满足 $|q|=1$,从而,$|a_1|=|a_2|=|a_3|=|a_4|=|a_5|=2$,即复数 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 对应的点同在以原点为圆心,半径为 2 的圆周上.

2. 解:易知 ①$\Leftrightarrow\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2-x_0^2=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2-y_0^2\\ \sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k=x_0y_0\end{cases}$ ①

若存在实数 $y_0,y_1,\cdots,y_n$ 使 ① 成立,则 $x_0^2y_0^2=(\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k)^2$

由柯西不等式可得 $x_0^2y_0^2\leqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2)(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2)$ ②

如果 $x_0^2>\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2$,则由 ① 可得 $y_0^2>\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2$,从而,$x_0^2y_0^2>(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2)(\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2)$,与 ② 矛盾,于是得

$$x_0^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2 \quad ③$$

反之,若 ③ 成立,有两种情况:

(1)$x_0^2=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2$,则取 $y_k=x_k, k=0,1,2,\cdots n$,显然(1) 成立.

(2)$x_0^2<\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2$,记 $a^2=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2-x_0^2>0$,从而 $x_1,\cdots x_n$ 不全为 0,不妨设 $x_n\neq 0$,取 $y_k=0, k=0,1,\cdots,n-2$,有

$$y_{n-1}=\frac{ax_n}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}},\qquad y_n=\frac{-ax_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}$$

易知 ① 也成立.

综上可知,所求的条件为 $x_0^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

3. 解:(i) 用反证法.

假设 $p \neq a_1$,则 $p = |a_n|$,并且 $p > a_1, a_n < 0$

设 $n-k+1 \leqslant m \leqslant n$ 时,$a_m = a_n$,而 $m \leqslant n-k$ 时,$a_m \geqslant a_n$,这里 $1 \leqslant k \leqslant n-1$,则

$a_1^{2l+1} + a_2^{2l+1} + \cdots + a_n^{2l+1} = a_n^{2l+1}\left[\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1} + \cdots + \left(\frac{a_{n-k}}{a_n}\right)^{2l+1} + k\right]$

由于 $\left|\frac{a_1}{a_n}\right| < 1, \cdots, \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| < 1$,故存在 $l \in \mathrm{N}$ 使得

$\left|\frac{a_1}{a_n}\right|^l \leqslant \frac{1}{n}, \cdots, \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^l \leqslant \frac{1}{n}$

$\therefore \left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1} + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_n}\right)^{2l+1} =$

$\geqslant k - \left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{2l+1} - \cdots - \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{2l+1}$

$\geqslant k - \frac{n-k}{n} > 0$

于是,$a_1^{2l+1} + a_2^{2l+1} + \cdots + a_n^{2l+1} < 0$,与已知矛盾,故只能 $p = a_1$

(ii) 当 $x > a_1$ 时,

$$\begin{aligned}
&(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \\
&\leqslant (x-a_1)\left[\frac{(x-a_2)+\cdots+(x-a_n)}{n-1}\right]^{n-1} \\
&= (x-a_1)\left(x - \frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1} \\
&\leqslant (x-a_1)\left(x + \frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1} \\
&= (x-a_1)\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^t \left(\frac{a_1}{n-1}\right)^t x^{n-1-t} \\
&= (x-a_1)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^t}{(n-1)^t} \cdot a_1^t x^{n-1-t}
\end{aligned}$$

由于 $1 \leqslant t \leqslant n-1$ 时,

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^t &= \frac{(n-1)\cdots(n-t)}{t!} \\
&= \frac{n-1}{t} \cdot \cdots \cdot \frac{n-t}{1} \leqslant (n-1)^t
\end{aligned}$$

而 $t = 0$ 时,

$C_{n-1}^t = C_{n-1}^0 = 1 = (n-1)^0 = (n-1)^t$

故 $0 \leqslant t \leqslant n-1$ 时,$\frac{C_{n-1}^t}{(n-1)^t} \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
&\therefore (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) \\
&\leqslant (x-a_1)\sum_{t=0}^{n-1} a_1^t x^{n-1-t} \\
&= x^n - a_1^n
\end{aligned}$$

4. 解:(a) 当 $x > 0$ 时,

$x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x} = 1$

记 $f(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_1 y$

由于 $y \geqslant 0$ 时，$f(y)$ 连续且严格单调上升，又 $f(0)=0, f(a_k^{-\frac{1}{k}}) \geqslant 1$（不妨设 $a_k>0$），故存在惟一的正数 y_0，使 $f(y_0)=1$，于是，方程 $x^n - a_1x^{n-1} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0$ 恰有一个正实根.

（b）由于 $g(y) = lny$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且上凸，故由琴声不等式，对于任意非负实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（不都为零）和任意正数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，有

$$ln\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \geqslant \frac{\lambda_1lny_1+\lambda_2lny_2+\cdots+\lambda_nlny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

即

$$\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \geqslant (y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdots y_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}$$

取 $\lambda_k = a_k, y_k = y_0^k, 1 \leqslant k \leqslant n$，则

$$\frac{a_1y_0+a_2y_0+\cdots+a_ny_n^2}{A} \geqslant (y_0^B)^{\frac{1}{A}}$$

由 $a_1y_0 + a_2y_0^2 + \cdots + a_ny_0^n = 1$，有 $\frac{1}{A} \geqslant y_0^{\frac{B}{A}}$

即 $\left(\frac{1}{y_0}\right)^B \geqslant A^A$

而 $R = \frac{1}{y_0}$，故 $A^A \leqslant R^B$

5. 解：不存在. 若不然，设有非零复数 a, b, c 及自然数 h 满足题中要求.

考察复平面，不妨设复数 a、b 所对应的向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 之间的夹角既不等于 0 也不等于 π，否则三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都共线，问题更简单，取以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 所在直线为坐标轴，且分别以 $|a|$、$|b|$ 为单位长的斜角坐标系，过坐标轴上每个整点作另一条坐标轴的平行线，两组平行线彼此相交将复平面划分成网格平面，这些网格是彼此全等的平行四边形.

再考察复数 c 所对应的向量 $\vec{c}$ 所在的直线. 显然，对每个整数 m，mc 都对应这条直线上的一点，称为 c - 整点. 易见 c - 整点都位于某个平行四边形中（包括周界），将每个含有 c - 整点的平行四边形都平移到位于第一象限且以原点为顶点的平行四边形 P 上并使二者重合. 这时，每个 c - 整点也都随同所在的平行四边形移到 P 中，记其象点为 c' - 整点. 不难看出，若 c - 整点对应的复数为 mc，其所在的平行四边形的右下方顶点对应的复数为 $\lambda a + \mu b$，其中 λ, μ 都是整数，则其象点 c' - 整点对应的复数为 $mc - \lambda a - \mu b$.

将所有 c' - 整点所在的平行四边形 p 用平行于其边的平行线划分成有限多个小平行四边形，使每个小平行四边形的长对角线的长度都小于 $\frac{1}{h}$，c' - 整点有无穷多个分布在有限多个小平行四边形中，由抽屉原理知必有无穷多个 c' - 整点落在同一个小平行四边形中，显然，这些 c' - 整点两两之间的距离都小于 $\frac{1}{h}$.

将这样选出的无穷多个 c' - 整点所对应的复数记为

$m_ic - \lambda_ia - \mu_ib, i = 1, 2, \cdots$

由于第 1 个 c' - 整点与后面每点的距离都小于 $\frac{1}{h}$，故有

$$|(m_1-m_i)c + (\lambda_i-\lambda_1)a + (\mu_i-\mu_1)b| < \frac{1}{h} \quad ①$$

$i = 2, 3, \cdots$ 由于这表示不同点对之间的距离，故三数组 $\{(\lambda_i-\lambda_1), (\mu_i-\mu_1), (m_1-m_i)\}$ 互不相同且有无穷多组，又因满足

$$|\lambda_i-\lambda_1|+|\mu_i-\mu_1|+|m_1-m_i| < 1996$$

的只有有限多组，故必有一组使

$$|\lambda_{i_0}-\lambda_1|+|\mu_{i_0}-\mu_1|+|m_1-m_{i_0}| \geqslant 1996$$

且使 ① 成立,矛盾.

6. 解:设在复平面上,A,B,C 三点对应的复数为 x_1,x_2,x_3,P_1,P_2 对应的复数为 p_1、p_2,构造二次多项式

$$f(x)=(x-p_1)(x-p_2)$$

据拉氏公式得

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j=1}^{3}\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant 3}}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}f(x)\\&=(x-p_1)(x-p_2)\end{aligned}\qquad ①$$

比较 ① 式两边 x^2 的系数,得

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1$$

于是

$$\sum_{j=1}^{3}\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant 3}}\frac{|f(x_j)|}{|x_j-x_i|}\geqslant 1\qquad ②$$

但 $|f(x_1)|=|(x_1-p_1)(x_1-p_2)|=a_1a_2$,

$|f(x_2)|=b_1b_2,f(x_3)=c_1c_2$,且 $|x_1-x_2|=c$,

$|x_2-x_3|=a$,$|x_3-x_1|=b$,将此代入 ② 有 $\frac{a_1a_2}{bc}+\frac{b_1b_2}{ca}+\frac{c_1a_2}{ab}\geqslant 1$

即 $aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$

7. 解:(i) n 为偶数时,$((x+1)^n,x^n+1)=1$,于是存在有理系数多项式 $f^*(x),g^*(x)$,使得

$1=f^*(x)(x+1)^n+g^*(x)(x^n+1)$

设 k 为 $f^*(x),g^*(x)$ 的所有系数的分母的一个公倍数,记 $f(x)=kf^*(x),g(x)=kg^*(x)$,则 $f(x),g(x)$ 为整系数多项式,且 $k=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$

(ii) 设 $n=2^a\cdot t$,t 为奇数,记 $m=2^a$.则可设 $x^n+1=(x^m+1)h(x)$

$h(x)$ 为整系数多项式,并设 $w_j=e^{i\cdot\frac{2j-1}{m}\pi}(j=1,2,\cdots,2^a)$ 为 $x^m+1=0$ 的 m 个根.

若正整数 k,整系数多项式 $f(x),g(x)$ 满足 $k=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$,则

$k=f(w_j)(w_j+1)^n,j=1,2,\cdots,m$

于是,$k^m=\prod_{j=1}^{m}f(w_j)\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n$

设 $\sigma_1=w_1+w_2+\cdots+w_m$

$\sigma_2=w_1w_2+w_2w_3+\cdots+w_{m-1}w$

$\cdots$

$\sigma_m=w_1w_2\cdots w_m$

由韦达定理知 σ_j 为整数.因为 $\prod_{j=1}^{m}f(w_j)$ 为关于 $w_1,w_2\cdots,w_m$ 的整系数多项式,故 $\prod_{j=1}^{m}f(w_j)$ 可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 的整系数多项式,于是它为整数,而

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)^n&=\Big[\prod_{j=1}^{m}(w_j+1)\Big]^n\\&=(1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m)^n=2^n\end{aligned}$$

因此,$2^n\mid k^m$,即 $2^t\mid k$,于是,$k\geqslant 2^t$

记 $\begin{aligned}E(x)&=(x+1)(x^3+1)\cdots(x^{2m-1}+1)\\&=(x+1)^mF(x)\end{aligned}$

对于固定的 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$,考虑集合$(w_j,w_j^3,w_j^5,\cdots,w_j^{2m-1})$,其中的元素均为 $x^m+1=0$ 的根且两两不等,故它为 $x^m+1=0$ 的解集.于是

$$E_{(w_j)} = (1+w_j)(1+w_j^3)\cdots(1+w_j^{2m-1})$$
$$= (1+w_1)(1+w_2)\cdots(1+w_m) = 2$$

设 $G(x)(x^m+1)+2 = E(x) = (x+1)^m E(x)$

两边 t 次方,得

$$G^*(x)(x^m+1)+2^t = (x+1)^n F(x) \quad ①$$

其中 $G^*(x)$ 为某个整系数多项式.

另外,由 $x^n+1=(x^m+1)h(x)$,有 $h(-1)=1$,故可设 $G(x)(x+1)=h(x)-1$

两边 n 次方,得

$$G^n(x)(x+1)^n = n(x)d(x)+1 \quad ②$$

其中 $d(x)$ 为某个整系数多项式.

由 ①、② 得

$$G^*(x)d(x)(x^n+1) = G^*(x)(x^m+1)d(x)h(x)$$
$$= [(x+1)^n F(x)-2^t][C^n(x)(x+1)^n-1]$$
$$= (x+1)^n U(x)+2^t$$

其中 $U(x)$ 为某个整系数多项式.

因此存在整系数多项式 $f(x),g(x)$,使得

$$2^t = f(x)(x+1)^n + g(x)(x^n+1)$$

综合上述,$k_0 = 2^t$,其中 $n=2^a t$,t 为奇数.

8. 解:(i) 约定记

$$F_k(x) = (x-1)f_k(x)+f_k(ax)-a^k x f_k\left(\frac{x}{a}\right)$$

首先指出

$$F_{k+1}(x) = xF_k(x)+F_k(ax)$$

事实上,

$$F_{k+1}(x)-xF_k(x)$$
$$= (x-1)f_{k+1}(x)+f_{k+1}(ax)-a^{k+1}xf_{k+1}\left(\frac{x}{a}\right)-x(x-1)f_k(x)-xf_k(ax)+a^kx^2f_k\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= (x-1)[xf_k(x)+f_k(ax)]+[axf_k(ax)+f_k(a^2x)]-a^{k+1}x\left[\frac{x}{a}f_k\left(\frac{x}{a}\right)+f_k(x)\right]-x(x-1)f_k(x)-xf_k(ax)+a^kx^2f_k\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$= (ax-1)f_k(ax)+f_k(a^2x)-a^{k+1}xf_k(x)$$
$$= F_k(ax)$$

因为,$F_0(x)=0$,所以,$F_n(x)=0$,$n=0,1,2,\cdots$.

(ii) 利用(i) 中的结论,我们归纳证明

$$f_n(x) = x^n f_n\left(\frac{1}{x}\right), n=0,1,2,\cdots$$

首先,显然 $f_0(x) = x^0 f_0\left(\frac{1}{x}\right)$

假定已证得 $f_k(x) = x^k f_k\left(\frac{1}{x}\right)$

则有

$$f_{k+1}(x)-x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) = f_{k+1}(x)-x^{k+1}f_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left[f_k(x)-x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$= (x-1)f_k(x)+f_k(ax)-a^{k+1}\left[\frac{1}{x}f_k\left(\frac{1}{x}\right)+f_k\left(\frac{a}{x}\right)\right]+x^kf_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

$= (x-1)f_k(x) + f_k(ax) - a^k x\left[\left(\frac{x}{a}\right)^k + f_k\left(\frac{a}{x}\right)\right]$

$= (x-1)f_k(x) + f_k(ax) + a^k x f_k\left(\frac{x}{a}\right) = 0$

(iii) 不妨设

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(k)} x^j, k = 0,1,\cdots$$

由题目的条件容易看出.

$b_k^{(k)} = b_{k-1}^{(k-1)} = \cdots = b_o^{(0)} = 1$

另据(ⅱ)中得证的结论可得

$b_{k-j}^{(k)} = b_j^{(k)} (k = 0,1,\cdots; j = 0,1,\cdots k)$

特别地 $b_o^{(k)} = b_k^{(k)} = 1, k = 0,1,2,\cdots$

在式子 $f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-1}(ax)$ 之中,比较两边 x^j 和 x^{n-j} 的系数,分别得到

$b_j^{(n)} = b_{j-1}^{(n-1)} + a^j b_j^{(n-1)}$

$b_{n-j}^{(n)} = b_{n-j-1}^{(n-1)} + a^{n-j} b_{n-j}^{(n-1)}$

利用等式关系

$b_{n-j}^{(n)} = b_j^{(n)}$

$b_{n-j-1}^{(n-1)} = b_j^{(n-1)}$

$b_{n-j}^{(n-1)} = b_{j-1}^{(n-1)}$

可以从前列两式中消去 $b_{n-1-j}^{(n-1)} = b_j^{(n-1)}$,从而得到

$$\begin{aligned} b_j^{(n)} &= \frac{a^n - 1}{a^j - 1} b_{j-1}^{(n-1)} \\ &= \frac{a^n - 1}{a^j - 1} \cdot \frac{a^{(n-1)} - 1}{a^{j-1} - 1} b_{(j-2)}^{(n-2)} \\ &= \cdots \\ &= \frac{a^n - 1}{a^j - 1} \cdot \frac{a^{(n-1)} - 1}{a^{j-1} - 1} \cdots \frac{a^{n-j+1} - 1}{a - 1} - b_o^{(n-j)} \\ &= \frac{a^n - 1}{a^{j-1}} \cdot \frac{a^{(n-1)} - 2}{a^{j-1} - 1} \cdots \frac{a^{n-j+1} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

我们得到

$$f_n(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a^n - 1}{a^j - 1} \cdots \frac{a^{n-j+1} - 1}{a - 1}\right) x^j$$

9. 解:设 $f(x) = 1 + x + x^2, F(x) = f(x)f(x^2)\cdots f(x^{p-1})$ 为 $p(p-1)$ 次多项式,则

$$F(x) = \sum_{n=0}^{p(p-1)} a_n x^n$$

其中 a_n 是对于每个 $x_i \in \{0,1,2\}$ 满足 $x_1 + 2x_2 + \cdots + (p-1)x_{p-1} = n$ 的 $p-1$ 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})$ 的个数,因此,$|E(\{0,1,2\})|$ 是满足 n 可以被 p 整除的若干个 a_n 的和.

设 $w = \cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}$,则 $1, w, w^2, \cdots, w^{p-1}$ 是方程 $x^p = 1$ 的 n 个根,且

$$1 + w^j + w^{2j} + \cdots + w^{(p-1)j} = \begin{cases} p, p \mid j \\ 0, p \nmid j \end{cases}$$

将 $x - 1, w, \cdots, w^{p-1}$ 分别代入 $F(x)$ 中,则

$F(1) + F(w) + \cdots + F(w^{p-1})$

$= \sum_{n=0}^{p(p-1)} a_n (1^n + w^n + w^{2n} + \cdots + w^{(p-1)n})$

$= p|E(\{0,1,2\})|$

由于 $F(1)=3^{p-1}$，对于所有满足 $p\nmid j$ 的 j，$1,w^j,w^{2j},\cdots,w^{(p-1)j}$ 是 $1,w,w^2,\cdots,w^{p-1}$ 的一个排列，所以

$$\begin{aligned}F(w)&=F(w^2)=\cdots=F(w^{p-1})\\&=(1+w+w^2)\cdots(1+w^{n-1}+w^{2(p-1)})\\&=\frac{1-w^3}{1-w}\cdot\frac{1-w^6}{1-w^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1-w^{3(p-1)}}{1-w^{p-1}}=1\end{aligned}$$

于是，$|E(\{0,1,2\})|=\frac{1}{p}(3^{p-1}+p-1)$

设 $g(x)=1+x+x^3$，$G(x)=g(x)g(x^2)\cdots g(x^{p-1})$

同理可得

$$\begin{aligned}|E(\{0,1,3\})|&=\frac{1}{p}(G(1)+(p-1)G(w))\\&=\frac{1}{p}(3^{p-1}+(p-1)G(w))\end{aligned}$$

因此，只证明 $G(w)\geqslant 1$，当且仅当 $p=5$ 时等号成立.

设 $h(x)=x^3+x+1$

$$=(x-\lambda)(x-\mu)(x-\upsilon)$$

这里 λ,μ,υ 是复数，因为当 $x>0$ 时 $h(x)>0$，则 $h(x)$ 有一个负实根，不妨设为 λ，又由于 $\lambda+\mu+\upsilon=0$，所以共轭复根 $\mu,\upsilon=\overline{\mu}$ 具有正的实部.

设 $u(x)=\prod\limits_{j=1}^{p-1}(x-w^j)=\frac{x^p-1}{x-1}$，则

$$\begin{aligned}G(w)&=\prod_{j=1}^{p-1}(w^j-\lambda)(w^j-\mu)(w^j-\upsilon)\\&=\frac{\lambda^p-1}{\lambda-1}\cdot\frac{\mu^p-1}{\mu-1}\cdot\frac{\upsilon^p-1}{\upsilon-1}\\&=u(\lambda)u(\mu)u(\upsilon)\end{aligned}$$

因为 $\lambda^3+\lambda+1=0$，则对每个正整数 k，有 $\lambda^{k+3}+\lambda^{k+1}+\lambda^k=0$

对于 μ,υ 有同样的结论. 由于 $\lambda+\mu+\upsilon=0$，$\lambda^2+\mu^2+\upsilon^2=(\lambda+\mu+\upsilon)^2-2(\lambda\mu+\mu\upsilon+\upsilon\lambda)=-2$，利用数学归纳法，所有正整数 r，有 $\lambda^r+\mu^r+\upsilon^r$ 是整数.

假设 $G(w)=1$，则

$$\begin{aligned}&(\lambda^p-1)(\mu^p-1)(\upsilon^p-1)\\&=(\lambda-1)(\mu-1)(\upsilon-1)=-h(1)=-3\end{aligned}$$

设 $q=\lambda^p+\mu^p+\upsilon^p$，并且

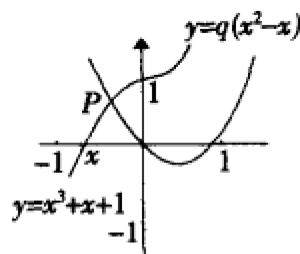
$\lambda^p\mu^p\upsilon^p=(\lambda\mu\upsilon)^p=(-1)^p=-1$

将其代入上式可得 $\lambda^p\mu^p+\mu^p\upsilon^p+\upsilon^p\lambda^p=1+q$，故 $\lambda^p,\mu^p,\upsilon^p$ 是三次方程

$$m(x)=x^3-qx^2+(1+q)x+1=0$$

的根.

由于 $h(-1)<0$，$h\left(-\frac{1}{2}\right)>0$，所以 $-1<\lambda<-\frac{1}{2}$. 如果 $q<0$，对于 $x-\lambda^p$，有 $x^3-qx^2=x^2(x-q)>0$，$(1+q)x\geqslant 0$，故 $m(\lambda^p)>0$. 如果 $q=0$，则 $m(x)=x^3+x+1$，故其实根为 λ，因此 $p=1$，矛盾. 所以，$q\geqslant 1$.



如图，对于 $-1\leqslant x\leqslant 0$，则 $q(x^2-x)$ 非负，x^3+x+1 是严格单调增加的，且 $\lambda^3+\lambda+1=0$，λ^p 是 $y=x^3+x+1$ 和 $y=q(x^2-x)$ 在区间 $[-1,0]$ 的交点 p 的横坐标. 于是当 p 增加时(λ^p 更接近于零时，则 q 也增加.

如果 $p=5$

$g(w)=1+w+w^3=-w^2-w^4=-w^2(1+w^2)$，

于是，

$$G(w)=\prod_{j=1}^{p-1}(1-w^{2j})(1+w^{2j})=\prod_{j=1}^{p-1}(1+w^{2j})=\prod_{j=1}^{p-1}(1+w^{j})$$

$$=\prod_{j=1}^{p-1}(-1-w^{j})=u(-1)=1$$

考虑到 $\lambda^5=-\lambda^2(\lambda+1)=-\lambda^2+\lambda+1$,对于 μ,υ 有相同的结论,于是,

$q=\lambda^5+\mu^5+\upsilon^5=-(\lambda^2+\mu^2+\upsilon^2)+(\lambda+\mu+\upsilon)+3=5$

由于 q 随着 p 的增大而增大,且 $p=5$ 是满足 $p>3$ 的最小素数,故 $q\geqslant 5$,且 $q=5$ 时,有 $p=5$.

假设 $q\geqslant 6$,考虑 $m(x)=x^3+x+1-q(x^2-x)$. 由于 $m(-1)=-1-2q<0,m(0)=1>0$, $m(2)=11-2q<0$,对于足够大的 $x>0$,有 $m(x)>0$,因此 $m(x)=0$ 有三个不同的实根,但是 $m(x)=0$ 的根是 λ^p、μ^p 和 $\upsilon^p=\overline{\mu}^p$,所以如果 μ^p 是实数,则 υ^p 也是实数,且与 μ^p 相等,因此有重根,与有三个不同的实根矛盾,故 $q=5$,因此,$p=5$ 是由 $G(w)=1$ 惟一确定的.

由于 $\overline{w^j}=\cos\dfrac{2j\pi}{p}-i\sin\dfrac{2j\pi}{p}=\cos\dfrac{2(p-j)\pi}{p}+i\sin\dfrac{2(p-j)\pi}{p}=w^{p-j}$

所以 $\overline{g(w^j)}=g(w^{p-j}),g(w^j)g(w^{p-j})=g(w^j)\cdot g(w^j)\geqslant 0$,从而,$G(w)\geqslant 0$,若 $G(w)=0$,则存在 $k\in\{1,2,\cdots,p-1\}$,使 $g(w^k)=0$,这不可能成立. 因此,$G(w)>0$.

又因 $|E(\{0,1,3\})|=\dfrac{1}{p}(3^{p-1}+(p-1)G(w))$ 是整数,且 $P\mid(3^{p-1}-1)$,故

$\dfrac{1}{p}(1+(p-1)G(w))\geqslant 1$

即 $G(w)\geqslant 1$,从而有 $|E(\{0,1,3\})|\geqslant|E(\{0,1,2\})|$

当且仅当 $p=5$ 时等号成立.

10. 解:假定 $f\in F$ 使得 $f(x)=m(k)$ 恰有 k 个互不相同的整数根,设这些整数根依次为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$,则存在整系数多项式 $g(x)$,使得

$f(x)-m(k)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_k)g(x)$

又由 $f\in F$ 知存在整数 α,使得 $f(\alpha)=1$.

将 α 代入上述分解式并在等式两端取绝对值得

$m(k)-1=|\alpha-\beta_1|\cdot|\alpha-\beta_2|\cdots|\alpha-\beta_k|\cdot|g(\alpha)|$

依题设,$\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_2,\cdots,\alpha-\beta_k$ 是互不相同的整数,又 $m(k)>1$,所以它们均非零. 为保证 $m(k)$ 确为最小,显然应有 $|g(\alpha)|=1$,而 $\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_2,\cdots,\alpha-\beta_k$,取绝对值最小的 k 个非零整数,亦即从 $\pm 1,\pm 2,\cdots$,中顺次选取.

下面对 k 分情况讨论求出 $m(k)$ 的具体值.

当 k 是偶数时,$\alpha-\beta,\alpha-\beta_2,\cdots,\alpha-\beta_k$ 应取 $\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm\dfrac{k}{2}$,其中有 $\dfrac{k}{2}$ 个负数,考虑最初的分解式可知 $g(\alpha)$ 必等于 $(-1)^{\frac{k}{2}+1}$,从而,$m(k)=\left(\left(\dfrac{k}{2}\right)!\right)^2+1$.

相应的 f 可取. $f(x)=(-1)^{\frac{k}{2}+1}\prod\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}}(x^2-t^2)+\left(\left(\dfrac{k}{2}\right)!\right)^2+1$

类似地,当 k 为奇数时,$\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_2,\cdots,\alpha-\beta_k$. 应取 $\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm\dfrac{k-1}{2},\dfrac{k+1}{2}$,$g(\alpha)$ 等于 $(-1)^{\frac{k-1}{2}+1}$, 从而,$m(k)=\left(\dfrac{k-1}{2}\right)!\left(\dfrac{k+1}{2}\right)!+1$

相应的 f 可取

$$f(x)=(-1)^{\frac{k+1}{2}}\prod_{i=1}^{\frac{k-1}{2}}\left(x^2-i^2)(x+\frac{k+1}{2}\right)+\left(\frac{k-1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{k+1}{2}\right)!+1$$

11. 解:设 $p_0(x)=2000x^{2000}+1999x^{1999}+\cdots+x+0.1$. 对于任意多项式 $Q\in M(p_0)$,最多交换 Q 的一对系数,将 0 放在常数项,得到多项式 Q_1,则有 $Q(0)=0=P_0(0)$. 所以,0 - 无关多项式存在.

设 $p_1(x)=2000x^{2000}+1999x^{1999}+\cdots+x-(1+2+\cdots+2000)$. 对于任意多项式 $Q\in M(p_1)$，有 $p(1)=0=p_1(1)$，选择 $Q_1=Q$，因此 1 - 无关多项式存在.

下面证明 $n\neq 0,1$ 时，每个多项式 p 均不是 n - 无关的.

(1) 若 $n=-1$，且假设.

$p(x)=a_0x^{2000}+a_1x^{1999}+\cdots+a_{2000}$

是(-1) - 无关多项式，则

$P(-1)=\sum_{m=0}^{1000}a_{2m}-\sum_{m=1}^{1000}a_{2m-1}$

且$\{a_0,a_1,\cdots,a_{2000}\}$是一个不同实数组成的集合，并满足 $a_0+a_2+\cdots+a_{2000}=a_1+a_3+\cdots+a_{1999}=S_0$. 对于任意集合对$\{F,G\}$

$F\cup G=\{a_0,a_1,\cdots,a_{2000}\}$，

$F\cap G=\varnothing$, $|F|=1000$, $|G|=1001$.

且将 F、G 中的一对元素(一个来自 F，另一个来自 G) 最多交换一次变为 F_1、G_1，使得 $S(F_1)=S_0$，其中 $S(H)$ 表示集合 H 中所有实数的和.

设$\{b_0,b_1,\cdots,b_{2000}\}=\{a_0,a_1,\cdots,a_{2000}\}$，其中 b_i 满足$b_0<b_1<\cdots<b_{2000}$，设 $b_{2000}\in F$, $b_{1999}\in F$, $b_0\in G$, $b_i\in G_1$，因为

$(b_0+b_1)+b_2+\cdots+b_{1000}$

$<(b_0+b_1)+b_2+\cdots+b_{999}+b_{1001}$

$<\cdots<(b_0+b_1)+b_2+\cdots+b_{999}+b_{1998}$

$<(b_0+b_1)+b_2+\cdots+b_{998}+b_{1000}+b_{1998}$

$<\cdots<(b_0+b_1)+b_2+\cdots+b_{998}+b_{1997}+b_{1998}$

$<\cdots<(b_0+b_1)b_{1000}+b_{1001}+\cdots+b_{1998}$,

则 $S(G)$ 至少有 999×998 个不同的值. 另一方面，最多有 $4\times 200<999\times 998$ 个不同的且至少包含实数 $b_0,b_1,b_{1999},b_{2000}$ 之一的对换. 于是，存在 F_0,G_0，使 b_{2000}、$b_{1999}\in F_0$, b_0、$b_1\in G_0$，只经过一次对换而不包含 $b_0,b_1,b_{1999},b_{2000}$ 将 F_0、G_0 变为 F_1、G_1，且 $S(F_1)=S(G_1)=S_0$.

考虑由$\{F_0,G_0\}$经过两次置换 $b_0\leftrightarrow b_{2000}$, $b_1\leftrightarrow b_{1999}$ 得到的集合对$\{F'_0,G'_0\}$，由于

$|S(G_1)-S(G_0)|<b_{1999}-b_1$

设 G'_1 是 G'_0 经过任意一次置换得到的集合，则

$S(G'_1)-S(G_1)=S(G'_1)-S(G'_0)+S(G'_0)-S(G_0)+S(G_0)-S(G_1)=S(G'_1)-S(G'_0)+b_{2000}+b_{1999}-b_0-b_1+S(G_0)-S(G_1)$

$>S(G'_1)-S(G'_0)+b_{2000}+b_{1999}-b_0-b_1-(b_{1999}-b_1)$

$=S(G'_1)-S(G'_0)+b_{2000}-b_0\geqslant 0$

因此，$S(G'_1)-S(G_1)=S(G'_1)-S_0>0$. 于是，不可能将$\{F'_0,G'_0\}$用一次置换变为$\{F_1,G'_1\}$，使 $S(F'_1)=S(G'_1)=S_0$

(2) 若 $|n|\geqslant 2$，先证明一个引理.

设 $n\geqslant 2$, $P_0(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m_1}$, $a_0<a_1<\cdots<a_m$，对所有 $M(p_0)$ 中的多项式在 $x=h$ 取不同值的数目不少于 2^m 个.

实际上，设多项式 $R_1\in M(P_0)$, $R_2\in M(P_0)$，且满足

$R_1(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_ix^{m-i}+a_mx^{m-i-1}+b_{i+1}x^{m-i-2}+\cdots+b_{m-1}$

$R_2(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{i-1}x^{m-i+1}+a_mx^{m-i}+a_ix^{m-i-1}+\cdots+c_{m-1}$

其中 b_j 是$a_{i+1},\cdots,a_{m-1}$ 的任一排列，c_j 是$a_i,\cdots,a_{m-1}$ 的任一排列，则

$R_2(n)-R_1(n)=(a_m-a_i)n^{m-i}+(c_i-a_m)n^{m-i-1}+\sum_{k=i+1}^{m-1}(c_k-b_k)n^{m-k-1}$

因为 $a_{i+1}<\cdots<a_m$，所以 $|c_k-b_k|<a_m-a_i$, $k=i+1,\cdots,m-1$, $|c_i-a_m|\leqslant a_m-a_i$，故

$$R_2(n)-R_1(n)>(a_m-a_i)n^{m-i}\left(1-\frac{1}{n}-\cdots-\frac{1}{n^{m-i}}\right)$$
$$\geqslant n^{m-i}(a_m-a_i)\left(1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2^{m-i}}\right)>0$$

于是,$R_2(n)\leqslant R_1(n)$.

当 $m=1$ 时,至少有两个值 $R_1(n)=a_0n+a_1, R_2(n)=a_1n+a_0$.假设对于 $k(<m)$ 次多项式,$M(P_0)$ 中的多项式在 $x=n$ 取不同值的数目不少于 2^k 个,考虑 m 次多项式 P_0 连续向左交换 a_m 所得的多项式序列

$R_1(x)=a_0x^m+\cdots+a_{m-1}x+a_m$

$R_2(x)=a_0x^m+\cdots+a_{m-2}x^2+a_mx+a_{m-1}$

$R_3(x)=a_0x^m+\cdots+a_{m-3}x^3+a_mx^2+a_{m-2}x+a_{m-1}$

$R_4(x)=a_0x^m+\cdots+a_{m-4}x^4+a_mx^3+a_{m-3}x^2+a_{m-2}x+a_{m-1}$

……

由归纳假设,在 $x=n$ 时所有 R_i 至少有

$$1+1+2+2^2+\cdots+2^{m-1}=2^m$$

个不同的值,因此,引理成立.

假设 $P(x)=a_0x^{2000}+a_1x^{1999}+\cdots+a_{2000}$ 是一个 n - 无关多项式,$|n|\geqslant 2$.因为

$p_2(x)=a_0x^{2000}+a_2x^{1998}+\cdots+a^{2000}$

取变量 t 为 x^2 时是一关于 t 的 1000 次多项式,$n^2>2$,由引理,$M(p)$ 中在 $x=n$ 时至少有 2^{1000} 个不同的值.

设 Z 是所有满足 $Q_1\in \mathrm{M}(p)$,且 $Q_1(n)=0$ 的集合,因为 P 是 n - 无关的,对于任意 $Q\in M(p)$,存在 $Q_1\in \mathrm{Z}$,其中 Q 可以由 Q_1 最多经过将两个系数进行一次变换得到.注意到 $Q_1(x)=b_0x^{2000}+\cdots+b_{2000}$ 在 $x=n$ 时 b_jn^i 和 bin^k 之间的变换最多给出 $M(p)$ 中的多项式 2001^4 个不同的值,这是由四元数组 (i,j,k,l) 的选取决定的.因为 $2001^4<2^{1000}$,矛盾.

综上所述,$n=0,1$.

专题三　函数方程　习题答案

A组

1. 解：$\because f(\sin x) = \cos 2x - 1 = 1 - 2\sin^2 x - 1 = -2\sin^2 x$

$\therefore f(x) = -2x^2(|x| \leqslant 1)$

2. 解：设 $e^x = y(>0)$，则 $x = \ln y$，于是，$f\left(\frac{y+1}{y-1}\right) = 3\ln y$

又设 $\frac{y+1}{y-1} = t$，则 $y = \frac{t+1}{t-1}$，于是 $f(t) = 3\ln\frac{t+1}{t-1}$

即　$f(x) = 3\ln\frac{x+1}{x-1}(|x| > 1)$

3. 解：令 $x = 0, y = t; x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} + t$，分别得

$f(t) + f(-t) = 2f(0)\cos t$　①

$f(\pi + t) + f(t) = 2f\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$　②

$f(\pi + t) + f(-t) = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$　③

① + ② − ③，得

$2f(t) = 2f(0)\cos t + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t$

令 $f(0) = a, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = b$，并将 t 换成 x，得

$f(x) = a\cos x + b\sin x$（a, b 为任意常数）.

4. 解：首先构造递推公式，在方程中，

令 $y = 1$，因 $f(1) = 1$，所以 $f(x + 1) = f(x) + x + 1$　①

在 ① 中，依次令 $x = 1, 2, \cdots, n - 1$，得

$f(2) = f(1) + 2$

$f(3) = f(2) + 3$

…

$f(n) = f(n - 1) + n$

以上各式相加得

$f(n) = f(1) + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

即　$f(x) = \frac{1}{2}x(x + 1)$　$(x \in \mathrm{N}^+)$

5. 解：在已知等式两边都加上 1，得

$f(1) + 1 = 2$

$f(n + 1) + 1 = 3f(n) + 2 + 1 = 3[f(n) + 1]$

$\therefore \frac{f(n + 1) + 1}{f(n) + 1} = 3$

$\therefore$ 数列 $\{f(n) + 1\}$ 是首项为 $f(1) + 1 = 2$，公比为 3 的等比数列，它的第 n 项为：

$f(n) + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$

$\therefore f(n) = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

6. 证：（用数学归纳法）当 $x = y$ 时，

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) = 0$，即 $f(1) = 0$

当 $y=1$ 时，$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(1)=f(x)$

即当 $n=1$ 时，结论成立.

假设当 $n=k$ 时，结论成立，即 $f(x^k)=kf(x)$

当 $n=k+1$ 时，由

$$f(x^{k+1})=f\left[\frac{x^k}{\frac{1}{x}}\right]=f(x^k)-f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=kf(x)-[f(1)-f(x)]=(k+1)f(x)$$

即当 $n=k+1$ 时，结论成立.

故对一切正整数结论成立.

7. 解：对一切 $x\in\mathrm{R}$，有 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$

若存在 $x_0\in\mathrm{R}$，使 $f(x_0)=0$，则对任何 $x\in\mathrm{R}$，有

$f(x)=f(x_0+x-x_0)=f(x_0)f(x-x_0)=0$

这与 $f(x)$ 不恒等于零矛盾，故对一切 $x\in R, f(x)>0$，于是对原方程两边取对数，得

$lnf(x+y)=lnf(x)+lnf(y)$

令 $g(x)=lnf(x)$，得 $g(x+y)=g(x)+g(y)\quad(x,y\in R)$.

由于 $g(x)$ 连续，故此方程是木西函数方程，其解为 $g(x)=cx$（c 为任意实数），

即 $\quad lnf(x)=cx$

$\quad\therefore f(x)=e^{cx}=b^x$

这里 $b=e^c$ 是任意正整数.

8. 证明：我们应注意到下列的连续函数的性质：

(1) 连续函数的和、差仍是连续的.

(2) 如果函数 $g(x)$ 是连续的，那么函数 $g(ax)$ 也是连续的.

注意到由题设，函数 $f(x)+f(2x)$ 及 $f(x)+f(4x)$ 都是连续的，根据性质(2)，$f(2x)+f(4x)$ 也是连续的，因此，根据性质(1)，

$f(x)+f(2x)+(f(x)+f(4x))-(f(2x)+f(4x))=2f(x)$

是连续函数，从而 $f(x)$ 是连续函数.

9. 解：将 x 取为 $\frac{x-3}{x+1}$ 代入原等式，有 $f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)+f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ ①

将 x 取为 $\frac{3+x}{1-x}$ 代入原等式，有 $f(x)+f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=\frac{3+x}{1-x}$ ②

① 式 + ② 式，且将原等式代入，即得 $f(x)=\frac{x^3+7x}{2-2x^2}, |x|\neq 1$

10. 解：由题设有

$(1+k)f(k)-k=0\quad(k=0,1,2,\cdots,n)$

因而 $n+1$ 次多项式

$g(x)=(x+1)f(x)-x$ ①

有 $n+1$ 个根，$x=0,1,2,\cdots,n$，于是

$g(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ ②

在 ① 中，令 $x=-1$，得 $g(-1)=1$，在 ② 中，令 $x=-1$，得

$1=a(-1)^{n+1}(n+1)!$

$\therefore a=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$\therefore g(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$

$\therefore f(x)=\frac{1}{x+1}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x\right]$

令 $x=n+1$,得

$f(n+1)=\frac{1}{n+2}[(-1)^{n+1}+(n+1)]$

$$=\begin{cases}1 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ \frac{n}{n+2} & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

11. 解: 设 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$,则

$f^{(2)}=f[f(x)]=f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^2x+(a+1)b$

$f^{(3)}=f(f^{(2)}(x))=f\{f[f(x)]\}=f[a^2x+(a+1)b]=a^3x+(a^2+a+1)b$,

…

$f^{(10)}=f(f^{(9)}(x))=a^{10}x+(a^9+a^8+\cdots+a+1)b$

$\because f^{(10)}(x)=1024x+1023$

$\therefore\begin{cases}a^{10}=1024=(\pm 2)^{10}\\ (a^9+a^8+\cdots+a+1)b=\frac{a^{10}-1}{a-1}b=1023\end{cases}$

解得,$a=2,b=1$ 或 $a=-2,b=-3$

故所求的一次函数为:

$f(x)=2x+1$ 或 $f(x)=-2x-3$

12. 解: 因为 $f(x,x+y)=f(x,y)\frac{x+y}{y}$,所以

$f(14,52)=f(14,14+38)=f(14,38)\cdot\frac{52}{38}$

$=f(14,14+24)\cdot\frac{26}{19}=f(14,24)\cdot\frac{13}{6}$

$=f(14,14+10)\cdot\frac{16}{3}=f(14,10)\cdot\frac{26}{5}$

$=f(10,14)\cdot\frac{26}{5}=f(10,10+4)\cdot\frac{26}{5}$

$=f(10,4)\cdot\frac{91}{5}=f(4,10)\cdot\frac{91}{5}$

$=f(4,6)\cdot\frac{91}{3}=f(4,2)\cdot 91$

$=f(2,4)\cdot 91=f(2,2)\cdot 182$

$=2\cdot 182=364$

B组

1. 解: 令 $y=1$,由(2),得

$f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1$ ①

将 $f(1)=2$ 代入①,化简得

$f(x+1)=f(x)+1$ ②

当 $n\in \mathrm{N}^+$,有

$f(x+n)=f(x+n-1)+1=f(x+n-2)+2$ ③

$\quad=\cdots=f(x)+n$

由②,得

$f(x)=f(x+1)-1$

$f[x+(-n)]=f(x-n)=f(x-n+1)-1$

$\quad=f(x-n+2)-2$

$$= \cdots = f(x) - n(n \in \mathrm{N})$$

即 $f[x + (-n)] = f(x) + (-n)(n \in \mathrm{N})$ ④

由③、④有

$f(x + n) = f(x) + n(n \in \mathrm{Z})$ ⑤

在⑤中，令 $x = 1$，得

$f(n + 1) = n + 2 \quad (n \in \mathrm{Z})$ ⑥

对于任意的有理数$\frac{n}{m}$，$m, n \in \mathrm{Z}$，在(2)中，令 $x = m, y = \frac{n}{m}$，得

$$f(n) = f\left(m \frac{n}{m}\right) = f(m)f\left(\frac{n}{m}\right) - f\left(m + \frac{n}{m}\right) + 1,$$

由⑤、⑥得

$$n + 1 = (m + 1)f\left(\frac{n}{m}\right) - f\left(\frac{n}{m}\right) - m + 1$$

由此得 $f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} + 1$

故所求的函数是 $f(x) = x + 1 \quad (x \in Q)$.

2. 解：在(1)中令 $y = kx(k \in \mathrm{N}^+)$，得

$f[(k + 1)x] - f(kx) = f(x) + 2kx^2$

令 $k = 1, 2, \cdots, n - 1$，求和得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{f[(k + 1)x] - f(kx)\} = \sum_{k=1}^{n-1}[f(x) + 2kx^2]$$

即 $f(nx) - f(x) = (n - 1)f(x) + n(n - 1)x^2$

亦即 $f(nx) = nf(x) + n(n - 1)x^2$

把上式中的 x 换成$\frac{x}{n}$，得

$f(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x^2 \quad (n \in \mathrm{N}^+)$ ①

若 $x = 0$，则 $f(0) = nf(0) + 0$，故 $f(0) = 0$；

若 $x \neq 0$，对①式，令 $n \to \infty$，由(2)，有

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} x = x$$

所以 $f(x) = x + x^2 \quad (x \in R)$.

3. 解：令 $m = n = 0$，有 $2f(0) = 2f^2(0)$

解得 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$

(1) 当 $f(0) = 0$ 时，令 $n = 0$，有

　$2f(m) = 2f(m)f(0)$

　$\therefore f(m) = 0 \quad (m \in \mathrm{Z})$

(2) 当 $f(0) = 1$ 时，令 $m = 0$，有 $f(n) + f(-n) = 2f(0)f(n)$

即 $f(n) = f(-n)$

所以 $f(n)$ 为偶数

令 $n = m$，得 $f(2m) = 2f^2(m) - 1$

先证明对任意 $m \in \mathrm{Z}$，有 $|f(m)| \leqslant 1$

若有某个 $k \in \mathrm{Z}$，使 $|f(k)| > 1$，则

$f(2k) = 2f^2(k) - 1 > |f(k)| \geqslant f(k)$

$\therefore f(k) < f(2k) < f(4k) < \cdots < f(2^p k) < \cdots$

$\because f(2^p k) \in \mathrm{Z}(p = 0, 1, 2\cdots)$

$\therefore$ 当 $p \to \infty$ 时，$f(2^p k) \to \infty$

与题设 $f(n)(n \in Z)$ 有界矛盾，故 $|f(k)| \leqslant 1$

因对任意 $k \in Z, f(k) \in Z$，所以其值仅有三种可能：$-1,0,1$.

(1) 若 $f(1) = 0$，令 $n = 1$，有 $f(m+1) + f(m-1) = 0$

取 $m = 2$，有 $f(3) + f(1) = 0$，即 $f(3) = 0$，从而有

$f(5) = 0, f(7) = 0, \cdots, f(-1) = 0, f(-3) = 0, \cdots$

又因 $f(0) = 1$，所以有 $f(2) = -1, f(4) = 1, \cdots$

$$\therefore f(m) = \begin{cases} 0, & m \equiv 1(mod\ 2) \\ 1, & m \equiv 0(mod\ 4) \\ -1, & m \equiv 2(mod\ 4) \end{cases}$$

(2) 若 $f(1) = 1$，仿上法可得，$f(m) \equiv 1$

(3) 若 $f(1) = -1$，仿上法可得：

$$f(m) \begin{cases} 1 & m \equiv 0(mod\ 2) \\ -1 & m \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

4. 考虑 $f(n)$ 满足的递归关系，

对于 A_{n+1} 的一个无孤立点的 5 元子集 S，

(i) 若 $n+1 \overline{\in} S$，则 $S \subseteq An$，即 S 是 An 的一个无孤立点的 5 元子集.

(ii) 若 $n+1 \in S$，又 S 无孤立点，得 $n \in S$. 若 $n-1 \in S$，则 S 的余下两个元素为 $\{n-2, n-3\}$，$\{n-3, n-4\}, \cdots, \{2,1\}$，共有 $n-3$ 种.

若 $n-1 \overline{\in} S$，则 S 的余下 3 个元素构成的集合为 $\{n-2, n-3, n-4\}, \{n-3, n-4, n-5\}, \cdots$，$\{3,2,1\}$ 共有 $n-4$ 种.

所以 $f(n+1) = f(n) + (n-3) + (n-4) = f(n) + 2n - 7$

即 $\quad f(n+1) = f(n) + 2n - 7 (n \geqslant 5)$ ①

又显然 $f(5) = 1$

由 ① 式，得 $f(i+1) - f(i) = 2i - 7, i = 5, 6, \cdots, n-1$，则

$$\sum_{i=5}^{n-1} [f(i+1) - f(i)]$$

$$= \sum_{i=5}^{n-1} (2i - 7) = 2 \sum_{i=5}^{n-1} i - 7(n-5)$$

$$= 2 \cdot \frac{(5 + n - 1)(n-5)}{2} - 7(n-5)$$

$$= (n + 4 - 7)(n-5) = (n-3)(n-5)$$

即 $f(n) - f(5) = (n-3)(n-5)$

故 $f(n) = (n-3)(n-4) + f(5) = (n-3)(n-5) + 1$

$= n^2 - 8n + 16 = (n-4)^2$

5. 证明：观察方程

$f[f(x)] + af(x) = b(a+b)x = b(bx) + a(bx)$

可知，$f(x) = bx$ 满足方程，下面证明满足题设条件的函数只有 $f(x) = bx$

令 $a_0 = x, a_k = f^{(k)}(x) (k = 1, 2, \cdots)$，把原方程中的 x 换成 $f^{(k)}(x)$，得二阶线性递归关系：

$a_{k+2} + aa_{k+1} = b(a+b)a_k, k = 0, 1, 2, \cdots$

解特征方程：$y^2 + ay = b(a+b)$，解特征根：

$y_1 = b, y_2 = -(a+b)$

从而 $\quad a_k = Ab^k + B[-(a+b)]^k$

$$\text{由} \quad \begin{cases} a_0 = A + B = x \\ a_1 = Ab - B(a+b) = f(x) \end{cases}$$

解得 $A = \frac{(a+b)x + f(x)}{a+2b}, B = \frac{bx - f(x)}{a+2b}$ ①

所以 $\frac{1}{(a+b)^k} f^{(k)}(x) = A\left(\frac{b}{a+b}\right)^k + (-1)^k B$

由于 $f: R^+ \to R^+$，所以 $f^{(k)}: R^+ \to R^+$，从而有 $A\left(\frac{b}{a+b}\right)^k + (-1)^k B \geqslant 0, k = 0,1,2,\cdots$

分别令 $k = 2n+1$ 及 $k = 2n$，得

$A\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n+1} \geqslant B \geqslant -A\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n}$

再令 $n \to \infty$，由于 $0 < \frac{b}{a+b} < 1$，得 $B = 0$，故由 ① 式得 $f(x) = bx$

6. 解：令 $v = \frac{1}{2}$，推得

$f(x^{\frac{1}{2}} y^v) \leqslant [f(x)]^{\frac{1}{2}} [f(y)]^{\frac{1}{4v}}$ ①

对任何 x, y，可选出 $v > 0$，使 $x^{\frac{1}{2}} y^v = x$，则有

$v = \frac{1}{2} \frac{lnx}{lny}$

代入 ①，得 $f(x) \leqslant f^{\frac{1}{2}}(x)[f(y)]^{\frac{lny}{2lnx}}$

由于 $f(x) > 0$，故有 $[f(x)]^{\frac{1}{2}} \leqslant [f(y)]^{\frac{lny}{2lnx}}$

即 $[f(x)]^{\frac{lnx}{2}} \leqslant [f(y)]^{\frac{lny}{2}}$

亦即 $[f(x)]^{lnx} \leqslant [f(y)]^{lny}$

由于对称性，有 $[f(y)]^{lny} \leqslant [f(x)]^{lnx}$

$\therefore [f(x)]^{\ln x} = [f(y)]^{\ln y}$（任意 $x, y > 1$）

$\therefore [f(x)]^{\ln x} = c$（$c$ 为常数，且 $c > 1$）

$\therefore f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$

7. 证明：设 $M = sup\,|f(x)|$，则 $0 < M \leqslant 1$

（反证法）若存在实数 y_0，使 $|g(y_0)| = 1 + r, r > 0$，则

$$\begin{aligned} 2|f(x)||g(y_0)| &= |f(x+y_0) + f(x-y_0)| \\ &\leqslant |f(x+y_0)| + |f(x-y_0)| \\ &\leqslant 2M \end{aligned}$$

所以 $|f(x)| \leqslant \frac{M}{|g(y_0)|} = M - \delta, \delta > 0$

与 $M = sup\,|f(x)|$ 矛盾，故 $|g(y)| \leqslant 1$ 对一切 y 成立.

8. 解：由于常数多项式不可能同时满足(2)和(3)，故 $n \geqslant 1$.

在(2)中令 $a = b, c = -2a$，则由 $p(x,y)$ 的齐次性，得

$$\begin{aligned} 0 &= p(2a, -2a) + p(-a, a) + p(-a, a) \\ &= [(-2)^n + 2]p(-a, a) \end{aligned}$$

若 $n > 1$，则有 $p(-a,a) = 0$，因而 $x + y$ 能整除 $p(x,y)$

设 $p(x,y) = (x+y)p_1(x,y)$，由(2)得

$(a+b+c)p_1(a+b,c) + (a+b+c)p_1(b+c,a) + (a+b+c)p_1(c+a,b) = 0$

因为 a, b, c 为任意实数，所以必有

$p_1(a+b,c) + p_1(b+c,a) + p_1(c+a,b) = 0$

$p_1(x,y)$ 是 $n-1$ 次齐次多项式，且

$p_1(1,0) = p_1(1,0)(1+0) = p(1,0) = 1$

即 $p_1(x,y)$ 仍满足条件(1)－(3)，它是 $n-1$ 次的，如果 $n-1>1$，同样可构造一个 $n-2$ 次齐次

多项式 $p_2(x,y)$，它满足条件(1) - (3)，并且 $p_1(x,y) = (x+y)p_2(x,y)$

如此继续下去，总会得到一个一次多项式 $p_{n-1}(x,y) = Ax + By$

仍满足条件(1)—(3)

由(3)，有 $p_{n-1}(1,0) = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A = 1$　即 $A = 1$

由(2)，令 $a = 1, b = c = 0$，得

$p_{n-1}(1,0) + p_{n-1}(0,1) + p_{n-1}(1,0)$

$= 2p_{n-1}(1,0) + p_{n-1}(0,1) = 0$

即　$2 + B = 0$，　$\therefore B = -2$

$\therefore p_{n-1}(x,y) = x - 2y$

因此，$p(x,y) = (x+y)^{n-1}(x-2y)$

经检验知，这个多项式满足题设条件.

9. 解：由

$f(1,n) = f(0,f(1,n-1)) = f(1,n-1) + 1$ 及 $f(1,0) = f(0,1) = 2$，得

$f(1,n) = n + f(1,0) = n + 2$

又由

$$f(2,n) = f(1,f(2,n-1)) = f(2,n-1) + 2$$
$$= 2n + f(2,0)$$
$$f(2,0) = f(1,1) = 3$$

所以　$f(2,n) = 2n + 3$

再由

$$f(3,n) = f(2,f(3,n-1)) = 2f(3,n-1) + 3$$
$$= 2[f(3,n-1) + 3] - 3$$

即有 $\dfrac{f(3,n)+3}{f(3,n-1)+3} = 2$

所以 $f(3,n) + 3 = 2^n[f(3,0) + 3]$

因为 $f(3,0) = f(2,1) = 5$，所以 $f(3n) = 2^{n+3} - 3$

最后计算 $f(4,n)$

$f(4,n) = f(3,f(4,n-1)) = 2^{f(4,n-1)+3} - 3$

即 $f(4,n) + 3 = 2^{f(4,n-1)+3}$

令 $t_n = f(4,n) + 3, \varphi(x) = 2^x$，则 $t_n = \varphi(t_{n-1})$

于是

$$t_n = \varphi^{(n)}(t_0) = \underbrace{\varphi(\varphi\cdots(\varphi(t_0)))}_{n\text{重迭代}}$$

由于 $t_0 = f(4,0) + 3 = f(3,1) + 3 = 2^4$，所以

$f(4,n) = \varphi^{(n)}(2^4) - 3$

由此得 $f(4,1981) = \varphi^{(1981)}(2^4) - 3 = 2^{2^{\cdots^{2}}} - 3$

其中指数重数为 1984.

10. 解：对每一个满足题目条件的确定的函数 f，由已知 $f(t^2f(s)) = s(f(t))^2$　①

令 $t = 1$ 代入，得 $f(f(s)) = s(f(1))^2$　②

再令 $s = 1$ 代入 ① 式，得 $f(t^2f(1)) = (f(t))^2$　③

现设 $f(1) = k$，则以上两式可化为

$f(f(s)) = k^2s$　④

$f(kt^2) = (f(t))^2$　⑤

令 $s = 1$ 代入 ④ 式，得 $f(k) = k^2$

再令 $s = f(k)$ 代入 ① 式，得 $f(t^2k^3) = k^2(f(t))^2$

另一方面，由 ⑤ 式，得 $f(t^2k^3) = f(k(kt)^2) = (f(kt))^2$

比较两式，得 $(f(kt))^2 = k^2(f(t)^2) \Rightarrow f(kt) = kf(t)$ ⑥

将 ⑥ 式代入 ⑤ 式，得 $kf(t^2) = (f(t))^2$

类似地可写出 $kf(t^4) = (f(t^2))^2, \cdots, kf(t^{2m}) = (f(t^{2^{m-1}}))^2$

将这列式子的第一个平方并与第二个比较得 $k^3 f(t^4) = (f(t))^4$

再平方并与第三式比较得 $k^7 f(t^8) = (f(t))^8$

依此类推，最后可得 $(f(t))^{2^m} = k^{2^m-1} f(t^{2^m})$ ⑦

这里 m 是任一个正整数.

取 k 的任一个素因子 p，有 $p^\alpha \mid k$，及 $p^\beta \mid f(t)$.

由 ⑦ 式，得 $\beta \cdot 2^m \geqslant \alpha(2^m - 1)$

即 $\dfrac{\beta}{\alpha} \geqslant \dfrac{2^m - 1}{2^m}$

两边取极限，得 $\dfrac{\beta}{\alpha} \geqslant \lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{2^m - 1}{2^m} = 1 \Rightarrow \beta \geqslant \alpha$

由此及 p 的任意性可知 $k \mid f(t)$.

下设 $g(t) = \dfrac{f(t)}{k}$，则 $g(t)$ 也是 $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 的函数.

由 ⑥ 式，得 $f(t^2 f(s)) = f(t^2 \cdot kg(s)) = kf(t^2 \cdot g(s)) = k^2 \cdot g(t^2 \cdot g(s))$ 及 $s(f(t))^2 = k^2 s(g(t))^2$. 再由 ① 式，即得 $g(t^2 \cdot g(s)) = s(g(t))^2$ ⑧

这表明 g 也是一个满足题目条件的函数，且 $g(1) = 1$，从而，前面所得的关于 f 的结果对 g 都适应，且将其中的 k 换为 1，于是，由 ④、⑤ 两式，得

$g(g(s)) = s$ ⑨

$g(t^2) = (g(t))^2$ ⑩

在 ⑧ 式中用 $g(s)$ 代替 s 式，可得 $g(t^2 s) = g(s) \cdot (g(t))^2$ ⑪

应用 ⑩ 式与 ⑪ 式，得

$$(g(ab))^2 = g(a^2b^2) = g(a^2)(g(b))^2 = (g(a) \cdot g(b))^2 \Rightarrow g(ab) = g(a)g(b) \quad ⑫$$

由 ⑨ 式可看出 g 是单射，故对所有 $a > 1$ 都有 $g(a) > 1$. 再由 ⑫ 式即知合数对应的函数值仍是合数，从而对素数 p，由 $g(g(p)) = p \Rightarrow g(p)$ 是素数.

这样可知，$f(1998) = kg(1998) = kg(2) \cdot g(3)^3 \cdot g(37) \geqslant (2^3 \cdot 3 \cdot 5)k = 120k \geqslant 120$

另一方面，作一个函数 f. 如下：

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \\ f(5) = 37 \\ f(37) = 5 \\ f(p) = p(p\text{ 是其余的素数}), \end{cases}$$

$f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \cdots f(p_k)^{\alpha_k}$（$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是合数 n 的素数分解式）.

容易验证它满足题目条件，且 $f(1998) = 120$

从而，$f(1998)$ 最小值确是 120

11. 解：当 $x > 2$ 时，令 $x = 2 + t(t > 0)$，有

$f(tf(2))f(2) = f(t + 2) = f(x)$

$\because f(2) = 0$

$\therefore f(x) = 0(x \geqslant 2)$

当$0 \leqslant x < 2$时,令$x + t = 2(t > 0)$,有

$0 = f(2) = f(x + t) = f(tf(x))f(x)$

$\because f(x) \neq 0$

$\therefore f(tf(x)) = 0$

$\therefore tf(x) \geqslant 2$

即 $f(x) \geqslant \frac{2}{t} = \frac{2}{-x+2}$

但$f(x) > \frac{2}{2-x}$在$x \in [0,2)$时不成立,因为若有$x_1 \in [0,2)$,且$f(x_1) > \frac{2}{2-x_1}$

则有 $(2 - x_1)f(x_1) > 2$

可以找到$y < 2 - x_1$,即

$x_1 + y < 2$ ①

使 $yf(x_1) \geqslant 2$

$\therefore f(yf(x_1)) = 0$

由此得$f(x_1 + y) = f(yf(x_1))f(x_1) = 0$

$\therefore x_1 + y \geqslant 2$,这与①矛盾,故$f(x) = \frac{2}{2-x}$

综上可知:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geqslant 2 \\ \frac{2}{2-x} & 0 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

12. 证明:如果存在这样的函数f,则

$f(f(n)) = n + 1987$对任$n \in \mathbf{N}^+$成立,于是

$f(n + 1987) = f\{f[f(n)]\} = f(n) + 1987$

对每一个$n \in \mathbf{N}^+$成立.

用数学归纳法易证:$f(n + 1987k) = f(n) + 1987k$ ①

对所有$n, k \in \mathbf{N}^+$成立.

设$r \in \mathbf{N}^+, r \leqslant 1986$,则$f(r) = 1987k + l$ ②

其中$k, l \in \mathbf{N}^+, l \leqslant 1986$

根据定义有

$$\begin{aligned} r + 1987 &= f(f(r)) = f(1987k + l) \\ &= f(l) + 1987k \end{aligned}$$ ③

所以k只能是0或1.

当$k = 1$时,由②,有$f(r) = 1987 + l$

又由③,有$f(l) = r \Rightarrow r \neq l$

当$k = 0$时,由②,有$f(r) = l$

又由③,有$f(l) = r + 1987 \Rightarrow r \neq l$

因此,集数$\{0,1,2,\cdots,1986\}$中的数是两两配对,使得

$f(l) = r,\quad f(r) = 1987 + l$;或$f(r) = l,\quad f(l) = 1987 + r$

而且$r \neq l$,但是数集$\{0,1,2,\cdots,1986\}$中一共有1987个数,两两配对后总有一对相同,与$r \neq l$矛盾.因此题目中给出的函数不存在.

第一章　三角形的心

A组

1. 由已知条件及 Euler 公式,得

$$\left(\frac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr \quad ①$$

再由熟知的几何关系,得

$$r = \frac{c+a-b}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{c+a-b}{2}\tan\frac{\pi}{8}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}(c+a-b) \quad ②$$

由 ① 式和 ② 式及正弦定理$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,得

$1 - 2(\sin C - \sin B)^2 = 2(\sin A + \sin C - \sin B)(\sqrt{2} - 1)$

因为 $\angle B = \frac{\pi}{4}$,$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,$\sin C = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \angle A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$

所以

$2\sin A\cos A - (2-\sqrt{2})\sin A - \sqrt{2}\cos A + \sqrt{2} - 1 = 0$

$(\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2} + 1) = 0$

于是,$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$,这时

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$

总之,$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$

经验证这两个值都满足条件.

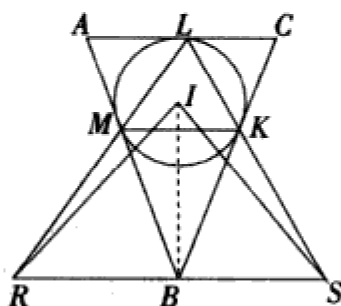


图 Ⅱ - D - 4 - 1

2. 如图 Ⅱ - D - 4 - 1,由 $RS // MK$,有 $\angle MBR = \angle KMB$,$\angle KBS = \angle MKB$

而 BM 与 BK 是两条切线,则 $BM = BK$,$\angle KMB = \angle MKB$

所以 $\angle MBR = \angle KBS$

连结 IB,则 $IB \perp RS$.熟知 $\angle LMK = 90° - \frac{\angle C}{2} = \angle CKL = \angle BKS$

所以　$\angle BRM = \angle LMK = \angle BKS$

从而　$\triangle BMR \backsim \triangle BSK$,得$\frac{BR}{BM} = \frac{BK}{BS}$

故　$BM \cdot BK = BR \cdot BS$

即　$BR \cdot BS = BM^2 = IB^2 - r^2$($r$ 为内切圆半径)$< IB^2$.从而 $\angle RIS$ 是锐角.

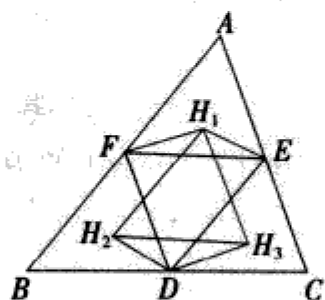


图 Ⅱ - D - 4 - 2

3. 证:如图 Ⅱ - D - 4 - 2,(1)$\angle H_2DB = 90° - \angle B$,$\angle H_3DC = 90° - \angle C$,所以 $\angle H_2DH_3 = 180° - \angle H_2DB - \angle H_3DC = \angle B + \angle C$

而 $\angle EH_1F = 180° - \angle H_1EF - \angle H_1FE = 180° - (90° - \angle AFE) - (90° - \angle AEF) = 180° - \angle A = \angle B + \angle C$

所以$\angle H_2DH_3 = \angle FH_1E$

(2)由(1)知$\angle FH_1E + \angle EDF = 180°$,所以,$H_1$在$\triangle DEF$的外接圆上,同理,$H_2$、$H_3$也在此圆上,因此$D$、$E$、$F$、$H_1$、$H_2$、$H_3$六点共圆.又由(1)知$\angle EH_1F = \angle H_2DH_3$,所以$EF = H_2H_3$.同理$DF = H_1H_3$,$DE = H_1H_2$,故$\triangle DEF \cong \triangle H_1H_2H_3$.

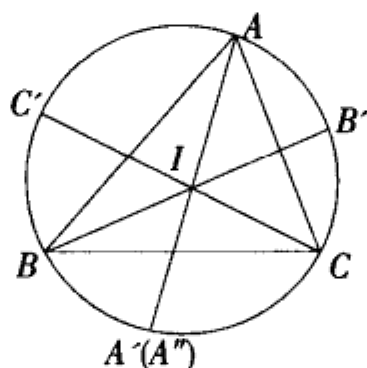
4. 证:如图Ⅱ-D-4-3,作$\triangle ABC$外接圆,延长AI交圆于A'',连BA''、CA'',易知,

$$\angle BIA'' = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \angle IBA''$$

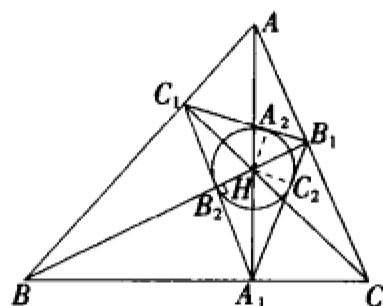
$$\angle CIA'' = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = \angle ICA''$$

故$A''B = A''I = A''C$,即A''是$\triangle BIC$的外心,即A''与A'重合.

同理,B'与B''、C'与C''分别重合,因此,$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$有同一个外接圆.

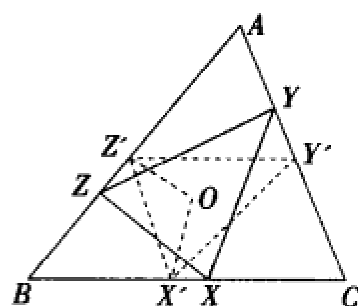


图Ⅱ-D-4-3



图Ⅱ-D-4-4

5. 证:如图Ⅱ-D-4-4,设$\triangle ABC$的垂心为H,则$\angle HA_1B = \angle HC_1B = \angle BA_1A = \angle BB_1A = 90°$.所以$A_1$、$H$、$C_1$、$B$与$A_1$、$B_1$、$A$、$B$分别共圆,因此$\angle HA_1C_1 = \angle HBC_1 = \angle HA_1B_1$.即$A_1H$是$\angle B_1A_1C_1$的平分线.同理,$B_1H$、$C_1H$分别是$\angle A_1B_1C_1$,$\angle A_1C_1B_1$的平分线.因此$H$是$\angle A_1B_1C_1$的内心,从而$H$是$\triangle A_2B_2C_2$的外心,并且$B_2$、$C_2$关于$A_1H$对称,所以$B_2C_2 \parallel BC$.同理,$A_2C_2 \parallel AC$,$A_2B_2 \parallel AB$.故$\triangle ABC$与$\triangle A_2B_2C_2$是位似形,于是这两个三角形的欧拉线或者平行或者重合.由于H是$\triangle ABC$的垂心又是$\triangle A_2B_2C_2$的外心,且在这两个三角形的欧拉线上,所以这两个三角形的欧拉线重合.



图Ⅱ-D-4-5

6. 如图Ⅱ-D-4-5设x',y',z'是$\triangle ABC$三边中点,易知$\triangle x'y'z' \backsim \triangle ABC$.

设O是$\triangle X'Y'Z'$的垂心,由$OX' \perp Z'Y'$,$Z'Y' \parallel BC$得$OX' \perp BC$,即OX'为BC中垂线.因此O为$\triangle ABC$的外心.

由$\triangle X'Y'Z'$与$\triangle XYZ$相似,以O为位似中心作位似旋转变换,使$\triangle X'Y'Z'$变到$\triangle XYZ$.$\because O$为$\triangle X'Y'Z'$的垂心,故O为$\triangle XYZ$的垂心.即O为$\triangle ABC$的外心和$\triangle XYZ$的垂心.

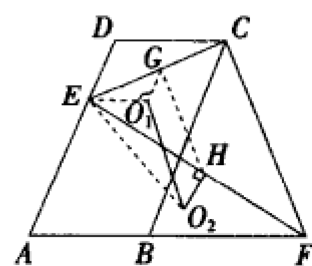
7. 证明:如图Ⅱ-D-4-6,作$O_1G \perp EC$于G,$O_2H \perp EF$于H,连GH,由中位线定理,知$GH \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}CF$.

设$\triangle CDE$的外接圆半径为R_1,$\triangle EAF$的外接圆半径为R_2,连O_1E、O_2E.

有$O_1E = R_1$,$O_2E = R_2$,在$\mathrm{Rt}\triangle OGE$与$\mathrm{Rt}\triangle O_2HE$中,由

$$\frac{EG}{EH} = \frac{\frac{1}{2}EC}{\frac{1}{2}EF} = \frac{R_1\sin D}{R_2\sin A} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{O_1E}{O_2E} \quad ①$$

得$\mathrm{Rt}\triangle O_1GE \backsim \mathrm{Rt}\triangle O_2HE$,从而$\angle GEO_1 = \angle HEO_2$,有$\angle O_1EO_2 = \angle GEH$ ②



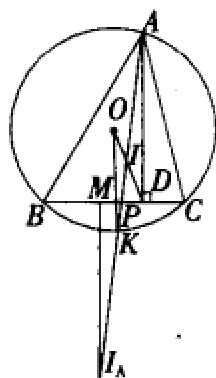
图Ⅱ-D-4-6

在$\triangle O_1EO_2$与$\triangle GEH$中,由式①、②又有

$\triangle O_1EO_2 \backsim \triangle GEH$

则$\dfrac{O_1O_2}{GH}=\dfrac{O_2E}{EH}=\dfrac{R_2}{R_2\sin A}$得$O_1O_2=\dfrac{GH}{\sin A}=\dfrac{\frac{1}{2}CF}{\sin\angle CBF}=R$.

8. 证明：如图Ⅱ-D-4-7，设I_A为旁切圆圆心，则A、I、I_A共线，交$\odot O$于K，交BC于P. 显然，K为$\overset{\frown}{BC}$中点. 于是，$OK\perp BC$，$OK=R$



图Ⅱ-D-4-7

$\because \angle IBI_A=90^\circ$，$\angle IBK=\dfrac{\angle A+\angle B}{2}=\angle BIK$

$\therefore BK=IK$

即 BK为$\triangle BII_A$斜边中线

$\because BK=KC$，$\therefore BK=IK=KI_A=KC$

设旁切圆半径为R_A，有$I_AM=R_A$

$\because AD\perp BC$，$I_AM\perp BC$，$\therefore \dfrac{R_A}{AD}=\dfrac{I_AP}{AP}$，$\dfrac{R}{AD}=\dfrac{IK}{IA}$

因此，要证$R_A=R\Leftrightarrow\dfrac{I_AP}{AP}=\dfrac{IK}{IA}$

$(\because I_AP=2IK-IP,AP=IA+IP)$

$\Leftrightarrow\dfrac{2IK-IP}{IA+IP}=\dfrac{IK}{IA}\Leftrightarrow IK\cdot IA-IA\cdot IP=IP\cdot IK$

$\Leftrightarrow IK\cdot IA=IP(IA+IK)=IP\cdot AK$

$\Leftrightarrow\dfrac{IA}{IP}=\dfrac{AK}{IK}(*)$

$\because BI$为角平分线，$\therefore \dfrac{IA}{IP}=\dfrac{AB}{BP}$

$\because IK=KC$，$\therefore \dfrac{AK}{IK}=\dfrac{AK}{KC}$

故$(*)\Leftrightarrow\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{AK}{KC}(**)$

$\because AI$为角平分线，$\therefore\angle BAP=\angle KAC$

$\because\angle ABP=\angle AKC$，$\therefore\triangle ABP\backsim\triangle AKC$

故$(**)$成立.

B组

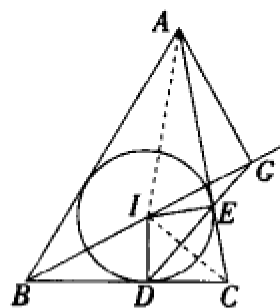
1. 连结IA、ID、IC、IE，因为

$ID\perp BC$，$IE\perp CA$

所以I、D、C、E四点共圆，故

$\angle IDE=\angle ACI=\dfrac{1}{2}\angle ACB$

$\angle BOG=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle ACB$



图Ⅱ-D-4-8

因为$\angle AIB=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle ACB$，所以$\angle AIB=\angle BDG$，$\angle ABI=\angle GBD$，从而$\triangle ABI\backsim\triangle\angle GBD$

故 $\dfrac{AB}{BI}=\dfrac{BG}{BD}$

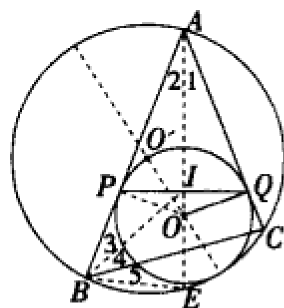
于是$\triangle ABG\backsim\triangle IBD$，$\angle BAG=\angle BID$

因此 $\angle BAG+\angle ABG=\angle BID+\angle IBD=90^\circ$

故$AG\perp BG$.

2. 证：如图Ⅱ-D-4-9，I平分$PQ\Leftarrow\angle 4=\angle 3\Leftarrow\angle 4+\angle 5=\angle 3+\angle 5$（由$\angle 1=\angle 2=\angle 5$）

$\Leftarrow\angle 4+\angle 5=\angle 3+\angle 2$



图Ⅱ-D-4-9

$\Leftarrow \angle EIB = \angle EBI$

$\Leftarrow BE = IE = OE + OI = 2R\sin\dfrac{A}{2}$

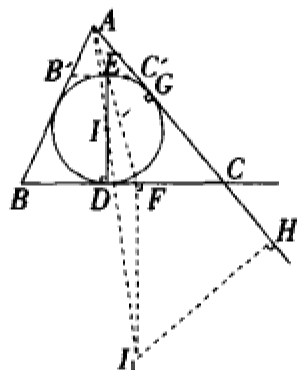
(设 $\odot O'$,$\odot O$ 的半径分别为 R、r)

易知,$\angle OPI = \dfrac{\pi}{2} - \angle POA = \dfrac{1}{2}A$,$OI = r\sin\dfrac{A}{2}$

$$OE = \frac{OD \cdot OK}{OA} = \frac{r(2R - r)}{r\sec\dfrac{A}{2}} = (2R - r)\cdot\sin\frac{A}{2}$$

从而　$OE + OI = 2R\sin\dfrac{A}{2}$ 成立.

3. 证法一. 如图Ⅱ-D-4-10,过 F 作 $FI_1 \perp BC$ 交 AI 的延长线于 I_1,过 I 作 $IG \perp AC$ 于 G,过 I_1 作 $I_1H \perp AC$ 于 H,则　$IE \parallel I_1F$,$IG \parallel I_1H_1$



图Ⅱ-D-4-10

$\therefore \dfrac{IF}{IE} = \dfrac{AI_1}{AI} = \dfrac{I_1H}{IG}$,

而　$IE = IG$,$\therefore I_1F = I_1H$

于是 I_1 为 $\triangle ABC$ 在 $\angle A$ 内的旁心.

从而　$CF = CH = AH - AC = \dfrac{1}{2}(c + a - b)$

其中,$BC = a$,$CA = b$,$AB = c$

又 $\because \triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 切 BC 于 D

$\therefore BD = \dfrac{1}{2}(c + a - b)$,故 $BD = CF$

证法二:如图Ⅱ-D-4-10,过 E 作 $B'C' \parallel BC$,交 AB 于 B',交 AC 于 C',则 I 是 $\triangle AB'C'$ 的旁心.

设 $BC = a$,$CA = b$,$AB = c$,$B'C' = a'$,$C'A = b'$,$AB' = c'$,则

$$\frac{EC'}{FC} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = \frac{\frac{1}{2}(c' + a' - b')}{\frac{1}{2}(c + a - b)}$$

但 $EC' = C'G = AG - AC' = \dfrac{1}{2}(a' + b' + c') - b'$

$= \dfrac{1}{2}(c' + a' - b')$

$\therefore FC = \dfrac{1}{2}(c + a - b)$

又 $\because \triangle ABC$ 的内切圆 $\odot I$ 切 BC 于 D

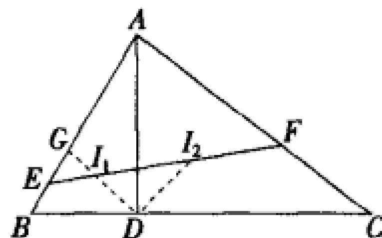
$\therefore BD = \dfrac{1}{2}(c + a - b)$,故 $BD = CF$

4. 证(1):如图Ⅱ-D-4-11,连接 DI_1、DI_2,并延长 DI_1 交 AB 于 G.

$\because \angle BAC = 90°$,$AD \perp BC$ 于 D

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD \backsim \mathrm{Rt}\triangle CAD$

而 I_1、I_2 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle CAD$ 的内心,故 $\angle I_1DI_2 = 90°$,



图Ⅱ-D-4-11

且 $\dfrac{DI_1}{DI_2} = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore \triangle DI_1I_2 \backsim \triangle ABC$

从而,$\angle 1 = \angle 2 = \angle B$,又 $\angle EGI_1 = \angle DGB$

$\therefore \angle AEF = \angle GDB = 45°$ 故 $\angle AFE = 90° - 45° = \angle AEF$

$\therefore AE = AF$(四点共圆判定)

证(2):假设 $\angle BAC \neq 90°$,则 $\angle AEF = \angle AFE \neq 45°$,如图Ⅱ-D-4-12连接 AI_1、AI_2、DI_1、DI_2. 则 $AE = AF \neq AD$.(否则 $\triangle ADI_1 \cong \triangle AEI_1$,$\triangle ADI_2 \cong \triangle AFI_2$,从而,$\angle AEF = \angle AFE = 45°$,矛盾).

在 AB、AC 上分别截取 AE'、AF'，使得 $AE' = AF' = AD$. 则 $\triangle ADI_1 \cong \triangle AE'I_1$，$\triangle ADI_2 \cong \triangle AF'I_2$

$\therefore \angle AE'I_1 = \angle ADI_1 = 45°$

$\therefore \angle EE'I_1 = \angle FF'I_2 = 45°$ 或 $135°$

又 $\because EE' = FF'$，$\angle E'EI_1 = \angle F'FI_2$

$\therefore \triangle EE'I_1 \cong \triangle FF'I_2$. 从而，$EI_1 = FI_2$

又 $\because \angle AEI_1 = \angle AFI_2$，$AE = AF$

$\therefore \triangle AEI_1 \cong \triangle AFI_2$，从而，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle BAD = \angle CAD$

$\therefore \angle B = \angle C$，$AB = AC$. 而事实上，$AB = AC$，$\angle BAC \neq 90°$，满足题设. 因此，$AE = AF$，$\angle BAC$ 不一定等于 $90°$. 当 $AB = AC$ 时，存在不成立情形.

图 Ⅱ－D－4－12

5. 证明：如果 $\triangle ABC$ 是等边的(点 O 与 I 重合)，那么结论显然成立.

设点 O 在点 I 与点 C 之间(如图 Ⅱ－D－4－13)，作高 CE，则 $\angle EIB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ODB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$

$\therefore \angle EIB = \angle ODB$

所以　B、I、O、D 四点共圆，于是 $\angle IDB = \angle IOB$

又 $\angle IOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$，于是

$\angle IDB = \angle ACB$，$ID \parallel AC$

图 Ⅱ－D－4－13

当点 I 在点 O 与 C 之间时，证法同上. 见图 Ⅱ－D－4－14、图 Ⅱ－D－4－15.

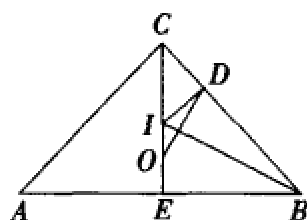


图 Ⅱ－D－4－14

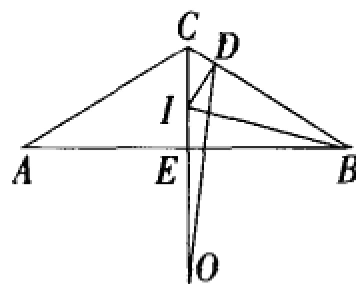


图 Ⅱ－D－4－15

6. 如图 Ⅱ－D－4－16 所示，证明：设 $\angle B$ 的分角线交 OH 于 P，则 BP 也是 $\angle OBH$ 的分角线.

$$\therefore \frac{BH}{BO} = \frac{HP}{OP} \quad ①$$

设 $\angle A$ 的分角线交 OH 于 Q，AQ 也是 $\angle OAH$ 的分角线，

$$\therefore \frac{AH}{AO} = \frac{HQ}{OQ} \quad ②$$

作 $CE \perp AB$，由 $\angle B > \angle A$，得 $AC > BC$，$AE > BE$　③

故 $AH > HB$　④

又 $AO = BO$

从而，Q 在 O、P 之间，AQ 与 BP 的交点 I 必在 $\triangle BOH$ 内.

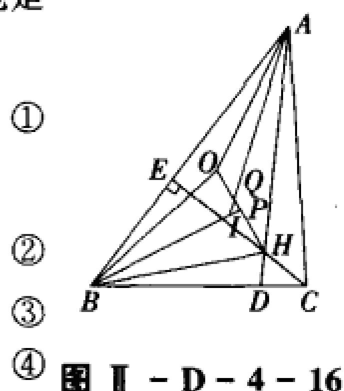


图 Ⅱ－D－4－16

7. 如图 Ⅱ－D－4－17

连结 OA，OC，MC，记 $\angle BAC = \alpha$，$\angle ABC = \beta$

则 $\odot O$ 中，$\angle AOC = 2\beta$

因为 A，C，M，N 四点共圆，所以 $\angle AMC = \angle AOC = 2\beta$

故在 $\triangle BMC$ 中，$\angle MCB = \beta$，所以在 $\odot K$ 中，$\angle MKN = 2\beta$. 因为 L 与 K 关于 MN 对称，所以

$\angle MLN = 2\beta$

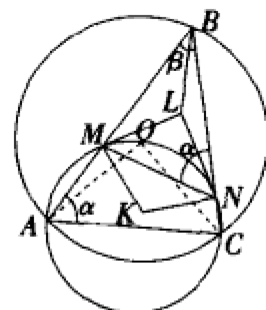


图 Ⅱ－D－4－17

因为 $LM = LN$,

所以,L 是 $\triangle BMN$ 的外心.

又因为 $\angle BNM = \angle MAC = \alpha$,所以

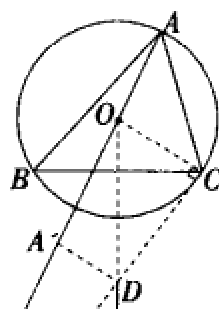
$$\angle MLB = 2\alpha$$

$$\angle MBL = \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

因为 $\angle ABL + \angle BAC = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha = \frac{\pi}{2}$

所以 $BL \perp AC$.

8. 证明:如图 Ⅱ－D－4－18所示,作 BOC 所在圆的直径OD,连 $A'D$,有$\angle OA'D = \angle OCD = 90°$



Ⅱ－D－4－18

$$\therefore OA' = OD \cdot \cos\angle A'OD$$

$$= R \cdot \frac{\cos\angle A'OD}{\cos\angle DOC}$$

易知 $OD \perp BC$

于是,$\angle DOC = \angle A$

从而 $\angle A'OD = 180° - \angle DOC - \angle COA = 180° - \angle A - 2\angle B$

$$= \angle C - \angle B$$

$$\therefore OA' = R \cdot \frac{\cos(C - B)}{\cos A}$$

$$\therefore AA' = R + R \cdot \frac{\cos(C - B)}{\cos A} = R \cdot \frac{\cos(C - B) - \cos(C + B)}{\cos A}$$

$$= R \cdot \frac{2\sin B \cdot \sin C}{\cos A}$$

$$\therefore \frac{1}{AA'} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{-\cos(B + C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$= \frac{1}{2R} \cdot \frac{\sin B\sin C - \cos B\cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\frac{1}{2R} \cdot (1 - \cot B \cdot \cot C)$$

同理可证 $\frac{1}{BB'} = \frac{1}{2R}(1 - \cot C \cdot \cot A), \frac{1}{CC'} = \frac{1}{2R}(1 - \cot A \cdot \cot B)$

$$\because \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$\therefore \frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{2R}[3 - (\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A)]$$

$$= \frac{1}{R}$$

9. 证明:设 $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r,其与 BC、CA、AB 的切点分别为 D、E、F,P、Q、R 分别是线段 EF、FD、DE 的中点(如图 Ⅱ－D－4－19)

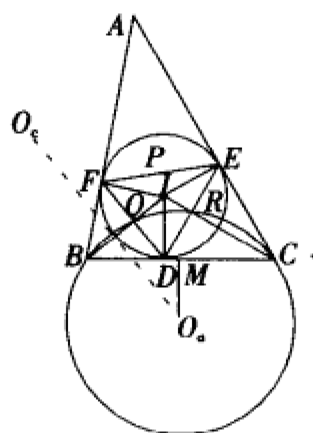


图 Ⅱ－D－4－19

由于 $\triangle IBD$ 与 $\triangle IDQ$ 均为直角三角形,故有

$IQ \cdot IB = ID^2 = r^2$

同理 $IR \cdot IC = r^2$

所以 B、C、R、Q 四点共圆.

由于点 Q、R 分别在IB、IC 的内部,则 I 在 $\odot BQRC$ 的外部,I 关于 $\odot BQRC$ 的圆幂 $IB \cdot IQ = r^2$.从而该圆与 $\odot I$ 直交.

同理,$\odot CRPA$、$\odot APQB$ 也与 $\odot I$ 直交.

故 A'、B'、C' 就是P、Q、R,且 $\triangle PQR$ 外接圆的半径等于 $\odot I$ 半径的$\frac{1}{2}$.

10. 如图 Ⅱ－D－4－20

(1)$\because \angle C_1AA_2 = \angle A_1AC_1$

$\angle AC_1A_2 = \angle AA_1C_1$

$\therefore \triangle AC_1A_2 \backsim \triangle AA_1C_1$

$\therefore \dfrac{C_1A_2}{A_1C_1} = \dfrac{AA_2}{AC_1}$

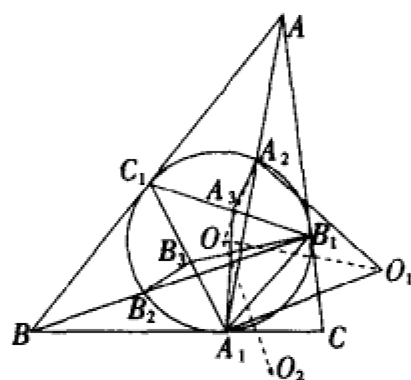
同理,由 $\triangle AA_2B_1 \backsim \triangle AB_1A_1$

知:$\dfrac{A_2B_1}{B_1A_1} = \dfrac{AA_2}{AB_1}$

$\because AC_1 = AB_1$

$\therefore \dfrac{C_1A_2}{A_1C_1} = \dfrac{A_2B_1}{B_1A_1}$

即 $\dfrac{C_1A_2}{B_1A_2} = \dfrac{A_1C_1}{B_1A_1} = \dfrac{C_1A_3}{B_1A_3}$



图Ⅱ-D-4-20

于是 A_2A_3 为 $\angle B_1A_2C_1$ 的角平分线.

(2) 设 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$ 的外接圆圆心分别为 O_1、O_2,连结 $OO_1,OA_2,O_1A_2,OA_1,O_1A_1$,于是 $OO_1 \perp A_1A_2$.

由于$\angle A_1A_3A_2$

$= \angle A_1C_1A_2 + \angle C_1A_2A_3 + \angle C_1A_1A_3$

$= \angle A_1C_1A_2 + \dfrac{1}{2}(\angle C_1A_2B_1 + \angle C_1A_1B_1)$

$= \angle A_1C_1A_2 + \dfrac{\pi}{2}$

所以 $\angle A_2O_1O = \dfrac{1}{2}\angle A_2O_1A_1$

$= \dfrac{1}{2}(\pi - \angle A_1A_3A_2)$

$= \dfrac{\pi}{2} - \angle A_1C_1A_2$

又 $\angle A_1A_2O = \dfrac{\pi}{2} - \angle A_2OO_1$

$= \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\angle A_2OA_1$

$= \dfrac{\pi}{2} - \angle A_1C_1A_2$

从而 $\angle A_2O_1O = \angle A_1A_2O$,因此 $\angle OA_2O_1 = \dfrac{\pi}{2}$

故点 O 对 $\odot O_1$ 的幂为 $OO_1^2 - O_1A_2^2 = OA_2^2$

同理,点 O 对 $\odot O_2$ 的幂也为 $OA_1^2 = OA_2^2$

因此,点 O 对 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的幂相同.

故点 O 在两圆的根轴 PQ 上.

第二章　几个著名定理

A组

1. 证明:$\because \angle C = \pi - \angle A - \angle B = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \triangle ADC$ 为等腰直角三角形.

设 $AD = 1$,则 $CD = 1, AC = \sqrt{2}$

$\because \angle B = \dfrac{\pi}{8}, AD = 1$

$\therefore BD = \cot\frac{\pi}{8}\quad BC = 1 + \cot\frac{\pi}{8}$

$$\therefore \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC}\cdot\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC}\cdot\frac{AC}{BC} = \frac{AC}{DC}\cdot\frac{BD}{BC}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cot\frac{\pi}{8}}{1+\cot\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\tan\frac{\pi}{8}+1} \quad ①$$

由半角公式

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1 \quad ②$$

将②代入①即得

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1$$

由塞瓦定理的逆定理知 AD、BE、CF 三线共点.

2. 解:如图Ⅱ－D－4－21所示,BPE 是 $\triangle ADC$ 的截线,由梅涅劳斯定理知:

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1$$

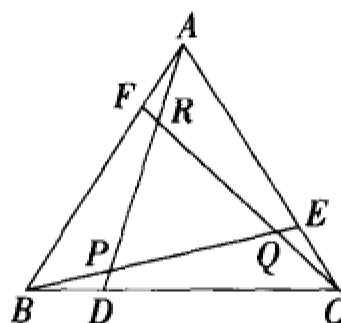
即 $\quad \frac{AP}{PD}\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n-3} = 1$

所以 $\quad \frac{AP}{AD} = \frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}$

于是 $\quad S_{\triangle ABP} = \frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}S_{\triangle ABD}$

$$= \frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}\times\frac{3}{n}S_{\triangle ABC}$$

$$= \frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}S_{\triangle ABC}$$



图Ⅱ－D－4－21

同理可得 $\quad S_{\triangle BCQ} = S_{\triangle CAR} = \frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}S_{\triangle ABC}$

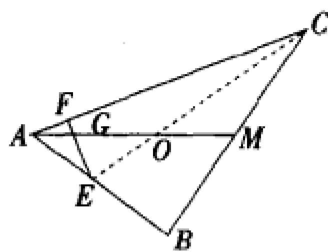
所以 $\quad \frac{4}{49} = 1 - 3\cdot\frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}$

整理得 $\quad 5n^2 - 64n + 192 = 0$

即 $\quad (5n-24)(n-8) = 0$

由于 $n > 6$,所以所求的值为8.

3. 解:如图Ⅱ－D－4－22所示,连 CE 交 AM 于 O,$\triangle CBE$ 与 $\triangle CEF$ 被同一直线 AM 所截,选用梅涅劳斯定理得



图Ⅱ－D－4－22

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CO}{OE}\cdot\frac{EA}{AB} = 1 \qquad \frac{EO}{OC}\cdot\frac{CA}{AF}\cdot\frac{FG}{GE} = 1$$

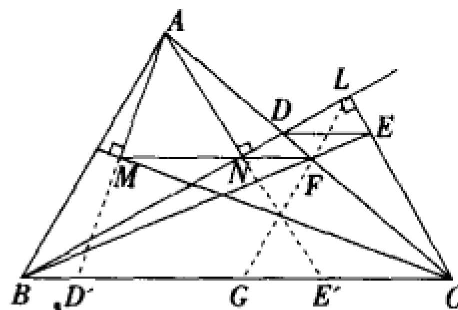
两式相乘,再注意到 $\frac{BM}{MC} = 1$,就有

$$\frac{EG}{GF} = \frac{AC}{AB}\cdot\frac{AE}{AF} = \frac{16}{12}\cdot\frac{2AF}{AF} = \frac{8}{3}$$

4. 证明:如图Ⅱ－D－4－23,延长 AM 交 BC 于 D',延长 AN 交 BC 于 E',则由已知可得,$AN = NE'$,$AM = MD'$

故 $\quad MN \parallel BC \quad ①$

注意到 $AM = MD'$ 故 $AF = FC$.连 LF 并延长交 BC 于 G,设 CL 交 BA 延长线于 G,则 L 平分 CG,所以 $LF \parallel AB$,故 $BG = GC$. ②



图Ⅱ－D－4－23

又在 $\triangle BCL$ 中,同 BE、CD、LG 相交于一点 F,由塞瓦定理得 $\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EL}\cdot\frac{LD}{DB}=1$

由 ② 得 $\frac{CE}{EL}=\frac{DB}{LD}$,故 $DE\,/\!/\,BC$

由 ① 得 $DE\,/\!/\,MN$

5. 证明:如图 Ⅱ-D-4-24,过 A 作直线 l 平行于 BC.延长 DE、DF 分别交 l 于 Q、P.

由相似三角形,

$$\frac{AP}{BD}=\frac{AF}{FB},\frac{AQ}{CD}=\frac{AE}{EC}$$

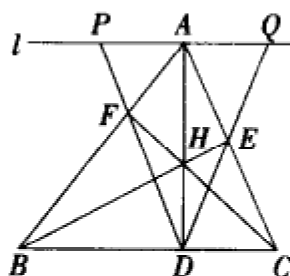


图 Ⅱ-D-4-24

而由塞瓦定理有,$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{EC}{AE}=1$

所以 $AP=AQ$

于是 $\triangle DPQ$ 的高 DA 平分 PQ,所以 $\triangle DPQ$ 是等腰三角形,并且 $\angle EDH=\angle FDH$.

6. 证明:如图 Ⅱ-D-4-25,由内心性质知

$DP=BD=DC$

(1) 若 AB、BC、CA 成等差数列,

即 $AB+AC=2BC$

$\because \triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 有相等的高(内切圆半径),

$\therefore S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}=2S_{\triangle PBC}$

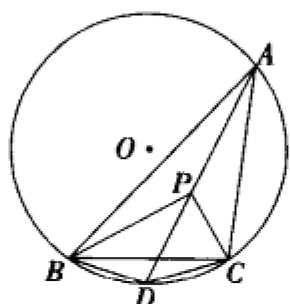


图 Ⅱ-D-4-25

由托勒密定理:$AB\cdot DC+AC\cdot DB=AD\cdot BC$

即,$(AB+AC)\cdot DP=AD\cdot BC$

$$\frac{AD}{DP}=\frac{AB+AC}{BC}=2$$

$\therefore AD=2DP$

即,P 是 AD 的中点,于是

$S_{\triangle APB}=S_{\triangle PBD}$,$S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PCD}$,及

$2S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PBC}+S_{\triangle DBC}$

$\therefore S_{\triangle PBC}=S_{\triangle DBC}$

(2) 若 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle DBC}$.即

$$\frac{1}{2}PB\cdot PC\cdot\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}DB\cdot BC\cdot\sin\frac{A}{2}$$

$$\therefore \frac{PB}{DB}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \qquad ①$$

在 $\triangle PAB$ 中,$\frac{PB}{PA}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$ ②

比较 ①、② 得 $PA=BD$,但 $DP=DB$

$\therefore AD=2DP$

仿前,由托勒密定理得知

$$\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AD}{DP}=2$$

即 $AB+AC=2BC$

$\therefore AB$、BC、CA 成等差数列.

7. 如图 Ⅱ-D-4-26

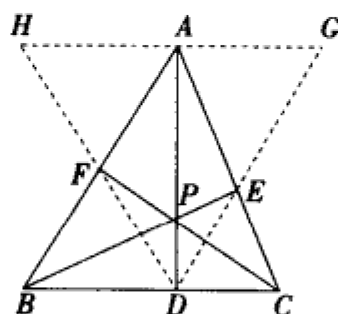


图 Ⅱ-D-4-26

过 A 作 BC 的平行线，分别与 DE、DF 的延长线交于 G、H，则

$$\frac{BD}{AH}=\frac{BF}{FA}$$

$$\frac{DC}{AG}=\frac{CE}{EA} \quad ①$$

由塞瓦定理，可知 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FD}=1$

由①式可知 $\frac{AG}{AH}=1$，即 A 为 GH 的中点，又 $AD\perp BC$，故 $DA\perp HG$，这表明 $\triangle HDG$ 为等腰三角形，从而可知 AD 平分 $\angle EDF$.

8. 因为 D,E,F,D',E',F' 六点共圆.

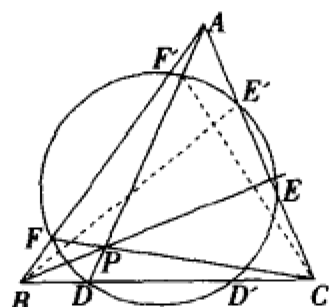


图 Ⅱ－D－4－27

所以 $BD'\cdot BD=BF'\cdot BF$

$CE'\cdot CE=CD'\cdot CD$

$AF'\cdot AF=AE'\cdot AE$

三式相乘，得

$$BD'\cdot CE'\cdot AF'\cdot BD\cdot CE\cdot AF=BF'\cdot CD'\cdot AE'\cdot BF\cdot CD\cdot AE$$

即 $\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$

因为 AD,BE,CF 三线共点，

所以由塞瓦定理，得 $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$ 故

$$\frac{BD'}{D'C}\cdot\frac{CE'}{E'A}\cdot\frac{AF'}{F'B}=1$$

故由塞瓦定理的逆定理，知 AD',BE',CF' 三线交于一点.

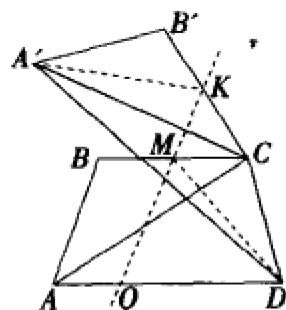


图 Ⅱ－D－4－28

9. 设 K,M 分别是 $B'C$、BC 的中点，连结 $A'K,MD,KM$，并延长 KM 交 AD 于点 Q.

由 $B'K=\frac{1}{2}BC=CM$，$B'A'=BA=CD$，$\angle B'=\angle B=\angle DCM$

得 $\triangle CMD\cong\triangle B'KA'$

所以 $A'K=DM$，$\angle CMD=\angle B'KA'$

在等腰 $\triangle CKM$ 中，$\angle MKC=\angle KMC$

所以 $\angle A'KM=\angle DMQ$

在 MK 两侧的 A' 和 D 到 MK 的距离相等.

故 $A'D$ 的中点在 KM 上，即线段 $A'D$、BC 和 $B'C$ 的中点共线.

10. 证明：如图 Ⅱ－D－4－29，连接 AD,BC，由托勒密定理，

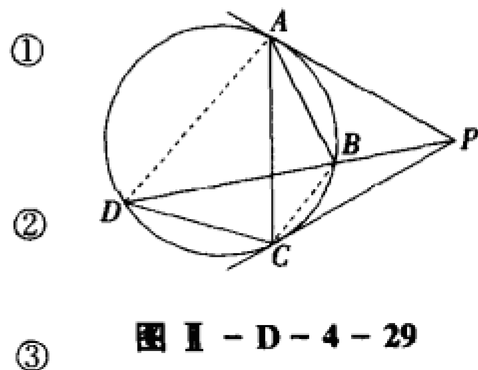


图 Ⅱ－D－4－29

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD \quad ①$$

又 $\angle PAB=\angle PDA$　$\angle APB=\angle DPA$

$\therefore\triangle PAB\backsim\triangle PDA$

即有 $\frac{AB}{AD}=\frac{PB}{PA}$　②

同理可证 $\triangle PCB\backsim\triangle PDC$

即有 $\frac{BC}{CD}=\frac{PB}{PC}$　③

但 $PA=PC$，由②③，得

$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{CD}$，即 $AB\cdot CD=AD\cdot BC$

将上式代入①式得

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC=2AB\cdot CD$$

11. 证明:如图 Ⅱ－D－4－30,设圆 C_1 的圆心为 O,半径为 R,连接 OA_i,OB_i($i=1,2,3,4$).则在四边形 $OA_1B_1B_2$ 中,由推广的托勒密定理有,

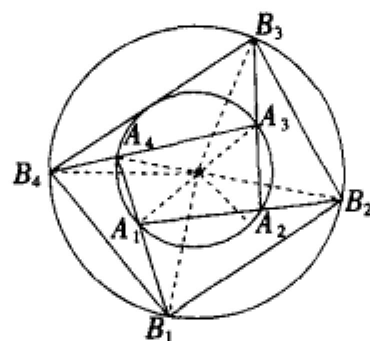


图 Ⅱ－D－4－30

$OA_1\cdot B_1B_2+A_1B_1\cdot OB_2\geqslant OB_1\cdot A_1B_2$

即 $R\cdot B_1B_2+2R\cdot A_1B_1\geqslant 2R(A_1A_2+A_2B_2)$.

$\therefore\ B_1B_2+2A_1B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2B_2)$

同理:$B_2B_3+2A_2B_2\geqslant 2(A_2A_3+A_3B_3)$,$B_3B_4+2A_3B_3\geqslant 2(A_3A_4+A_4B_4)$

$B_4B_1+2A_4B_4\geqslant 2(A_4A_1+A_1B_1)$

将上述四个不等式相加,并整理,得

$B_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+B_4B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)$

等号成立的条件是:当且仅当四边形 $OA_1B_1B_2$,$OA_2B_2B_3$,$OA_3B_3B_4$,$OA_4B_4B_1$ 都是圆内接四边形.根据圆内接四边形性质知,

$\angle OA_2A_3=\angle OB_2B_3$,$\angle OA_2A_1=\angle OB_3B_2$

而 $\angle OB_2B_3=\angle OB_3B_2$,$\therefore\angle OA_2A_1=\angle OA_2A_3$

因此,$\triangle OA_1A_2\cong\triangle OA_2A_3$,于是 $A_1A_2=A_2A_3$

同理 $A_2A_3=A_3A_4=A_4A_1$,故知四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形,即当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 是正方形时等号成立.

12. 证明.如图 Ⅱ－D－4－31,由斯德瓦特定理

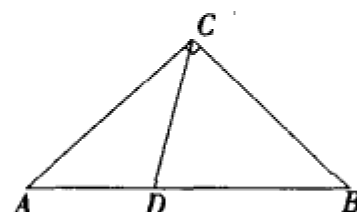


图 Ⅱ－D－4－31

$BD\cdot AC^2+AD\cdot BC^2=AB\cdot CD^2+AD\cdot DB\cdot AB$

上式两端同乘以 AB 得

$(BD\cdot AC^2+AD\cdot BC^2)(AD+BD)=(AB\cdot CD)^2+AD\cdot BD\cdot AB^2$

即$(AC\cdot BD)^2+(BC+AD)^2+AD\cdot BD\cdot AC^2+AD\cdot BD\cdot BC^2$

$=(AB\cdot CD)^2+AD\cdot BD\cdot AB^2$

但$\angle ACB=90^\circ$,即有 $AC^2+BC^2=AB^2$

故 $(AB\cdot CD)^2=(AC\cdot BD)^2+(BC\cdot AD)^2$.

B组

1. 如图 Ⅱ－D－4－32

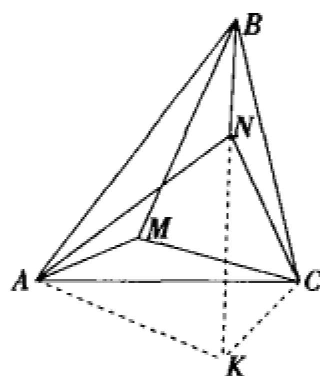


图 Ⅱ－D－4－32

延长 BN 至点K,使$\angle BCK=\angle BMA$

因为$\angle AMB>\angle ACB$,所以点 K 在 $\triangle ABC$ 的外部

因为$\angle MBA=\angle NBC$,所以

$\triangle ABM\backsim\triangle KBC$,故有$\dfrac{BA}{BK}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{AM}{KC}$

因为$\angle ABK=\angle MBC$,所以$\triangle ABK\backsim\triangle MBC$ 故有

$\dfrac{AB}{MB}=\dfrac{BK}{BC}=\dfrac{AK}{MC}$

因为$\angle CKN=\angle MAB=\angle NAC$,所以 A,N,C,K 四点共圆.

由托勒密定理,得 $AC\cdot NK=AN\cdot CK+CN\cdot AK$

即 $AC\cdot(BK-BN)=AN\cdot CK+CN\cdot AK$

将 $CK=\dfrac{AM\cdot BC}{BM}$,$AK=\dfrac{AB\cdot CM}{BM}$,$BK=\dfrac{AB\cdot BC}{BM}$

代入,得

$$AC\cdot\left(\frac{AB\cdot BC}{BM}-BN\right)=\frac{AN\cdot AM\cdot BC}{BM}+\frac{CN\cdot AB\cdot CM}{BM}$$

即 $\dfrac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\dfrac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\dfrac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$

2. 如图 Ⅱ－D－4－33

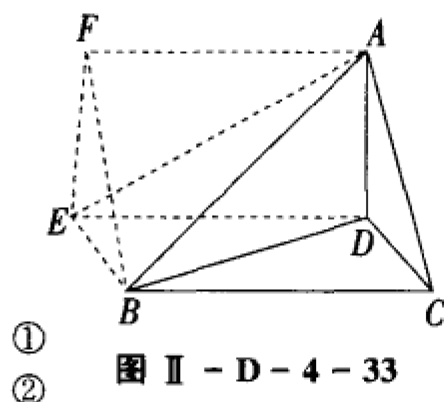


图 Ⅱ－D－4－33

作平行四边形 $BCDE$、$BCAF$，则四边形 $ADEF$ 也是平行四边形.

在四边形 $ABEF$ 和 $ADEB$ 中，由广义托勒密定理，得

$AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot BF$

$BD \cdot AE + AD \cdot BE \geqslant AB \cdot ED$

因为 $AF = ED = BC, EF = AD, EB = CD, BF = AC$

所以 $AB \cdot AD + BC \cdot CD \geqslant AE \cdot AC$ ①

$BD \cdot AE + AD \cdot CD \geqslant AB \cdot BC$ ②

故 $DA \cdot DB \cdot AB + BD \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA$

$= DB \cdot (AB \cdot AD + BC \cdot CD) + DC \cdot DA \cdot CA$

$\geqslant DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot AC$

$= AC \cdot (DB \cdot AE + DC \cdot AD)$

$\geqslant AB \cdot DC \cdot CA$

等号当且仅当①，②两式同时都成立，即当且仅当四边形 $ABEF$ 和 $AEBD$ 都是圆内接四边形时成立.亦即 $AFEBD$ 恰是圆内接五边形时等号成立.由于 $AFED$ 为平行四边形，所以条件等价于 $AFED$ 为矩形(即 $AD \perp BC$)且 $\angle ABE = \angle ADE = 90°$，亦等价于 $AD \perp BC$ 且 $CD \perp AB$，所以

$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant AB \cdot BC \cdot CA$

等号成立的充分必要条件是 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

3. 如图 Ⅱ－D－4－34

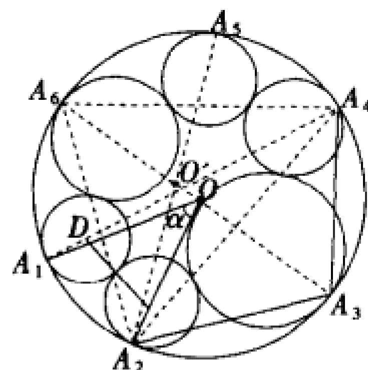


图 Ⅱ－D－4－34

设 $\odot O$(大圆)的半径为 1，小圆半径分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_6$，$\angle A_1OA_2 = \alpha$，则 $A_1A_2 = 2\sin\frac{\alpha}{2}$

又由余弦定理，得

$$\cos\alpha = \frac{(1-r_1)^2 + (1-r_2)^2 - (r_1+r_2)^2}{2(1-r_1)(1-r_2)}$$

$$= \frac{1 - r_1 - r_2 - r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}$$

于是有 $A_1A_2^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2(1-\cos\alpha)$

$$= \frac{4r_1r_2}{(1-r_1)(1-r_2)}$$

考虑 $A_3A_4, A_5A_6, A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1$ 类似表达式，有

$$A_1A_2^2 \cdot A_3A_4^2 \cdot A_5A_6^2 = \frac{64 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot r_6}{(1-r_1)(1-r_2)\cdots(1-r_6)},$$

$$= A_2A_3^2 \cdot A_4A_5^2 \cdot A_6A_1^2$$

故 $A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot A_6A_1$

4. 证明：如图 Ⅱ－D－4－35，如果 EF 平行于 BC，则 $AB = AC$，AD 是 $EFZY$ 的对称轴，因而四边形是圆内接四边形.

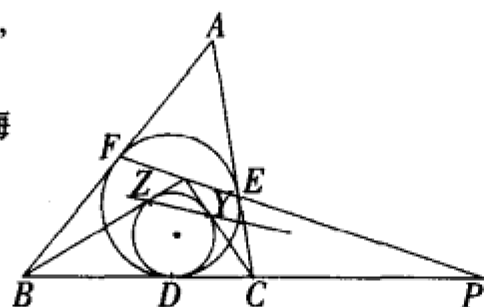


图 Ⅱ－D－4－35

如果 EF 不平行于 BC，可假定 BC 与 EF 的延长线相交于 P，由梅涅劳斯定理，有

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = -1$$

由 $BZ = BD = BF, CY = CD = CE$，及 $\frac{AF}{EA} = 1 = \frac{XY}{YX}$，有

$\frac{\overrightarrow{XZ}}{\overrightarrow{ZB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YX}} = -1$

由梅涅劳斯逆定理,知 Z、Y、P 三点共线,于是,

$PE \cdot PF = PD^2 = PY \cdot PZ$

故 $EFZY$ 是圆内接四边形.

5. 证明:由于 $\triangle A_1A_2A_3$ 为非等腰三角形,易见,$\triangle A_1B_1I$、$\triangle A_2B_2I$、$\triangle A_3B_3I$ 的外心均可定义.

先证下面的引理.

引理:设 $\triangle ABC$ 的内心为 I,T 为 $\triangle BIC$ 的外心,则 T 必在 $\angle A$ 的内角平分线上.

证:如图 Ⅱ-D-4-36 所示,作出 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线,它们相交于旁心 E,E 在 $\angle A$ 的内角平分线上.因为 $BE \perp BI$ 且 $CE \perp CI$,所以四边形 $BECI$ 内接于圆,其外接圆的圆心在 EI 上.这一圆心亦即 $\triangle BIC$ 的外心.引理得证.

下面证明原题.

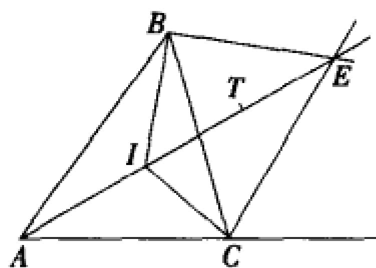


图 Ⅱ-D-4-36

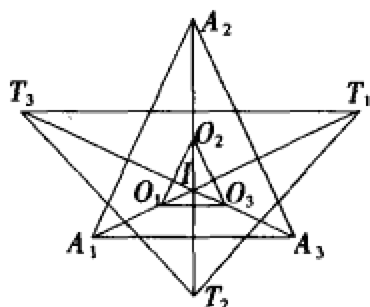


图 Ⅱ-D-4-37

如图 Ⅱ-D-4-37 所示,对于 $i = 1,2,3$,我们记 O_i 为 $\odot C_i$ 的圆心,T_i 为 $\triangle A_{i+1}IA_{i+2}$ 的外心.显然,O_i 在 $\angle A_i$ 的内角平分线上.由引理知,T_i 也在 $\angle A_i$ 的内角平分线上.因此,$\triangle O_1O_2O_3$ 和 $\triangle T_1T_2T_3$ 对点 I 是透视的.由笛沙格定理知,它们必关于一条直线透视,即若记 $O_i(i = 1,2,3)$ 为直线 $O_{i+1}O_{i+2}$ 和 $T_{i+1}T_{i+2}$ 的交点,则 Q_1、Q_2、Q_3 三点共线.但由于 $T_{i+1}T_{i+2}$ 是 A_iI 的垂直平分线,而 $O_{i+1}O_{i+2}$ 是 B_iT 的垂直平分线,因此,点 Q_1、Q_2、Q_3 恰分别为 $\triangle A_1B_1I$、$\triangle A_2B_2I$、$\triangle A_3B_3I$ 的外心.

【注】 不熟悉笛沙格定理的学生可按下述方法推理.

对 $\triangle IO_1O_2$、$\triangle IO_2O_3$、$\triangle IO_3O_1$ 和三点组(T_1、T_2、Q_3)、(T_2、T_3、Q_1)、(T_3、T_1、Q_2)分别应用梅涅劳斯定理,可以发现一些熟知的结论:

$\frac{O_1T_1}{IT_1} \cdot \frac{IT_2}{O_2T_2} \cdot \frac{O_2Q_3}{O_1Q_3} = 1, \frac{IT_3}{O_3T_3} \cdot \frac{O_2T_2}{IT_2} \cdot \frac{O_3Q_1}{O_2Q_1} = 1$

$\frac{IT_1}{O_1T_1} \cdot \frac{O_3T_3}{IT_3} \cdot \frac{O_1Q_2}{O_3Q_2} = 1$

将以上三式相乘即得

$\frac{O_2Q_3}{O_1Q_3} \cdot \frac{O_3Q_1}{O_2Q_1} \cdot \frac{O_1Q_2}{O_3Q_2} = 1$

这说明点 Q_1、Q_2、Q_3 共线.

6. 证明:如图 Ⅱ-D-4-38,设 $\frac{BD}{DC} = \lambda, \frac{CE}{EA} = \mu, \frac{AF}{AB} = p$,其中 $0 < \lambda, \mu, p < 1$ 则

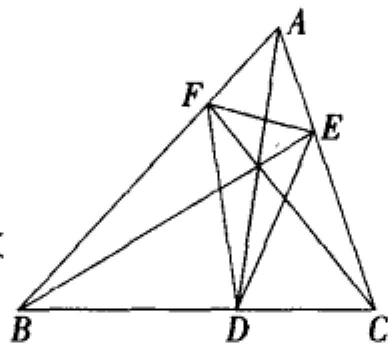


图 Ⅱ-D-4-38

$\frac{DC}{BC} = 1 - \lambda, \frac{AE}{AC} = 1 - \mu, \frac{FB}{AB} = 1 - p$,从而

$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AE \cdot AF}{AC \cdot AB} = p(1 - \mu)$

同理

$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle ABC}}=\lambda(1-p),\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\mu(1-\lambda)$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle ABC}}=p(1-\mu)+\lambda(1-p)+\mu(1-\lambda)$$

$$=\lambda+\mu+p-(\lambda\mu+\lambda p+\mu p) \qquad ①$$

由 AD、BE、CF 三线共点，据塞瓦定理.

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{\mu}{1-\mu}\cdot\frac{p}{1-p}=1$$

$$\therefore \lambda\mu p=(1-\lambda)(1-\mu)(1-p) \qquad ②$$

于是 $(\lambda\mu p)^2=\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)p(1-p)\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3$

即 $\lambda\mu p\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{1}{8}$

当且仅当 $\lambda=\mu=p=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

又由 ②

$$\lambda\mu p=1-(\lambda+\mu+p)+(\lambda\mu+\lambda p+\mu p)-\lambda\mu p$$

$$\therefore \lambda+\mu+p-(\lambda\mu+\lambda p+\mu p)=1-2\lambda\mu p\geqslant 1-2\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

代入 ①，即

$$\frac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BDF}+S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}\geqslant\frac{3}{4}$$

故 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}\leqslant\frac{1}{4}$

由上面推导过程知，当且仅当 D、E、F 分别是三边中点时，等号成立.

7. 设直线 AP，AL 交 BC 于 D，L，直线 BP、BM 交 CA 于 E、M，直线 CP、CN 交 AB 于 F，N. 因为 AD，BE，CF 三线共点，所以由塞瓦定理，得

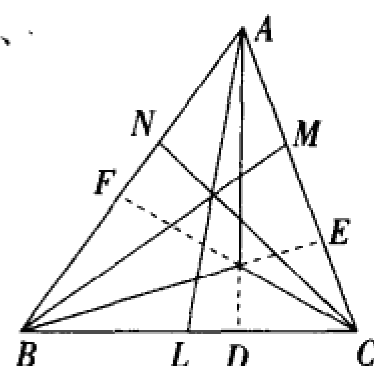


图 Ⅱ－D－4－41

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

于是

$$\frac{AB\cdot\sin\angle DAB}{CA\cdot\sin\angle DAC}\cdot\frac{BC\cdot\sin\angle EBC}{AB\cdot\sin\angle EBA}\cdot\frac{CA\cdot\sin\angle FCA}{BC\cdot\sin\angle FCB}=1$$

$$\frac{\sin\angle DAB}{\sin\angle DAC}\cdot\frac{\sin\angle EBC}{\sin\angle EBA}\cdot\frac{\sin\angle FCA}{\sin\angle FCB}=1$$

因为

$$\angle LAB=\angle DAC,\angle MBC=\angle EBA,\angle NCA=\angle FCB$$

所以

$$\angle DAB=\angle LAC,\angle EBC=\angle MBA,\angle FCA=\angle NCB$$

从而 $\frac{\sin\angle LAC}{\sin\angle LAB}\cdot\frac{\sin\angle MBA}{\sin\angle MBC}\cdot\frac{\sin\angle NCB}{\sin\angle NCA}=1$

于是

$$\frac{AB\cdot\sin\angle LAB}{CA\cdot\sin\angle LAC}\cdot\frac{BC\cdot\sin\angle MBC}{AB\cdot\sin\angle MBA}\cdot\frac{CA\cdot\sin\angle NCA}{BC\cdot\sin\angle NCB}=1$$

因此，$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$

故 由塞瓦定理的逆定理，知 AL，BM，CN 三点共线.

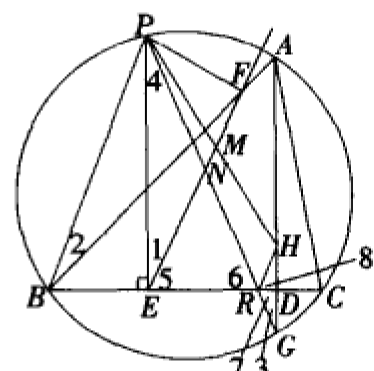


图 Ⅱ－D－4－42

8. 证明：如图 Ⅱ－D－4－42，过 P 作 $PE\perp BC$，$PF\perp AB$，E、F 为垂足，则 EF 即为 $\triangle ABC$ 关于 P 点的西姆松线. 设 EF 交 PH 于 M，需要证明

$PM = MH$

为此,延长 AH 交 BC 于 D,交 $\triangle ABC$ 外接圆于 G,并连接 PG,交 EF 于 N,交 BC 于 R,连接 RH.

下面分两步证明 $PM = MH$.先证 $PN = NR$,再证 $RH \parallel NM$.

考察点 P、B、E、F.由题设,它们四点共圆,故有

$\angle 1 = \angle 2$.

又 $\angle 2 = \angle 4$,而 $AG \parallel PE$

$\therefore \angle 3 = \angle 4 \therefore \angle 1 = \angle 4$

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PER$ 中,PN 为斜边 PR 上的中线.

$\therefore PN = NR$,而且有 $\angle 5 = \angle 6$

由"三角形的垂心关于三角形的对称点在三角形的外接圆上"知

$HD = DG \therefore \angle 7 = \angle 8$

又 $\angle 6 = \angle 7 \therefore \angle 5 = \angle 8$

$\therefore RH \parallel EF$

$\therefore M$ 为 RH 中点.

评述:史坦纳定理的证法较多,这里介绍的算是比较简单的一种.

9. 证明:如图 Ⅱ-D-4-43,设 $\odot O$ 的半径为 r,连接 OA、OB、OC,对 $\triangle OAC$ 与 B 而言,由斯德瓦特定理,得

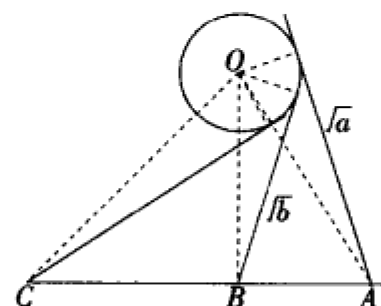


图 Ⅱ-D-4-43

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC$$

又 $OA^2 = r^2 + a$,$OB^2 = r^2 + b$,$OC^2 = r^2 + c$

将其代入上式,得

$$(r^2 + a)BC + (r^2 + c)AB = (r^2 + b)AC + AB \cdot BC \cdot AC$$

即 $a \cdot BC + c \cdot AB + r^2(AB + BC)$

$= b \cdot AC + r^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC$

因此 $a \cdot BC + c \cdot AB - b \cdot AC = AB \cdot BC \cdot AC$

10. 证明,如图 Ⅱ-D-4-44,设直线 AD、BC 相交于点 P,过 P 作直线 l 的垂线,交 l 于点 H.

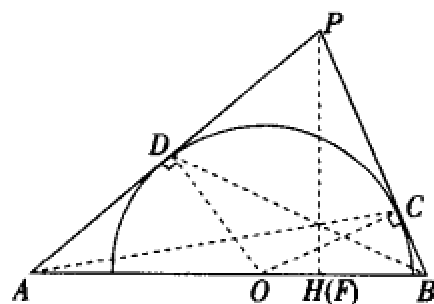


图 Ⅱ-D-4-44

用 O 表示半圆 Γ 的圆心.$\triangle OAD$ 是一个直角三角形,$\triangle PAH$ 也是一个直角三角形,$\angle A$ 是公共角,那么,有

$\triangle OAD \backsim \triangle PAH$

于是,$\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{HP}{DO}$

类似地,$\mathrm{Rt}\triangle OCB \backsim \mathrm{Rt}\triangle PHB$,则

$\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{HP}{CO}$

因为 $DO = CO$,则$\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{BH}{BD}$

从而,$\dfrac{AH}{HB} \cdot \dfrac{BC}{CP} \cdot \dfrac{PD}{DA} = 1$

由塞瓦定理的逆定理,三条直线 AC,BD 和 PH 相交于一点,直线 PH 迭合于直线 EF,点 H 与点 F 重合.

由于 $\angle ODP = 90°$,$\angle OCP = 90°$,则 O、D、P 和 C 四点共圆,此圆直径为 OP,$\angle PHO = 90°$,则点 H 也在这个圆上,所以有

$\angle DFP = \angle DOP = \angle COP = \angle CFP$

即,EF 平分 $\angle CFD$.

11. 证明,如图 Ⅱ-D-4-45 已知的凸六边形可以剖成两个正三角形和一个四边形.注意到四边形 $ABDE$ 以直线 BE 为对称轴.于是

以直线 BE 为对称轴，作 C 和 F 关于该直线的轴对称点 C' 和 F'. 于是，$\triangle ABC'$ 和 $\triangle DEF'$ 都是正三角形；G 和 H 分别在这两个三角形的外接圆上. 根据托勒密定理.

$C'G \cdot AB = AG \cdot C'B + GB \cdot C'A$

因而 $\quad C'G = AG + GB$

同理 $HF' = DH + HE$

于是 $\quad AG + GB + GH + DH + HE$

$= C'G + GH + HF'$

$\geqslant C'F' = CF$

上面最后一个等号的依据是：线段 CF 和 $C'F'$ 以直线 BE 为对称轴.

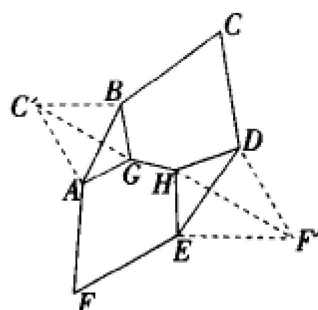


图 Ⅱ－D－4－45

12. 先证充分性，如图 Ⅱ－D－4－46，连接 BT、CT，在 $\triangle BTC$ 和 $\triangle DPE$ 中，由 A、B、C、T 四点共圆和 A、D、E、P 四点共圆可得 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP$，$\angle BCT = \angle BAT = \angle DEP$，于是，$\triangle BTC \backsim \triangle DPE$，从而可设

$$\frac{DP}{BT} = \frac{PE}{CT} = \frac{DE}{BC} = k$$

对四边形 $ABTC$ 应用托勒密定理，有

$AC \cdot BT + AB \cdot CT = BC \cdot AT$

将上式两端同乘以 k，并用前一比例式代入可得

$AC \cdot DP + AB \cdot PE = DE \cdot AT$

注意到 $AB = AC = DE$，此式即 $PD + PE = AT$

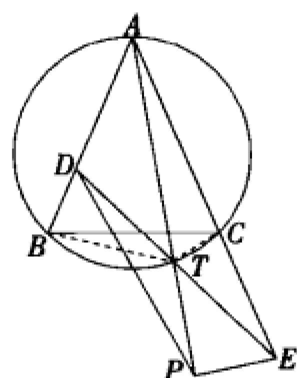


图 Ⅱ－D－4－46

再证必要性：如图 Ⅱ－D－4－47 在线段 AT 的延长线上任取两点 P_1、P_2，易见当 $P_1T < P_2T$ 时成立：

$P_1D + P_1E < P_2D + P_2E$

于是，在线段 AT 延长线上满足 $PD + PE = AT$ 的点 P 至多有一个，而由充分性的证明知 $\triangle ADE$ 的外接圆与 AT 延长线的交点即满足上述等式. 故点 P 就在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

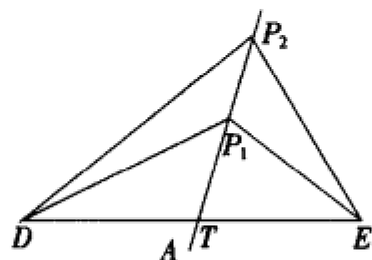


图 Ⅱ－D－4－47

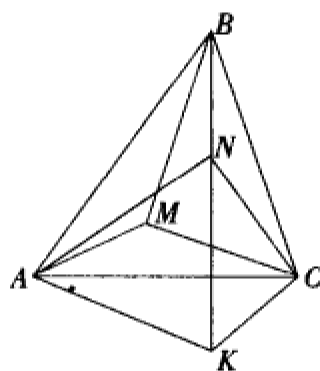


图 Ⅱ－D－4－48

13. 证明：如图 Ⅱ－D－4－48. 设 K 是射线 BN 上的点，且满足 $\angle BCK = \angle BMA$. 因为 $\angle BMA > \angle ACB$，则 K 在 $\triangle ABC$ 的外部. 又同 $\angle MBA = \angle CBK$，所以 $\triangle ABM \backsim \triangle KBC$

故 $\quad \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{AM}{CK}$

由 $\angle ABK = \angle MBC \quad \dfrac{AB}{KB} = \dfrac{BM}{BC} \quad$ 可得 $\triangle ABK \backsim \triangle MBC$

于是，

$$\frac{AB}{BM} = \frac{BK}{BC} = \frac{AK}{CM}$$

因为 $\angle CKN = \angle MAB = \angle NAC \quad$ 所以 A、N、C、K 四点共圆. 由托勒密定理，有

$AC \cdot NK = AN \cdot CK + CN \cdot AK$

或　$AC(BK-BN)=AN\cdot CK+CN\cdot AK$

将 $CK=\frac{AM\cdot BC}{BM}, AK=\frac{AB\cdot CM}{BM}, BK=\frac{AB\cdot BC}{BM}$ 代入,得

$$AC\left(\frac{AB\cdot BC}{BM}-BN\right)=\frac{AN\cdot AM\cdot BC}{BM}+\frac{CN\cdot AB\cdot CM}{BM}$$

即　$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1$

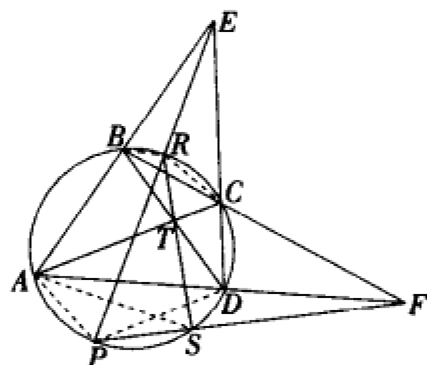


图 Ⅱ－D－4－49

14. 如图 Ⅱ－D－4－49

连结 AS, SD, CR, RB, PA, PD

因为 $\triangle EBR \backsim \triangle EPA$

所以　$\frac{BR}{PA}=\frac{EB}{EP}$

因为　$\triangle FDS \backsim \triangle EPA$

所以　$\frac{PA}{DS}=\frac{FP}{FD}$.

两式相乘,得 $\frac{BR}{DS}=\frac{EB\cdot FP}{EP\cdot FD}$　①

又因为 $\triangle ECR \backsim \triangle EPD$,所以 $\frac{CR}{PD}=\frac{EC}{EP}$.

因为 $\triangle FPD \backsim \triangle FAS$,所以 $\frac{PD}{AS}=\frac{FP}{FA}$.

两式相乘,得　$\frac{CR}{AS}=\frac{EC\cdot FP}{EP\cdot FA}$

故　$\frac{AS}{CR}=\frac{EP\cdot FA}{EC\cdot FP}$　②

由 ①,② 两式相乘,得 $\frac{BR\cdot AS}{DS\cdot CR}=\frac{EB\cdot FA}{EC\cdot FD}$

故　$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CD}{DS}\cdot\frac{SA}{AB}=\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CE}$

把 BF 看成 $\triangle EAD$ 的截线,由梅涅劳斯定理,得　$\frac{EB}{BA}\cdot\frac{AF}{FD}\cdot\frac{DC}{CE}=1$

因此　$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CD}{DS}\cdot\frac{SA}{AB}=1$

在六边形 $BRCDSA$ 中,BD, RS, AC 交于一点,而对角线 AC 与 BD 的交点为 T,故 R, S, T 三点共线.

第三章　共圆、共线、共点

A组

1. 证明:以 E 为相似中心作相似变换,相似比为 $\frac{1}{2}$,此变换把 E 关于 AB、BC、CD、DA 的对称点变为 E 在 AB、BC、CD、DA 上的射影 P、Q、R、S(如图 Ⅱ－D－4－50),只须证明 $PQRS$ 是圆内接四边形.

由于四边形 $ESAP$、$EPBQ$、$EQCR$ 及 $ERDS$ 都是圆内接四边形,每个四边形都有一组对角为直角,那么

由 E、P、B、Q 共圆,有 $\angle EPQ=\angle EBQ$

由 E、Q、C、R 共圆,有 $\angle ERQ=\angle ECQ$

于是 $\angle EPQ+\angle ERQ=\angle EBQ+\angle ECQ$

$=90°$

同理可得　$\angle EPS+\angle ERS=90°$

从而，有 $\angle SPQ+\angle QRS=180°$，故 $PQRS$ 是圆内接四边形.

评述：本题是利用圆内接四边形性质定理的逆定理证明的.

2. 证明：如图 Ⅱ－D－4－51，设 O 是 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、的公共点，A、B、C 分别是 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$，$\odot O_1$ 与 $\odot O_3$、$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的交点.

∵ OA 是 $\odot O_2$ 与 $\odot O_3$ 的公共弦，OB 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_3$ 的公共弦，OC 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公共弦，

∴ $OA\perp O_2O_3$，$OB\perp O_1O_3$

即 O_2O_3，O_1O_3 分别是 OA，OB 的中垂线.

注意到 A、B、C 三点共线，于是在 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 中

$$\angle OO_1O_2 \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{OC} \overset{m}{=} \angle OBC=\angle OBA \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{OA} \overset{m}{=} \angle OO_3O_2$$

∴ O，O_1，O_2，O_3 四点共圆.

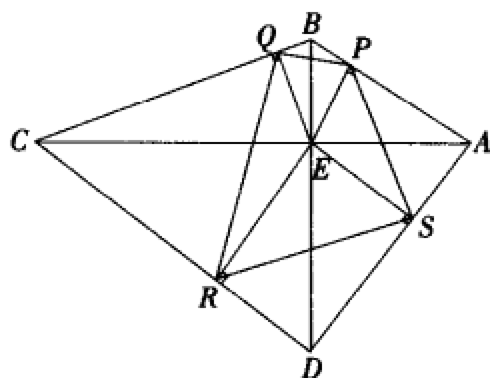


图 Ⅱ－D－4－50

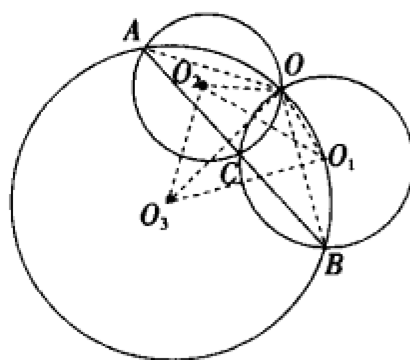


图 Ⅱ－D－4－51

评述：本题是利用圆周角定理的逆定理证的.

3. 证明：如图 Ⅱ－D－4－52，连接 AN，AM，AP，AQ，BM，PM.

∵ AB 为直径 $CN\perp AB$，∴ $AN=AM$

同理，$AP=AQ$

在 $\text{Rt}\triangle ACC'$ 中，$\cos A=\dfrac{AC'}{AC}$ ∴ $AC'=AC\cdot\cos A$

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中，由射影定理，得

$$AM^2=AC'\cdot AB$$

$$\begin{aligned}\therefore\ AM^2&=AC\cdot AB\cdot\cos A\\&=AC\cdot AB\cdot\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}\\&=\frac{1}{2}(AC^2+AB^2-BC^2)\end{aligned}$$

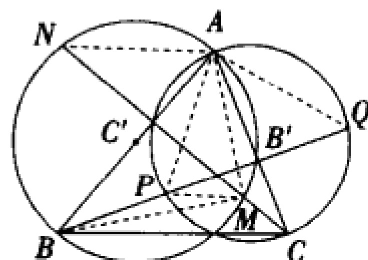


图 Ⅱ－D－4－52

同理有 $AP^2=\dfrac{1}{2}(AC^2+AB^2-BC^2)$

∴ $AM=AP$

∴ M、P、N、Q 四点共圆.

4. 证明：如图 Ⅱ－D－4－53，设过对称中心 O 的两条射线为 A_1B_1、A_2B_2，A_1、A_2 位于第一个圆周上，而 B_1、B_2 位于第二个圆周上.

设点 A_3、B_3 和 B_4 分别是点 B_2、A_1 和 A_2 关于点 O 的对称点，根据相交弦定理有

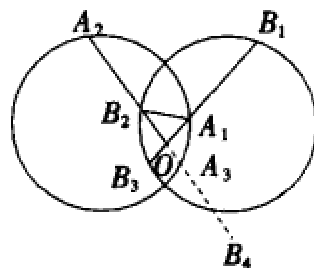


图 Ⅱ－D－4－53

$$B_3O\cdot OB_1=B_2O\cdot OB_4$$

因为 $B_3O=OA_1$，$OB_4=OA_2$ 从而 $OA_1\cdot OB_1=OB_2\cdot OA_2$

∴ A_1、B_1、B_2、A_2 共圆.

5. 证明：如图 Ⅱ－D－4－54，三个圆心的连线，$O_1O_2\parallel AB$，$O_2O_3\parallel BC$，$O_3O_1\parallel AC$ 所以

$\triangle O_1O_2O_3 \backsim \triangle ABC$

又 AO_1、BO_2、CO_3 交于 $\triangle ABC$ 的内心 I.

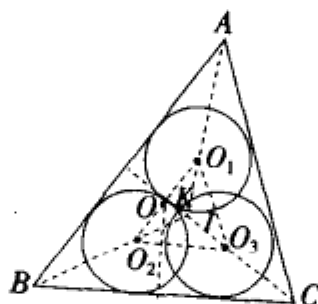


图 Ⅱ－D－4－54

根据位似变换定义可知：I 是 $\triangle O_1O_2O_3$ 与 $\triangle ABC$ 的位似中心，又根据题设三个等圆相交于 K 点，所以 $KO_1 = KO_2 = KO_3$，K 是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外心，于是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外心 K 经过位似变换为 $\triangle ABC$ 的外心，

所以 K、O、I 三点共线．

6．证明：如图 Ⅱ－D－4－55，连接 EO、FO、CO_1、OO_1、OB（O_2 在 OB 上），连接 O_2O_1 交 AC 于 M．依题意，易证

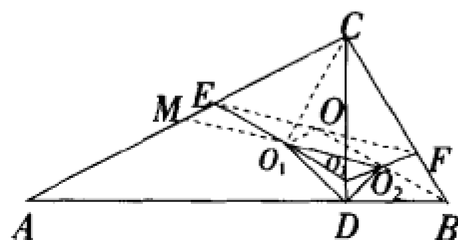


图 Ⅱ－D－4－55

$\triangle CO_1D \backsim \triangle BO_2D$

$\therefore \quad \dfrac{O_1D}{O_2D} = \dfrac{CD}{BD}$ 易知 $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$

$\therefore \quad \mathrm{Rt}\triangle O_1O_2D \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$ 故 $\angle O_2O_1D = \angle A$

因此 A、D、O_1、M 四点共圆．

$\therefore \quad \angle CMO_1 = \angle ADO_1 = \angle CDO_1 = 45°$

$\because \quad \angle EO_1M = \angle O_2O_1O_3 = \angle DO_1O_3$

$\therefore \quad \angle CEO_3 = \angle CO_3E$

$\therefore \quad CE = CO_3$，故 $CO_1 \perp EO_3$

$\because \quad \angle O_1CD = \dfrac{1}{2}\angle ACD = \dfrac{1}{2}\angle CBD = \angle DBO$

$\therefore \quad OB \perp CO$，故 $OO_2 \parallel O_1O_3$

同理可证 $OO_1 \parallel O_2O_3$

故四边形 $OO_1O_3O_2$ 为平行四边形．

则 $OO_2 = O_1O_3 = EO_1$，$OO_1 = O_3O_2 = O_2F$

$\angle EO_1O = \angle O_1OO_2 = \angle OO_2F$

$\therefore \quad \triangle EO_1O \cong \triangle O_2OO_1 \cong \triangle OO_2F$

故 $\angle EOO_1 = \angle OO_1O_2$，$\angle FOO_2 = \angle OO_2O_1$

$\therefore \quad \angle EOO_1 + \angle O_1OO_2 + \angle O_2OF = 180°$

$\therefore \quad E$、O、F 三点共线．

7．简证：由四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot O$ 得

$$S_{\triangle OAD} + S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle MNO} &= S_{\triangle MND} - S_{\triangle OND} - S_{\triangle OMD} \\ &= \left(\frac{1}{4}S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{\triangle BDC}\right) - \frac{1}{2}(S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} - S_{\triangle BDC}) - (S_{\triangle OAD} - \frac{1}{2}S_{\triangle ACD} - S_{\triangle OMC}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \quad M$、N、O 三点共线．

8．证明：如图 Ⅱ－D－4－56，设 M 为 $\triangle ABC$ 外接圆上任意一点，M 到三边或其延长线所引垂线的垂足分别为 L、P、N，需证 L、P、N 三点共线．事实上，因为 L、P 位于以 BM 为直径的圆周上，P、N 位于以 CM 为直径的圆周上，所以

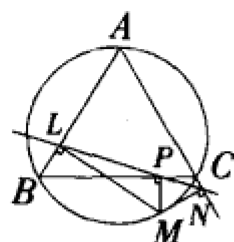


图 Ⅱ－D－4－56

$\angle ABM = \angle MCN = \angle MPN$ 但 $\angle LPM + \angle LBM = 180°$

$\therefore \quad \angle LPM + \angle MCN = 180°$ $\therefore \quad L$、P、N 共线．.

9．分析与证明：如图 Ⅱ－D－4－57，设 M_1N_1 交 AC 于 Q 点．研究 Q 点具有的性质．

易知点 C 是三角形 BX_1Y_1 之重心，即 X_1、C、Y_1 三点共线．作 $X_1K \parallel AC$ 交直线 M_1N_1 于 K，显然 $\triangle M_1AQ \cong \triangle M_1X_1K \Rightarrow AQ = X_1K$

又　$\triangle N_1CQ \backsim \triangle N_1X_1K$

$\because$　$\dfrac{CQ}{AQ} = \dfrac{CQ}{X_1K} = \dfrac{N_1C}{N_1X_1} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{CD}{AB}$

及　$\angle QCD = \angle QAB$

$\therefore$　$\triangle QCD \backsim \triangle QAB$

此时 $\angle CQD = \angle AQB$ 从而可知 B,Q,D 三点共线，即 Q 是 AC 与 BD 之交点.

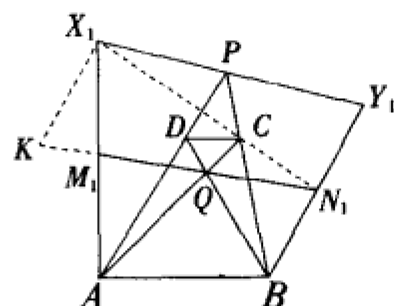


图 Ⅱ - D - 4 - 57

这就是说直线 M_1N_1 通过梯形 $ABCD$ 两条对角线的交点.交点的惟一性决定了 n 条直线 $M_1N_1, M_2N_2, \cdots, M_nN_n$ 必相交于一点.

【评述】 本题是利用已知四边形对角线交点的惟一性,除此之外,还可利用三角形各心的惟一性等等,在这里就不一一列举了.

10. 证明:延长 BI,交 AF 于点 M,连结 MC,MD,CI,设等腰梯形 $ABCD$ 的对称轴为 l,

因为等腰梯形 $ABCD$ 中,BM 是 $\angle CBD$ 的平分线,AM 是 $\angle CAD$ 的平分线,所以 BM 与 AM 关于直线 l 对称,即点 M 在直线 l 上.

因为 I,E,F 三点共线,

所以　$IF \parallel l$

因为 l 是等腰 $\triangle MAB$ 的顶角 $\angle AMB$ 的平分线,所以

$\angle MIF = \angle MFI$

$MI = MF$

又因为 $\angle MBC = \dfrac{1}{2}\angle CBD = \dfrac{1}{2}\angle CAD = \angle CAM$

所以 A,B,C,M,D 五点共圆,故

$\angle MCD = \angle MBD$

于是 $\angle MIC = \dfrac{1}{2}(\angle CBD + \angle BCD) = \angle ICM$

从而　$MI = MC$

故 $MC = MF$

因此 $\angle MCF = \angle MFC$

由于 L,F,G,A 四点共圆,

故 $\angle CFM = \angle AGD, \angle DGF = \angle CAM = \angle MAD$

因 $\angle MCF + \angle MFC = \angle AMC = \angle ADC = \angle DAG + \angle DGA$

所以　$\angle DAG = \angle DGA$

从而　$\angle FAG = \angle FGA$

故　$FA = FG$

则 $\triangle AFG$ 是等腰三角形.

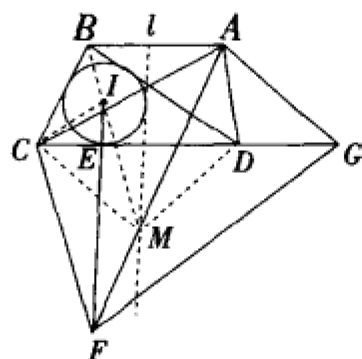


图 Ⅱ - D - 4 - 58

11. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 59 所示,由已知 $\angle XAB = \angle XCA, \angle X = \angle X$

$\therefore$　$\triangle AXB \backsim \triangle CXA$ 故 $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{S_{\triangle AXB}}{S_{\triangle CXA}} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$

同理 $\dfrac{CX}{YA} = \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2, \dfrac{AZ}{ZB} = \left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2$

故　$\dfrac{BX}{XC} \cdot \dfrac{CY}{YA} \cdot \dfrac{AZ}{ZB} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2 = 1$

据梅涅劳斯逆定理知 X、Y、Z 三点共线.

12. 证明(1) 如图 Ⅱ - D - 4 - 60,设 $\angle A = 2\alpha$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|BD| = |CE| = t$

由 B、C、D、E 的坐标及中点坐标公式易得

$My = \dfrac{Dy + Ey}{2} = \dfrac{1}{2}(c - b)\sin\alpha$

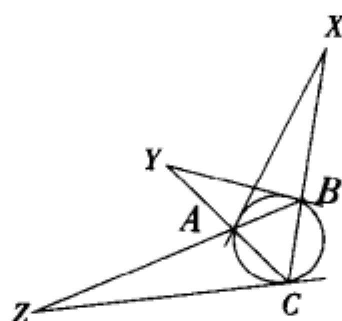


图 Ⅱ - D - 4 - 59

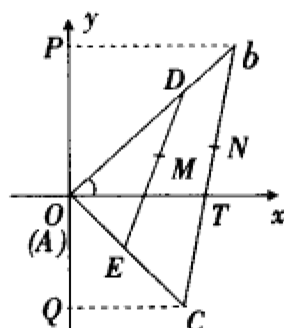


图 Ⅱ - D - 4 - 60

$My = \frac{By + Cy}{2} = \frac{1}{2}(c-b)\sin\alpha$

$\therefore$ $MN \parallel AT$

(2) 由题知 $P(0, c\sin\alpha)$、$Q(0, -b\sin\alpha)$

$\therefore$ BQ 方程为：$y - b\sin\alpha = \frac{(c+b)\sin\alpha}{c \cdot \cos\alpha} \cdot x$ ①

CP 方程为：$y - c\sin\alpha = \frac{-(b+c)\sin\alpha}{b\cos\alpha} \cdot x$ ②

解①、②易得 $y = 0$，即 BQ 与 CP 的交点在 AT 上. 因此 BQ、CP、AT 交于一点.

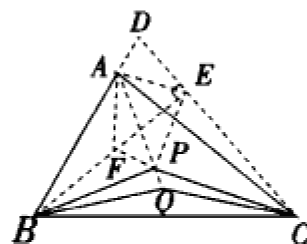


图 Ⅱ - D - 4 - 61

13. 证明：如图 Ⅱ - D - 4 - 61，在 BA 延长线上取一点 D，使 $DC = BC$，过 B 作 AC 的垂线交 DC 于 E，设 PC 交 BE 于 F. 连 AF、AE、EP、AP

易知 $CP \perp AB$，$BF \perp AC$，可知 F 为 $\triangle ABC$ 的垂心，有 $\angle FAC = 60°$.

由 $EF \perp AC$，AC 平分 $\angle ECF$，可知 F 与 E 关于 AC 对称，有 $\angle FAE = 2\angle FAC = 120°$.

易知 BP 平分 $\angle EBC$，CP 平分 $\angle ECP$，可知 P 为 $\triangle EBC$ 的内心. 有 $\angle PEB = \angle PEC = 40°$

于是 $\angle EPF = \angle PEC + \angle PCE = 60°$，得

$\angle FAE + \angle EPF = 180°$

故 A、F、P、E 四点共圆.

由 $\angle FAP = \angle FBP = 40°$ 有 $\angle PAC = 20°$

连 QA，由 $\angle QBC = 10° = \angle QCB$，可知 $QB = QC$，且 $\angle BQC = 160° = \frac{1}{2}\angle BAC$，则 Q 为 $\triangle ABC$ 的外心.

$\therefore$ $\angle QAC = \angle QCA = 20° = \angle PAC$

故 A、P、Q 三点共线.

14. 证明：点 P 的存在意味着 $AB \neq AC$. 由对称性，可得 $AB > AC$，则 P、D 在射线 MC 上，点 B、C、E、F 共圆，故

$$PB \cdot PC = PE \cdot PF$$

垂足 $\triangle DEF$ 的外接圆也即 $\triangle ABC$ 的欧拉圆，必过 M 点，因此 $PE \cdot PF = PD \cdot PM$

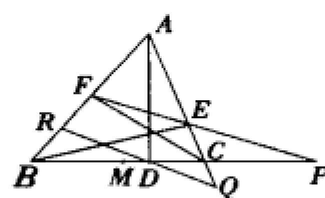


图 Ⅱ - D - 4 - 62

所以 $PB \cdot PC = PD \cdot PM$

令 $MB = MC = a$，$MD = d$，$MP = p$，则有 $PB = p + a$，$DB = a + d$，$PC = p - a$，$DC = a - d$，$DP = p - d$

所以 $(p+a)(p-a) = (p-d)p$，即 $a^2 = dp$

所以 $(a+d)(a-d) = (p-d)d$

即 $DB \cdot DC = DP \cdot DM$ (*)

因为 $\triangle AEF \backsim \triangle ABC$

所以　$\angle ABC = \angle AEF$

因为　$QD /\!/ EF$

所以　$\angle AEF = \angle CQD, \angle ABC = \angle RBD$

因而　$\angle RBD = \angle CQD$，又 $\angle BDR = \angle QDC$

所以　$\triangle BDR \backsim \triangle QDC$

$DQ \cdot DR = DB \cdot DC$

由(*)，知 $DQ \cdot DR = DP \cdot DM$

故 P, Q, R, M 四点共圆

15. 设 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 分别为 a, b, c. 则

$AM = \frac{1}{2}(b + c - a) = S - a$

$BM = BN = \frac{1}{2}(a + c - b) = S - b$

其中 $S = \frac{1}{2}(a + b + c)$

若 DE 分别与 MN、AI 交于 P、Q(如图 Ⅱ－D－4－63)

$\because$　$DE /\!/ AB, BM = BN$

$\therefore$　$\angle EPN = \angle BMN = \angle BNM$

即有　$EP = EN = BN - BE = S - b - \frac{a}{2}$　①

又 $DQ /\!/ AM$，$\therefore$　$\angle DQA = \angle IAM = \angle IAD$

即有　$DQ = DA = \frac{b}{2}$　②

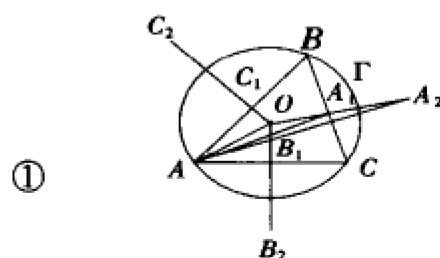


图 Ⅱ－D－4－63

由 ① 与 ②，得　$EP + DQ = S - b - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = ED$

这说明 $PQ = 0$，即 P 与 Q 重合，故 DE、MN、AI 三线共点.

16. 证明：设 l_A 与 $\odot ABC$ 的另一交点为 E，连接 DM、DN，并过 A 作 $\odot ABC$ 的切线 AT(如图 Ⅱ－D－4－64)，则

$\angle TAC = \angle ABC$

$\because$　$\angle AMD = \angle AND = 90°$

$\because$　A、M、D、N 共圆

又 $AD \perp BC, DM \perp AB$

$\therefore$　$\angle ANM = \angle ADM = \angle ABC = \angle TAC$

即有 $MN /\!/ AT$

但 $l_A \perp MN$，故 $l_A \perp AT$，即 l_a 过 $\triangle ABC$ 的外心 O.

同理，l_B, l_C 都过 $\triangle ABC$ 的外心 O，于是 l_A, l_B, l_C 共点于 O.

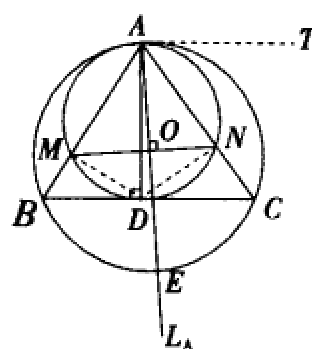


图 Ⅱ－D－4－64

17. 证明：如图 Ⅱ－D－4－65，设 Γ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆. 因为 $\triangle OAA_1 \backsim \triangle OA_2A$，所以 $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OA}{OA_2}$，

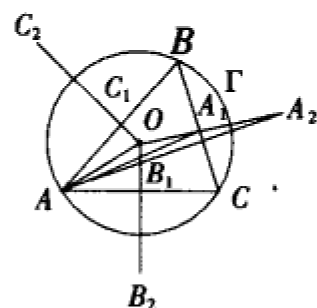


图 Ⅱ－D－4－65

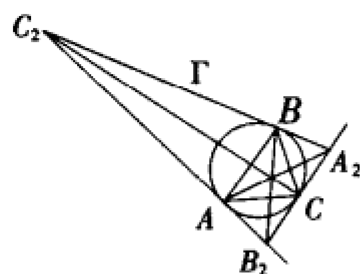


图 Ⅱ－D－4－66

从而 $OA_1 \cdot OA_2 = OA^2 = OB^2$，即$\frac{OA_2}{OB} = \frac{OB}{OA_1}$

于是$\triangle OA_2B \backsim \triangle OBA_1$，$\angle OBA_2 = \angle OA_1B = 90°$

因而A_2B和圆Γ相切于B点.

同理，如图Ⅱ－D－4－66，A_2C与Γ相切于C点，B_2C、B_2A、C_2A、C_2B分别与圆Γ相切于C、A、B.于是P是$\triangle A_2B_2C_2$的内切圆，切点分别是A、B和C.由切线长相等和塞瓦定理，即得A_2A、B_2B、C_2C共点.

18. 证明：设$\odot O_1$与CD的第二个交点为F.（不妨设点E在点D与点F之间，也可能点E与点重合）

因为$AD^2 = DE \cdot DF$，且$AD = BD$，所以

$BD^2 = DE \cdot DF$

故点F也在$\odot O_2$上.

从而$CM \cdot CA = CF \cdot CE = CN \cdot CB$

故A、B、N、M四点共圆，有

$\angle A = \angle CNM$.

如图Ⅱ－D－4－67，过点M作$\odot O_1$的切线PQ，则$\angle A = \angle PMA$

因为 $\angle PMA = \angle CMQ$

所以 $\angle CMQ = \angle CNM$

直线PQ与$\triangle CMN$的外接圆也相切，且切点为M

故$\triangle CMN$的外接圆与$\odot O_1$相切于点M，

同理可证，$\triangle CMN$的外接圆与$\odot O_2$相切于点N.

图Ⅱ－D－4－67

B组

1. 证明：设$\angle BDA = \alpha$，$\because AB = AD$，$\therefore \angle ABD = \alpha$，$\angle BAD = 180° - 2\alpha$

$\angle CBF$的度数等于$\frac{1}{2}\overset{\frown}{CF}$的度数，而$\angle CAB$的度数等于$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$即$\frac{1}{2}\times(2\overset{\frown}{CF})$的度数.所以$\angle CBF = \frac{1}{2}\angle CAB = 90° - \alpha$，如图Ⅱ－D－4－68点$E$、$F$分别与$B$、$C$等距，所以$EF$垂直平分$BC$.

因此，$\angle BFE = 90° - \angle CBF = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

于是$\angle BDE = \angle BFE = \alpha$，所以$B$、$F$、$D$、$E$四点共圆.

图Ⅱ－D－4－68

2. 证明：如图Ⅱ－D－4－69

设H是$\triangle ABC$的垂心，而M是边AC的中点.分别在线段AH和CH上取点S和T，使$PS \perp AB$，$TQ \perp BC$.将直线PS和QT的交点记作K.

由于$\angle BPK = \angle BQK = 90°$，所以四边形$BPKQ$内接于圆.

我们来证明K与R相互重合.

$\triangle PBQ$为等腰三角形（$BP = BQ$），因为$\angle HPB = \angle HQB$，因此点K位于$\angle B$的平分线上.

现证K亦在直线HM上.事实上，$\triangle PHC_1 \backsim \triangle QHA_1$，因为它们有两对内角对应相等.因此$\frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1}$.同理，$\triangle AHC_1 \backsim \triangle CHA_1$，因此$\frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC}$

进而，$\frac{PH}{HQ} = \frac{HS}{HT}$，因此$\triangle PHS \backsim \triangle THQ$

故 $\frac{HS}{HT} = \frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC}$

由此得知$ST \parallel AC$.所以，线段ST的中点位于直线HM之上.

由于 $HSKT$ 是平行四边形,所以点 K 在直线 HM 上.

故知点 K 是直线 HM 与 $\angle B$ 平分线的交点,从而点 K 与点 R 重合.

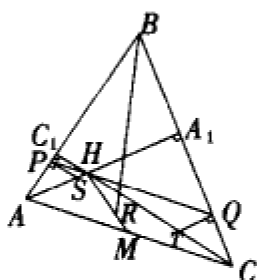


图 Ⅱ - D - 4 - 69

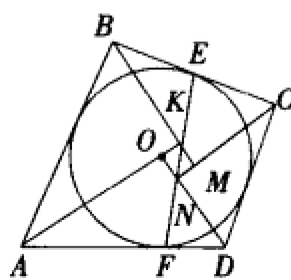


图 Ⅱ - D - 4 - 70

3. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 70,设内切圆 O 切 AB 于 P 点,连接 OP 及 PE,则 $\angle AOP = \angle FEP$ 且都等于 $\overset{\frown}{PF}$ 的度数的一半,所以 O、K、E、P 四点共圆.

因为 $\angle OPB = \angle OEB = 90°$,所以 O、P、E 在以 OB 为直径的圆周上.从而 K 点也在这个圆周上.所以 $\angle BKO = 90°$

同理可证 $\angle CNO = 90°$,于是 $\angle ONM + \angle OKM = 180°$,所以:$O$、$K$、$M$ 和 N 四点共圆.

4. 证:先证必要性:如图 Ⅱ - D - 4 - 71 所示,即当 A、B、C、D 四点共圆时,有 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$.

设两条垂直的对角线 AC 与 BD 交于一点 K,从而

$$90° = \angle AKB = \angle DBC + \angle ACB$$
$$= \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}\text{ 的度数} + \overset{\frown}{CD}\text{ 的度数})$$
$$= \frac{1}{2}(\angle APB + \angle CPD)$$

$\Rightarrow \angle APB + \angle CPD = 180° \Rightarrow \sin\angle APB = \sin\angle CPD$

又由于 A、B、C、D 共圆,且 AB 与 CD 不平行,故 P 为 $ABCD$ 外接圆的圆心.

从而,$PA = PB = PC = PD$

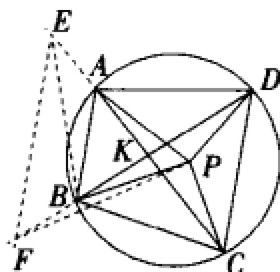


图 Ⅱ - D - 4 - 71

$$\therefore \quad S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}PA \cdot PB \cdot \sin\angle APB$$
$$= \frac{1}{2}PC \cdot PD \cdot \sin\angle CPD = S_{\triangle CDP}$$

下证充分性:即当 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$ 时,有 A、B、C、D 共圆.

如果 $PA = PD$,那么,由 P 的定义可知 A、B、C、D 都在一个以 P 为圆心的圆周上.

否则,不失一般性,假设 $PA < PD$,于是可在 KA 延长线上取一点 E,使 $PE = PD$;在 KB 延长线上取一点 F,使 $PF = PC$,则凸四边形 $EDCF$ 满足 E、D、C、F 共圆,且对角线 $EC \perp FD$.对其应用前述必要性的证明可知 $S_{\triangle PEF} = S_{\triangle PCD}$.

另一方面,无论 P 位置如何,总有直线 BP 与线段 AC 相交,可知 E 到直线 BP 的距离一定大于 A 到直线 BP 的距离 $\Rightarrow S_{\triangle ABP} < S_{\triangle EBP}$.

类似地,直线 EP 必与线段 BD 相交.从而 F 到直线 PE 的距离一定大于 B 到直线 PE 的距离 $\Rightarrow S_{\triangle EFP} > S_{\triangle EBP}$.从而,$S_{\triangle EFP} > S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$,与前述矛盾,故假设不成立.

故必有 $PA = PD$,即 A、B、C、D 共圆.

充分性证法二(如图 Ⅱ - D - 4 - 72 所示)

$\because$ $AB \nparallel CD$,令 E 是 AB 和 CD 的交点,因 P 是 AB 及 CD 的垂直平分线的交点.设 AB、CD 的中点分别为 M、N,AC 与 BD 交于 Q,所以 $PM \perp AB$,$PN \perp DC$.故由 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle PCD}$,知 $\frac{1}{2}AB \cdot MP = \frac{1}{2}CD \cdot PN$.又由 Rt$\triangle AQB$ 及 Rt$\triangle CQD$ 知,

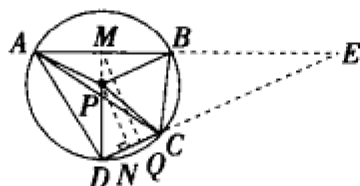


图 Ⅱ - D - 4 - 72

$\frac{1}{2}AB = MQ = AM = BM$

$\frac{1}{2}CD = QN = DN = CN$

所以,$MQ \cdot MP = QN \cdot PN$,即 $\frac{MQ}{QN} = \frac{PN}{PM}$ ①

又 $PM \perp AB$,$PN \perp CD$,知

$\angle MPN = 180° - \angle E = \angle BDE + \angle DBE = \angle QDC + (\angle AQB + \angle BAQ)$

$= \angle QDC + 90° + \angle BAQ = \angle DQN + 90° + \angle AQM$

$= \angle MQN$

由①、②知 $\triangle MPN \backsim \triangle MQN$,从而 ②

$\frac{MP}{QN} = \frac{PN}{MQ} = \frac{MN}{NM} = 1$

有 $MP = QN$,$PN = MQ$,得 $MP = QN = NC$,$PN = MQ = MB$,知 $\mathrm{Rt}\triangle BMP \cong \mathrm{Rt}\triangle PNC$,所以,$PB = PC$

由题设 P 是 AB、CD 中垂线的交点知 $PB = PA$,$PC = PD$

故 $PA = PB = PC = PD$,所以,A、B、C、D 四点共圆.

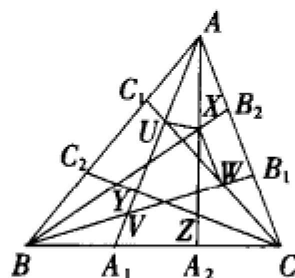
5. 证明,如图Ⅱ-D-4-73,设上述两三角形分别为图中所示的 $\triangle UVW$ 与 $\triangle XYZ$.由于 $\angle AB_2X = \angle AC_1U$,故 $\triangle AB_2B \backsim \triangle AC_1C$,因此,$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_2}{AB}$,且 $\angle ABB_2 = \angle ACC_1$

类似可得,$\angle BAA_1 = \angle BCC_2$,于是有

$\angle A_1VB = \angle BAA_1 + \angle B_1BB_2 + \angle ABB_2$

$= \angle BCC_2 + \angle C_2CC_1 + \angle ACC_1$

$= \angle ACB$



图Ⅱ-D-4-73

类似地,可知 $\angle ACB = \angle AXB_2$,

$\angle A_2ZC = \angle ABC = \angle AUC_1$.

由正弦定理,有

$$\frac{AV}{\sin\angle ABV} = \frac{AB}{\sin\angle A_1VB} = \frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{AC}{\sin\angle A_2ZC} = \frac{AZ}{\sin\angle ACZ}$$

由此可导出 $AV = AZ$.类似可得

$BW = BX$,$CU = CY$

另外,

$$\frac{AU}{\sin\angle AC_1U} = \frac{AC_1}{\sin\angle AUC_1} = \frac{AC_1}{AC} \cdot \frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

$$= \frac{AB_2}{AB} \cdot \frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{AB_2}{\sin\angle AXB_2} = \frac{AX}{\sin\angle AB_2X}$$

由此可得 $AU = AX$.类似可得 $BV = BY$,$CW = CZ$.进而有 $UX \parallel BC$,$WX \parallel CA$,对于四边形 $UVWX$,有 $\angle AUX = \angle AA_1A_2 = \angle BB_1B_2 = \angle BWX$.

因此,X 位于 $\triangle UVW$ 的外接圆上,显然 Y,Z 也是如此.这就证明了 U、V、W、X、Y、Z 六点共圆.

6. 证明:先看这样的事实.设 O 是 $\angle UAV$ 内部的点,如图Ⅱ-D-4-74～77,令 $\angle OAU = \varphi$,$\angle OAV = \Psi$,如 X,Y 分别是 O 在 AU、AV 上的正射影,则由正弦定理及 X、Y 在以 OA 为直径的圆上,可得

$XY = OA\sin\angle UAV$ ①

$XY = OX\cos\Psi + OY\cos\varphi$ ②

①、②对可能的情形都成立.X 或 Y 可在 $\angle UAV$ 的对应边($\angle A$ 的外部)的延长线上,也可能与 A 重合.

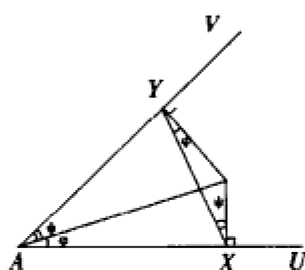


图 Ⅱ - D - 4 - 74

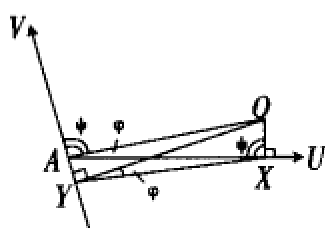


图 Ⅱ - D - 4 - 75

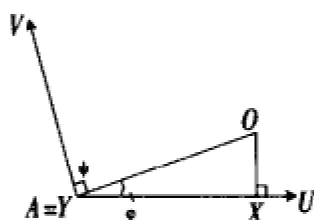


图 Ⅱ - D - 4 - 76

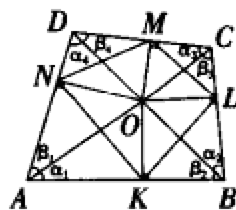


图 Ⅱ - D - 4 - 77

令 O 到 AB、BC、CD、DA 的正射影分别是 K、L、M、N,则由 ①,题设条件就变成:

$$NK + LM = KL + MN \quad ③$$

如图 ④ 所示引入角的记号. 由 ② 可得

$$KL = OK\cos\alpha_2 + OL\cos\beta_2 \qquad MN = OM\cos\alpha_4 + ON\cos\beta_4$$

$$LM = OL\cos\alpha_3 + OM\cos\beta_3 \qquad NK = ON\cos\alpha_1 + OK\cos\beta_1$$

因此 ③ 可改变成

$$OK(\cos\beta_1 - \cos\alpha_2) + OL(\cos\alpha_3 - \cos\beta_2) + OM(\cos\beta_3 - \cos\alpha_4) + ON(\cos\alpha_1 - \cos\beta_4) = 0 \quad ④$$

欲证 $ABCD$ 是圆内接四边形,只要有 $\alpha_1 = \beta_4$. 不失一般,假设 $\alpha_1 \geqslant \beta_4$. 因为它们都等价于 A 在 $\triangle BCD$ 的外接圆内或圆上,故 $\beta_1 \geqslant \alpha_2$. 另一方面,$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha_3 + \beta_4$,所以,$\alpha_3 \geqslant \beta_2$. 类似有 $\beta_3 \geqslant \alpha_4$. 因余弦函数在$(0,\pi)$内是严格递减函数,由这四个角的不等式,可得.

$$\cos\beta_1 \leqslant \cos\alpha_2, \cos\alpha_3 \leqslant \cos\beta_2, \cos\beta_3 \leqslant \cos\alpha_4, \cos\alpha_1 \leqslant \cos\beta_4 \quad ⑤$$

比较 ④ 与 ⑤,得到 $\beta_1 = \alpha_2, \alpha_3 = \beta_2, \beta_3 = \alpha_4, \alpha_1 = \beta_4$

7. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 78,设 M 是$\overset{\frown}{BC}$ 的中点,则 $MI_2 = MB$

设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,则

$$MI_2 = MB = MC = MI$$

故 I_2、B、C、I 在以 M 为圆心的圆周上.

同理,设 N 是$\overset{\frown}{AC}$ 的中点,则 A、I_1、I、C 在以 N 为圆心的圆周上,作 $CP \parallel MN$,与 $\odot O$ 交于 P 点,连结 PI 与 $\odot O$ 交于 T 点,则

$$MI = MC = NP, MP = NC = NI$$

从而,四边形 $MPNI$ 是平行四边形.

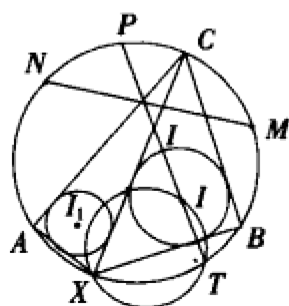


图 Ⅱ - D - 4 - 78

因此,$S_{\triangle MPT} = S_{\triangle NPT}$

故 $MP \cdot MT = NP \cdot NT$,即

$NC \cdot MT = MC \cdot NT$

$\therefore \quad \dfrac{NT}{NI_1} = \dfrac{MT}{MI_2}$

$\because \quad \angle I_1NT = \angle XNT = \angle XMT$

$\qquad = \angle I_2MT$

$\therefore \quad \triangle NI_1T \backsim \triangle MI_2T, \angle NTI_1 = \angle MTI_2$

$\qquad \angle I_1XI_2 = \angle MTN = \angle I_1TI_2$

因此，X,I_1,I_2,T 四点共圆，即对 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意一点 X，$\triangle XI_1I_2$ 的外接圆经过 $\odot O$ 上的定点 T.

8. 证明：如图 Ⅱ－D－4－79，连接 PD、AS、RC、BR、AP、SD.

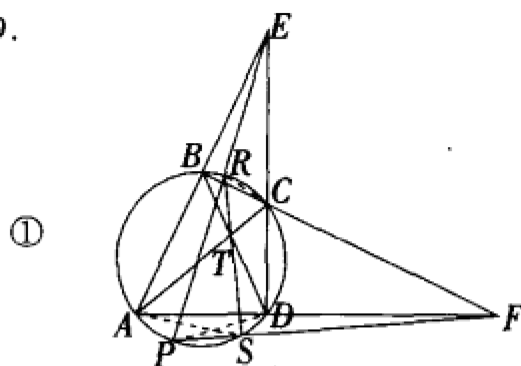


图 Ⅱ－D－4－79

由 $\triangle EBR \backsim \triangle EPA$，$\triangle FDS \backsim \triangle FPA$

有：$\dfrac{BR}{PA}=\dfrac{EB}{EP}$，$\dfrac{PA}{DS}=\dfrac{FP}{FD}$

两式相乘，得：$\dfrac{BR}{DS}=\dfrac{EB\cdot FP}{EP\cdot FD}$ ①

又由 $\triangle ECR \backsim \triangle EPD$，$\triangle EPD \backsim \triangle IAS$，有

$\dfrac{CR}{PD}=\dfrac{EC}{EP}$，$\dfrac{PD}{AS}=\dfrac{FP}{FA}$

两式相乘，得 $\dfrac{CR}{AS}=\dfrac{EC\cdot FP}{EP\cdot FA}$ ②

由 ①、② 得 $\dfrac{BR\cdot AS}{DS\cdot CR}=\dfrac{EB\cdot FA}{EC\cdot FD}$

故 $\dfrac{BR}{RC}\cdot\dfrac{CD}{DS}\cdot\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{EB}{BA}\cdot\dfrac{AF}{FD}\cdot\dfrac{DC}{CE}$ ③

由梅涅劳斯定理，有

$\dfrac{EB}{BA}\cdot\dfrac{AF}{FD}\cdot\dfrac{DC}{CE}=1$ ④

由 ③、④ 得 $\dfrac{BR}{RC}\cdot\dfrac{CD}{DS}\cdot\dfrac{SA}{AB}=1$

故 BD、RS、AC 交于一点.

即 R、T、S 三点共线.

9. 证明：分别以 D、E、F 为圆心，DB、EC、FA 为半径作圆. $\odot E$、$\odot F$ 的公共弦，$\odot F$、$\odot D$ 的公共弦，$\odot O$、$\odot E$ 的公共弦（所在直线）. 即分别过 A、B、C 所作的 EF、FD、DE 的垂线.

熟知三条公共弦交于一点. 这点（即三圆的根心）对于三个圆的幂相等. 因此本题结论成立.

10. 证明：(1) 充分性（如图 Ⅱ－D－4－80）

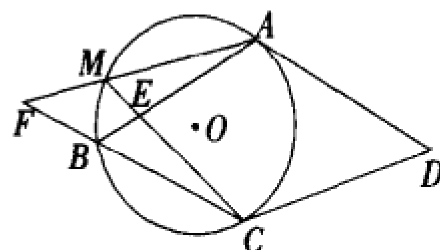


图 Ⅱ－D－4－80

∵ M 在 $\odot O$ 上，连接 AC，则 $\angle AMC=\angle ABC=60^\circ$，

∴ $\angle AMC=\angle ACB$，有 $\triangle AMC \backsim \triangle ACF$

∴ $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{CF}{CA}=\dfrac{CF}{CD}$

又 ∵ $\angle AMC=\angle BAC$

∴ $\triangle AMC \backsim \triangle EAC$

∴ $\dfrac{MC}{MA}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AD}{AE}$

∴ $\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{AD}{AE}$

∵ $\angle BAD=\angle BCD=120^\circ$ ∴ $\triangle CFD \backsim \triangle ADE$

∴ $\angle ADE=\angle DFB$

∵ $AD /\!/ BC$ ∴ $\angle ADF=\angle DFB=\angle ADE$

∴ F、E、D 三点共线

(2) 必要性

∵ F、D、E 三点共线 ∴ $\triangle AED \backsim \triangle CDF$

∴ $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{CD}{FC}$ ∴ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AC}{FC}$

∵ $\angle BAC=\angle FCA=60^\circ$ ∴ $\triangle EAC \backsim \triangle ACF$

∴ $\angle AEC=\angle CAF$，∴ $\triangle AEC \backsim \triangle MAC$

∴ $\angle AMC=\angle EAC=60^\circ=\angle ABC$

∴ A、B、C、M 共圆，即 M 在 $\odot O$ 上.

11. 证明:因为 T_1、S_1、T_2、T_3 关于 A_1I 对称,

所以$\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_1}$

因为 T_2、S_2、T_3、T_1 关于 A_2I 对称,所以$\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_2}$,故有 $\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$

于是 $T_3I\perp S_1S_2,S_1S_2\ /\!/\ A_2A_1$

同理 $S_2S_3\ /\!/\ A_3A_2,S_3S_1\ /\!/\ A_1A_3$

又 $M_1M_2\ /\!/\ A_2A_1,M_2M_3\ /\!/\ A_3A_2,M_3M_1\ /\!/\ A_1A_3$,于是 $\triangle M_1M_2M_3$ 和 $\triangle S_1S_2S_3$ 的对应边两两平行,故这两三角形或全等或位似.

$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于 $\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆,而 $\triangle M_1M_2M_3$ 内接于九点圆,由于 $\triangle A_1A_2A_3$ 不是正三角形,故内切圆与九点圆不重合,所以 $\triangle S_1S_2S_3$ 和 $\triangle M_1M_2M_3$ 位似,M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 共点.

在线共点的问题中,有时就会遇到多圆共点的问题,即几个圆通过一个定点,下面就是一个三圆共点的例子.

12. 证明:由正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 可知:$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$,且 $\angle A'=\angle A,\angle B'=\angle B,\angle C'=\angle C$,

如图 Ⅱ - D - 4 - 81,在 $\triangle A'B'C'$ 中,$A'B'=\sin\angle C,B'C'=\sin\angle A,C'A'=\sin\angle B$,$H$ 是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心,则

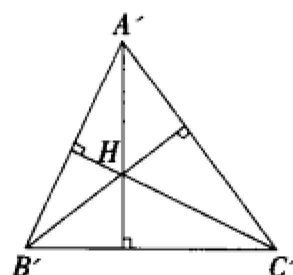


图 Ⅱ - D - 4 - 81

$$\frac{A'H}{\cos\angle A}=\frac{A'H}{\cos\angle A'}=\frac{A'H}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle A'\right)}$$
$$=\frac{A'H}{\sin\angle A'B'H}$$
$$=\frac{A'B'}{\sin\angle A'HB}=\frac{A'B'}{\sin(\pi-\angle C)}=\frac{A'B'}{\sin\angle C}=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle C'}=1$$

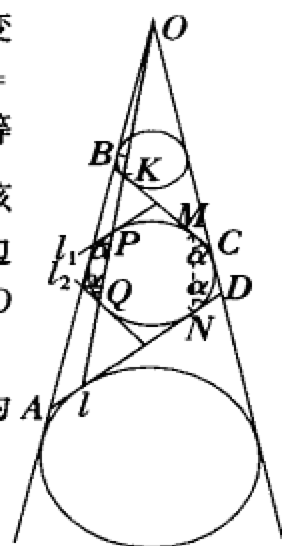
即 $A'H=\cos\angle A$

同理 $B'H=\cos\angle B,C'H=\cos\angle C$

由三角形垂心的惟一性及三圆公共点的惟一性可知,问题得证.

13. 证明:为确定起见,设点 O 在线段 AB 延长线上 B 的外侧(如图 Ⅱ - D - 4 - 82).将 KL 与圆 ω 的交点记作 P 和 Q,将边 BC 和 AD 与 ω 的切点分别记作 M 和 N,过点 P、Q 分别作 ω 的切线 l_1 和 l_2,将切线 l_1(或 l_2)与弦 PQ 的夹角记作 α.

在以 O 为中心,将 ω_1 变为 ω 的位似变换下,过点 K 的切线 BC 变为 l_2,在将 ω_2 变为 ω 的位似变换下,直线 AD 变为 l_1,故知 $BC\ /\!/\ l_2,AD\ /\!/\ l_1$,及 $\angle LKC=\angle KLD=\alpha$,又由弦与切线之夹角关系式知 $\angle BMN=\angle ANM$.由此可知四边形 $KLNM$ 为等腰梯形,因而 $PQ\ /\!/\ MN$,它们在 ω 上截出两段相等的弧$\overset{\frown}{PQ}$和$\overset{\frown}{MN}$,其值为 2α.因此该梯形的中位线经过 ω 的圆心,但 KM 的中点与 BC 的中点重合(众所周知,三角形的边与内切圆的切点同它与旁切圆的切点关于边的中点对称),同时,LN 的中点也与 AD 的中点重合.



Ⅱ - D - 4 - 82

14. 证明(1):记 $\angle OAB=\angle 1,\angle O_1AC=\angle 2$,$B$、$A$、$C$ 三点共线充要条件为 $\angle 1=\angle 2$,即 $\sin\angle 1=\sin\angle 2$,下证其不成立.

由正弦定理$\dfrac{\sin\angle 1}{OB}=\dfrac{\sin\angle AOB}{AB}$,有

$$\sin\angle 1=\frac{OB}{AB}\cdot\frac{O_1E}{O_1O}=\frac{1}{AB}\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{\sqrt{(r+R)^2-R^2}}{r+R}$$
$$=\frac{1}{AB}\cdot\frac{R\sqrt{r(r+2R)}}{2(r+R)}\qquad ①$$

由余弦定理有

$$AB^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2R \cdot \frac{R}{2} \cdot \cos\angle AOB$$
$$= \frac{5}{4}R^2 - R^2 \cdot \frac{R}{r+R}$$
$$AB = R\sqrt{\frac{5}{4} - \frac{R}{R+r}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{R+5r}{r+R}} \quad ②$$
② 代入 ①,有
$$\sin\angle 1 = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{r+R}{R+5r}} \cdot \frac{R}{2}\ \frac{\sqrt{r(r+2R)}}{r+R} = \sqrt{\frac{r(r+2R)}{(R+5r)(r+R)}}$$
将 r、R 对换可得
$$\sin\angle 2 = \sqrt{\frac{R(R+2r)}{(r+5R)(R+r)}}$$
如果 $\sin\angle 1 = \sin\angle 2$,则有 $\quad \frac{r(r+2R)}{R+5r} = \frac{R(R+2r)}{r+5R}$

即 $\quad r^3 - 3r^2R + 3rR^2 - R^3 = 0.(r-R)^3 = 0$

$\therefore \quad r = R$

这与已知 $R > r$ 矛盾,$\therefore \quad \sin\angle 1 \neq \sin\angle 2$

$\therefore \quad \angle 1 \neq \angle 2$,$\therefore \quad A$、$B$、$C$ 三点不共线

解(2):由(1) 知
$$\sin\angle 2 = \sin\angle 1 = \sqrt{\frac{3(3+2\times 6)}{(6+5\times 3)(3+6)}} = \sqrt{\frac{5}{21}}$$
设 $O_1C = x$,由 $\frac{\sin\angle 2}{x} = \frac{\sin\angle AO_1C}{AC} = \frac{\sqrt{9^2-3^2}}{6+3} \cdot \frac{1}{AC} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{AC}$

$\therefore \quad \sin\angle 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{AC} \cdot x$

$\because \quad AC^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3x \cdot \cos\angle AO_1C$
$$= x^2 + 9 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{3}$$
$$= x^2 - 2x + 9$$
于是,$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+9}} \cdot x = \sqrt{\frac{5}{21}}$

$\therefore \quad 41x^2 + 30x - 135 = 0$

取 $x > 0$,$\therefore \quad x = \frac{24\sqrt{10} - 15}{41}$

15.(1) 证明:如图 Ⅱ-D-4-83 所示,先证 PR、QS、BD 三线共点.

设 PR 交 BD 于点 U,QS 交 BD 于点 V,对 $\triangle BDE$ 与直线 PUR 应用梅涅劳斯定理有
$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{ER}{RD} \cdot \frac{DU}{UB} = 1$$
又由于 P、Q、R 为切点,$PE = ER$,$BP = BQ$

故 $\frac{DU}{UB} = \frac{PE}{BP} \cdot \frac{RD}{ER} = \frac{RD}{BP} = \frac{RD}{BQ}$

对 $\triangle DBF$ 与直线 QVS 应用同一定理有
$$\frac{BV}{VD} = \frac{BQ}{RQ}$$
$\therefore \quad \frac{BV}{VD} = \frac{UB}{DU}$,因此,$U$、$V$ 重合.

故 PR、QS、BD 三线共点.

再证 PR、QS、AC 三线共点.

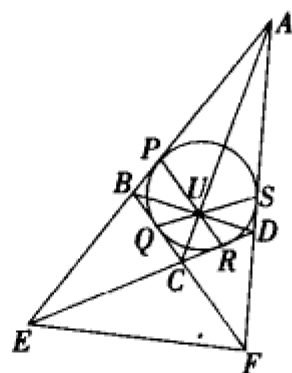


图 Ⅱ-D-4-83

设 PR 交 AC 于 X，QS 交 AC 于 Y，则对 $\triangle ACE$ 与直线 PXR 应用梅涅劳斯定理：

$$\frac{AP}{PE}\cdot\frac{ER}{RC}\cdot\frac{CX}{XA}=1$$

又由于 P、Q、R 为切点，$PE=ER$，$AP=AS$，$RC=QC$

故 $\frac{CX}{XA}=\frac{PE}{AP}$，$\therefore\ \frac{RC}{ER}=\frac{RC}{AP}=\frac{QC}{AS}$

对 $\triangle ACF$ 与直线 QYS 应用同一个定理可得 $\frac{CY}{YA}=\frac{QC}{AS}$

因此，$\frac{CX}{XA}=\frac{CY}{YA}$ $\therefore$ X，Y 重合.

故 PR、QS、AC 三线共点.

综上所述，AC、BD、PR、QS 四线共点.

(2) 证明：将 A、B、C、D、E、F、P、Q、R、S 分别重新标作 A、E、C、F、B、D、P、R、Q、S，使用(1) 的证明即可.

(3) 证明：将图中的 A、B、C、D、E、F、P、Q、R、S 分别重新标作 F、B、E、D、C、A、Q、P、R、S，重新使用(1) 的证明即可.

16. 证明：如图 Ⅱ－D－4－84，设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，$\angle ABD=\angle CBF=\beta$，$\angle ACD=x$，$\angle BCE=y$，设 M、N、K 分别为 AD、BE、CF 与 $\triangle ABC$ 边的交点.

因 AD、BE、CF 三线共点 P，由塞瓦定理得

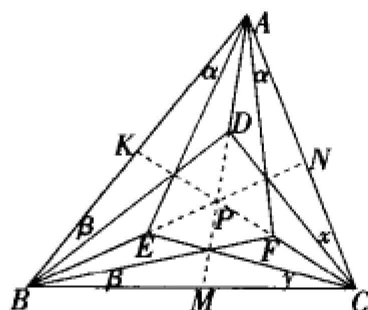


图 Ⅱ－D－4－84

$$l=\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}$$

$$=\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}\cdot\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}}\cdot\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABE}}$$

$$=\frac{AC\cdot AF\sin\alpha}{BC\cdot BF\sin\beta}\cdot\frac{AB\cdot BD\sin\beta}{AC\cdot CD\sin x}\cdot\frac{BC\cdot CE\sin y}{AB\cdot AE\sin\alpha}$$

$$=\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(B-\beta)}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin(c-x)}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(C-y)}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(c-x)}{\sin(c-y)}\cdot\frac{\sin y}{\sin x}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin(C-x)}{\sin x}=\frac{\sin(C-y)}{\sin y}$$

即 $\frac{\sin C\cdot\cos x-\cos C\cdot\sin x}{\sin x}=\frac{\sin C\cdot\cos y-\cos C\cdot\sin y}{\sin y}$，

亦即 $\cot x=\cot y$

$\because$ $x,y\in(0,\pi)$，$\therefore$ $x=y$

反之，若 $x=y$，因上述证明各步均可逆，由塞瓦定理的逆定理知 AD、BE、CF 三线共点.

17. 证法 1：比例线段法

设 $BP_1=m$，$CP_2=n$，$AP_3=r$，由 $AP_1=AP_4=BP_2=BP_5=CP_3=CP_6=BP_1+CP_2+AP_3$ 得：

$AP_5=m$，$BP_6=n$，$CP_4=r$

$\angle P_4P_1A=\angle P_1P_4A=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$，$\angle P_2P_5B=\angle P_5P_2B=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$，$\angle P_3P_6C=\angle P_6P_3C=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$，如图 Ⅱ－D－4－85 所示，延长 $A'A$，$B'B$ 交于 O，过 O 作 $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$ 的垂线段 OM_3、OM_1、OM_2；过 A 作 $A'B'$、$A'C'$ 的垂线段 AG_3，AG_2；过 B 作 $A'B'$、$B'C'$ 的垂线段 BN_3，BN_1；过 C 作 $B'C'$、$A'C'$ 的垂线段 CQ_1、CQ_2.

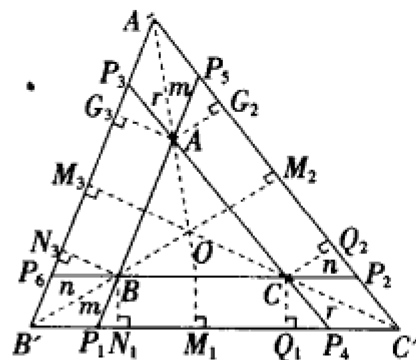


图 Ⅱ－D－4－85

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1N_1B$ 中，$BN_1 = B_1P_1\sin\angle BP_1N_1 = m\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = m\cos\frac{A}{2}$. 同理 $BN_3 = n\cos\frac{C}{2}$, $AG_2 = m\cos\frac{B}{2}$, $AG_3 = r\cos\frac{C}{2}$, $CQ_1 = r\cos\frac{A}{2}$, $CQ_2 = n\cdot\cos\frac{B}{2}$

$\because\ BN_3 \parallel OM_3$, $\therefore\ \frac{BN_3}{BM_3} = \frac{B'B}{B'O}$

$\because\ BN_1 \parallel OM_1$, $\therefore\ \frac{BN_1}{OM_1} = \frac{B'B}{B'O}$ $\therefore\ \frac{BN_3}{OM_3} = \frac{BN_1}{OM_1}$

$\therefore\ \frac{OM_1}{OM_3} = \frac{BN_1}{BN_3} = m\cdot\cos\frac{A}{2}/n\cos\frac{C}{2}$ ①

同理 $\frac{OM_2}{OM_3} = \frac{AG_2}{AG_3} = m\cdot\cos\frac{B}{2}/r\cos\frac{C}{2}$ ②

①、② 相除，得

$\frac{OM_1}{OM_2} = r\cos\frac{A}{2}/n\cos\frac{B}{2}$

又 $\because\ \frac{CQ_1}{CO_2} = r\cos\frac{A}{2}/n\cos\frac{B}{2}$，则有 $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{CQ_1}{CQ_2}$，易证 O、C、C' 共线，故三线段 AA'，BB'，CC' 所在直线相交于一点.

证法 2：用塞瓦定理

引理 1　如图 Ⅱ－D－4－87，塞瓦定理的正弦形式

l_1, l_2, l_3 共点 $\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$

引理 2　如图 Ⅱ－D－4－88，$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} = \frac{CP_2\cdot\sin\angle CP_2C'}{CP_4\cdot\sin\angle CP_4C'}$

下证原题，如图 Ⅱ－D－4－86

AA'、BB'、CC' 共点 $\overset{\text{引理1}}{\Leftrightarrow} \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2} = \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4}\cdot\frac{\sin\angle 5}{\sin\angle 6} = 1 \overset{\text{引理2}}{\Leftrightarrow} \frac{CP_2\cdot\sin\angle CP_2C'}{CP_4\cdot\sin\angle CP_4C'}\cdot\frac{BP_1\sin\angle BP_1B'}{BP_6\sin\angle BP_6B'}\cdot\frac{AP_3\cdot\sin\angle AP_3A'}{AP_5\cdot\sin\angle AP_5A'} = 1$ ①

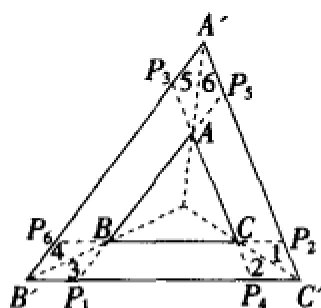


图 Ⅱ－D－4－86

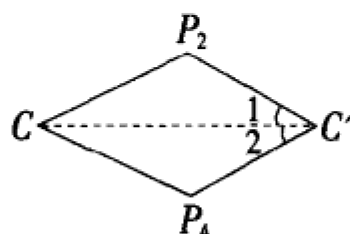


图 Ⅱ－D－4－87

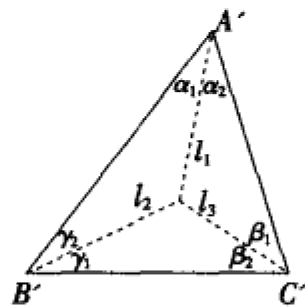


图 Ⅱ－D－4－88

$\because\ AP_1 = AP_4 = BP_2 = BP_5 = CP_3 = CP_6$

$\therefore\ \angle CP_2C' = \angle AP_5A'$，$\angle AP_3A' = \angle BP_6B'$，$\angle CP_4C' = \angle BP_1B'$.

$\therefore$ ①$\Leftrightarrow \frac{CP_2}{CP_4}\cdot\frac{BP_1}{BP_6}\cdot\frac{AP_3}{AP_5} = 1$ ②

由条件易知：$BP_1 = AP_5$, $CP_2 = BP_6$, $AP_3 = CP_4$

$\therefore$ ② 式成立.

证法 3：利用直线所在的特殊位置.（如图 Ⅱ－D－4－89）

记 $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$

$\angle ABC = B$, $\angle BCA = C$, $\angle CAB = A$

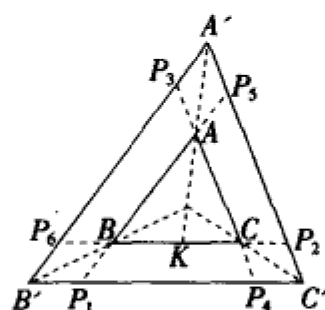


图 Ⅱ－D－4－89

由题设$\begin{cases} c = AP_3 + CP_2 \\ b = BP_1 + CP_2 \\ a = BP_1 + AP_3 \end{cases}$

易得　$AP_5 = \dfrac{a+b-c}{2}, AP_3 = \dfrac{a+c-b}{2}$

$\angle AP_3A' = 90° + \dfrac{C}{2}, \angle AP_5A' = 90° + \dfrac{B}{2}$

故 $\angle P_3A'P_5 = 360° - \left(90° + \dfrac{C}{2} + 90° + \dfrac{B}{2} + A\right) = \dfrac{B+C}{2}$

连接 AA'，设 $\angle AA'P_5 = \alpha, \angle AA'P_3 = \beta$(易知它们均为锐角)，则 $\alpha + \beta = \dfrac{B+C}{2}$

在 $\triangle AA'P_5$ 与 $\triangle AA'P_3$ 中，分别利用正弦定理有

$$\sin\alpha = \frac{(a+b-c)\sin\left(90° + \frac{B}{2}\right)}{2AA'}$$

$$\sin\beta = \frac{(a+c-b)\sin\left(90° + \frac{C}{2}\right)}{2AA'}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{(a+b-c)\cos\frac{B}{2}}{(a+c-b)\cos\frac{C}{2}} = \frac{4\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{4\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (*)$$

. 如果 $\alpha > \dfrac{\beta}{2}$，则由 $\alpha - \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{2} - \beta$　知

$\dfrac{C}{2} > \beta$，由正弦函数性质易知 $\sin\alpha > \sin\dfrac{B}{2} > 0, \sin\dfrac{C}{2} > \sin\beta > 0$，故有　$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} > \dfrac{\sin(B/2)}{\sin(C/2)}$. 与(＊)矛盾.

同样，当 $\alpha < B/2$ 时，有

$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \dfrac{\sin(B/2)}{\sin(C/2)}$，也与(＊)矛盾.

$\therefore \quad \alpha = \dfrac{B}{2}$

延长 $A'A$ 交 BC 于 K，$\angle A'KP_2 = \angle BP_2C' - \alpha = \left(90° + \dfrac{\angle B}{2}\right) - \dfrac{\angle B}{2} = 90°$

$\therefore \quad AK \perp BC$

同理 $B'B \perp AC, CC' \perp AB$

由三角形三条高线交于一点(垂心). 本题得证.

证法 4：利用 1996 年高中数学联赛第二试题(3) 的结果证明.

其一，原赛题为：

如下图 Ⅱ－D－4－90，圆 O_1、圆 O_2 与 $\triangle ABC$ 的三边所在直线相切，E, F, G, H 为切点，且 EH、FG 的延长线交于 P，求证：PA 和 BC 垂直.

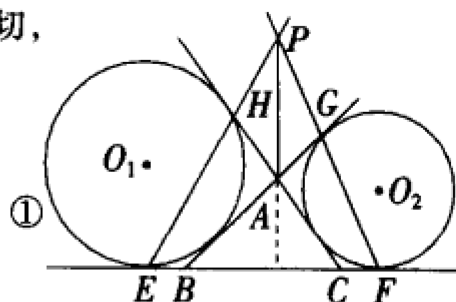


图 Ⅱ－D－4－90

用该赛题结果可如下证明：

由题$\begin{cases} AP_1 = AP_4 \\ BC = BP_1 + CP_4 \end{cases}$

(事实上，$BC + CP_2 = AP_3 + BP_1 + CP_2$)

$\therefore$　P_1P_4 是 $\triangle ABC$ 的顶点 A 所对的旁切圆切点弦(事实上不妨设切点弦为 PQ)，

则$\begin{cases}AP = AQ \\ BC = BP + CQ\end{cases}$ ②

则有$\begin{cases}BP + CQ = BP_1 + CP_4 (= BC) \\ BP_1 - CP_4 = BP - CQ (= b - c)\end{cases}$

于是$\begin{cases}BP = BP_1 \\ CQ = CP_4\end{cases}$

同理,如图 Ⅱ - D - 4 - 91,P_3P_6 是 $\triangle ABC$ 的顶点C所对的旁切圆切点弦,由赛题知 P_3P_6、P_1P_4 的交点 B' 和B 的连线垂直AC,即 $B'B \perp AC$,同理 $A'A \perp BC$,$C'C \perp AB$,故 $A'A$、$B'B$、$C'C$ 交于一点.

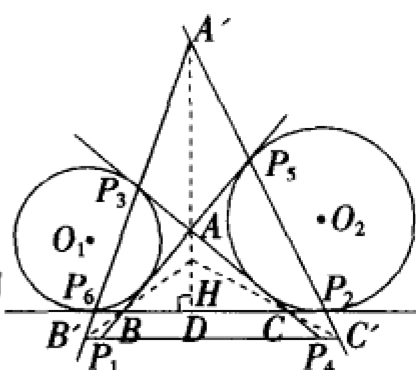


图 Ⅱ - D - 4 - 91

第四章　直线型　知识、方法、技能

A组

1. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 92,设 B' 是B 点关于AD 的对称点,则 P 点就是$B'C$ 与AD 的交点.

在 $\triangle PAB$ 和 $\triangle DPC$ 中 $\angle APB = \angle DPC$,$\angle PAB = 180° - \angle PDC$,由正弦定理知

$$\frac{BP}{AB} = \frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle APB} = \frac{\sin\angle PDC}{\sin\angle DPC} = \frac{PC}{DC}$$

$$\therefore \frac{B'P}{PC} = \frac{BP}{PC} = \frac{AB}{CD}$$

由 $\triangle AOB \backsim \triangle COD$,得$\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AB}{CD}$

所以 $\dfrac{B'P + PC}{PC} = \dfrac{AB + CD}{CD} = \dfrac{AO + OC}{OC}$

即 $\dfrac{B'C}{PC} = \dfrac{AC}{OC}$,所以 $\triangle COP \backsim \triangle CAB'$

所以 $OP = \dfrac{OC}{AC} \cdot AB' = \dfrac{CD \cdot AB}{AB + CD}$

同理 $OQ = \dfrac{CD \cdot AB}{AB + CD}$,所以 $OP = OQ$

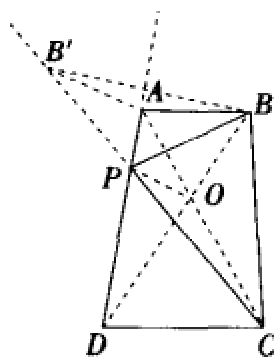


图 Ⅱ - D - 4 - 92

2. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 93,记 $A = 3\alpha$,$B = 3\beta$,$C = 3\gamma$,$AE = m$,$AF = n$,$\triangle ABC$ 的三边长为a、b、c.

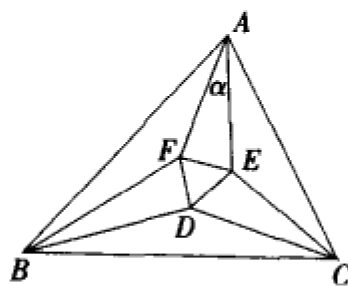


图 Ⅱ - D - 4 - 93

由于 $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180°$

所以 $\alpha + \beta + \gamma = 60°$

$\alpha + \beta = 60° - \gamma$,而 $n\sin(\alpha + \beta) = c \cdot \sin\beta$

所以 $n = c\sin\beta/\sin(\alpha + \beta) = c\sin\beta/\sin(60° - \gamma)$

类似地:

$$m = \frac{b\sin\gamma}{\sin(60° - \beta)}$$

在 $\triangle ABC$ 中有 $b\sin3\gamma = c \cdot \sin3\beta$,从而

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin3\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin(60° - \gamma)}{\sin3\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin(60° - \beta)} = \frac{\sin(60° + \beta)}{\sin(60° + \gamma)}$$

由于 $\alpha + \beta + \gamma = 60°$,所以存在以 $60° + \beta$,$60° + \gamma$ 和α 为内角的三角形,夹 α 角的两边之比为

$$\frac{\sin(60° + \beta)}{\sin(60° + \gamma)} = \frac{m}{n}$$

$\triangle EAF$ 与这三角形相似,从而

$\angle AFE = 60^\circ + \beta, \angle AEF = 60^\circ + \gamma$

同法可证 $\angle BFD = 60^\circ + \alpha$,而 $\angle AFB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

因此,$\angle EFA + \angle AFB + \angle BFD = (60^\circ + \beta) + (180^\circ - \alpha - \beta) + (60^\circ + \alpha) = 300^\circ$

$\therefore \angle DFE = 60^\circ$

类似地,$\triangle DEF$ 的另两个内角也为 60°

因此 $\triangle DEF$ 是等边三角形.

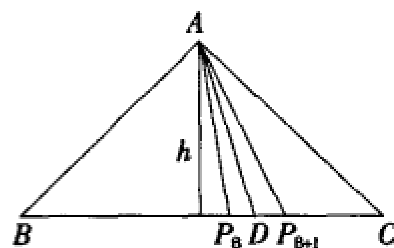


图 Ⅱ - D - 4 - 94

3. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 94,设 D 为 BC 的中点,P_k 和 P_{k+1} 表示包含 D 的那等份的两个分点,易知 D 也为 P_kP_{k+1} 的中点,$P_kP_{k+1} = \frac{a}{n}$

$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$,设 $AP_k = x . AP_{k+1} = y$

在 $\triangle AP_kP_{k+1}$ 中用中线长定理得.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2xy}\left[x^2 + y^2 - \left(\frac{a}{n}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2xy}\left[\frac{a^2(n^2+1)}{2n^2} - \frac{a^2}{n^2}\right]$$
$$= \frac{a(n^2-1)}{4xyn^2}$$

又 $\frac{1}{2}xy\sin\alpha = S_{\triangle AP_kP_{k+1}} = \frac{1}{2}P_kP_{k+1} \cdot h = \frac{ah}{2n}$

$\therefore \sin\alpha = \frac{ah}{xyn}$

故 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4nh}{a(n^2-1)}$

4. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 95,设 D, H 分别是 BC, AG 的中点,连 PD, PH,则由中线公式.

$PB^2 + PC^2 = 2(PD^2 + BD^2)$

$PA^2 + PG^2 = 2(PH^2 + GH^2)$

上面两式相加,得

$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PG^2$

$= 2(PD^2 + PH^2) + 2(BD^2 + GH^2)$

$= 2(PD^2 + PH^2) + 2(BD^2 + GD^2)$

$= 4(PG^2 + GD^2) + (GB^2 + GC^2)$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 4PG^2$

故 $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2$

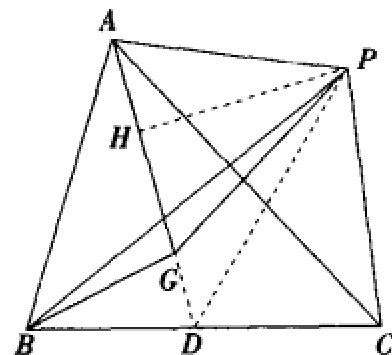


图 Ⅱ - D - 4 - 95

【注】 由上面结论知,到三角形三顶点距离的平方和为最小的点,是三角形的重心.

5. 证明:设 m_a, m_b, m_c 和 h_a, h_b, h_c 为三边上的中线及高.

因 $m_a \geqslant h_a, m_b \geqslant h_b, m_c \geqslant h_c$

则 $a^2m_a^2 \geqslant a^2h^2, b^2m_b^2 \geqslant b^2h_b^2, c^2m_c^2 \geqslant c^2h_c^2$

又 $a^2h_a^2 = b^2h_b^2 = c^2h_c^2 = 4S^2$

$$\therefore a^2m_a^2 + b^2m_b^2 - c^2m_c^2 \geqslant 3 \times 4S^2 \quad ①$$

把 $m_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$

$m_b^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}b^2$

$m_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2$

代人 ① 中，整理得

$$4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 \geqslant 48S^2 \quad ②$$

又 $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \quad ③$

② + 2 × ③，开平方即得

$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$

显然，当且仅当 $a = b = c$ 时，不等式中的等式成立.

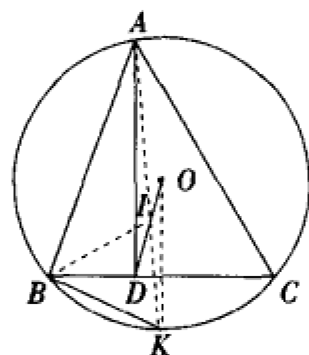


图 Ⅱ - D - 4 - 96

6. 证明：如图 Ⅱ - D - 4 - 96，记 $AB = c, BC = a, CA = b$

设 AI 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 K 点，则 OK 是 $\odot O$ 的半径，记为 R，因为 $OK \perp BC$，所以 $OK \parallel AD$，从而

$$\frac{AI}{IK} = \frac{AD}{OK} = \frac{C \cdot \sin B}{R} = 2\sin B \cdot \sin C \quad ①$$

注意到：$\angle IBA = \frac{1}{2}\angle B$

$\angle IBK = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle C$

由定理 2 得

$$\frac{AI}{IK} = \frac{AB \cdot \sin\frac{B}{2}}{BK \cdot \cos\frac{C}{2}} = \frac{2\sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \quad ②,$$

由 ①、② 得

$$2\sin B \cdot \sin C = \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

所以，$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$

设 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的旁切圆的半径为 r_a，则

$r_a = 4R \cdot \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = R$

7.【分析】 只证明必要性.

设 $BC = 2, \angle C = \alpha, \angle FQC = \beta$，则 $AM = \tan\alpha$，而在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，$BM^2 = AM \cdot OM$，故 $OM = \cot\alpha$

在 $\triangle QFC$ 和 $\triangle QEB$ 中，由正弦定理知，

$$\frac{QF}{\sin\alpha} = \frac{1 + OM}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{QE}{\sin\alpha} = \frac{1 - QM}{\sin(\alpha - \beta)} (\because QE = QF)$$

$$\because QM = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}, = OM \cdot \frac{GM}{QM}$$

$\therefore QM^2 = OM \cdot GM$

$\therefore \angle OQC = 90^\circ$，即 $OQ \perp EF$

8. 证明：由定理 3 有：$B = 2A \Rightarrow b^2 = a^2 + ac \Rightarrow \frac{b - a}{c} = \frac{a}{b + a} \Rightarrow \frac{b - a}{c} = \frac{b}{a + b + c} \quad ①$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 + ac}{2bc} = \frac{a + c}{2b} \Rightarrow a + c = 2b\cos A \quad ②$$

② 代人 ① 得：$\frac{b - a}{c} = \frac{b}{b + 2b\cos A} = \frac{1}{1 + 2\cos A}$

又 $0^\circ < A < 60^\circ$，故 $\frac{1}{3} < \frac{b - a}{c} < \frac{1}{2}$

从而，$\frac{c}{3} < b - a < \frac{c}{2}$

9. 证明：如图 Ⅱ - D - 4 - 97，设 $BC = a, AC = b, AB = c$，由题设知 $A = 2B, B = 2C$

由定理 3 有 $A = 2B \Rightarrow a^2 = b^2 + bc$ ①

$B = 2C \Rightarrow b^2 = c^2 + ac$ ②

由 ① 得:$a^2 = b(b+c) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$ ③

② 代人 ① 得:$a^2 = c^2 + ac + bc = c(a+b+c)$

$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{a+b+c}{a}$ ④

④ - ③ 得:$\frac{a}{c} - \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab} \Rightarrow (a+b)c = ab$

即$(BC + AC) \cdot AB = BC \cdot AC$

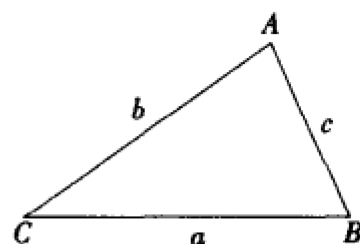


图 Ⅱ - D - 4 - 97

10. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 98,设垂线 AH 的延长线和直线CE 及BD 分别交于点P 和Q,作 BE 的垂线 CK,由 Rt△CKB ∽ Rt△BHA 及 Rt△EHP ∽ Rt△EKC

有:

$PH = \frac{EH \cdot BH \cdot \tan\angle BAC}{EB - AH \cdot \tan\angle BAC}$

同理,$QH = \frac{BH \cdot EH \cdot \tan\angle EAD}{EB - AH \cdot \tan\angle EAD}$

$\because \angle BAC = \angle EAD, \therefore PH = QH$

从而 O、P、Q 重合,$\therefore AO \perp BE$

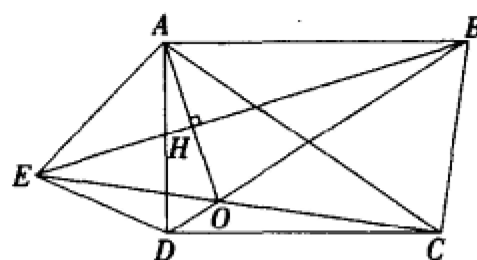


图 Ⅱ - D - 4 - 98

11. 证明:作正 △ACE,

连结 BE.

$\because \angle ABC = \angle BAC$

$\therefore CA = CB = CE$

C 是 △ABE 外心

$\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BCE = 20°$

$\therefore \angle BCE = 40°$

$\angle BEA = \frac{1}{2}\angle ACB = 10° = \angle DCA$

$\therefore \angle BEC = \angle DCE$

$\because \angle BCE = \angle DBC = 40°$

$\therefore BD \parallel CE$

$AECD$ 是等腰梯形,$BE = CD$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle ACD$

$AB = AD$

$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 40° = \angle DBC$

$\therefore AD \parallel BC$

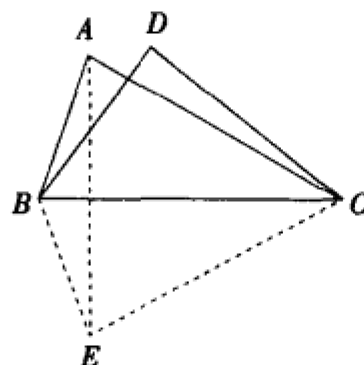


图 Ⅱ - D - 4 - 99

12. 请参考例10.

13. 请参考例12.

14. 证明:用反证法.如图 Ⅱ - D - 4 - 100,设$\angle BCD$ 不是钝角,连 AC、CE,由等腰 △BCA,等腰 △CDE 顶角小于120°,知其底角不小于30°,从而,$\angle ACE < 90° - 2 \times 30° = 30°$

又由余弦定理(在 △ACB 和 △CDE 中)知

$AC\angle\sqrt{3}$,$CE\angle\sqrt{3}$,

在 △ACE 中,再由余弦定理有

$AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos\angle ACE$

$< 3 + 3 - 2 \times 3\cos 30° < 1$

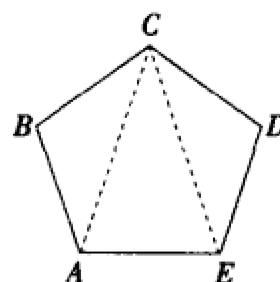


图 Ⅱ - D - 4 - 100

即 $AE < 1$ 与题设矛盾,从而假设不真.

15. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 101

连结 BD,DF,FB,由题设有

$\angle A + \angle C + \angle E = 360°$

又 $AB = BC = \cdots = FA$,于是,$\triangle ABF,\triangle BCD,\triangle DEF$ 可拼成一个大三角形,且它与 $\triangle BDF$ 全等(易证).

图 Ⅱ - D - 4 - 101

由此可得

$CD \parallel BO \parallel AF, BA \parallel OF \parallel DE, BC \parallel OD \parallel EF$

故 $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

16. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 102,由 $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ECD} = 1$,又两三角形同底,故 $BE \parallel CD$.

同理,$BD \parallel AE, EC \parallel AB$

记 EC,BD 的交点为 P,则 $ABPE$ 为 $\square$,

于是,$S_{\triangle EAB} = S_{\triangle EPB} = 1$

令 $S_{\triangle PCB} = S_{\triangle PDE} = y, S_{\triangle PDC} = x$,则 $x + y = 1$

又 $\dfrac{S_{\triangle PED}}{S_{\triangle PEB}} = \dfrac{PD}{PE} = \dfrac{S_{\triangle PDC}}{S_{\triangle PBC}}$,即 $\dfrac{y}{1} = \dfrac{x}{y}$

注意到 $x + y = 1$,有 $\dfrac{y}{1} = \dfrac{1-y}{y}$

即 $y^2 + y - 1 = 0$

解得 $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$(已舍负值).$x = 1 - y = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\therefore S_{ABCDE} = 1 + 1 + 2y + x = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

图 Ⅱ - D - 4 - 102

为了证明此类五边形无穷多,只须先构造一个 $\triangle PCD$,使之面积为 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,延长 CP 到 E,延长 DP 到 B,使 $S_{\triangle EDC} = S_{\triangle BDC} = 1$.

从而 $BE \parallel CD$

再作 $EA \parallel BD, AB \parallel EC$,即可得具有题设性质的五边形.

由 $\triangle PCD$ 的任意性,知此类五边形有无穷多个.

17. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 103,设 BE 的中点为 H,则 AD 经位似旋转变换 $S(B,45°,\sqrt{2})$ 变为 EC,EC 经位似旋转变换 $S(A,45°,\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 变为 HF,HF 再经位似旋转变换 $S(E,45°,\sqrt{2})$ 变为 AG,故

$GA = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}AD = \sqrt{2}AD$

$\angle GAD = 45° + 45° + 45° = 135°$

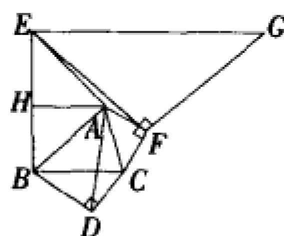


图 Ⅱ - D - 4 - 103

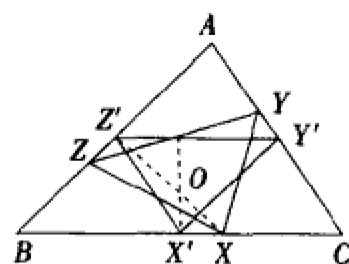


图 Ⅱ - D - 4 - 104

18. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 104,设 X',Y',Z' 分别是 $\triangle ABC$ 三边中点,易知 $\triangle X'Y'Z' \backsim \triangle ABC$,设 O 是 $\triangle X'Y'Z'$ 的垂心,由 $OX' \perp Y'Z', Y'Z' \parallel BC$,则

$OX' \perp BC$

又 $\because BX' = X'C, \therefore OB = OC$

同理，$OB = OA$

故 $\triangle X'Y'Z'$ 的垂心 O 是 $\triangle ABC$ 的外心.

设 OX 与 OX' 夹角为 α.

由 $\triangle X'Y'Z' \xrightarrow{S(O,\alpha,\sec\alpha)} \triangle XYZ$，则 O 依然是 $\triangle XYZ$ 的垂心，且 $\triangle XYZ \backsim \triangle X'Y'Z' \backsim \triangle ABC$. 故结论成立.

B组

1. 证明：设 $\angle B$ 的角平分线交 OH 于 P，$\angle A$ 的平分线交 OH 于 Q.

有 $\angle ABO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle C = \angle HBC$，

又 $\angle ABI = \angle IBC$，所以 $\angle OBI = \angle IBH$，即 BI 平分 $\angle OBH$，

同理 AI 平分 $\angle OAH$.

根据角平分线定理，有

$\frac{BH}{BO} = \frac{PH}{OP}, \frac{AH}{AO} = \frac{QH}{OQ}$

因为 $\angle B > \angle A$，所以 $AC > BC, AH > BH$

又 $AO = BO$

所以 $\frac{QH}{OQ} > \frac{PH}{OP}$，所以 $OQ < OP$

即 Q 在 OP 之间，所以 AQ 与 BP 交于 OH 下方. 即 I 在 $\triangle BOH$ 内部.

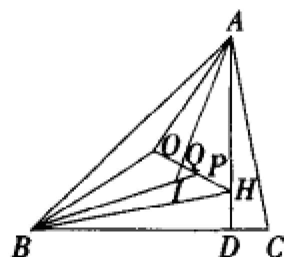


图 Ⅱ - D - 4 - 105

2. 解，如图 Ⅱ - D - 4 - 106，由于 $\triangle BAD \cong \triangle DCB$，所以问题可简化为：设 E 是 $\triangle DBC$ 的边 BC 上的点，$\triangle DEC$、$\triangle BED$ 和 $\triangle DCB$ 都是等腰三角形，问 $\angle C$ 的大小有哪些可能的值？分不同可能情形讨论如下.

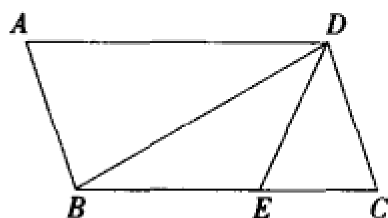


图 Ⅱ - D - 4 - 106

(1) 等腰 $\triangle DBC$ 中，$DB = DC$. 这时 $DE \neq DB, DE \neq DC$，因而等腰三角形 DEC 和 BED 只有下列可能：

情形 1　$BE = ED, ED = EC$（图 Ⅱ - D - 4 - 107）$\angle C = 45°$

情形 2　$BE = ED, CD = CE$（图 Ⅱ - D - 4 - 108）. 这时

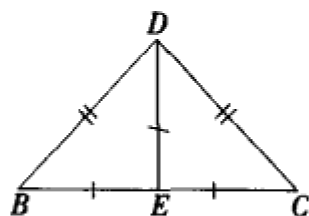


图 Ⅱ - D - 4 - 107

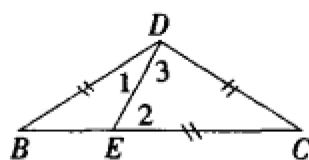


图 Ⅱ - D - 4 - 108

$\angle B = \angle 1, \angle 2 = \angle 3 = 2\angle B, \angle C = \angle B, \angle BDC = 3\angle B$

$\angle C + \angle C + 3\angle C = 180° \therefore \angle C = 36°$

情形 3　$BE = BD, ED = CE$（图 Ⅱ - D - 4 - 109 中将字母 B 与 C 互换），$\angle C = 36°$

(2) 等腰 $\triangle DBC$ 中，$BD = BC$. 这时 $\angle BDC = \angle C$，并且 $BE < BD, EC < BD$

这时在等腰 $\triangle BDE$ 中，$BD \neq DE$，因为如果 $BD = DE$，那么 $\angle DEC$ 是钝角，将有 $DC > DE > EC$，$\triangle DCE$ 不是等腰三角形. 所以必有 $BE = ED$

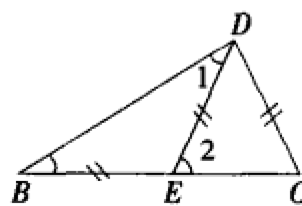


图 Ⅱ - D - 4 - 109

进而还可得到 $DE \neq EC$，因为如果 $EC = DE = BE$，那么 D 点在以 BC 为直径的圆上，将有 $BD < BC$ 与 $BD = BC$ 矛盾.

情形 1　等腰 $\triangle DEC$ 中，$DE = DC$（图 Ⅱ − D − 4 − 109）．这时 $\angle B = \angle 1, \angle C = \angle 2 = 2\angle B, \angle C + \angle C + \frac{1}{2}\angle C = 180°$．$\therefore \angle C = 72°$

情形 2　等腰 $\triangle DEC$ 中，$DC = EC$（图 Ⅱ − D − 4 − 110）．这时 $\angle B = \angle 1, \angle 2 = \angle 3 = 2\angle B, \angle C = \angle BDC = 3\angle B$

$\angle C + \angle C + \frac{1}{3}\angle C = 180°, \therefore \angle C = \frac{540°}{7}$

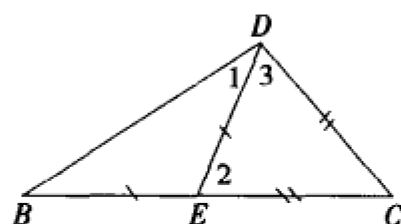


图 Ⅱ − D − 4 − 110

(3) 等腰 $\triangle DBC$ 中，$BC = CD$．仿照(2)可知只有以下两种情形：

情形 1　$BD = DE, DE = EC$（图 Ⅱ − D − 4 − 111）．这时 $\angle C = 36°$

情形 2　$BD = BE, DE = EC$（图 Ⅱ − D − 4 − 112）．这时 $\angle C = \frac{180°}{7}$

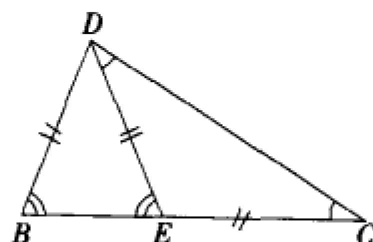


图 Ⅱ − D − 4 − 111

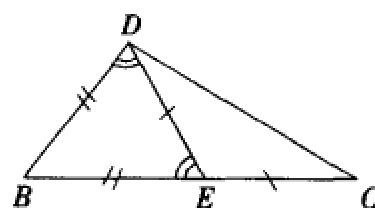


图 Ⅱ − D − 4 − 112

综合以上各种情形，可知原平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的一切可能值是：$45°, 36°, 72°, \frac{540°}{7}, \frac{180°}{7}$.

3. 证明：由题设知四边形 $EDCD'$ 和 $DCBC'$ 是平行四边形（如图 Ⅱ − D − 4 − 113）．

$\therefore EC' = EB - C'B = EB - DC = EB - ED' = D'B$

又由 $\triangle EC'B \backsim \triangle AC'B, \triangle ED'C \backsim \triangle AD'B$．有

$$\frac{EB'}{AB} = \frac{EC'}{C'B} = \frac{D'B}{ED'} = \frac{AB}{EC} = \frac{AB}{EB' + B'C} = \frac{AB}{EB' + AB} = \frac{1}{1 + \frac{EB'}{AB}}$$

令 $\frac{EB'}{AB} = x$，于是，有 $x = \frac{1}{1 + x}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$（已含负值）

$\therefore \frac{EC}{AB} = 1 + \frac{EB'}{AB} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

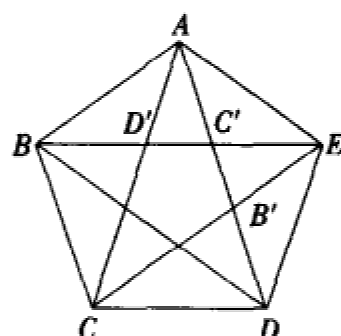


图 Ⅱ − D − 4 − 113

4. 解一：作正 $\triangle PCQ$，连结 AQ, BQ.（图 Ⅱ − D − 4 − 114）

则 $\angle ACQ = \angle ACP = 30°$

$\because PC = CQ, AC$ 公用

$\therefore \triangle ACP \cong \triangle ACQ \therefore \angle PAC = \angle CAQ$.

$\because \angle BPC = 180° - 20° - 10° = 150°, \angle CPQ = 60°$

$\therefore \angle BPQ = 360° - 60° - 150° = 150° = \angle BPC$

$\because PC = PQ, PB$ 公用.

$\therefore \triangle BPC \cong \triangle BPQ \quad \therefore \angle PBQ = \angle PBC = 10°$

$BC = BQ, \therefore \angle BQC = 80° = \angle BAC$

$\therefore B, A, Q, C$ 共圆．$\therefore \angle CAQ = \angle CBQ = 20°$

$\therefore \angle PAC = 20°$

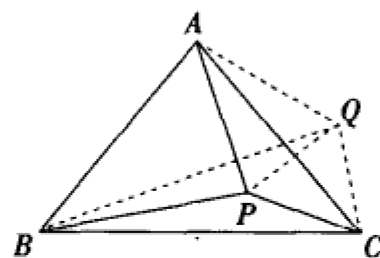


图 Ⅱ − D − 4 − 114

解二：作正 $\triangle ACE$，连结 BE，作 $AF \perp BE$ 于 F，延长 CP 交 AF 于 O，连接 OB．则 $AE = AC = AB$

$= EC$

$\angle ACP = \angle ECP = 30°$(如图 Ⅱ－D－4－115)

$\therefore AF$ 是 BE 中垂线,CP 是 AE 中垂线,

$\therefore O$ 是 $\triangle ABE$ 的外心

$\therefore OB = OA \quad \therefore \angle OBA = \angle OAB = \frac{1}{2}\angle BAE = 10°$

$\therefore \angle OBP = \angle ABP - \angle ABO = 30° = \angle OPB$

$\therefore OA = OP$

$\because \angle POA = 360° - \angle AOB - \angle POB = 360° - 160° - 120° = 80°$

$\therefore \angle APO = 50° \quad \therefore \angle PAC = 50° - 30° = 20°$

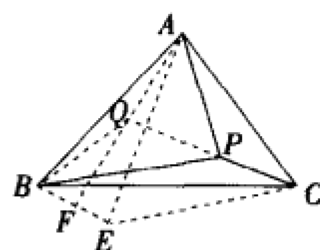


图 Ⅱ－D－4－115

解三:作正$\triangle PBE$(如图Ⅱ－D－4－116),连结 CE 交PA 于F,连结 BF,延长 CP 交BE 于Q,则 $\angle 1 = \angle 2 = 30°$,$\therefore PQ$ 是BE 中垂线.$\therefore CE = CB$.$\because \angle ACQ = 30° = \angle 2$,$\therefore PE \parallel AC$.$\therefore \frac{AC}{PE} = \frac{AF}{PF}$,$\therefore \frac{AB}{PB} = \frac{AF}{FP}$,$\therefore BF$ 平分 $\angle ABP$.$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 20°$

易知 $\angle CEB = 70°$,$\angle BFE = 70°$.$\therefore BF = BE = BP$.$\because \angle 3 = 20°$

$\therefore \angle BPA = 80°$,$\therefore \angle APQ = 50°$,$\therefore \angle PAC = 50° - 30° = 20°$

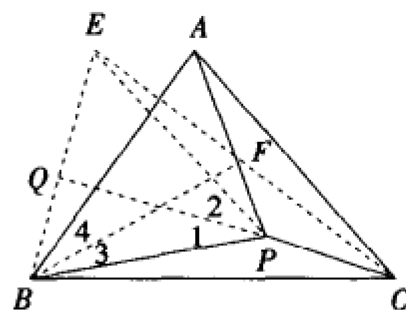


图 Ⅱ－D－4－116

5. 证明:(如图 Ⅱ－D－4－117)令 $AB = a$,$BK = b$,$DN = c$,则 $(a - b)(a - c) = 2bc$

即 $a^2 - bc = a(b + c)$

而 $\tan(\angle BCK + \angle DCN) = \dfrac{\frac{b}{a} + \frac{c}{a}}{1 - \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}} = \dfrac{a(b + c)}{a^2 - bc} = 1$

所以 $\angle BCK + \angle DCN = 45°$

$\angle BLK = \angle BCK + 45° = 90° - \angle DCN = \angle DNC$

再由 $\triangle ABM \cong \triangle CBM$,得

$\angle BAM = \angle BCM = \angle BCK + \angle LCM = \angle BCK + (90° - 45°) = \angle BLK$

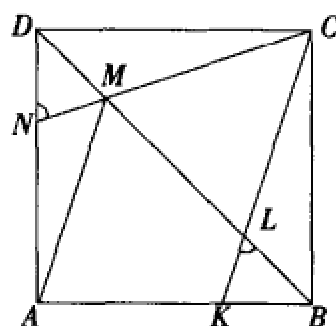


图 Ⅱ－D－4－117

6. 解:如图 Ⅱ－D－4－118,用希腊字母 α、β、γ、δ 表示图中各角,由题设知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$,从而,$\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$

根据正弦定理,有

$\frac{AE}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\angle AED}$,$\frac{EC}{CD} = \frac{\sin\gamma}{\sin\angle CED}$

但 $\sin\angle AED = \sin\angle CED$

$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AD \cdot \sin\alpha}{CD \cdot \sin\gamma}$

因而$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD \cdot \sin\alpha}{CD \cdot \sin\gamma}$ ①

同理$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{FB} = \frac{AD \cdot \sin\beta}{BD \cdot \sin\delta} = \frac{AD \cdot \cos\alpha}{BD \cdot \cos\gamma}$ ②

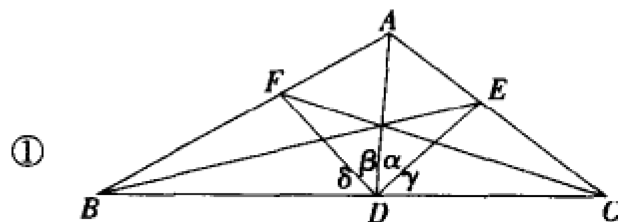


图 Ⅱ－D－4－118

由 ①、② 得

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD \cdot \sin\alpha\cos\gamma}{CD \cdot \sin\gamma\cos\alpha}$,

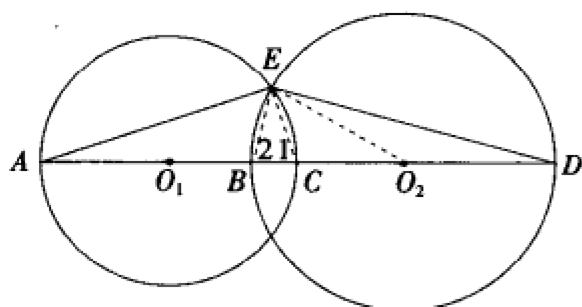
但$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$,$\therefore \sin\alpha\cos\gamma = \sin\gamma\cos\alpha$

即 $\sin(\alpha - \gamma) = 0$,$\therefore \alpha = \gamma$

从而$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CD}=\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}}$,又$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sin C}{\sin A}$

$\therefore \sin\frac{A}{2}=\sin A$

7. 证明:(如图Ⅱ-D-4-119)连 EB、EC,令 $\angle ECB=\angle 1$,$\angle EBC=\angle 2$,$BC=a$,连 EO_2.



图Ⅱ-D-4-119

则 $AC=3a$,$AE=3a\cdot\sin\angle 1$,$EC=3a\cdot\cos\angle 1$

由 $BD=4a$,有 $ED=4a\cdot\sin\angle 2$,$BE=4a\cdot\cos\angle 2$

$\because BC=a=\frac{1}{2}\cdot 2a=CO_2$

$\therefore EC$ 为 $\triangle BEO_2$ 的中线.

由中线长定理,有

$EC^2=\frac{1}{2}EB^2+\frac{1}{2}EO_2^2-\frac{1}{4}BO_2^2$

即 $9a^2\cos^2\angle 1=8a^2\cos^2\angle 2+2a^2-a^2$

亦即 $9(1-\sin^2\angle 1)=8(1-\sin^2\angle 2)+1$

故 $9\sin^2\angle 1=8\sin^2\angle 2$

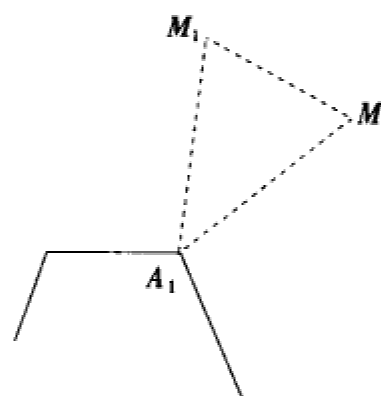
于是,$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore ED:EA=\frac{4a\cdot\sin\angle 2}{3a\cdot\sin\angle 1}=\sqrt{2}$

8. 证明:设以 AB 为边在 $\triangle ABC$ 的外侧所作三角形的另外一个顶点为D,连 RD,则 $\triangle BCP\backsim\triangle BDR\cong\triangle ADR\backsim\triangle ACQ$.

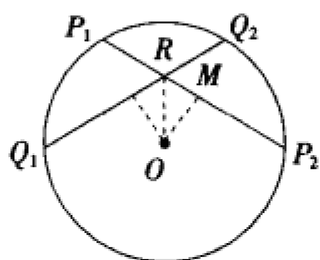
从而,RP 经过位似旋转变换 $S(A,45^\circ,\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ})$ 变为 RQ,故有 $\angle QRP=90^\circ$,且 $QR=RP$

评述:此题的条件可加强为$\angle BCP=\angle QCA=\alpha$,$\angle ABQ=\angle BAR=\beta$,且 $\alpha+\beta=45^\circ$,其它条件不变,用同样的证法,仍能得出同样的结论.若再设$\angle PBC=\angle CAQ=\gamma$,且 $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$,则结论变为$\angle QRP=2\gamma$,且 $QR=RP$



图Ⅱ-D-4-120

9. 证明:如图Ⅱ-D-4-120,在等腰$\triangle A_iMM_i$ 中,因$\angle A_iMM_i=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$,$\frac{MM_i}{MA_i}=2\sin\frac{\alpha}{2}$,则可以看成是点 A_i 经过位似旋转变换$S(M,-\frac{180^\circ-\alpha}{2},2\sin\frac{\alpha}{2})$ 变为 M_i.因此,凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 经位似旋转变换 $S(M,-\frac{180^\circ-\alpha}{2},2\sin\frac{\alpha}{2})$ 变为凸 n 边形$M_1M_2\cdots M_n$,且位似比为$2\sin\frac{\alpha}{2}$,所以,n 边形$M_1M_2\cdots M_n$ 的面积$=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2S=4S\sin^2\frac{\alpha}{2}$.



图Ⅱ-D-4-121

10. 证明:如图Ⅱ-D-4-121,如果$\odot O$ 的弦Q_1Q_2 由弦 P_1P_2 绕着点 O 旋转α 角得到,那么,直线 P_1P_2 和 Q_1Q_2 的交点 R 可以由弦P_1P_2 的中点 M 经过位似旋转变换 $S\left(0,\frac{\alpha}{2},\sec\frac{\alpha}{2}\right)$得到.

(1) 设$\triangle ABC$ 各边中点分别为D、E、F,则$\triangle A_2B_2C_2$ 可以经过位似旋转变换由$\triangle DEF$ 得到,而$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$,故$\triangle A_2B_2C_2\backsim\triangle ABC$.

(2) 设四边形各边中点分别为 E、F、G、H,则四边形 $EFGH$ 为平行四边形,且可以经位似旋转变换得到由直线 AB 和A_1B_1、BC 和B_1C_1、CD 和C_1D_1、DA 和D_1A_1 的四个交点的平行四边形,故结论成立.

第五章　圆　知识、方法、技能

A组

1. 证明:设 B 是两圆的另一交点,T、M 分别是 P_1P_2、O_1O_2 与 AB 的交点.

因为 $TP_1^2 = TA \cdot TB = TP_2^2$,即 $TP_1 = TP_2$

又　$P_1M_1 \parallel TM \parallel P_2M_2$

所以　$MM_1 = MM_2$

因为　$AB \perp O_1O_2$

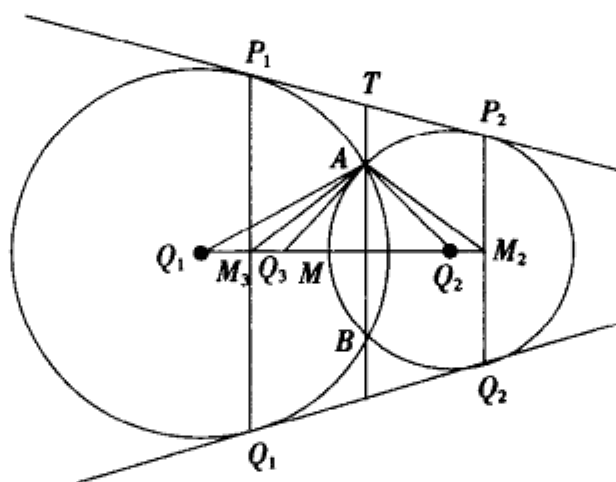


图 Ⅱ－D－4－122

所以　TM 是 M_1M_2 的中垂线

在 O_1O_2 上,取 $MO_3 = MO_2$,则 $\angle O_3AM_1 = \angle O_2AM_2$.因为 $O_1P_1 = O_2P_2$,$O_1M_1 \parallel O_2M_2$,$P_1M_1 \parallel P_2M_2$

$\triangle O_1P_1M_1 \backsim \triangle O_2P_2M_2$

所以　$\dfrac{O_1M_1}{M_1O_3} = \dfrac{O_1M_1}{O_2M_2} = \dfrac{O_1P_1}{O_2P_2} = \dfrac{O_1A}{O_2A} = \dfrac{O_1A}{O_3A}$

由此可知,AM_1 是 $\angle O_1AO_3$ 的平分线.所以

$\angle O_1AM_1 = \angle O_3AM_1 = \angle O_2AM_2$

故有　$\angle O_1AO_2 = \angle O_1AM_1 + \angle M_1AO_2$

$= \angle O_2AM_2 + \angle M_1AO_2$

$= \angle M_1AM_2$

2. 证明:(1) 连接 OM、OA、OB(如图 Ⅱ－D－4－123).显然 O、M、P 三点共线,且 $BM \perp OP$

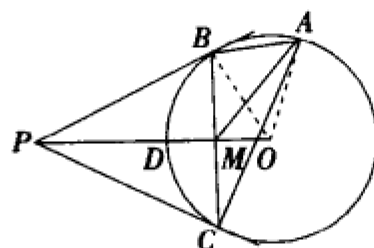


图 Ⅱ－D－4－123

$\because OM \cdot OP = OB^2 = OA^2$

$\therefore \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OA}{OP}$ 又 $\angle MOA = \angle AOP$

$\therefore \triangle MOA \backsim \triangle AOP$

从而$\dfrac{AM}{AP} = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{BM}{BP} = \cos\angle PBM$

但 $\angle BAC = \angle BOP = \angle PBM$

$\therefore \cos\angle BAC = \cos\angle PBM = \dfrac{AM}{AP}$

(2) 设 OP 交$\overset{\frown}{BC}$ 于 D,连 AD、BD(如图 Ⅱ－D－4－124),易知 $\angle PBD = \angle MBD$

$\therefore \dfrac{MD}{PD} = \dfrac{BM}{BP}$

又由(1)的证明过程知$\dfrac{AM}{AP} = \dfrac{BM}{BP}$

$\therefore \dfrac{MD}{PD} = \dfrac{AM}{AP}$,即$\angle MAD = \angle PAD$

又$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$,$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

因而$\angle BAD + \angle MAD = \angle CAD + \angle PAD$

故$\angle BAM = \angle PAC$

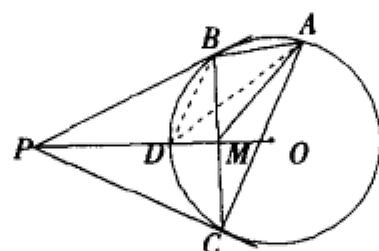


图 Ⅱ - D - 4 - 124

3. 证明:设$\triangle ABC$中,$a = n - 1, b = n, c = n + 1$(其中$n$为正整数),三个角分别为$\alpha, 2\alpha, \pi - 3\alpha$,则

$$\frac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = 3 - 4\sin^2\alpha = 4\cos^2\alpha - 1 = \left(\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 1$$

由正弦定理,有$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

(1) 当$\angle A = \alpha, \angle B = 2\alpha$时,

$\dfrac{n + 1}{n - 1} = \left(\dfrac{n}{n - 1}\right)^2 - 1$,解得$n = 2$

因此,$a = 1, b = 2, c = 3$不能组成三角形.

(2) 当$\angle B = \alpha, \angle C = 2\alpha$时,

$\dfrac{n - 1}{n} = \left(\dfrac{n + 1}{n}\right)^2 - 1$,此方程无整数解.

(3) 当$\angle A = \angle\alpha, \angle C = 2\alpha$时,$\dfrac{n - 1}{n} = (\dfrac{n + 1}{n - 1})^2 - 1$,解得$n = 5$,因此,$a = 4, b = 5, c = 6$.

下面证明$\angle C = 2\angle A$

由余弦定理.

$\cos A = \dfrac{3}{4}, \cos C = \dfrac{1}{8}$

而$\cos2A = 2\cos^2A - 1 = \dfrac{1}{8} = \cos C$

故$\angle C = 2\angle A$

4. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 125,连接$C'A$、$C'B$、$C'C$、BB'、AA'.则$\angle ARQ = \angle B'C'A + \angle BAC' = \angle ABB' + \angle BCC' = \dfrac{1}{2}\angle ABC + \angle ACB)$

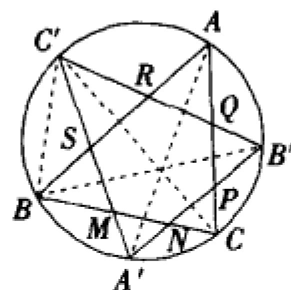


图 Ⅱ - D - 4 - 125

同理,$\angle AQR = \dfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \angle ARQ$,得$AR = AQ$

在$\triangle C'SR$中,应用正弦定理,有

$$\frac{SR}{C'R} = \frac{\sin\angle B'C'A'}{\sin\angle C'SA} = \frac{\sin(\angle B'BC + \angle A'AC)}{\sin(\angle BAA' + \angle ACC')}.$$

$$\frac{SR}{C'R} = \frac{\sin\dfrac{\angle ABC + \angle BAC}{2}}{\sin\dfrac{\angle BAC + \angle BCA}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\angle ACB}{2}}{\cos\dfrac{\angle ABC}{2}} \quad ①$$

在$\triangle C'RA$中,应用正弦定理,有

$$\frac{C'R}{RA} = \frac{\sin\angle C'AB}{\sin\angle AC'B} = \frac{\sin\angle C'CB}{\sin\angle ABB'} = \frac{\sin\dfrac{\angle ACB}{2}}{\sin\dfrac{\angle ABC}{2}} \quad ②$$

式①、②相乘,有

$$\frac{SR}{AR} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}$$

同理$\dfrac{PQ}{AQ}=\dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}$

又 $AR=AQ$,有$\dfrac{PQ}{SR}=\left(\dfrac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}\right)=\left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2$

则　$PQ=RS\Leftrightarrow AC=AB$

同理,$PQ=MN\Leftrightarrow AC=BC$

故 $PQ=MN=RS\Leftrightarrow PQ=RS$ 且 $PQ=MN$

$\Leftrightarrow AC=AB$ 且 $AC=BC\Leftrightarrow AB=BC=CA$

$\Leftrightarrow\triangle ABC$ 是正三角形.

5. 证明:(如图 Ⅱ－D－4－126) 作 $\triangle ABC$ 的高 AH,连接 BE、CD、DE.则 BE、CD 为 $\triangle ABC$ 的两条高线.记垂心为 O,DE 与 AH 交于点 K.于是,有

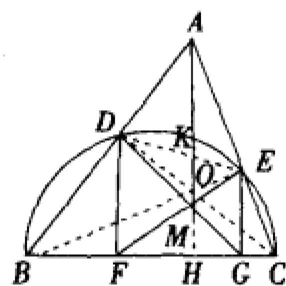


图 Ⅱ－D－4－126

$DK:KE=S_{\triangle ADO}:S_{\triangle AEO}$

$\because\triangle AEO\backsim\triangle BEC,\triangle ADO\backsim\triangle CDB$

$\therefore\dfrac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle CDB}}=\dfrac{AO^2}{BC^2}=\dfrac{S_{\triangle AEO}}{S_{\triangle BEC}}$

故$\dfrac{DK}{KE}=\dfrac{S_{\triangle ADO}}{S_{\triangle AEO}}=\dfrac{S_{\triangle CDB}}{S_{\triangle BEC}}=\dfrac{DF}{EG}=\dfrac{DM}{MG}$

$\therefore KM\parallel EG$

$\because EG\perp BC,\therefore KM\perp BC$

$\because KH\perp BC,\therefore$ 点 M 在 AH 上,故 $AM\perp BC$

6. 证明:(如图:Ⅱ－D－4－127) 显然有,$B(2R\sin C,0)$,

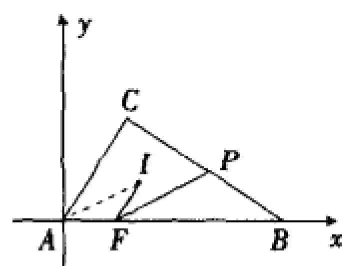


图 Ⅱ－D－4－127

$C(R\sin B,\sqrt{3}R\sin B)$,而 $3BP=BC$

$\therefore P\left(\dfrac{R}{3}(4\sin C+\sin B),\dfrac{\sqrt{3}}{3}R\sin B\right)$

又 $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=2R\sin B\sin C$

$\therefore x_F=x_I-y_I\cot60^\circ=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}R\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

又$\dfrac{B}{2}=60^\circ-\dfrac{C}{2}$

$$\therefore k_{PF}=\frac{\sqrt{3}\sin B}{4\sin(120^\circ-\mathrm{B})+\sin B-4\sqrt{3}\sin\dfrac{B}{2}\sin\left(60^\circ-\dfrac{B}{2}\right)}$$

$=\dfrac{\sin B}{1+\cos B}=\tan\dfrac{B}{2}$

因此,$\angle BFP=\dfrac{1}{2}\angle B$

7. 证明:(如图 Ⅱ－D－4－128) 连接 KB、KC.由 A、O、C、K 四点共圆知

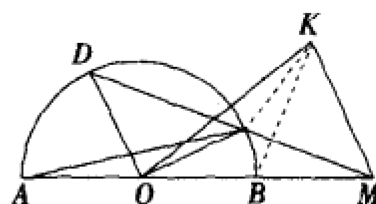


图 Ⅱ－D－4－128

$\angle OAC=\angle OKC$

由 B、O、D、K 四点共圆,知

$\angle BDO=\angle BKO$

从而,$\angle AMD=\angle ABD-\angle BDC=\angle BDO-\angle OAC$

$=\angle BKO-\angle CKO=\angle BKC$

故 B、C、K、M 四点共圆.

再由 $\angle ABC+\angle BAC=90^\circ$ 及 $\angle BAC=\angle OKC$ 知,$\angle MKO=\angle CKO+\angle CKM=90^\circ$

即 $\angle MKO$ 为直角.

8. 分析:在关于圆外切四边形的诸多定理中,容易想到牛顿(Newton)定理:

设 ⊙O 的外切四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 的中点分别为 E、F. 则 E、O、F 在一条直线上.

如能联想到这一定理,则例 4 的证明就容易了.

证明:如图 Ⅱ－D－4－129,设圆外切四边形为 $ABCD$,其内切圆圆心为 O,$AD = BC$. AB、CD 的中点分别为 E、F. 设 AC、BD 的中点为 M、N.

由牛顿定理,M、O、N 三点共线. 又因 $AD = BC$,则平行四边形 $MENF$ 为菱形. 故 MN 为 $\angle EMF$ 之角平分线. 再由 $ME = MF$,故 $OE = OF$.

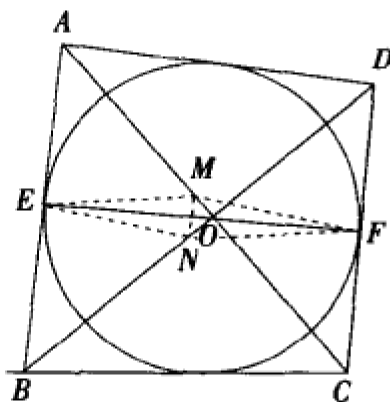


图 Ⅱ－D－4－129

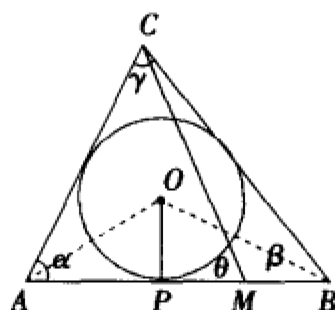


图 Ⅱ－D－4－130

9. 证明,如图 Ⅱ－D－4－130,设 $\angle CAB$、$\angle ABC$、$\angle BCA$、$\angle AMC$ 分别为 α、β、γ、θ,在 $\triangle APO$ 中,
$AP = \gamma\cot\frac{\alpha}{2}$

$$\therefore AB = AP + BP = \gamma\cot\frac{\alpha}{2} + \gamma\cot\frac{\beta}{2} = \gamma\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right)$$

利用旁切圆及内外角平分线互相垂直的性质,同理可得

$$AB = \rho\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \rho\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \rho\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\therefore \gamma\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) = \rho\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{\gamma}{\rho} = \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

同理,$\frac{\gamma_2}{\rho_2} = \tan\frac{\pi - \theta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} = \cot\frac{\theta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}$

$$\frac{\gamma_1}{\rho_1} = \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{\gamma_1}{\rho_1}\cdot\frac{\gamma_2}{\rho_2} = \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\theta}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{\rho}$$

10. 证明:设 A' 是外接圆直径上与 A 相对的点(如图 Ⅱ－D－4－131). 因 B、C 的对称性,不失一般性. 可设 X 在 $\overset{\frown}{BA'}$ 上,则 Q 在射线 CA 上,而 P 在射线 AB 上,且位于外接圆的外部(注意:点的这种安排,$\angle BAC$ 不是钝角). 如图 Ⅱ－D－4－132,令 R 是 X 到 BC 的垂足,则点 P、R、Q 共线(X 关于 $\triangle ABC$ 的西蒙松线).

图 Ⅱ - D - 4 - 131

图 Ⅱ - D - 4 - 132

令 E 是 A 到 BC 的垂足,设 D 在 E 与 C 之间,这只在 $AC > AB$ 时发生.则 R 在 D 与 C 之间,因此,PR 与 P 的直径 DX 相交,交点在 D 与 X 之间.所以,PR 也即 PQ 不能与外接圆相切,结论成立.

剩下的是 D 在 B 与 E 之间(可能与 E 重合)的情形.由此,R 在射线 DB 上.所以,D 在 RC 上.这时,如 Q 在 AC 上(当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时),则

$\angle RXD = \angle RXQ - \angle QXD$

$\angle QXC = \angle DXC - \angle QXD$

如 Q 在射线 AC 上,且在外接圆的外部,则上面等式中的减号须用加号代替.另一方面,$\angle RXD - \angle QXC = \angle RXQ - \angle DXC$ ①

$\angle RXQ$,$\angle BCA$ 都是锐角,它们的两条边又两两重叠,因此,$\angle RXQ = \angle BCA$.注意到 $\angle DXC = \angle AXC = \angle CBA$,又因 $QRXC$ 是圆内接四边形,又有 $\angle QXC = \angle QRC$,等式(1)就成为

$\angle RXD - \angle QRC = \angle BCA - \angle CBA$ ②

考察圆 P.如图 Ⅱ - D - 4 - 133,因 $XR \perp BC$.又 Q、X 在 RC 的两侧,D 在 RC 上,可得 RQ 与 P 相切当且仅当 $\angle QRC = \angle RXD$.由②,这时结论也成立.

图 Ⅱ - D - 4 - 133

11. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 134,连 OA,AM,MN,ON,则

$\angle BMN = \angle BKN = \angle C$

$\angle BMA = 180^\circ - \angle C$

$\angle AON = 2\angle C$

$\angle AMN = \angle BMA - \angle BMN = 180^\circ - 2\angle C$

$= 180^\circ - \angle AON$

故 O、A、M、N 四点共圆.由 $OA = ON$,得

$\angle OMN = \angle OMA = \frac{1}{2}\angle AMN = 90^\circ - \angle C$,

$\therefore \angle OMB = \angle OMN + \angle BMN = 90^\circ$

(注:本题四边形 $OAMN$ 相当于第 2 题图中的 $OCPD$)

图 Ⅱ - D - 4 - 134

图 Ⅱ - D - 4 - 135

12. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 135,设 $MA = MB = a$,$MX = x$,$MY = y$,$\angle AMC = \alpha$.$\angle BME =$

$\beta, \angle CFM = \gamma, \angle FCM = \delta$,则由正弦定理得 $\dfrac{x}{FX} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}, \dfrac{X}{XC} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\alpha}, \dfrac{y}{DY} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \dfrac{y}{YE} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\beta}$

$\therefore \dfrac{x^2}{FX \cdot XC} = \dfrac{y^2}{DY \cdot YE}$

变形,并应用相交弦定理,得

$\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{FX \cdot XC}{DY \cdot YE} = \dfrac{AX \cdot XB}{BY \cdot YA} = \dfrac{(a-x)(a+x)}{(a-y)(a+y)}$

化简得 $x^2 = y^2$ 故 $MX = MY$

B组

1. 证明:延长 CF 交⊙O 于 D 点,连 BD、BH. 由于 $\angle BHF = \angle CAF = \angle D$ 且 $BF \perp HD$,则 F 为 HD 中点.

设 IP 所在直线交⊙O 于 M、N 两点,交 BD 于 T 点.

由 $OF \perp MN$ 知 F 为 MN 的中点. 由蝴蝶定理,即得 F 为 PT 的中点. 又因为 F 为 HD 中点,故 HP // TD,所以 $\angle FHP = \angle D = \angle BAC$

(注:此题解法中用到蝴蝶定理.)

2. 证明:如图 Ⅱ-D-4-136,设△ADF 的外接圆的圆心有 O,连 OD、OF. 由 $ED = EB$,得 $\angle 1 = 180° - 2\angle B$

由 $FE = CE$,得 $\angle 2 = 180° - 2\angle C$

$\therefore \angle DEF = 180° - \angle 1 - \angle 2$

$= 2(\angle B + \angle C) - 180°$

$= 180° - 2\angle A$

$= 180° - \angle DOF$

故 O、F、E、D 四点共圆.

由 $OD = OF$,得 $\angle OED = \angle OEF$

(【注】 本题中四边形 $OFED$ 相当于中的 $OCPD$).

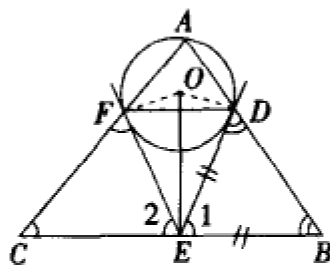


图 Ⅱ-D-4-136

3. 证明:(如图 Ⅱ-D-4-137) 令 K 为 MN 和 AB 的交点,根据圆幂定理,$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$. 换言之,$K$ 是 AB 的中点. 因为 PQ // AB,所以 M 是 PQ 的中点. 故只需证明 $EM \perp PQ$.

因为 CD // AB,所以点 A 是 P_1 的弧 CM 的中点,点 B 是 P_2 的弧 DM 的中点. 于是,△ACM 与△BDM 都是等要三角形. 从而

$\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$

$\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$

这意味着 $EM \perp AB$

再由 PQ // AB,即证 $EM \perp PQ$

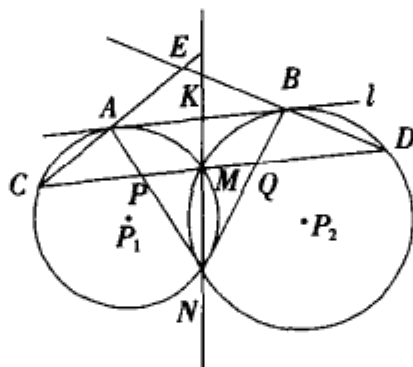


图 Ⅱ-D-4-137

4. 证明:

(1) 记 AB、AC 的垂直平分线分别为 b、c.

如图 Ⅱ-D-4-138. 假设直线 b 和 AD 不相交,则它们平行且 $\angle DAB = 90°$. 点 D 和点 B 为某直径的两端点且 $\angle DCB = 90°$,与已知矛盾. 因此,直线 b 和 AD 必相交于某点 W. 同理,直线 C 和 AD 必相交于某点 V.

注意,BW 不能与 Γ 相切,否则 AW 必与 Γ 相切,因而 $A = D$,与题设矛盾. CV 亦然.

我们为弧规定一个方向. 这样,记号 $\overset{\frown}{PQ}$ 就表示圆 Γ 上惟一的一段弧.

令 X、Y 分别为直线 BW 和 CV 与圆 Γ 的第二个交点. 那么,弦 CY 与弦 AD 关于轴 C 对称. 因此,$\overset{\frown}{YC} = \overset{\frown}{AD}$. 同理,$\overset{\frown}{XB} = \overset{\frown}{AD}$,则 $\overset{\frown}{XB} = \overset{\frown}{YC}$. 因而,线段 BX 和 CY

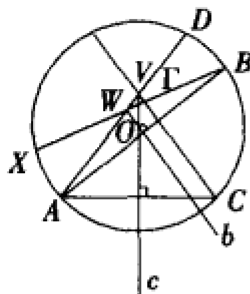


图 Ⅱ-D-4-138

关于过 BY 中点的直线 d 轴对称. 其中, X 为 C 的对称点, Y 为 B 的对称点.

若直线 XB 和 YC 不相交, 那么, 它们平行且弦 XB 和弦 YC 关于圆 Γ 的圆心对称. 此时, 点 B 和 C 为某直径的两端且 $\angle BDC = 90°$, 这是不可能的. 所以, 直线 BX 和 CY 必交于一点 T 且 T 必在 d 上.

(2) 如图 Ⅱ - D - 4 - 139, 因为点 T 在直线 d 上, 且 d 同时为 BY 和 CX 的垂直平分线, 则有 $TB = TY$ 和 $TC = TX$,

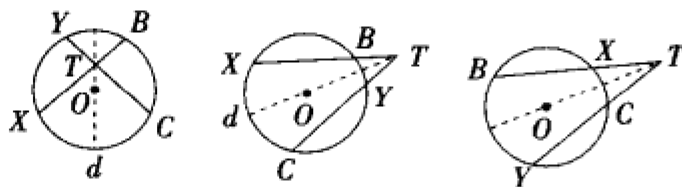


图 Ⅱ - D - 4 - 139

若点 T 在圆内, 则有

$AD = BX = BT + TX = BT + CT$

否则, 有 $AD = BX = |BT - TX| = |BT - CT|$

5. 证明: 如图 Ⅱ - D - 4 - 140, 连 PR 交 AC 于 M, 则 M 为 AC 中点, 也为 PR 中点. 作 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 BD, 过 DA、DC、HA、HC.

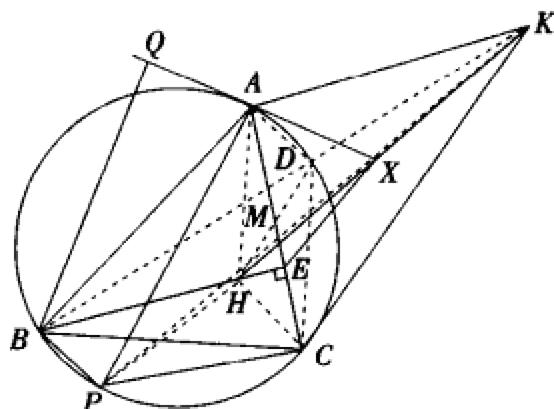


图 Ⅱ - D - 4 - 140

$\because DA \perp AB, HC \perp AB$

$\therefore DA \parallel HC$

同理 $DC \parallel HA$

故四边形 $AHCD$ 为平行四边形, M 为 DH 的中点. 于是四边形 $HRDP$ 为平行四边形. 故 $HR \parallel DP$.

$\because QX \parallel BP, BP \perp DP$

$\therefore HR \perp QX, \angle AXH = 90°$

又 $\because \angle AEH = 90°$

6. 证明: 我们先证明一个引理.

引理: 如图, MA 和 MB 为 $\odot O$ 的切线, P 为直线 AB 上一点, 则有 $PM^2 = MA^2 + PB \cdot PA$

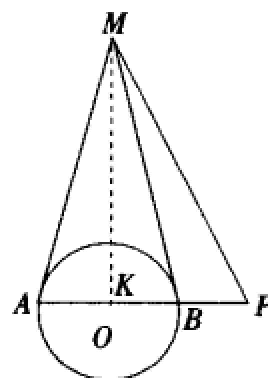


图 Ⅱ - D - 4 - 141

引理的证明: 连接 MO 交 AB 于 K.

$\therefore PM^2 = MK^2 + PK^2$

又 $PA \cdot PB = (PK + KA)(PK - KB) = PK^2 - AK^2$

$\therefore PM^2 = MK^2 + AK^2 + PA \cdot PB = MA^2 + PA \cdot PB$

故引理成立.

下面来解决原命题.

连接 OA, OC, PA, PC.

我们证明的目标就是 $PA^2 - PC^2 = OA^2 - OC^2$

由引理知 $PA^2 = EA^2 + PH \cdot PE, PC^2 = CF^2 + PG \cdot PF$

$\therefore PA^2 - PC^2 = (EA^2 + PH \cdot PE) - (CF^2 + PG \cdot PF) = EA^2 - CF^2$

而 $OA^2 - OC^2 = (OE^2 + EA^2) - (OF^2 + FC^2) = EA^2 - CF^2$

故 $PA^2 - PC^2 = OA^2 - OC^2$

由"定差幂线轨迹"知 $OP \perp AC$.

证毕.

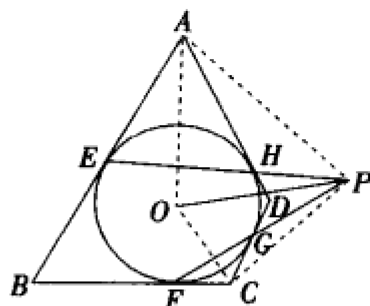


图 Ⅱ - D - 4 - 142

7. 解法1: 如图 Ⅱ - D - 4 - 143, 作 D 至 A、B、M 的连线段. 显然有 $\angle CEF = \angle DEG = \angle EMD$

$\angle ECF = \angle MAD$

于是，$\triangle CEF \backsim \triangle AMD$. 从而 $CE \cdot MD = AM \cdot EF$

另一方面，又有 $\angle ECG = \angle MBD$，于是，$\angle CGE = \angle CEF - \angle ECG = \angle EMD - \angle MBD = \angle BDM$

故 $\triangle CGE \backsim \triangle BDM$. 从而 $GE \cdot MB = CE \cdot MD$. 所以，$CE \cdot MB = AM \cdot EF$

故 $\dfrac{GE}{EF} = \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{t(AB)}{(1-t)AB} = \dfrac{t}{1-t}$

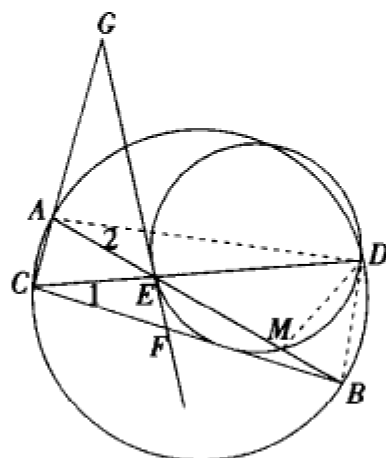


图 Ⅱ－D－4－143

解法 2：如图（Ⅱ－D－4－143），我们有

$\angle AEG = \angle FEB = \angle EDM$，

$\angle FEC = \angle GED = \angle DME$，

于是由三角形边、角的正弦与面积之间的关系得

$$\frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle FEC}} = 1 + \frac{S_{\triangle FEB}}{S_{\triangle FEC}} \cdot \frac{S_{\triangle DME}}{S_{\triangle MDE}} = 1 + \frac{BE \cdot ME}{DE \cdot CE} = 1 + \frac{BE \cdot ME}{BE \cdot AE} = \frac{AM}{AE}$$

$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle GEC}} = 1 - \frac{S_{\triangle GEA}}{S_{\triangle GEC}} \cdot \frac{S_{\triangle DMC}}{S_{\triangle MDE}} = 1 - \frac{AE \cdot ME}{DE \cdot CE} = 1 - \frac{AE \cdot ME}{AE \cdot BE} = \frac{BM}{BE}$$

利用上述结果，得

$$\frac{GE}{EF} = \frac{S_{\triangle GEC}}{S_{\triangle FEC}} = \frac{AM}{BM} = \frac{t}{1-t}$$

8. 证明：先证必要性：即当 A、B、C、D 四点共圆时，有 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$.

如图 Ⅱ－D－4－144，设两条垂直的对角线 AC 与 BD 交于一点 K，从而，$90° = \angle AKB = \angle DBC + \angle ACB$

$= \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}$ 的度数 $+ \overset{\frown}{CD}$ 的度数$)$

$= \dfrac{1}{2}(\angle APB + \angle CPD)$

$\Rightarrow \angle APB + \angle CPD = 180°$

$\Rightarrow \sin\angle APB = \sin\angle CPD$

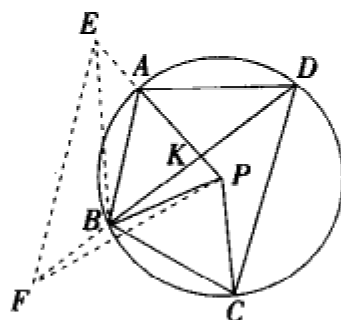


图 Ⅱ－D－4－144

又由于 A、B、C、D 共圆，且 AB 与 CD 不平行，故 P 为 $ABCD$ 外接圆的圆心.

从而，$PA = PB = PC = PD$

$\therefore S_{\triangle ABP} = \dfrac{1}{2} \cdot PA \cdot PB \cdot \sin\angle APB = \dfrac{1}{2} \cdot PC \cdot PD \cdot \sin\angle CPD = S_{\triangle CDP}$

下证充分性：即当 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$ 时，有 A、B、C、D 四点共圆.

如果 $PA = PD$，那么，由 P 的定义可知 A、B、C、D 都在一个以 P 为圆心的圆周上.

否则，不失一般性，假设 $PA < PD$，于是可在 KA 延长线上取一点 E，使 $PE = PD$；在 KB 延长线上取一点 F，使 $PF = PC$，则凸四边形 $EDCF$ 满足 E、D、C、F 共圆，且对角线 $CE \perp FD$. 对其应用前述必要性的证明可知 $S_{\triangle PEF} = S_{\triangle PCD}$.

另一方面，无论 P 位置如何，总有直线 PB 与线段 AC 相交，可知 E 到直线 BP 的距离一定大于 A 到直线 BP 的距离 $\Rightarrow S_{\triangle ABP} < S_{\triangle EBP}$. 类似地，直线 EP 必与线段 BD 相交，从而 F 到直线 PE 的距离一定大于 B 到直线 PE 的距离 $\Rightarrow S_{\triangle EFP} > S_{\triangle EBP}$. 从而，$S_{\triangle EFP} > S_{\triangle ABP} = S_{\triangle CDP}$. 与前述矛盾，故假设不成立. 故必有 $PA = PD$，即 A、B、C、D 共圆.

综合以上两方面知，A、B、C、D 四点共圆的充要条件为 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 面积相等.

9. 证明：先证充分性

方法一：如图 Ⅱ－D－4－145，在线段 AT 上取一点 F，使得 $\angle ABF = \angle EDP$

因为 P 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上，所以有 $\angle BAF = \angle DAP = \angle DEP$，又 $AB = AC = DE$，故 $S_{\triangle ABF}$

$\cong \triangle EDP$. 于是，$BF = PD$，$AF = PE$

连接 BT，由 A、B、C、T 四点共圆和 A、D、E、P 四点共圆得 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP = \angle ABF$. 在 $\triangle BFT$ 中，$\angle FBT = \angle FBC + \angle CBT = \angle FBC + \angle ABF = \angle ABC$，而 $\angle FTB = \angle ACB$，又据 $AB = AC$ 可得 $\angle ABC = \angle ACB$. 故 $\angle FBT = \angle FTB$，即 $\triangle BFT$ 是等腰三角形，$BF = FT$

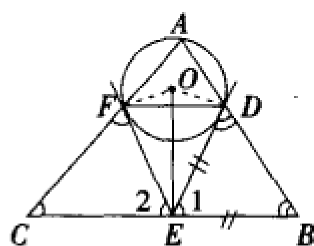


图 Ⅱ - D - 4 - 145

从而，$AT = AF + FT = PE + BF = PE + PD$

方法二：连接 BT、CT. 在 $\triangle BTC$ 和 $\triangle DPE$ 中，由 A、B、C、T 四点共圆和 A、D、E、P 四点共圆可得 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP$，$\angle BCT = \angle BAT = \angle DEP$，于是，$\triangle BTC \backsim \triangle DPE$，从而，可设

$$\frac{DP}{BT} = \frac{PE}{CT} = \frac{DE}{BC} = k$$

对四边形 $ABTC$ 应用托勒密定理，有

$$AC \cdot BT + AB \cdot CT = BC \cdot AT$$

将上式两端同乘以 k，并用前一比例式代入可得

$$AC \cdot DP + AB \cdot PE = DE \cdot AT$$

注意到　$AB = AC = DE$，此式即 $PD + PE = AT$

再证必要性.

方法一：以 D、E 为两个焦点，长轴长等于 AT 的椭圆与直线 AT 至多有两个交点，而其中在 DE 的一侧，即线段 AT 延长线上的交点至多有一个，由前面充分性的证明知，AT 的延长线与 $\triangle ADE$ 外接圆的交点 Q 在这个椭圆上；而依题设点 P 同时在 AT 的延长线和椭圆上，故点 P 与 Q 重合，命题得证.

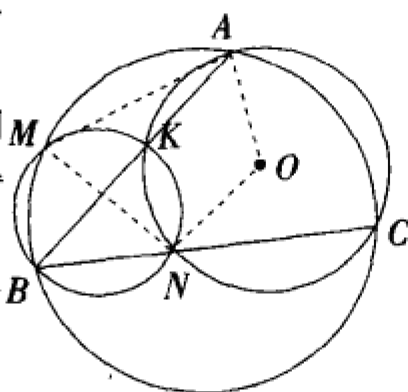


图 Ⅱ - D - 4 - 146

方法二：如图 Ⅱ - D - 4 - 146，在线段 AT 的延长线上任取两点 P_1，P_2，易见当

$P_1T < P_2T$ 时成立.

$$P_1D + P_1E < P_2D + P_2E$$

于是，在线段 AT 延长线上满足 $PD + PE = AT$ 的点 P 至多有一个. 而由充分性的证明知 $\triangle ADE$ 的外接圆与 AT 延长线的交点即满足上述等式. 故点 P 就在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

第六章　面积问题与面积计算

A 组

1. 解：过 D 作 $DM \parallel AC$，交 BE 于 M，由题设 P 为 AD 中点易知.

$\triangle PAE \cong \triangle PDM$

所以 $PM = PE = 3$，M 为 BE 中点，于是 D 为 BC 中点.

过 D 作 $DN \parallel AB$，交 CF 于 N，则 N 为 CF 中点，易知

$\triangle AFP \cong \triangle DNP$

所以

$$PF = PN = \frac{1}{4}CF = 5$$

从而 $PC = 15$

在 $\triangle PBC$ 中，因 $PB = 9$，$PC = 15$，$PD = 6$，由三角形中线公式得

$$2(PD^2 + BD^2) = PB^2 + PC^2$$

即　$2(6^2 + BD^2) = 9^2 + 15^2$

解得　$BD = 3\sqrt{13}$，从而 $BC = 6\sqrt{13}$，由 $BD^2 - PD^2 = 81 = PB^2$ 知 $\triangle BPD$ 是直角三角形，所以

$$S_{\triangle PBD} = \frac{1}{2}PB \cdot PD = 27$$

又由 $PA = PD$，则 $S_{\triangle PAB} = 27 = S_{\triangle PDC} = S_{\triangle PAC}$，故

$$S_{\triangle ABC} = 4 \times 27 = 108$$

2. $\frac{1}{2}\sin^2\theta$

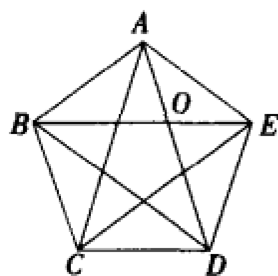


图 Ⅱ - D - 4 - 147

3. 解，如图 Ⅱ - D - 4 - 147

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC} = 1$　　$\therefore BC \parallel AD$

同理 $CD \parallel BE, AE \parallel BC$

设 AD 与 BE 交于 O，则 $BCDO$ 是平行四边形，且 $S_{\square BCDO} = 2S_{\triangle BCD} = 2$

又在梯形 $ABDE$ 中，显然有 $\triangle AOE \backsim \triangle DOB$，

于是 $\frac{S_{\triangle AOE}}{S_{\triangle AOB}} = \frac{OE}{OB} = \frac{\sqrt{S_{\triangle AOE}}}{\sqrt{S_{\triangle BOD}}}$

$\therefore S_{\triangle AOB} = \sqrt{S_{\triangle AOE} \cdot S_{\triangle BOD}} = \sqrt{S_{\triangle AOE}}$

但 $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AOB} = 1 - S_{\triangle AOB}$

记 $x = S_{\triangle AOB}$，则 $x = \sqrt{1 - x}$，$\therefore x^2 + x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$（舍去负值）．即 $S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

故 $S_{ABCDE} = S_{\square BCDO} + S_{\triangle ADE} + S_{\triangle AOB} = 2 + 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$

4. 证明：在 $\triangle BRC$ 中，由正弦定理，得

$\frac{RB}{RC} = \frac{\sin\angle RCB}{\sin\angle RBC} = \frac{\sin(\angle C - 90^\circ)}{\sin(\angle B - 90^\circ)} = \frac{\cos C}{\cos B}$

$\therefore \frac{S_{四边形ABRQ}}{S_{四边形CDPR}} = \frac{QR \cdot RB}{RP \cdot RC} = \frac{QR \cdot \cos C}{RP \cdot \cos B} = \frac{\sin P \cdot \cos C}{\sin Q \cdot \cos B}$

$\because PQ \parallel EF \parallel CB, PR \parallel CD$

$\therefore \angle P = 180^\circ - \angle C$

同理，$\angle Q = 180^\circ - \angle B$

$\therefore \frac{S_{四边形ABRQ}}{S_{四边形CDPR}} = \frac{\sin(180^\circ - \angle C)\cos C}{\sin(180^\circ - \angle B)\cos B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}$

又 $\because EF \parallel BC, ED \parallel BA$

$\therefore \angle E = \angle B$

$\therefore \frac{S_{四边形ABRQ}}{S_{四边形CDPR}} = \frac{\sin 2C}{\sin 2E}$．同理，$\frac{S_{四边形CDPR}}{S_{四边形EFQP}} = \frac{\sin 2E}{\sin 2A}$

$\therefore S_{四边形ABRQ} : S_{四边形CDPR} : S_{四边形EFQP} = \sin 2C : \sin 2E : \sin 2A$

5. 解：如图 Ⅱ - D - 4 - 148

假设存在点 P 满足条件，连结 AP，延长交 BC 于 D，连结 BP，延长交 AC 于 E，则由 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$，得 $BD = CD$

同理可得 $AE = CE$

于是，P 是 $\triangle ABC$ 的重心，有 $AP : AD = 2 : 3$

过 P 作 $GH \parallel BC$，则 $\triangle AGH \backsim \triangle ABC$

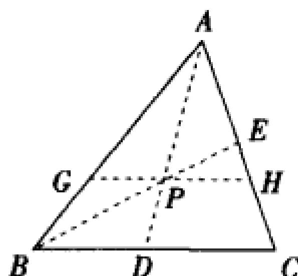


图 Ⅱ - D - 4 - 148

所以，$\frac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AG}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AP}{AD}\right)^2 = \frac{4}{9}$

于是，$S_{\triangle AGH} : S_{四边形BCHG} = 4 : 5$，即 GH 分成的两部分面积不相等，从而知，题目所设条件的点 P

不存在.

6. 证明:如图 Ⅱ－D－4－149,$\because \angle BED = \angle ABE + \angle BAE$

$\angle BAC = \angle CAE + \angle BAE$,又 $\angle BED = \angle BAC$

$\therefore \angle ABE = \angle CAE$

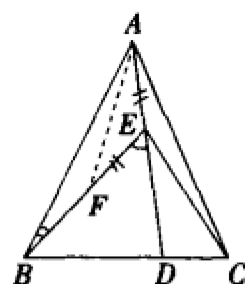


图 Ⅱ－D－4－149

于是$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACE}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot AE\sin\angle ABE}{\frac{1}{2}AC \cdot AE\sin\angle CAE} = \dfrac{BE}{AE}$

在 EB 上截取 $EF = EA$,连接 AF

则 $\angle AFB = \angle FAE = \frac{1}{2}\angle BED = \frac{1}{2}\angle A = \angle CED$

$\therefore \angle BFA = \angle AEC$

又 $AB = AC$,$\angle ABF = \angle CAE$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CAE$

从而 $BF = AE = EF$

即有 $BE = 2AE$,故 $BD = 2DC$

7. 设 EF 与 GH 相交于 I,EH,GF 交于 M. 过 M 分别作 AB,BC 的平行线 MP,MJ;MP 交 AD,GH,BC 于 P,O,N;MJ 交 AB,EF,DC 于 J,K,L. $S_{IONF} = S_{BFKJ}$,$S_{DPOH} = S_{IHLK}$,$S_{DPNC} = S_{IHLK} + S_{HONC}$,$S_{CLJB} = S_{IONF} + S_{FCLK} = S_{IHLK} + S_{HONC}$. 因而,$S_{DPNC} = S_{CLJB}$,$C$ 在对角线 AM 上.

8. 证明:如图 Ⅱ－D－4－150,作辅助线,其中 O_1、O_2、O_3 表示三个相等的内切圆的圆心,由切线长定理可知:

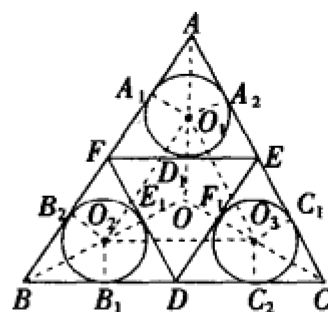


图 Ⅱ－D－4－150

$$\begin{aligned} DE + EF + FD &= DF_1 + F_1E + ED_1 + D_1F + FE_1 + E_1D \\ &= DC_2 + EC_1 + EA_2 + FA_1 + FB_2 + B_1D \\ &= B_1C_2 + C_1A_2 + A_1B_2 \\ &= O_2O_3 + O_3O_1 + O_1O_3 \end{aligned}$$

即 $\triangle DEF$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 的周长相等.

很显然,AO_1、BO_2、CO_3 的交点 O 既是 $\triangle ABC$ 的内心,又是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内心,所以,$r + r_1 = R$,这里 r_1 表示 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内切圆半径,因此,要证明 $r + r_0 = R$,只须证明 $r_1 = r_0$,由于已证 $\triangle DEF$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 的周长相等,根据三角形的面积公式 $S = pr$(p 表示三角形的半周长),只须证:

$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle O_1O_2O_3}$

事实上:

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AEF} + S_{\triangle BDF} + S_{\triangle CDE}) \\ &= S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2}r(AB + BC + CA + EF + DF + DE) \\ &= S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2}r(AB + BC + CA + O_1O_2 + O_2O_3 + O_3O_1) \\ &= S_{\triangle ABC} - \frac{1}{2}r(AB + O_1O_2) - \frac{1}{2}r(BC + O_2O_3) - \frac{1}{2}r(CA + O_3O_1) \\ &= S_{\triangle ABC} - S_{ABO_2O_1} - S_{BCO_3O_2} - S_{CAO_1O_3} \\ &= S_{\triangle O_1O_2O_3} \end{aligned}$$

故 $r + r_0 = R$

B组

1. 证明:$2S = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2$

$\geqslant AO \cdot BO + BO \cdot CO + CO \cdot DO + DO \cdot AO$

$\geqslant \frac{1}{2}(|AO \cdot BO\sin\angle AOB| + \frac{1}{2}|BO \cdot CO\sin\angle BOC| + \frac{1}{2}|CO \cdot DO\sin\angle COD| +$

$\frac{1}{2}|DO \cdot AO\sin\angle DOA|)$

$= 2S$

当且仅当 $AO = BO = CO = DO, \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = \frac{\pi}{2}$ 时等号成立,故 $ABCD$ 为正方形,O 为中心.

2. 解:如图 Ⅱ－D－4－151 所示,连接 AO,则在 $\square AHOG$ 中,

有 $AH = GO$

且 $S_{\square AHOG} = 2S_{\triangle AOH}$

又$\frac{S_{\triangle AOH}}{S_{\triangle DOH}} = \frac{AH}{HD} = \frac{GO}{HD} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$

即$\frac{S_{\triangle AOH}}{S_1} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$

$\therefore S_{\triangle AOH} = \sqrt{S_1S_2}$

于是 $S_{\square AHOG} = 2S_{\triangle AOH} = 2\sqrt{S_1S_2}$

同理,$S_{\square DBFO} = 2\sqrt{S_1S_2}, S_{\square OICE} = 2\sqrt{S_2S_3}$

因而,$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle HDO} + S_{\triangle GOE} + S_{\triangle OFI} + S_{\square AHOG} + S_{\square DBFO} + S_{\square OICE}$

$= S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1S_2} + 2\sqrt{S_1S_3} + 2\sqrt{S_2S_3}$

$= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$

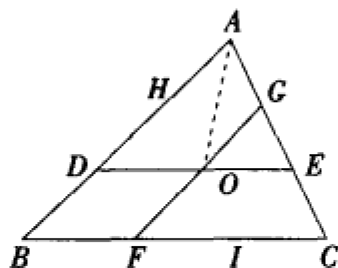


图 Ⅱ－D－4－151

3. 易证:$\triangle ABC$ 的内心具有题中的性质,并且这是 $\triangle ABC$ 内满足条件的惟一点.

4. 参考例5.

5. 解:引入记号:$\frac{AC_1}{AB} = a, \frac{BA_1}{BC} = b, \frac{CB_1}{CA} = c$

由题意及面积变换得

$$\begin{cases}(1-a)b = \frac{1}{4}\\(1-b)c = \frac{1}{4}\\(1-c)a = \frac{1}{4}\end{cases}$$

这个方程组消去 b 与 c 后得方程 $(2a-1)^2 = 0$,即 $a = \frac{1}{2}$

同理得 $b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$.从而得出本题结论.

6. 证明:(1) 设 A_1、C_1 分别为 BC、AB 边的中点,若 C' 在 BC_1 上,A' 在 BA_1 上,则 $S_{\triangle A'B'C'} \leqslant S_{四边形A_1BC_1B'} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

若 C' 在 AC_1 上,A' 在 BA_1 上,由于 $C'B'$ 与 BC 相交或平行,则

$S_{\triangle A'B'C'} \leqslant S_{\triangle BB'C'} \leqslant S_{\triangle ABB'} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

同理,若 C' 在 BC_1 上,A' 在 A_1C 上,结论成立;

若 C' 在 AC_1 上,A' 在 A_1C 上,由于 CB' 与 BC 相交或平行,则

$S_{\triangle A'B'C'} \leqslant S_{\triangle A_1B'C'} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} \leqslant \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

(2) 若 C' 和 A' 至少有一点是 AB 和 BC 中点,则显然 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

若 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,当 C' 在 BC_1 上,A' 在 BA_1 上,由于 $B'A'$ 与 AB 相交或平行,则 $S_{\triangle A'B'C'} \leqslant$

$S_{\triangle A'B'C_1} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

故 $C' = C_1$

若 C' 在 AC_1 上，A' 在 BA_1 上，由于 $C'B'$ 与 BC 相交或平行，则

$S_{\triangle A'B'C'} \geqslant S_{\triangle A_1B'C'} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

故 $A' = A_1$

同理，若 C' 在 BC_1 上，A' 在 A_1C 上，则 $C' = C_1$

若 C' 在 AC_2 上，A' 在 A_1C 上，由于 $C'B'$ 与 BC 相交或平行，则

$S_{\triangle A'B'C'} \leqslant S_{\triangle A_1B'C'} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

故 $A' = A$

7. 证：如图 Ⅱ－D－4－152，设 E、F 分别为 AB、CD 的中点，E 到 CD 的距离为 d_1，F 到 AB 的距离为 d_2，依题意有

$d_1 = \frac{1}{2} AB$

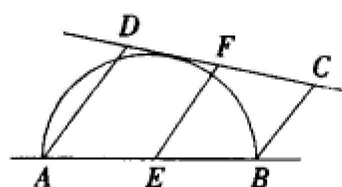


图 Ⅱ－D－4－152

(1) 充分性，当 $BC \parallel AD$ 时，EF 为梯形 $ABCD$ 的中位线，有 $EF \parallel AD$，得面积 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle DEF}$

即　$\frac{1}{2} \cdot AE \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot d_1$

把 ① 代入得

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} CD \cdot \frac{1}{2} AB$

得　$d_2 = \frac{1}{2} CD$

从而，直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切.

(2) 必要性，若直线 AB 与以 CD 为直径的圆相切，则 $d_2 = \frac{1}{2} CD_1$ 但 $d_1 = \frac{1}{2} AB$

得 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle DEF} = \frac{1}{8} AB \cdot CD$

故　$AD \parallel EF$

同理　$EF \parallel BC$，得 $BC \parallel AB$

8. 如图 Ⅱ－D－4－153，由反射性质知，$\angle G'OD = \angle GOB = \angle HOD$，记为 α；$\angle DOE = \angle BOF = \angle DOF'$，从而有 $\angle EOG' = \angle HOF'$，记为 β，于是

$$\frac{F'H}{HD} = \frac{S_{\triangle OF'H}}{S_{\triangle OHD}} = \frac{OF'\sin\beta}{OD \cdot \sin\alpha} \quad ①$$

$$\frac{DG'}{G'E} = \frac{S_{\triangle ODG'}}{S_{\triangle OG'E}} = \frac{OD\sin\alpha}{OE\sin\beta} \quad ②$$

而 $\frac{EP}{PF'} = \frac{OE}{OF}$　　③

故由 ①、②、③，得

$\frac{EP}{PF'} \cdot \frac{F'H}{HD} \cdot \frac{DG'}{G'E} = 1$

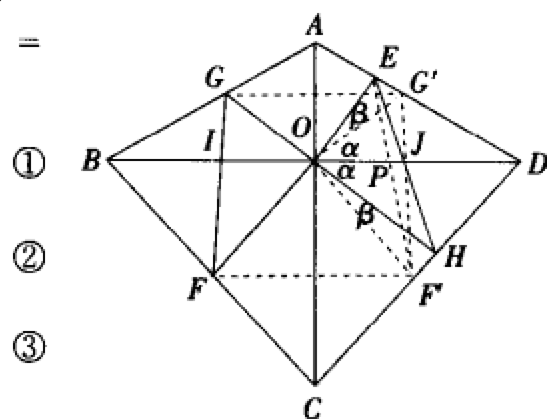


图 Ⅱ－D－4－153

即 OD、EH、$G'F'$ 共点于 J，故 $IO = OJ$

9. 证明：设 C 和 D 分别是两条直角边长，a 是斜边长，S 是半周长，r 是所给直角三角形的内切圆的半径，那么 $r = S - a$. 所给直角三角形的面积是 $\frac{bc}{2}$.

另一方面，任意三角形的面积是 Sr，联立两式有 $bc = 2Sr = 2S(S - a)$　　①

四边形 $BCDE$ 的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 - $\triangle AED$ 的面积 ②

$\because AE = \frac{bc}{a+b}, AD = \frac{bc}{a+c}$

$\therefore S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+c}$

代人②式,得

$$\text{四边形 } BCDE \text{ 的面积} = \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2} \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+c} = \frac{1}{2}bc\left(1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)}\right) = \frac{1}{2}bc\,\frac{a(a+b+c)}{(a+b)(a+c)} = \frac{abcS}{(a+b)(a+c)} \quad ③$$

$\because (a+b)(a+c) = a(a+b+c) + bc = 2aS + 2S(s-a) = 2S^2$

$\therefore$③式可以写成如下形式:

四边形 $BCDE$ 的面积 $= \frac{abc}{2S}$.

由①式 $bc = 2Sr$,得四边形 $BCDE$ 的面积 $= ar = 2\triangle BIC$ 的面积

10. 证明:如图 Ⅱ-D-4-155,设$\odot P$、$\odot Q$ 的半径分别为 r、R,则 $MC = \sqrt{2}r, MB = \sqrt{2}R$,

又显然有 $PM \perp MQ, MN \perp PQ$.

$\therefore \angle PQM = \angle PMN$,设为 α,则 $MN = 2r\cos\alpha = 2R\sin\alpha$,

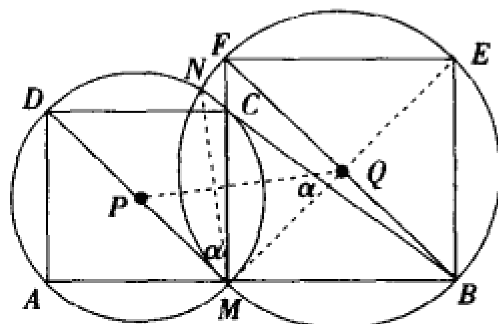


图 Ⅱ-D-4-155

$$S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2}MN \cdot MB \cdot \sin\angle BMN = \frac{1}{2} \cdot 2r\cos\alpha \cdot \sqrt{2}R\sin(90° + 45° - \alpha) = \sqrt{2}Rr\cos\alpha\cos(45° - \alpha)$$

$$S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2}MN \cdot MC \cdot \sin\angle CMN = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\alpha \cdot \sqrt{2}r\sin(45° - \alpha) = \sqrt{2}Rr\sin\alpha \cdot \sin(45 - \alpha)$$

$\therefore S_{\triangle MBN} - S_{\triangle MNC}$

$= \sqrt{2}Rr[\cos\alpha\cos(45° - \alpha) - \sin\alpha\sin(45° - \alpha)]$

$= \sqrt{2}Rr\cos45°$

$= Rr$

又 $S_{\triangle MBC} = \frac{1}{2}MB \cdot MC \cdot \sin90° = \frac{1}{2}\sqrt{2}R \cdot \sqrt{2}r \cdot 1 = Rr$

$\therefore S_{\triangle MBC} = S_{\triangle MBN} - S_{\triangle MNC}$

即 $S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MNC} = S_{\triangle MBN}$

故 B、C、N 三点共线.

11. 证明:当 $AD \parallel BC$ 或 $AB \parallel DC$ 时,容易明白 P 恰为四边形 $ABCD$ 的对角线交点,此时 $\triangle APD$ 和 $\triangle BPC$ 的面积之比恰等于 $AD:BC$,为定值. 如图所示,当四边形 $ABCD$ 的两组对边都不互相平行时,据前两种特殊情形容易猜到所论定值应为 $AD:BC$,即 $S_{\triangle APD}:S_{\triangle BPC} = AD:BC$,于是 P 到 AD 和 BC 的距离应相等,即 P 在直线 AD 和 BC 的夹角的平分线上.

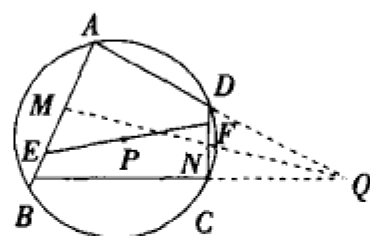


图 Ⅱ-D-4-156

记 AD 与 BC 的交点为 Q,$\angle AQB$ 的平分线与 AB、CD 分别交于 M、N,有基本结论:$\angle AMN = \angle DNM$ 且 $AM:MB = CN:ND$,证 EF 与 MN 的交点为 P_1,作 $EG \parallel CD$ 交 MN 于 G,则 $\angle EGM =$

$\angle DNM = \angle EMG$, $EG = EM$；利用 $AM : MB = CN : ND$ 及 $AE : EB = CF : FD$，用合分比性质易得 $ME : AB = NF : CD$，即 $ME : NF = AB : CD$，于是 $P_1E : P_1F = EN : FN = ME : NF = AB : CD$，再由 $PE : PF = AB : CD$ 知 P_1 与 P 重合，即 P 在 $\angle AQB$ 的平分线 MN 上，从而 $S_{\triangle APD} : S_{\triangle BPC} = AD : BC$.

第七章　几何不等式

A组

1. 证法1：设 $\triangle PAC$ 的面积为 x，$\triangle PBC$ 的面积为 y，$\triangle PAB$ 的面积为 z，则 $\dfrac{SB}{SA} = \dfrac{y}{x}$，$\dfrac{RA}{RC} = \dfrac{z}{y}$，$\dfrac{QC}{QB} = \dfrac{x}{z}$

$$\frac{S_{\triangle SBQ}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{SB}{BA} \cdot \frac{BQ}{BC} = \frac{yz}{(x+y)(z+x)}$$

同理：$\dfrac{S_{\triangle SAR}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{xz}{(y+x)(y+z)}$，$\dfrac{S_{\triangle QCR}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{xy}{(z+x)(z+y)}$. 欲证的结论等价于 $S_{\triangle ASR} + S_{\triangle BSQ} + S_{\triangle QCR} \geqslant \dfrac{3}{4} S_{\triangle ABC}$

即只要证明：$\dfrac{yz}{(y+x)(z+x)} + \dfrac{xz}{(y+x)(y+z)} + \dfrac{xy}{(z+x)(x+y)} \geqslant \dfrac{3}{4}$

证明此不等式等价于要证明不等式

$$y^2(x+z) + x^2(y+z) + z^2(x+y) \geqslant 6xyz \qquad ②$$

而 $x^2y + y^2z + z^2x \geqslant 3\sqrt[3]{x^2y \cdot y^2z \cdot z^2x} = 3xyz$

$xy^2 + yz^2 + zx^2 \geqslant 3\sqrt[3]{xy^2 \cdot yz^2 \cdot zx^2} = 3xyz$

两式相加得 ② 式，当且仅当 $x = y = z$ 时等号成立，此时 P 为 $\triangle ABC$ 的重心.

证法2：设 $\dfrac{SA}{AB} = \alpha$，$\dfrac{BQ}{BC} = \beta$，$\dfrac{CR}{AC} = \gamma$

则 $\dfrac{SB}{AB} = 1-\alpha$，$\dfrac{CQ}{BC} = 1-\beta$，$\dfrac{RA}{CA} = 1-\gamma$，且 α、β、$\gamma \in (0,1)$，由平面几何中塞瓦定理有

$$\alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \qquad ③$$

故 $\dfrac{S_{\triangle SAR}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{SA}{AB} \cdot \dfrac{AR}{AC} = \alpha(1-\gamma)$

同理 $\dfrac{S_{\triangle SBQ}}{S_{\triangle ABC}} = \beta(1-\alpha)$，$\dfrac{S_{\triangle QRC}}{S_{\triangle ABC}} = \gamma(1-\beta)$，于是有

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle QRS}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle ARS} + S_{\triangle BQS} + S_{\triangle QRC}}{S_{\triangle ABC}} \\ &= (1-\alpha)\cdot(1-\beta)\cdot(1-\gamma) + \alpha\beta\gamma \\ &= 2\alpha\beta\gamma \\ &= 2\cdot\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\cdot\sqrt{\beta(1-\beta)}\cdot\sqrt{\gamma(1-\gamma)}\text{（利用 ③ 式）} \\ &\leqslant 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

（当且仅当 $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{1}{2}$ 时取等号，此时，S、Q、R 分别为三边中点，P 为 $\triangle ABC$ 的重心）

2.【证明】由海伦公式，原不等式等价于

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2p}{3}\right)^2 = \sqrt{3}\left(\frac{p}{3}\right)^2$$

$\Leftrightarrow(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\dfrac{p^3}{27}$

[而由　$G(3)\leqslant A(3)$,有

$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left(\dfrac{3p-a-b-c}{3}\right)^3=\dfrac{p^3}{27}$.]

此式当且仅当 $p-a=p-b=p-c$(即 $a=b=c$)时等号成立.

3. 证明:$a<b+c$,故$\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{1}{2}$,同理$\dfrac{b}{a+b+c}<\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{c}{a+b+c}<\dfrac{1}{2}$

所以$\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}<\dfrac{1}{2}(A+B+C)=\dfrac{\pi}{2}$

对左边不等式,不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$,则 $a\geqslant b\geqslant c$,且 $A\geqslant\dfrac{\pi}{3}$,若 $B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$,令 $A=\dfrac{\pi}{3}+\delta_1$,$B=\dfrac{\pi}{3}-\delta_2$,$C=\dfrac{\pi}{3}-\delta_3$,这里 $\delta_1,\delta_2,\delta_3\geqslant 0$,且 $\delta_1=\delta_2+\delta_3$,于是

$$\begin{aligned}&aA+bB+cC\\&=a\left(\frac{\pi}{3}+\delta_1\right)+b\left(\frac{\pi}{3}-\delta_2\right)+c\left(\frac{\pi}{3}-\delta_3\right)\\&=\frac{\pi}{3}(a+b+c)+a(\delta_2+\delta_3)-b\delta_2-c\delta_3\\&=\frac{\pi}{3}(a+b+c)+(a-b)\delta_2+(a-c)\delta_3\\&\geqslant\frac{\pi}{3}(a+b+c)\end{aligned}$$

且等号成立的充要条件是

$(a-b)\delta_2=(a-c)\delta_3=0$,即 $a=b=c$

若 $B\geqslant\dfrac{\pi}{3}$,可类似证明.

4.(1) 证明:由题设$(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)>0$

即 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2<0$

因式分解,得等价不等式

$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)>0$

$\Leftrightarrow(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$

若上式左边有两个因式为负(另一个为正),例如,设 $a+b-c<0$,$b+c-a<0$,两式相加得 $b<0$,这是不可能的,故式中三因式都为正,即 $a+b>c$,$b+c>a$,$c+a>b$,所以,a、b、c 必是某三角形的三边长.

(2) 利用对称性及(1) 中的结论,只须证 $2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2$

由题设,并利用带参数的柯西不等式,得

$$\begin{aligned}&(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2\\&=\left[\lambda(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot\frac{1}{\lambda}+a_4^2\cdot 1+\cdots+a_n^2\cdot 1\right]^2\\&\leqslant[\lambda^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4]\cdot(\frac{1}{\lambda^2}+n-3)\qquad①\end{aligned}$$

为了从 ① 中消去 $a_4,a_5,\cdots,a_n$,只须令

$\dfrac{1}{\lambda^2}+n-3=n-1$

$\therefore\lambda=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$,代入 ①

得$(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$

$<\left[\dfrac{1}{2}(a_1^2+a_2^2++a_3^2)^2+a_4^4+\cdots+a_n^4\right](n-1)$

即 $2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)<(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2$

5. 证明：设 $\triangle PAC$ 的面积为 x，$\triangle PBC$ 的面积为 y，$\triangle PAB$ 的面积为 z，则

$\frac{SB}{SA}=\frac{y}{x},\frac{RA}{RC}=\frac{z}{y},\frac{QC}{QB}=\frac{x}{y}$

$\frac{S_{\triangle SBQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{SB}{BA}\cdot\frac{BQ}{BC}=\frac{yz}{(x+y)(z+x)}$.

同理 $\frac{S_{\triangle SAR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{xz}{(y+x)(y+z)},\frac{S_{\triangle QCR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{xy}{(y+x)(z+y)}$

欲证结论等价于：$S_{\triangle ASR}+S_{\triangle BSQ}+S_{\triangle QCR}\geqslant\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$

即只要证明

$$\frac{yz}{(y+x)(x+z)}+\frac{xz}{(y+z)(y+z)}+\frac{xy}{(z+x)(z+y)}\geqslant\frac{3}{4}$$

此式等价于：$y^2(x+z)+x^2(y+z)+z^2(x+y)\geqslant 6xyz$ （*）

而 $x^2y+y^2z+z^2x\geqslant 3\sqrt[3]{x^2yy^2zz^2x}=3xyz$

$xy^2+yz^2+yx^2\geqslant 3\sqrt[3]{xy^2yz^2z^2x}=3xyz$

两式相加即为(*)式，且当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立，此时 P 点为 $\triangle ABC$ 的重心.

6. 证明：若三个正数 a、b、c 可以表示成

$a=y+z,b=z+x,c=x+y$ ④

这里 x、y、$z>0$，易知 a,b,c 必是一个三角形的三边长. 反之，利用三角形内切圆(图 Ⅱ－D－4－157)，可以把任一三角形的三边长表示成 ④ 的形式. 所以，变换 ④ 提供了一种证明关于三角形中的不等式的代换法. 由于三边 a、b、c 完全确定一个三角形，从而三角形中的各元素都可通过变换 ④ 用 x、y、z 表示.

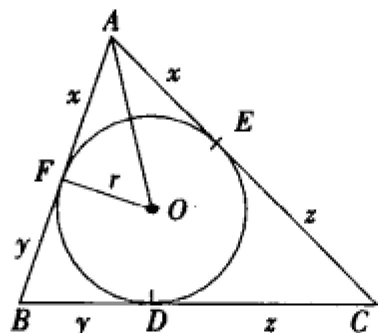


图 Ⅱ－D－4－157

例如 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=x+y+z$

$\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)}$

$r=\frac{\Delta}{p}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$；($\Delta$ 为三角形面积)

$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}}$；$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{x},\tan\frac{B}{2}=\frac{r}{y},\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{z}$

于是例 4 作变量代换 ④，得等价形式的不等式

$x^3+y^3+z^3\geqslant 9\sqrt{3}\sqrt{\frac{(xyz)^3}{(x+y+z)^3}}$

由 $A(3)\geqslant G(3)$，得 $(x+y+z)^3\geqslant 27xyz$

及 $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz$

所以 $9\sqrt{3}\sqrt{\frac{(xyz)^3}{(x+y+z)^3}}\leqslant 3xyz\leqslant x^3+y^3+z^3$

7. 证明：四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的顶点落在 $\triangle ABC$ 的边上有两种情况. 图 Ⅱ－D－4－158 情形说明 $\triangle ABC$ 有一边上没有四边形的顶点，这可归结到[图 Ⅱ－D－4－158 情形来讨论，可以去掉四边形 AP_1P_4C，即把 A 移到 P_1，C 移到 P_4，此时 $\triangle ABC$ 的面积减少了. 因此，若证明了]图 Ⅱ－D－4－159 情形的结论成立，图 Ⅱ－D－4－159 自然也成立.

下面证明图 Ⅱ－D－4－158 情形，分两步走：

若 $P_1P_2\,/\!/\,P_3P_4$，设 $\frac{BP_3}{BC}=\frac{AP_4}{AC}=\lambda(0<\lambda<1)$

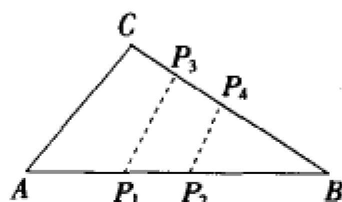


图 Ⅱ－D－4－158

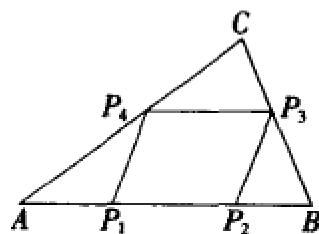


图 Ⅱ－D－4－159

则 $S_{\triangle P_2P_3P_4} = S_{\triangle AP_3P_4} = \lambda S_{\triangle AP_1C} = \lambda(1-\lambda)S_{\triangle ABC}$

$\leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$(因 $\lambda(1-\lambda) \leqslant \left\{\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\right\}^2 = \frac{1}{4}$)

若 P_1P_2 与 P_3P_4 不平行，设 P_4 到 AB 的距离大于 P_3 到 AB 的距离，过 P_3 作 AB 的平行线交 P_1P_4 于 D，交 AC 于 E，则 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$，$S_{\triangle P_4P_2P_3}$ 中至少有一个小于或等于 $S_{\triangle DP_2P_3} \leqslant S_{\triangle EP_2P_3}$

同理 $EP_3 \parallel AB$，于是 $S_{\triangle EP_2P_3} \leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，即此时 $\triangle P_1P_2P_3$ 与 $\triangle P_4P_2P_3$ 之中总有一个，它的面积不大于 $\triangle ABC$ 的面积的$\frac{1}{4}$.

8. 设 $\triangle ABC$ 的内角分别为α、β、γ，则 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，且 $P = \frac{1}{2}R^2(\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma)$(因 $P = S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}$)

由于 $S\triangle A'B'C'$ 的内角为$\frac{\beta+\gamma}{2}$，$\frac{\alpha+\gamma}{2}$，$\frac{\alpha+\beta}{2}$

所以 $Q = \frac{1}{2}R^2[\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\beta)]$

利用平均值不等式有

$16Q^3 = 2R^6[\sin(\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\gamma)+\sin(\alpha+\beta)]^3$

$\geqslant 2R^6 \cdot 27\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\gamma)\sin(\beta+\gamma) = 27R^4P$

9. 证明：作变量代换④，代入原式左边并展开、化简，得

左边 $= 2(x^3z+y^3x+z^3y-x^2yx-y^2zx-z^2xy)$

$= 2[xy(y-z)^2+yz(z-x)^2+zx(x-y)^2] \geqslant 0$

等号当且仅当 $x=y=z$(即 $a=b=c$)时成立.

10. 证明：连 OA、OB，设$\angle PAB=\alpha$，$\angle PBA=\beta$，则$\angle AOC=\angle BOC=\alpha+\beta$，设 $OC=d$，则 $CN = 2d+CM$. 由 $\triangle AEC$，$\triangle BFC$ 及 $\triangle BOC$ 均为直角三角形，有

$\tan\alpha = \frac{CE}{AC} = \frac{CE}{BC}$，$\tan\beta = \frac{CF}{BC}$，$\tan(\alpha+\beta) = \frac{BC}{OC} = \frac{BC}{d}$

再利用 $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

有$\frac{BC}{d} = \frac{BC(CE+CF)}{BC^2-CE\cdot CF}$

即 $BC^2-CE\cdot CF = d(CE+CF)$

注意到 $BC^2 = CM\cdot CN = CM\cdot(2d+CM) = CM^2+d\cdot 2CM$

有 $CM^2-CE\cdot CF = d(CE+CF-2CM)$ ①

即$(CM+\sqrt{CE\cdot CF})(CM-\sqrt{CE\cdot CF}) = 2d\left(\frac{CE+CF}{2}-CM\right)$

再由 $CM+\sqrt{CE\cdot CF}>0$ 及 $d>0$，有

$(CM-\sqrt{CE\cdot CF})(\frac{CE+CF}{2}-CM)>0$ ②

或 $CM-\sqrt{CE\cdot CF} = \frac{CE+EF}{2}-CM=0$ ③

由 P 不与 M 重合知　$CE \neq CF$,故 $\sqrt{CE \cdot CF} < \frac{CE + CF}{2}$

从而③不成立,且关于 CM 的二次不等式②的解集恰为要证的结论 $\sqrt{CE \cdot CF} < CM < \frac{1}{2}(CE + CF)$

B 组

1. 证明:左 − 右 $= x^2 - 2x(y\cos C + z\cos B) + y^2 + z^2 - 2yz\cos A$

$$= (x - y\cos C - z\cos B)^2 - (y\cos C + z\cos B)^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos A$$
$$\geqslant -(y\cos C + z\cos B)^2 + y^2 + z^2 - 2yz\cos A$$
$$= -y^2\cos^2 C - 2yz\cos B \cdot \cos C - z^2\cos^2 B + y^2 + z^2 - 2yz\cos A$$
$$= y^2\sin^2 C + z^2\sin^2 B - 2yz[\cos B\cos C - \cos(B + C)]$$
$$= y^2\sin^2 C + z^2\sin^2 B - 2yz\sin B\sin C$$
$$= (y\sin C - z\sin B)^2 \geqslant 0$$

2. 证明:如图 Ⅱ − D − 4 − 160 作 BOC 所在圆的直径 OD,连 $A'D$,有 $\angle OA'D = \angle OCD = 90°$

$\therefore OA' = OD \cdot \cos\angle A'DO = R \cdot \frac{\cos\angle A'DO}{\cos\angle COD}$

易知 $OD \perp BC$

于是 $\angle COD = \angle A$

$\angle A'DO = 180° - \angle COD - \angle COA$

$= 180° - \angle A - 2\angle B = \angle C - \angle B$

$\therefore OA' = R \cdot \frac{\cos(C - B)}{\cos A}$

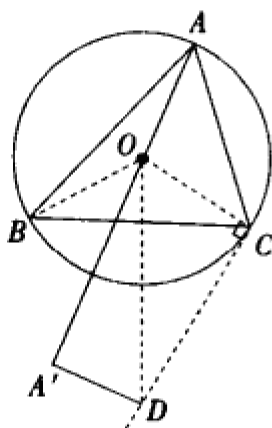


图 Ⅱ − D − 4 − 160

同理,$OB' = R \cdot \frac{\cos(A - C)}{\cos B}$,$OC' = R \cdot \frac{\cos(A - B)}{\cos C}$

于是,$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geqslant 8R^3$

$\Leftrightarrow \frac{\cos(A - B)}{\cos C} \cdot \frac{\cos(B - C)}{\cos A} \cdot \frac{\cos(C - A)}{\cos B} \geqslant 8$

$\because \frac{\cos(A - B)}{\cos C} = \frac{\cos(A - B)}{-\cos(A + B)} = \frac{\cos A\cos B + \sin A\sin B}{-\cos A\cos B + \sin A\sin B}$

$= \frac{1 + \cot A \cdot \cot B}{1 - \cot A \cdot \cot B}$

记 $x = \cot A \cdot \cot B$,$y = \cot B \cdot \cot C$,$z = \cot C \cdot \cot A$

对任意 $\triangle ABC$,有

$$x + y + z = \cot A(\cot B + \cot C) + \cot B \cdot \cot C$$
$$= -\cot(B + C)(\cot B + \cot C) + \cot B \cdot \cot C$$
$$= -\frac{\cot B \cdot \cot C - 1}{\cot B + \cot C} + \cot B \cdot \cot C$$
$$= 1$$

而对于锐角 $\triangle ABC$,x、y、z 均为正数

$\therefore \frac{\cos(A - B)}{\cos C} = \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{x + y + z + x}{x + y + z - x} = \frac{(x + y) + (x + z)}{y + x} \geqslant 2 \cdot \frac{\sqrt{(x + y)(x + z)}}{y + z}$

同理,$\frac{\cos(B - C)}{\cos A} \geqslant 2 \cdot \frac{\sqrt{(x + y)(y + z)}}{x + z}$

$\frac{\cos(C - A)}{\cos B} \geqslant \frac{2 \cdot \sqrt{(x + z)(y + z)}}{x + y}$

于是,$\frac{\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A)}{\cos C \cdot \cos A \cdot \cos B} \geqslant 8$

易知,当且仅当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时上式等号成立.

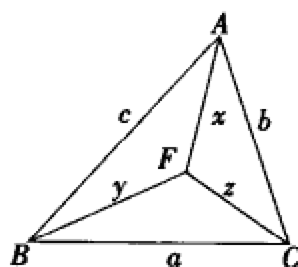


图 Ⅱ − D − 4 − 161

3. 证明:若 $\triangle ABC$ 的三内角均小于 120°,设 F 为 $\triangle ABC$ 的费马点,即 F 点

满足 $\angle AFB = \angle BFC = \angle AFC = 120°$(如图 Ⅱ - D - 4 - 161),则对 $\triangle ABC$ 内任一点 P,有

$PA + PB + PC \geqslant FA + FB + FC$,

设 $FA = x, FB = y, FC = z$,角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,则由余弦定理有

$$a = \sqrt{y^2 + z^2 + yz}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}(y + z)^2 + \frac{1}{4}(y - z)^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)$$

同理 $b \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(z + x), c \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y)$

即 $a + b + c \geqslant \sqrt{3}(x + y + z)$

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle FAB} + S_{\triangle FBC} + S_{\triangle FCA} = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + zx)$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a + b + c)r$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{xy + yz + zx}{a + b + c} \leqslant \frac{1}{2}\frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \qquad (*)$$

但 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geqslant 3(xy + yz + zx)$

$\therefore \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \leqslant \frac{1}{3}(x + y + z)$,代入($*$),得

$r \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(x + y + z) = \frac{1}{6}(FA + FB + FC)) \leqslant \frac{1}{6}(PA + PB + PC)$

故 $PA + PB + PC \geqslant 6r$

若 $\triangle ABC$ 有一内角大于等于 $120°$,不妨设 $\angle A \geqslant 120°$,这时当 P 与 A 重合时 $PA + PB + PC$ 最小,上面的证明仍然成立,只需注意 $x = 0, y = c, z = b$,并将证明中的一些"$\geqslant$"(或"$\leqslant$")改为"$>$"(或"$<$")即可.

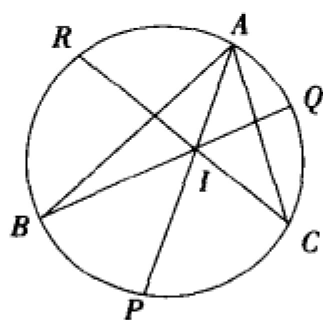


图 Ⅱ - D - 4 - 162

4. 证明:如图 Ⅱ - D - 4 - 162,设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,则 $BI + CI > BC$, $CI + AI > CA, AI + BI > AB$

相加得,

$2(AI + BI + CI) > BC + CA + AB$

即 $2(AP - IP + BQ - IQ + CR - IR > BC + CA + AB$

$$\text{从而 } AP + BQ + CR > \frac{1}{2}(BC + CA + AB) + IP + IQ + IR \qquad (*)$$

但可证: $IP = BP = CP > \frac{1}{2}BC$

同理 $IQ > \frac{1}{2}CA, IR > \frac{1}{2}AB$

$\therefore IP + IQ + IR > \frac{1}{2}(BC + CA + AB)$

将上式代入($*$)式得

$AP + BQ + CR > BC + CA + AB$

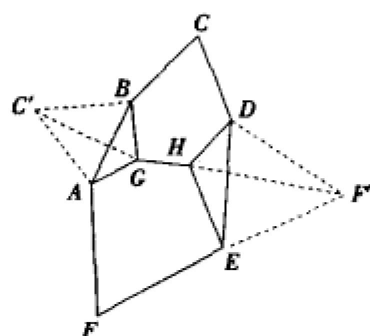


图 Ⅱ - D - 4 - 163

5. 证法:以直线 BE 为对称轴,作 C 和 F 关于直线 BE 的轴对称点 C' 和 F'(见图 Ⅱ - D - 4 - 163). 于是 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle DEF'$ 都是正三角形; G 和 H 分别在这两个三角形的外接圆上. 根据托勒密定理:

$C'G \cdot AB = AG \cdot C'B + GB \cdot C'A$

因而, $C'G = AG + GB$

同理, $HF' = DH + HE$

于是, $AG + GB + GH + DH + HE$

$= G'G + GH + HF'$

$\geqslant C'F' = CF$

上面最后一个等号的依据是：线段 CF 和 $C'F'$ 以直线 BE 为对称轴.

证法2：以直线 BE 为对称轴，作 G 和 H 的对称点 G' 和 H'（图 Ⅱ－D－4－164），这两点分别在正 $\triangle BCD$ 和正 $\triangle EFA$ 的外接圆上，因而

$CG' = DG' + G'B$

$H'F = AH' + H'E$

我们看到

$$AG + GB + GH + DH + HE = DG' + G'B + G'H + AH' + H'E$$
$$= CG' + G'H + H'F \geqslant CF$$

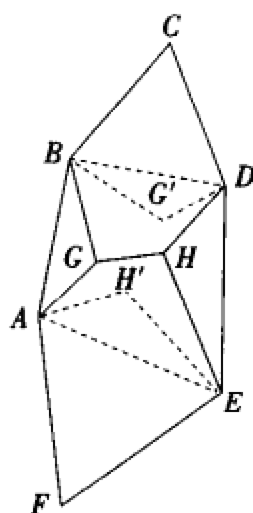


图 Ⅱ－D－4－164

6. 证明：下面的求和范围均为从 $i = 1$ 到 $i = 4$，设 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球的球心为 O，半径为 R，由圆幂定理，有

$GA'_i \cdot GA_i = R^2 - OG^2 (1 \leqslant i \leqslant 4)$

于是，所要证的不等式等价于

$$(R^2 - OG^2) \geqslant GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4 \quad ①$$

及$$(R^2 - OG^2) \cdot \sum \frac{1}{GA_i} \geqslant \sum GA_i \quad ②$$

其中 ① 式可由 $$4(R^2 - OG^2) = \sum GA_i^2 \quad ③$$

利用算术 — 几何平均不等式得出.

为证 ③，用 P 表示从点 O 到点 P 的向量，有

$$\sum (G - A_i)^2 = \sum A_i^2 - \sum G^2 + 2G\sum (G - A_i^2) \quad ④$$

④ 与 ③ 等价，因为 ④ 式的最后一项为0（由于 G 是重心，对空间任一点 O，皆有 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\sum \overrightarrow{OA_i}$）

利用柯西不等式，

$$4\sum GA_i^2 \geqslant (\sum GA_i)^2 \text{ 及 } \sum GA_i \sum \frac{1}{GA_i} \geqslant 16，得$$

$$\frac{1}{4}\sum GA_i^2 \sum \frac{1}{GA_i} \geqslant \frac{1}{16}(\sum GA_i)^2 \sum \frac{1}{GA_i} \geqslant \sum GA_i$$

这样，利用 ③ 式又证明了 ② 式.

7. 证明：(1) 充分性，如图 Ⅱ－D－4－165，若 $\angle A + \angle C > \angle B + \angle D$，则 $\angle B + \angle D < 180°$，$D$ 点在 $\triangle ABC$ 外接圆的外部，有 $\alpha > \alpha'$，$\beta > \beta'$，$\theta > \theta'$，$\varphi > \varphi'$.

$$R_A + R_C = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2\sin\beta'} + \frac{AD}{2\sin\varphi'}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2\sin\alpha'} + \frac{CD}{2\sin\theta'}\right)$$
$$> \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2\sin\beta} + \frac{BC}{2\sin\alpha}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{2\sin\varphi} + \frac{CD}{2\sin\theta}\right)$$
$$= R_B + R_D$$

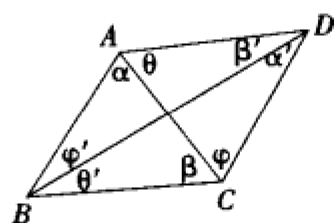


图 Ⅱ－D－4－165

(2) 必要性，将下面已证得的 $\angle A + \angle C > \angle B + \angle D \Rightarrow R_A + R_C > R_B + R_D$ 中的 A、B、C、D 作一轮换，得到

$\angle B + \angle D > \angle C + \angle A \Rightarrow R_B + R_D > R_C + R_A$（$*$）

若 $R_A + R_C > R_B + R_D$

但 $\angle A + \angle C \leqslant \angle B + \angle D$

如果 $\angle A + \angle C < \angle B + \angle D$ 由（$*$）可得矛盾；

如果 $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$，则 A、B、C、D 四点共圆，

$R_A + R_C = R_B + R_D$，矛盾.

8. 证明：设 F 各顶点依次为 A_1、A_2、…、A_n，O 点到边 A_kA_{k+1} 所在直线的垂线的垂足为 H_k，$k = 1, 2, \cdots, n$（视 $A_{n+1} = A_i$），由勾股定理，有

$OA_k^2 - OH_k^2 = A_kH_k^2, OA_{k+1}^2 - OH_k^2 = A_{k+1}H_k^2$

$\therefore 4(D^2 - H^2) = [(D+H)+(D+H)]\cdot[(D-H)+(D-H)]$

$= [(\sum_{k=1}^{n} OA_k + \sum_{k=1}^{n} OH_k) + (\sum_{k=1}^{n} OA_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} OH_k)]\cdot[(\sum_{k=1}^{n} OA_k - \sum_{k=1}^{n} OH_k) + (\sum_{k=1}^{n} OA_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} OH_k)]$

$= [\sum_{k=1}^{n}(OA_k + OH_k) + \sum_{k=1}^{n}(OA_{k+1} + OH_k)]\cdot[\sum_{k=1}^{n}(OA_k + OH_k) + \sum_{k=1}^{n}(OA_{k+1} - OA_k)]$

$\geqslant [\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(OA_k + OH_k)(OA_k - OH_k)} + \sum_{k=1}\sqrt{(OA_{k+1} + OH_k)(OA_{k+1} - OH_k)}]^2$

$= (\sum_{k=1}^{n} A_kH_k + \sum_{k=1}^{n} A_{k+1}H_k)^2 \geqslant (\sum_{k=1}^{n} A_kA_{k+1})^2 = p^2$

即 $D^2 - H^2 \geqslant \frac{p^2}{4}$

9. 证明:注意利用点 G 是 $\triangle ABC$ 重心这一特殊地位,取 BC 中点 D,连 DB_1, DC_1,则

$S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1}$

$= 2S_{\triangle GB_1C_1} + S_{\triangle BC_1B_1} + S_{\triangle CB_1C_1}$

$= 2S_{\triangle GB_1C_1} + 2S_{\triangle DB_1C_1} = 2S_{GB_1DC_1}$

$= 2(S_{\triangle DGB_1} + S_{\triangle DGC_1})$

$= \frac{2}{3}(S_{\triangle ADB_1} + S_{\triangle ADC_1})$ ①

过 G 作直线平行于 l,分别交 AB、AC 于 B_2、C_2,由于 G 与 A 在 l 的同侧,所以 B_2 在线段 AB_1 内,C_2 在线段 AC_1 内,为便于综合考察,设 $\frac{AB_2}{AB} = \lambda, \frac{AC_2}{AC} = \mu$,则

$\frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle ABC}} = \lambda\mu$ ②

又 $\frac{S_{\triangle AB_2C_2}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle AB_2G}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle AGC_2}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{\triangle AB_2G}}{S_{\triangle ABD}} + \frac{S_{\triangle AGC_2}}{S_{\triangle ADC}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\lambda}{3} + \frac{2\mu}{3}\right) = \frac{1}{3}(\lambda + \mu)$ ③

由 ②、③ 得

$\lambda\mu = \frac{1}{3}(\lambda + \mu)$

即 $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3$

从而 $\lambda + \mu = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}\right)(\lambda + \mu) \geqslant \frac{4}{3}$ ④

由 ①、④ 得

$S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1} \geqslant \frac{2}{3}(S_{\triangle ADB_2} + S_{\triangle ADC_2}) = \frac{2}{3}(\lambda S_{\triangle ABD} + \mu S_{\triangle ADC})$

$= \frac{1}{3}(\lambda + \mu)S_{\triangle ABC} \geqslant \frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$

当且仅当 $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$,即直线 l 过定点 G 且平行于 BC 时取等号.

10. 证明:将 $\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB$ 分别记为 α, β, γ,并设圆 DEF 与边 BC, AC 分别另交于点 H, G. 显然,$\angle FGA = \angle FDE = 60^\circ, \angle FHB = \angle FED = 60^\circ$,因而有

$\angle GFH = 360^\circ - \angle FGC - \angle FHC - \gamma$

$= 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - \gamma = 120^\circ - \gamma$

设 $AF = x$，则由正弦定理有

$$\frac{FG}{x} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha, \frac{FH}{c-x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta$$

由余弦定理有

$$HG^2 = \frac{4}{3}\{x^2\sin\alpha + (c-x)^2\sin^2\beta - 2x(c-x)\cdot\sin\alpha\sin\beta\cdot\cos(120^\circ-\gamma)\}$$

$$= \frac{4}{3}\{Lx^2 - 2Mcx + Nc^2\} \quad ①$$

其中，$L = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(120^\circ-\gamma)$.

$$M = \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos(120^\circ-\gamma) \quad ②$$

$N = \sin^2\beta$

于是有：

$$HG^2 = \frac{4L}{3}\left\{\left(x - \frac{Mc}{L}\right)^2 + \left(\frac{N}{L} - \frac{M^2}{L^2}c\right)^2\right\}$$

$$\geqslant \frac{4Lc^2}{3}\left(\frac{N}{L} - \frac{M^2}{L^2}\right) = \frac{4c^2}{3}\cdot\frac{NL-M^2}{L} \quad ③$$

设圆 DEF 的半径为 P，由正弦定理有

$$\frac{LG}{\sin\angle GFH} = 2P = \frac{DE}{\sin 60^\circ}$$

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{HG}{\sin(120^\circ-\gamma)} \quad ④$$

由 ② 有 $\quad NL - M^2 = \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2(120^\circ-\gamma) \quad ⑤$

由正弦定理有

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

其中 R 为圆 ABC 的半径，因而有

$$L = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin\alpha\sin\beta(\cos\gamma - \sqrt{3}\sin\gamma)$$

$$= \frac{\left\{a^2 + b^2 - ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \sqrt{3}ab\sin\gamma\right\}}{4R^2}$$

$$= \{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S\}/8R^2 \quad ⑥$$

③ - ⑥ 得

$$DE^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{HG^2}{\sin^2(120^\circ-\gamma)} \geqslant \frac{3}{4}\cdot\frac{4c^2}{3}\cdot\frac{NL-M^2}{L}\csc^2(120^\circ-\gamma)$$

$$= c^2\cdot\frac{2a^2c^2\sin^2\beta}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S} = \frac{8S^2}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}$$

两端同时开方得

$$DE \geqslant \frac{2\sqrt{2}S}{\{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\}^{\frac{1}{2}}}$$

11. 证明：如果 O 在 AC 上，则 $ABCD$，$AKON$ 与 $OLCM$ 相似，且 $AC = AO + OC$，这时可得 $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.

如果 O 不在 AC 上，可假定 O 与 D 在 AC 的同侧. 一条过 O 点的直线分别交 BA、AD、CD 与 BC 于 W、X、Y 与 Z 各点. 开始时，令 $W = X = A$. 这时，$\frac{OW}{OX} = 1$，而 $\frac{OZ}{OY} > 1$，然后围绕 O 旋转该直线，不得通过 B 点，最后到 $Y = Z = C$ 时结束. 这时 $\frac{OW}{OX} > 1$，而 $\frac{OZ}{OY} = 1$，因而，在旋转过程中，必存在某一位置，使得 $\frac{OW}{OX} = \frac{OZ}{OY}$，将直线固定在这一位置. 设 T_1、T_2、P_1、P_2、Q_1、Q_2 分别为 $KBLO$，$NOMD$，WKO，

OLZ,ONX 与 YMO 的面积,所要证明的结果等价于 $T_1+T_2 \geqslant 2\cdot\sqrt{S_1S_2}$.

由于 WBZ,WKO 与 OLZ 都是相似三角形,有 $\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}=\sqrt{P_1+T_1+P_2}\cdot\left(\frac{WO}{WZ}+\frac{OZ}{WZ}\right)=\sqrt{P_1+T_1+P_2}$

它等价于 $T_1=2\sqrt{P_1P_2}$

类似可得 $T_2=2\sqrt{Q_1Q_2}$

由于 $\frac{OW}{OZ}=\frac{OX}{OY}$,可得 $\frac{P_1}{P_2}=\frac{OW^2}{OZ^2}=\frac{OX^2}{OY^2}=\frac{Q_1}{Q_2}$

用 k 表示 $\frac{Q_1}{P_1}=\frac{Q_2}{T_2}$ 的共同的比值,则有

$$T_1+T_2=2\sqrt{P_1P_2}+2\sqrt{Q_1Q_2}=2\sqrt{P_1P_2}(1+k)$$
$$=2\sqrt{(1+k)P_1(1+k)P_2}=2\sqrt{(P_1+Q_1)(P_2+Q_2)}\geqslant 2\sqrt{S_1S_2}$$

12.【证法1】如图Ⅱ-D-4-166,顺次以 BC、CA、AB 为反射轴,将 $\triangle P_1BC$、$\triangle P_1CA$、$\triangle P_1AB$ 反射成 $\triangle DBC$、$\triangle ECA$、$\triangle FAB$.连接 P_2E、P_2F、P_2D,则

$$S_{\triangle AFP_2}=\frac{1}{2}AF\cdot AP_2\cdot\sin\angle FAP_2=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\angle FAP_2$$

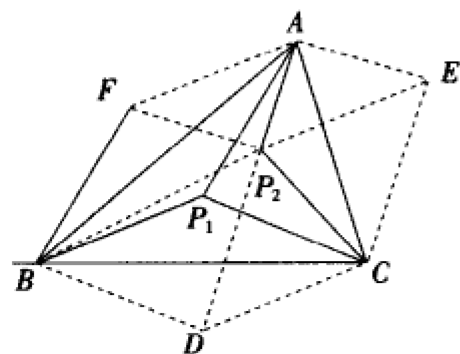
$$S_{\triangle BFP_2}=\frac{1}{2}BF\cdot BP_2\cdot\sin\angle FBP_2=\frac{1}{2}b_1b_2\sin\angle FBP_2$$

$$S_{\triangle BDP_2}=\frac{1}{2}BD\cdot BP_2\cdot\sin\angle DBP_2=\frac{1}{2}b_1b_2\sin\angle DBP_2$$

$$S_{\triangle CDP_2}=\frac{1}{2}CD\cdot CP_2\cdot\sin\angle DCP_2=\frac{1}{2}c_1c_2\cdot\sin\angle DCP_2$$

$$S_{\triangle CEP_2}=\frac{1}{2}CE\cdot CP_2\cdot\sin\angle ECP_2=\frac{1}{2}c_1c_2\sin\angle ECP_2$$

$$S_{\triangle AEP_2}=\frac{1}{2}AE\cdot AP_2\cdot\sin\angle EAP_2=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\angle EAP_2$$



图Ⅱ-D-4-166

由图Ⅱ-D-4-166有

$$(S_{\triangle AFP_2}+S_{\triangle AEP_2})+(S_{\triangle BFP_2}+S_{\triangle BDP_2})+(S_{\triangle CDP_2}+S_{\triangle CEP_2})=2S_{\triangle ABC} \quad ①$$

$$\because S_{\triangle AFP_2}+S_{\triangle AEP_2}=\frac{1}{2}a_1a_2\sin\angle FAP_2+\frac{1}{2}a_1a_2\sin\angle EAP_2$$
$$=\frac{1}{2}a_1a_2(\sin\angle FAP_2+\sin\angle EAP_2)$$
$$=a_1a_2\sin\frac{\angle FAP_2+\angle EAP_2}{2}\cdot\cos\frac{\angle FAP_2-\angle EAP_2}{2}$$
$$=a_1a_2\sin A\cos\frac{\angle FAP_2-\angle EAP_2}{2}$$
$$\leqslant a_1a_2\sin A \quad ②$$

同理,$S_{\triangle BFP_2}+S_{\triangle BDP_2}\leqslant b_1b_2\sin B$ ③

$S_{\triangle CDP_2}+S_{\triangle CEP_2}\leqslant c_1c_2\sin C$ ④

把②、③、④代入①,有

$a_1a_2\sin A+b_1b_2\sin B+c_1c_2\sin C\geqslant 2\cdot S_{\triangle ABC}$

即 $a_1a_2\cdot\frac{a}{2R}+b_1b_2\frac{b}{2R}+c_1c_2\cdot\frac{c}{2R}\geqslant 2\cdot\frac{abc}{4R}$

$\therefore aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$

下面再给出一个代数证法，为此，首先引入“多项式的拉格朗日(Lagrange)公式”：

任何一个次数不超过 n 次的复数系多项式 $f(x)$，都可以用任意 $(n+1)$ 个互异复数 $x_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 及其对应的多项式值来惟一地表示，即

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n+1}\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant n+1}}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}f(x_j)$$

证法2：设在复平面上，A、B、C 三点对应的复数为 x_1、x_2、x_3，P_1、P_2 对应的复数为 p_1,p_2，构成二次多项式

$f(x)=(x-p_1)(x-p_2)$

据拉氏公式得

$$f(x)=\sum_{j=1}^{3}\prod_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant 3}}\frac{x-x_i}{x_j-x_i}f(x_j)\equiv(x-p_1)(x-p_2) \quad ⑤$$

比较 ⑤ 式两边 x^2 的系数，得

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1.$$

于是，$\sum\limits_{j=1}^{3}\prod\limits_{\substack{i\neq j\\1\leqslant i\leqslant 3}}\frac{|f(x_j)|}{|x_j-x_i|}\geqslant 1$ ⑥

但 $|f(x_1)|=|(x_1-p_1)(x_1-p_2)|=a_1a_2$

$|f(x_2)|=b_1b_2$，$|f(x_3)|=c_1c_2$，且

$|x_1-x_2|=c$，$|x_2-x_3|=a$，$|x_3-x_1|=b$，将此代入 ⑥ 有

$$\frac{a_1a_2}{bc}+\frac{b_1b_2}{ca}+\frac{c_1c_2}{ab}\geqslant 1$$

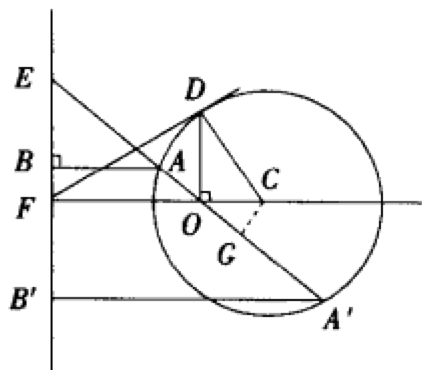
即 $aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$

从证法2中看到，点 P_1、P_2 不一定限于 $\triangle ABC$ 内部，可以在 $\triangle ABC$ 外部，也就是说，只要点 P_1、P_2 在 $\triangle ABC$ 所在平面上，结论就成立．这样便得到第27届 IMO 中国集训队试题(题目略)．

第八章　定值、极值、轨迹

A组

1．证明：如图Ⅱ－D－4－167，由 A、A' 至 EF 引垂线 AB、$A'B'$，AA' 交 EF 于 E，则 $AB=\frac{OF}{OE}\cdot AE$，$A'B'=\frac{OF}{OE}\cdot A'E$



图Ⅱ－D－4－167

于是，$AB\cdot A'B'=\left(\frac{OF}{OE}\right)^2\cdot AE\cdot A'E$

$$=\left(\frac{OF}{OE}\right)^2(CF^2+EF^2-r^2)$$

其中 r 为 $\odot C$ 的半径．

设 G 为 AA' 的中点，则 C、G、F、E 四点共圆．

$$\begin{aligned}AB+A'B'&=\frac{OF}{OE}(AE+A'E)\\&=2\cdot\frac{OF}{OE}(GO+OE)\\&=\frac{2\cdot OF}{OE^2}(GO\cdot OE+OE^2)\\&=\frac{2OF}{OE^2}(CO\cdot OF+OE^2)\end{aligned}$$

$$= \frac{2OF}{OE^2}[CO(CF - CO) + EF^2 + (CF - CO)^2]$$

$$= \frac{2OF}{OE^2}(CF^2 + EF^2 - CO \cdot CF)$$

所以，$\frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \frac{AB + A'B'}{AB \cdot A'B'} = \frac{2}{OF}$ 为定值，因为 $CO \cdot CF = CD^2 = r^2$.

2. 显然 MN 为定长而 $\angle A$，$\angle B$ 都为定角，因此，$\alpha = \pi - \angle A - \angle B$ 也为定角.

记 $\angle ANM = x$，则 $\angle BNM = \alpha - x$，由正弦定理，有

$AM = \frac{MN\sin x}{\sin A}$，$MB = \frac{MN\sin(\alpha - x)}{\sin B}$

故 $AM \cdot MB = \frac{[\cos(2x - \alpha) - \cos\alpha]MN^2}{2\sin A\sin B}$

上式右端除 $\cos(2x - \alpha)$ 与 x 有关之外，其余均为定值.

所以，当 $x = \frac{\alpha}{2}$ 时，$AM \cdot MB$ 最大.

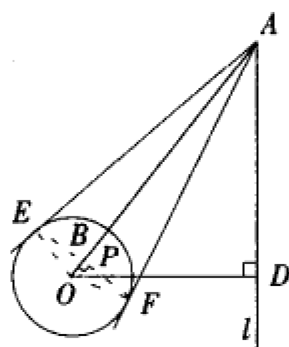


图 Ⅱ - D - 4 - 168

可见，只要以 N 为顶点，NM 为一边作 $\angle MNA = \frac{\alpha}{2} = \pi - \angle A - \angle B$，另一边交圆于 A，连接 AM 并延长交另一圆于 B，则线段 AB 即为所求.

3. 先考虑定点的位置，如图 Ⅱ - D - 4 - 168. 设 $OC \perp l$，由 l 关于 OC 的对称性，可以猜测：定点在 PC 所在的直线上，l 上任一点 A 引 ⊙O 的切线 AE、AF，E、F 为切点，设 EF 交 OC 于 P，只要证明 P 点位置是一定的，连续 AO、OE、OF，设 EF 与 AO 交于 B，则由 $AO \perp EF$，$OC \perp l$，得 $\triangle OPB \backsim \triangle OCA$，于是 $\frac{OP}{OA} = \frac{OB}{OC}$，即 $OP = \frac{OA \cdot OB}{OC}$. 在 Rt$\triangle OEA$ 中有 $OE^2 = OA \cdot OB$，从而 $OP = \frac{OE^2}{OC} = \frac{r^2}{OC}$，这里 r 是 ⊙O 的半径，OC 是圆心 O 到 l 的距离，都是定值. 所以 OP 是定长，又 P 在线段 OC 上，则 P 是定点，这样，切点连接 EF 必过定点 P.

4. 因 A、B、M、N 四点共圆，则 $\angle ANM = \angle ABM$，$\triangle PAN \backsim \triangle PMB$，于是 $\frac{BM}{AN} = \frac{PB}{PN}$，又 $\angle PAM = \angle PNB$，$\angle P$ 为公共角，则 $\triangle PAM \backsim \triangle PNB$，$\frac{AM}{BN} = \frac{PA}{PN}$

因而，$\frac{AM \cdot MB}{AN \cdot BN} = \frac{PM \cdot PN}{PN^2} = \frac{PM}{PN}$，又 P 是定点，$PM = a$ 为定值，设圆的半径为 R，

则 $\frac{AM \cdot MB}{AN \cdot BN} = \frac{PM}{PN} = \frac{a}{a + 2R}$ 为定值.

5. 证明：如图 Ⅱ - D - 4 - 169，设 $OE = a$，⊙O 的半径为 R，连接 EA、EB、OA、OB、OM、AB，因 AB 交 OM 于 G，交 OE 于 Q，则 $OA \perp MA$，$OB \perp MB$，$OM \perp AB$.

由射影定理得　$OG \cdot OM = OB^2$，又易知 M、E、Q、G 四点共圆.

$\therefore OQ \cdot OE = OG \cdot OM = OB^2 = R^2$

从而知 $OQ = \frac{R^2}{a}$，$\triangle OEB \backsim \triangle OBQ$

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

$\therefore \angle MEB + \angle MAB = 180°$

$\therefore A$、B、E、M 四点共圆.

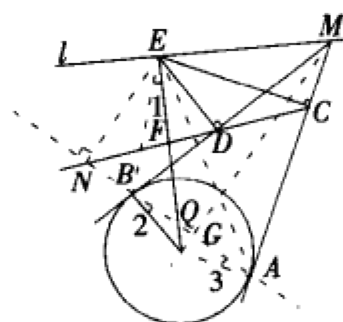


图 Ⅱ - D - 4 - 169

作 $EN \perp AB$ 交 AB 的延长线于 N，由西姆松定理知 C、D、F、N 四点共线.

又 A、N、E、C 与 A、O、E、M 均四点共圆，则 $\angle ENF = \angle EAM = \angle EOM$

而 $EN \mathbin{/\mkern-6mu/} OM \Rightarrow \angle EOM = \angle NEF$

于是 $\angle ENF = \angle NEF$

易知点 F 为 EQ 的中点(在 Rt$\triangle NEQ$ 中，等角对等边)

因此 $EF = \frac{1}{2}EQ = \frac{a^2 - R^2}{2a}$(定值)($EQ = OE - OQ$).

故 F 的位置不依赖于 M 的位置.

6. $\angle BAD + \angle CAE = 180° - \angle DAC - \angle ABE - \angle AEB$

$$= 180° - \frac{1}{2}\overset{m}{\overparen{ADA'}} - \frac{1}{2}\overset{m}{\overparen{ACA'}}$$

$$= (90° - \frac{1}{2}\overset{m}{\overparen{ADA'}}) + (90° - \frac{1}{2}\overset{m}{\overparen{ACA'}})$$

$$= \angle O_2AA' + \angle O_1AA'$$

$$= \angle O_1AO_2 \text{(定值)}$$

7. 设 PQ 的中点为 M,过 M 引 AB,AC 的平行线分别交 AC、AB 于 M_1、M_2,梯形 PQQ_1P_1 与梯形 PQQ_2P_2 的面积和为 S,则 $S = PQ(MM_1\sin\angle B + M + MM_2\sin\angle C)$,

以 BC 为 x 轴建立坐标系,则 $M(x,0)$ 到 AB 的距离 d_2,及 $MM_2 = \frac{d_2}{\sin\angle A}$ 都是 x 的一次函数,从而 S 也是 x 的一次函数.由于在 $P = B$ 及 $Q = C$ 时,$MM_1\sin\angle B + MM_2\sin\angle C$ 取相同的值 h,即 BC 边上的高,所以上述两梯形面积的和 $S = PQ \cdot h_2$(为常数).

8. 当 M 点运动到 B 点的极限位置时,圆 P 成为以 AB 为边的正方形,圆 Q 退缩为零点,M、N 重合,R 应在过 B 点所做圆 P 的切线上,同时可知 R 点应在 AB 的垂直平分线上,故猜想 R 点为以 AB 为斜边向另一侧作等腰直角三角形 ABR 的直角顶点.

因 $\angle RAC = 90°$,因此,PA 切圆 P 于 A,同理,RB 切圆 Q 于 B,连 RM,并延长 RM 与圆 P 交于 N_p,与圆 Q 交于 N_Q,于是有 $RA^2 = RM \cdot RN_p$,$RB^2 = RM \cdot RN_Q$,但 $RA = RB$,故 $RN_p = RN_Q$.

这说明 N_p 与 N_Q 是同一点,即直线 RM 经过圆 P 与圆 Q 的另一个交点 N,也就是直线 MN 恒通过一定点 R.

9. 设 D 点是 BC 边上任一固定点,现分别在 AB、AC 边上确定点 E、点 F,使 $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 中以点 D 为顶点的所有内接三角形中周长最短的.

作 D 点关于 AB、AC 的对称点 D_1、D_2,连接 D_1D_2 交 AB、AC 于 E、F,则 $\triangle DEF$ 的周长最短,证明这一点并不困难,因为

$\triangle DEF$ 的周长 $= DE + EF + FD = D_1E + EF + FD_2 = D_1D_2$.在 AB、AC 上任取 E_1、F_1,则

$\triangle DE_1F_1$ 的周长 $= DE_1 + E_1F_1 + F_1D = D_1E_1 + E_1F_1 + F_1D_2 \geqslant D_1D_2$,当且仅当 E_1、F_1 分别与 E、F 重合时取等号,所以当点 D 固定时,上述 $\triangle DEF$ 周长最短.

转而考虑点 D 在 DC 边上的合适位置,基于 $\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC$,$AD_1 = AD = AD_2$,根据余弦定理,$D_1D_2$ 的长度仅与 AD 有关,当 AD 取最小值时,D_1D_2 也取最小值,此时 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形,可见点 D 应为 BC 边上高线的垂足.

再考察点 E、F 的合适位置,根据对称性,可以猜想,E、F 是 $\triangle ABC$ 另两个高线足.事实上,利用大家熟知的垂足三角形 DEF 性质:$\triangle ABC$ 三条高平分 $\triangle DEF$ 三内角,有 $\angle AFE = \angle DFC = \angle CFD_2$,从而知 E、F、D_2 三点共线.同理,D_1、E、F 三点共线.

综上所述,垂足三角形 DEF 为所求三角形.

B组

1. 解:因为 $S_{PEFG} = S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ANE} - S_{\triangle MBG} + S_{\triangle MNF}$,而其中 $S_{\triangle ABP}$ 与 $S_{\triangle MNF}$ 为定值,所以 S_{PEFG} 取得最大值当且仅当

$S_{\triangle ANE} + S_{\triangle MBG}$ 取最小值.

记 $AB = a$,$CD = b$,$MN = c$,并设 $AN = \mu(a + c)$,于是 $MB = (1 - \mu)(a + c)$,不妨设梯形的高为 1,容易看出

$$S_{\triangle ANE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2(a + c)^2}{\mu(a + c) + \lambda b}$$

$$S_{\triangle MBG}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\mu)^2(a+c)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

因此有 $S_{\triangle ANE}+S_{\triangle MBG}$

$$=\frac{1}{2}(a+c)^2\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}\right] \quad ①$$

由柯西不等式有

$$\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b}$$

$$=\left[\frac{\mu^2}{\mu(a+c)+\lambda b}+\frac{(1-\mu^2)}{(1-\mu)(a+c)+)(1-\lambda)b}\right]\cdot[\mu(a+c)+\lambda b+(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b]\cdot\frac{1}{a+b+c}\geqslant(\mu+1-\mu)^2\frac{1}{a+b+c}=\frac{1}{a+b+c} \quad ②$$

将 ② 代入 ①,即得

$$S_{\triangle ANE}-S_{\triangle MBG}\geqslant\frac{(a+c)^2}{2(a+b+c)}$$

其中等号成立当且仅当 ② 式中等号成立,而这又当且仅当

$$\frac{\mu}{\mu(a+b)+\lambda b}=\frac{1-\mu}{(1-\mu)(a+c)+(1-\lambda)b} \quad ③$$

由此解得 $\lambda=\mu$,即当 $\lambda=\mu=\frac{AN}{AB+MN}$ 时,四边形 $PEFG$ 的面积取得最大值.

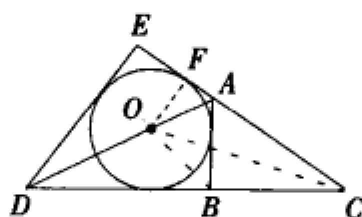


图 Ⅱ - D - 4 - 170

2. 如图 Ⅱ - D - 4 - 170 所示,先考虑当 $\angle ABC$ 为直角的特殊情况,此时 $AE=AB$,由 $AC^2-AB^2=BC^2$,知 $2AE(AC-AB)=BC^2-(AC-AB)^2$,定值应为

$$AE=\frac{(BC+AC-AB)(BC-AC+AB)}{2(AC-AB)}$$

下面对一般情况给予证明:

设 O 为重心,AO 是 $\angle CAB$ 的外角平分线,$OF\perp CA$,$DE\parallel OF$,$\frac{AE}{AF}=\frac{DE}{OF}$,而 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}$,又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ADB}$

所以 $S_{\triangle ACD}-S_{\triangle ADB}=S_{\triangle DBC}+S_{\triangle OAC}-S_{\triangle OAB}$

左边 $=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)\cdot OF$

右边 $=\frac{1}{2}(AC-AB)DE$,故 $\frac{DE}{DF}=\frac{AC+BC-AB}{AC-AB}$(定值)

又 $AF=CF-CA=\frac{1}{2}(AB+BC-CA)=$ 定长,所以:

$$AE=\frac{(AC+BC-AB)(AB+BC-AC)}{2(AC-AB)} \text{ 为定长}$$

3. 作 $BK\parallel l$,交 $\odot O$ 于 K,直线 DK 交 l 于 I,由 A、B、K、D 四点共圆及 $BK\parallel EI$ 知 A、E、I、D 共圆,且 $GD\cdot GA=GI\cdot GE$,但 $GD\cdot GA$ 为定值,GE 为定值,故 I 为定点,又 $\angle BHF=\angle HBK=\angle CDK$,则 C、D、I、H 共圆,且 $FI\cdot FH=FC\cdot FD$,但 $FC\cdot FD$ 为定值,FI 为定值,所以 FH 为定值,即 H 为定点.

又若 K 在 AD 弧上,同理可证得若 K 与 D 重合,则 DK 为 $\odot O$ 的切线仍可证得.

4. 设 AA',BB' 为 $\odot O$ 的直径,P',P'' 分别是 P 点关于 OA 及圆心 O 的对称点,显然,P',P'' 在 $\odot O$ 上并且 B' 是劣弧 $\overset{\frown}{P'P''}$ 的中点(P' 关于 BB' 的对称点为 P''),从而,直线 PI 过 B' 点,由于

$$\angle OIB'=\angle B'PP''+\angle POI$$

$$=\frac{1}{2}\angle B'OP''+\frac{1}{2}\angle P''OA'$$

$= \frac{1}{2}\angle B'OA' = \frac{\pi}{4} = \angle OAB'$

所以，I 的轨迹是 $\triangle OAB'$ 的外接圆上的一段劣弧 $\overset{\frown}{OA}$.

5. 因 $\angle XYB + \angle YBZ = \angle AOB + \angle ABC = \frac{n-2}{n}\pi + \frac{2}{n}\pi = \pi$，则 X、Y、B、Z 四点共圆.

从而 $\angle XBY = \angle XZY = \angle OBY$，即 X 在 BO 的延长线上.

又 $S_{\triangle XYB} = \frac{1}{2}BX \cdot BY\sin\angle XYB = \frac{1}{2}XY \cdot BY\sin\angle XYB$，于是

$BX = \frac{XY\sin\angle XYB}{\sin\angle YBX} = \frac{XY\sin\angle XYB}{\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}}$

而 $\angle XYB$ 的变化范围是 $\frac{(n-2)\pi}{2n} \leqslant \angle XYB \leqslant \pi - \frac{(n-2)\pi}{2n}$

所以，点 X 到中心 O 的最大距离是

$$d = \frac{XY}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)} - OB = \frac{a\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

其中 a 为正 n 边形的边长，足见当点 Y 在 AB 上变化时，点 X 恰好在 BO 的延长线上由 O 点出发描绘了[长度为 d 的线段两次，这样 X 点的轨迹是由正 n 边形的中心背向每一顶点的，] 长度为 d 的线段所组成的"星形".

6. 设 $\triangle ABE$ 的外心为 O_1，连接 O_1O，O_1A，O_1E，OA、OD，AD，则 $\angle AOD = 2\angle ABD = \angle AO_1E$，故 $\triangle AOD \backsim \triangle AO_1E$，$\frac{AD}{AE} = \frac{AO}{AO_1}$，$\angle DAO = \angle EAO_1$，$\angle DAE = \angle OAO_1$，从而 $\triangle ADE \backsim \triangle AOO_1$，于是 $\angle AO_1O = \angle AED = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$ 为定值，且易知 O_1 一定在 CO 的右侧，作 $AO_2 \perp AC$，则 $\triangle ABE$ 的外心轨迹是对 OA 的张角为 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}(\angle 90°)$ 的一段圆弧.

7. 如图 Ⅱ－D－4－171，设 M、N、R、T、S、Q、O 和 P 都是相应直线与圆的切点，则 $CE = CO - EO = CQ - SE$，$CE = CP - EP = CR - ET$，故 $2CE = CQ + CR - ST$.

又 $CQ + CR = CA + CB - (AM + BN)$，$ST = MN$，则 $2CE = CA + CB - AB$，故 E 点的轨迹是以 C 点为圆心，$\frac{1}{2}(CA + CB - AB)$ 为半径且在 $\triangle ABC$ 内的一段圆弧.

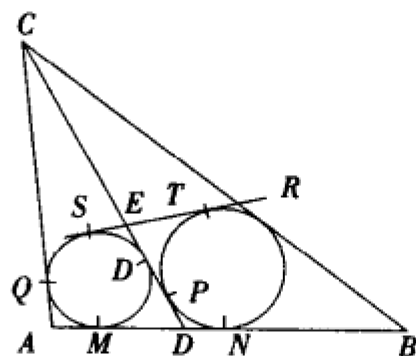


图 Ⅱ－D－4－171

8. 设两圆心为 O，过 O 作 OM 与 BC 垂直，且交 BC 于 M'，设 $AP = 2t$，因此 $OM = t$. 于是 $BC = 2BM = 2\sqrt{R^2 - t^2}$，即 $BP^2 + CP^2 = 2(R^2 + r^2) - 4t^2$，于是，$BC^2 + CA^2 + AB^2 = BC^2 + (PC^2 + PA^2) + (BP^2 + PA^2) = 6R^2 + 2r^2$.

这是一个常数，与 B 的位置无关(即使在 $A = P$ 的特殊情况，表达式 $BC^2 + CA^2 + AB^2$ 也是取同一值). 故表达式取值的集合为 $\{6R^2 + 2r^2\}$. 这就回答了问题第一部分.

现在来解第二部分.

过 A 作直线平行于 CB，交大圆周于 C' 及 B' 两点，这时易见 $PBB'A$ 为一矩形，因此线段 AB 的中点也就是线段 PB' 的中点. 当 B 在大圆周上变动一周时，B' 也在大圆周上变动一周，这说明，轨迹是以线段 OP 的中点为圆心，以 $R/2$ 为半径的一个圆周.

9. 设 $BC = a$，$AC = b$，$\angle BCA = \gamma$，若 A、B 在直线 m 的同侧，令 θ 是直线 m 与 CA 的夹角，则 m 与 CB 的夹角是 $\pi - \gamma - \theta$，A、B 两点到 m 的距离之积为 $ab\sin\theta\sin(\pi - \gamma - \theta) = \frac{ab}{2}[\cos\gamma - \cos(\gamma + 2\theta)]$，

最大值为$\frac{ab}{2}(\cos\gamma+1)$，它对应于$\theta=\frac{\pi-\gamma}{2}$，即 m 是$\angle ACB$的外角平分线．同理，若 A、B 两点分居 m 两侧，则最大值为$\frac{ab}{2}(-\cos\gamma+1)$，它对应于 m 是$\angle ACB$的外角平分线；若 γ 是钝角，则 m 是$\angle ACB$的平分线．$1+\cos\gamma>1-\cos\gamma\Leftrightarrow\gamma<\frac{\pi}{2}$．显然，若 γ 是锐角，则 m 是$\angle ACB$的平分线；若 γ 是直角，则 m 是$\angle ACB$的平分线或外角平分线，m 不惟一．

10． 不妨设$\triangle ABC$中，$a=\frac{3}{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\frac{\sqrt{5}}{2}$，如图 Ⅱ－D－4－172 所示，设 BC 中点为D，$AE\perp BC$，且沿 MN 折叠时重叠部分面积取到最大值．则易知，M 在D 和E 之间．设 C 关于MN 的对称点为C'，$C'N\cap AB=G$，令 $DM=x$，则 $BC'=2x$．如图所示

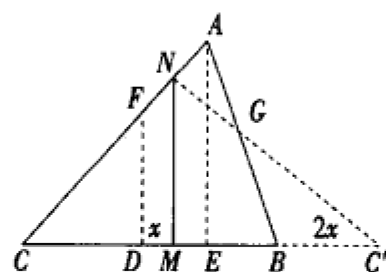


图 Ⅱ－D－4－172

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos B=\frac{1}{\sqrt{5}}$

于是$\angle C=45°$，$\sin B=\frac{2}{\sqrt{5}}$

在$\triangle BC'G$中，$\sin G=\sin(\angle ABC-\angle C')=\sin(B-C)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

由正弦定理得 $C'G=\frac{BC'\cdot\sin B}{\sin G}=4\sqrt{2}x$，于是 $S_{\triangle BCG}=4x^2$，而 $S_{\triangle CMN}=S_{\triangle C'MN}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right)^2$，所以重叠部分 $MBGN$ 的面积为

$$S_{MBGN}=S_{\triangle C'MN}-S_{\triangle BC'G}=-\frac{7}{2}\left(x-\frac{a}{14}\right)^2+\frac{a^2}{4}\leqslant\frac{a^2}{7}$$

因此，当$x=\frac{a}{14}=\frac{3}{28}$时，$S_{MBGN}$取值$\frac{a^2}{7}=\frac{9}{28}$，下面验证当$x=\frac{3}{28}$时，$M$ 在D、E 之间，事实上，$AE=AC\cdot\sin C=1$，故 $DE=CE-CD=AE-CD=\frac{1}{4}$，$M$ 在D、E 之间，所以当$DM=\frac{3}{28}$时，重叠部分取到最大值$\frac{9}{28}$

11．（1）由图 Ⅱ－D－4－173 不难推知，对于给定边 EF 的所有$\triangle DEF$，其最大边中取最小值的三角形是等腰$\triangle D'EF$．因此，我们只要就等腰$\triangle DEF(DE=DF)$，D 在BC 边上，给予讨论即可．

（2）取 O 为EF 的中点（图 Ⅱ－D－4－173．图 Ⅱ－D－4－174，过点 O 作$GH\parallel BC$，作 $GP\parallel AE$，则 $HE=GF=PG$，从而$\angle FPE=\angle FQH=\angle GPF+\angle GHA>\angle GPF+\angle FEH=\angle PFE$，所以 $GH<EF$．

如图 Ⅱ－D－4－175，在等腰$\triangle EFD'$和GDH中，$GH\parallel BC$，D 为BC 边上的中点，GH 过EF 的中点 O，那么 $D'F=\sqrt{OF^2+OD'^2}>\sqrt{OG^2+OD^2}=DG$．

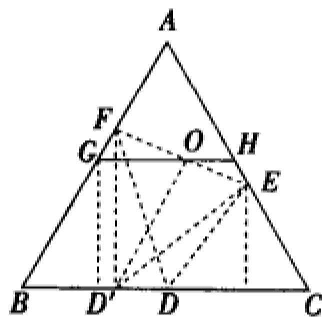


图 Ⅱ－D－4－173

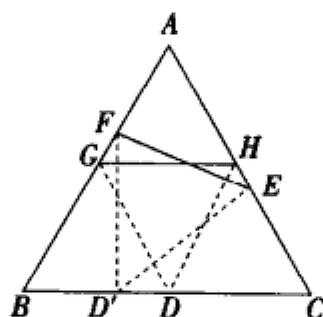


图 Ⅱ－D－4－174

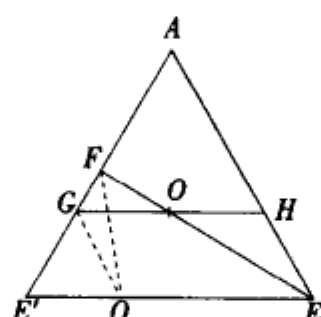


图 Ⅱ－D－4－175

所以原问题进一步转化为讨论底边平行于 BC 的等腰三角形，且顶点在 BC 边上（即中点）．

（3）设$\angle DAC=\alpha$，$\angle FDC=\beta$，$DF=x$，$AD=h$，$BC=a$，若$\alpha\geqslant60°$，作 $DF\perp AC$，$DE\perp AB$，

E、F 为垂足;如图 Ⅱ－D－4－176,则 $DF=\frac{a}{2}\cos\alpha$ 是 $\triangle DEF$ 的最大边($DF>2DF\cos\alpha=EF$).由于 F 在其他位置时,值均增大,所以 $\frac{a}{2}\cos\alpha$ 就是所求的最小值.

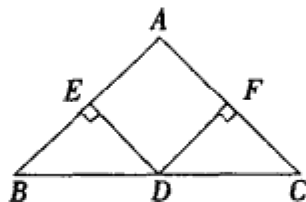


图 Ⅱ－D－4－176

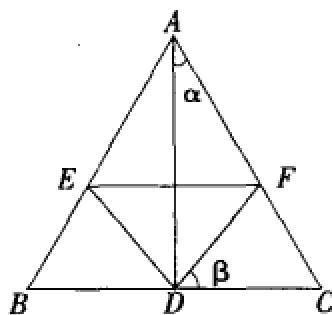


图 Ⅱ－D－4－177

若 $\alpha<60°$,在 $\beta>60°$ 时,x 仍为最大边(如图 Ⅱ－D－4－177),将 F 移向 C(FE 仍保持与 BC 平行),β、x 随之减少,直至 $\beta=60°$ 时,$x=EF$,因此只需考虑 $\beta\leqslant60°$ 的情况,这时

$\frac{2x\cos\beta}{a}=\frac{h-x\sin\beta}{h}$,即 $\frac{2x\cos\beta}{a}=\frac{2h}{\tan\beta+2h}$

最大边 $EF=2x\cos\beta=\frac{2ah}{\tan\beta+2h}$ 随 β 的增大而减小,在 $\beta=60°$ 时取最小值 $\frac{2ah}{a\sqrt{3}+2h}$,这时,$\triangle DEF$ 为正三角形.

12. 解法 1: 设 Q、R 在直线 l 上,M 为其中点,QR 与圆周 C 切于 B 点,连接 BO 并延长交圆周 C 于 D.(其中 O 为 C 的圆心),过 D 作圆的切线交 PR、PQ 于 P'、Q' 点,如图 Ⅱ－D－4－178,则 $Q'R'\parallel QR$,连接 PD 延长交 QR 于 E,于是有 $\frac{Q'D}{DR'}=\frac{QE}{ER}$,又 $Q'PR'\backsim\triangle QPR$,$\odot O$ 是 $\triangle PQ'R'$ 的旁切圆,于是 $Q'D=\frac{1}{2}(Q'R+PR'-PQ')$,$DR'=\frac{1}{2}(Q'R'+PQ'-PR')$

又因为 $QB=\frac{1}{2}(PQ+QR-PR)$,$BP=\frac{1}{2}(QR+PR-PQ)$,则 $\frac{Q'D}{DR'}=\frac{BR}{QB}$,于是 $QE=BR$ 从而 M 为 EB 的中点.因 B、D、M 均为定点,从而 E 为定点,所以满足题意的 P 点在 ED 的延长线上(不包含 D 点),此即 P 的集合.

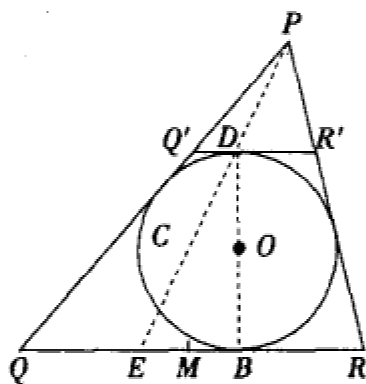


图 Ⅱ－D－4－178

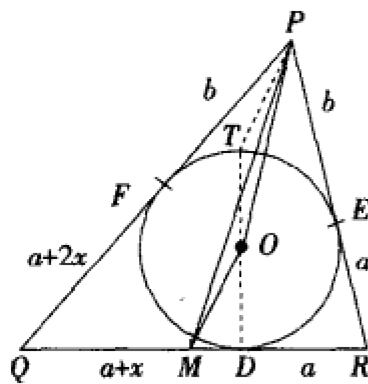


图 Ⅱ－D－4－179

解法 2:设 $\odot O$ 与 $\triangle PQR$ 三边切点分别为 D、E、F,$\odot O$ 的半径为 r,$MD=x$,$DR=a$,$PE=b$,则 $MQ=a+x$,$FQ=a+2x$,$S_{\triangle POM}=S_{\triangle PRM}-S_{POMR}=\frac{1}{2}S_{\triangle PQR}-\frac{1}{2}r(b+a+a+x)=\frac{1}{2}rx$ 为一常数.设 T 是 DO 与 $\odot O$ 的另一个交点(如图 Ⅱ－D－4－179),那么 $S_{\triangle TOM}=\frac{1}{2}MD\cdot OF=\frac{1}{2}rx=S_{\triangle POM}$,所以 $PT\parallel OM$.由于 M、O、T 均为定点,故 P 点集合为过 T 且平行于 MO 的一条射线.

第一章　整数问题

A组

1. 5　**2.** 略　**3.** 略　**4.** 略　**5.** 略　**6.** 略　**7.** 略　**8.** 略　**9.** 略　**10.** 略　**11.** 不存在　**12.** 略　13. 略

B组

1. 3　**2.** 略　**3.** 略　**4.** 略　**5.** 不能　**6.** 略　**7.** 不可能　**8.** 略　**9.** 两类　$2^k p$ 中 k 为偶数一类，k 为奇数一类

10. 略　**11.** 30

12. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}=(5+2\sqrt{6})^{990}$

为去掉其小数，考察

$A=(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}$

由二项式定理，A 为整数，而 $0<(5-2\sqrt{6})^{990}<1$

所以

$[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}]=[(5+2\sqrt{6})^{990}]=A-1$

再由二项式定理知，

$$A-1=2(5^{990}+C_{990}^{2}\cdot 5^{988}(2\sqrt{6})^{2}+\cdots+(2\sqrt{6})^{990})-1$$

$$=10k+2(2\sqrt{6})^{990}-1(k\in \mathbf{N})$$

$\therefore A-1\equiv 2(2\sqrt{6})^{990}-1(mod 10)$

又 $2(2\sqrt{6})^{990}-1=2\cdot 24^{495}-1$

$$=2(20+4)^{495}-1$$

$$=10m+2\cdot 4^{495}-1$$

$\therefore A-1\equiv 2\cdot 4^{495}-1\equiv 2\cdot 4-1\equiv 7(mod 10)$

$(\because G(4^{495})=G(4^{3})=4)$

因此，$[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}]$ 的个位数字是 7.

13. 解：设这 k 块砝码的质量数分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，且 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k,a_i\leqslant Z,1\leqslant i\leqslant k$. 因为天平两端都可以放砝码，故可称质量为 $\sum_{i=1}^{k}x_ia_i,x_i\in\{-1,0,1\}$，若利用这 k 块砝码可以称出质量为 $1,2,3,\cdots,n$ 的物品，则上式表示中含有 $1,2,\cdots,n$. 由对称性易知也含有 $0,-1,-2,\cdots,-n$，即

$$\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i \mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\supseteq\{0,\pm 1,\cdots,\pm n\}$$

所以 $2n+1=|\{0,\pm1,\cdots,\pm n\}|\leqslant\left|\left\{\sum_{i=1}^{k}x_ia_i\mid x_i\in\{-1,0,1\}\right\}\right|\leqslant 3^k$，即 $n\leqslant\frac{3^k-1}{2}$，设 $\frac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\frac{3^m-1}{2}(m\geqslant 1,m\in Z)$，则 $k\geqslant m$，且 $k=m$ 时，可取 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$

由数的三进制表示可知，对任意 $0\leqslant P\leqslant 3^m-1$，都有 $P=\sum_{i=1}^{m}y_i\cdot 3^{i-1}$，其中 $y_i\in\{0,1,2\}$，则

$$P-\frac{3^m-1}{2}=\sum_{i=1}^{m}y_i3^{i-1}-\sum_{i=1}^{m}3^{i-1}=\sum_{i=1}^{m}(y_i-1)3^{i-1}$$

令 $x_i = y_i - 1$，则 $x_i \in \{-1,0,1\}$，因此，对一切 $-\frac{3^m-1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$ 的整数 l，都有 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 3^{i-1}$，其中 $x_i \in \{-1,0,1\}$，由于 $n \leqslant \frac{3^m-1}{2}$，故对一切 $-n \leqslant l \leqslant n$ 的整数 l 也有上述表示.

综上，可知 k 的最小值 $f(n) = m \cdot \left(\frac{3^{m-1}-1}{2} < n \leqslant \frac{3^m-1}{2}\right)$.

(2)(ⅰ)当 $\frac{3^m-1}{2} < n < \frac{3^{m+1}-1}{2}$ 时，由(1)可知 $1,3,\cdots,3^{m-1},3^m$ 就是一种砝码的组成方式，下面我们证明 $1,3,\cdots,3^{m-1},3^m-1$ 也是一种方式：

若 $1 \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$，由(1)可知 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 3^{i-1}, x_i \in \{-1,0,1\}$，则 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i 3^{i-1} + 0 \cdot (3^m - 1)$；若 $\frac{3^m-1}{2} < l \leqslant n < \frac{3^{m+1}-1}{2}$，则 $\frac{3^m-1}{2} < l+1 \leqslant \frac{3^{m+1}-1}{2}$，由(1)可知 $l+1 = \sum_{i=1}^{m+1} x_i \cdot 3^{i-1}$，其中 $x_i \in \{-1,0,1\}$，易知 $x_{m+1} = 1$，(否则 $l \leqslant \sum_{i=1}^{m} 3^{i-1} - 1 = \frac{3^m-1}{2} - 1$，矛盾)，则 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i 3^{i-1} + 1 \cdot (3^m - 1)$. 所以当 $n \neq \frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n)$ 块砝码的组成方式不惟一.

(ⅱ)下面我们证明：当 $n = \frac{3^m-1}{2}$ 时，$f(n) = m$ 块砝码的组成方式是惟一的，即 $a_i = 3^{i-1}(1 \leqslant i \leqslant m)$.

若对每个 $-\frac{3^m-1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$，都有 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i, x_i \in \{-1,0,1\}$，即

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i a_i \mid x_i \in \{-1,0,1\}\right\} \supseteq \left\{0, \pm 1, \cdots, \pm \frac{3^m-1}{2}\right\}$$

注意左边集合中至多有 3^m 个元素，故必有

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i a_i \mid x_i \in \{-1,0,1\}\right\} = \left\{0, \pm 1, \cdots, \pm \frac{3^m-1}{2}\right\}$$

从而对每个 l，$-\frac{3^m-1}{2} \leqslant l \leqslant \frac{3^m-1}{2}$，都可以惟一地表示为 $l = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i$，其中 $x_i \in \{-1,0,1\}$，因而 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{3^m-1}{2}$，则 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+1)a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + \frac{3^m-1}{2}$，令 $y_i = x_i + 1$，则 $y_i \in \{0,1,2\}$

由上可知，对每个 $0 \leqslant l \leqslant 3^m - 1$，都可以惟一地表示为 $l = \sum_{i=1}^{m} y_i a_i$，其中 $y_i \in \{0,1,2\}$，特别地，易知 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_m$

下面用归纳法证明 $a_i = 3^{i-1}(1 \leqslant i \leqslant m)$：

当 $i = 1$ 时，易知 $\sum_{i=1}^{m} y_i a_i$ 中的最小正整数是 a_1，故 $a_1 = 1$；假设当 $1 \leqslant i \leqslant p$ 时，$a_i = 3^{i-1}$，由于 $\sum_{i=1}^{m} y_i a_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot 3^{i-1}, y_i \in \{0,1,2\}$ 就是数的三进制表示，易知它们正好是 $0,1,2,\cdots,3^p-1$，故 a_{p+1} 应在除上述表示外 $\left\{\sum_{i=1}^{m} y_i a_i \mid y_i \in \{0,1,2\}\right\}$ 中的最小的数，因此 $a_{p+1} = 3^p$，由归纳法知 $a_i = 3^{i-1}(1 \leqslant i \leqslant m)$

综(ⅰ)(ⅱ)可知，当且仅当 $n = \frac{3^m-1}{2}$ 时，上述 $f(n)$ 块砝码的组成方式是惟一确定的.

第二章　整除问题

A组

1. 证明:因 $240=2^4\cdot3\cdot5$,2^4、3、5互质,$p^4-1=(p^2+1)(p-1)(p+1)$,所以只需分别证明 2^4、3、5 可整除 $(p^2+1)(p-1)(p+1)$.

因 $p>5$,且为质数,令 $p=2m+1(m\geqslant3)$,可推得 $2^4\mid(p^2+1)(p-1)(p+1)$;令 $P=3k\pm1(k\geqslant2)$,可推得 $3\mid p+1$ 或 $3\mid p-1$;令 $p=5q\pm1$,或 $5q\pm2(q\in N)$,可推得 $5\mid p+1$ 或 $5\mid p-1$,或 $5\mid p^2+1$,从而获证.

2. 证明:用尾数方法来证."⇒":若 $4\mid n$,设 $n=4k$,则 $G(1^n+2^n+3^n+4^n)=G(G(1^n)+G(2^n)+G(3^n)+G(4^n))=G(1+G(2^4)+G(3^4)+G(4^4))=G(1+6+1+6)=4$,显然 $5\mid 1^n+2^n+3^n+4^n$,与已知矛盾,故 $4\nmid n$.

"⇐":当 $4\nmid n$ 时,可设 $n=4k+1$ 或 $4k+2$ 或 $4k+3$.在这三种情形下分别计算 $G(1^n+2^n+3^n+4^n)$ 的结果均等于0,故 $5\mid 1^n+2^n+3^n+4^n$.

3. 证明:由性质9知,只需证明数 $f(n,k)$ 不能被一个很小的自然数 n 整除,因

$f(n,k)=3n^{3k}+3n^k-n^{3k}+n^k+10=3(n^{3k}+n^k+3)-n^k(n^k-1)(n^k+1)+1$,$3\mid3(n^{3k}+n^k+3)$,$3\mid n^k(n^k-1)(n^k+1)$,$3\nmid1$,故 $3\nmid f(n,k)$,因而 $f(n,k)$ 不能分解成三个或三个以上的连续自然数的乘积.

再证 $f(n,k)$ 不能分解成两个连续自然数的积.

由上知,$f(n,k)=3q+1(q\in N)$,因而只需证方程:$3q+1=x(x+1)$ 无正整数解.而这一点可分别具体验算 $x=3r,3r+1,3r+2$ 时,$x(x+1)$ 均不是 $3q+1$ 形的数来说明.

故 $f(n,k)$ 对任何自然数 n、k 都不能分解成若干个连续自然数之积.

4. 证明:

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318})\\&=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1319})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659})\\&=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318})+\cdots+(\frac{1}{989}+\frac{1}{990})\\&=1979\times\left(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\cdots+\frac{1}{989\times990}\right)\end{aligned}$$

两端同乘以1319!得 $1319!\times\dfrac{p}{q}=1979\times M(M\in N)$.

此式说明 $1979\mid1319!\times p$.由于1979为质数,且 $1979\times1319!$,故 $1979\mid p$.

5. 解:容易验证 $p=2$、3、5、7 均满足条件,现来讨论质数 $p\geqslant11$,若 p 满足条件,则有

(ⅰ)$p-4$ 没有大于4的质因数;

(ⅱ)$p-8$ 没有大于8的质因数;

(ⅲ)$p-9$ 没有大于9的质因数;

由(ⅰ)及 $p-4$ 是奇数推出.

$p-4=3^a.a\geqslant2$　　①

由上式及 $p-8$ 是奇数知,$p-8$ 不能被2和3整除.因此,由(ⅱ)知

$p-8=5^b7^c$　　②

由式①和式②得

$5^b7^c-3^a+4=0,a\geqslant2$　　③

式③两边被3除后得 $(-1)^k+1=0$,所以

$1 \leqslant b = 2l + 1, l \geqslant 0$ ④

由于 $b \geqslant 1$,由式 ③ 推出 5 整除 $3^a + 1$,所以

$2 \leqslant a = 4m + 2, m \geqslant 0$ ⑤

由式 ② 知 $p - 9 = 5^b 7^c - 1$,显见 $p - 9$ 不能被 3 整除,由于 $b \geqslant 1$,所以也不能被 5 整除.

我们来证明必有 $c = 0$.

若不然,设 $c \geqslant 0$,则 $p - 9$ 也不能被 7 整除.因此,由(ⅲ)知必有

$p - 9 = 5^b 7^c - 1 = 2^d, c > 0$

由此推出 7 整除 $2^d + 1$,而这对任意非负整数 d 都是不可能的.

由式 ①,② 及 $c = 0$ 推出

$5^b = 3^a - 4 = (3^{2m+1} - 2)(3^{2m+1} + 2)$

设 $3^{2m+1} - 2$ 和 $3^{2m+1} + 2$ 的最大公约数为 g,显见,g 为奇数,且 g 整除$(3^{2m+1} + 2) - (3^{2m+1} - 2) = 4$,所以 $g = 1$,由此及 5 是质数推出

$3^{2m+1} - 2 = 1, 3^{2m+1} + 2 = 5^b$

因而 $m = 0, b = 1, a = 2$

所以,由式 ① 知,满足条件的质数仅有 13.

综上所述,满足本题条件的全部质数是:2、3、5、7、13.

6. 解:设 n 个连续正整数中最大的为 m,当 $n = 3$ 时,如果 m 是 $m - 1, m - 2$ 的最小公倍数的约数,那么 $m \mid (m - 1)(m - 2)$,则 $m \mid 2$,与 $m > 2$ 矛盾.

当 $n = 4$ 时,由于

$m \mid (m - 1)(m - 2)(m - 3)$

所以 $m \mid 6$,而 $m > 4$,故这时只有一组正整数 3,4,5,6 具有上述性质.

当 $n > 4$ 时,由于 $m \mid (m - 1)(m - 2)\cdots(m - n + 1)$,所以 $m \mid (n - 1)!$,取 $m = (n - 1)(n - 2)$,则$(n - 1) \mid m - (n - 1)$,$(n - 2) \mid m - (n - 2)$,由于 $n - 1$ 与 $n - 2$ 互质,$m - (n - 1)$ 与 $m - (n - 2)$ 互质,所以 $m = (n - 1)(n - 2)$ 整除 $m - (n - 1)$ 与 $m - (n - 1)$ 的最小公倍数,因而 m 具有题述性质.

类似地,取 $m = (n - 2)(n - 3)$,则 m 整除 $m - (n - 2)$ 与 $m - (n - 3)$ 的最小公倍数,因而 m 具有题述性质.

所以,当 $n \geqslant 4$ 时,总能找到具有题述性质的一组正整数,当且仅当 $n = 4$ 时,恰有惟一的一组正整数解.

7. 证明:由已知得 $a + b = ct, \dfrac{a^p + b^p}{a + b} = cs(t, s \in N)$,两式相乘得 $c^2 st = a^p + b^p = a^p + (ct - a)^p = c^p t^p - pac^{p-1}t^{p-1} + \cdots + pa^{p-1}ct$,于是 $cs = c^{p-1}t^{p-1} - pac^{p-2}t^{p-2} + \cdots + pa^{p-1}$,故 $c \mid pa^{p-1}$.

(1) 现用反证法来证明$(c, a) = 1$,若$(c, a) = k > 1$,令 q 是 k 的一个质因子,则有 $q(c, q)a$,因 $c \mid a + b$,则 $q \mid a + b$,从而 $q \mid b$,于是 q 是 a、b 的一个公约数,这与$(a, b) = 1$ 矛盾,故$(c, a) = 1$.

(2) 因为 $c \mid pa^{p-1}$,$(c, a) = 1$,所以 $c \mid p$.而 p 为质数且 $p \geqslant 3$,故 $c = 1$ 或 $c = p$.

8. 解:通过具体计算可猜想

$$s_n = 2(1 + 2 + \cdots + n)^4 = 2\left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^4$$

此式不难用数学归纳法获证.

为求 $d = (s_n, S_{3n})$,对 n 分奇偶来讨论.

(ⅰ) 当 $n = 2k$ 时,$d = \left(2\left[\dfrac{2k(2k + 1)}{2}\right]^4, 2\left[\dfrac{6k(6k + 1)}{2}\right]^4\right)$

$= (2k^4(2k + 1)^4, 2 \times 81k^4(6k + 1)^4)$.由于 $2k + 1$ 和 $6k + 1$ 互质,所以 $d = 2k^4((2k + 1)^4, 81)$.而因当 $k = 3t + 1$ 时,$(2k + 1)^4 = 81(2t + 1)^4$,$k \neq 3t + 1$ 时,$(2k + 1)^4$ 与 81 互质,故此时有

$$d=\begin{cases}2\times 81k^4=2\times 81\times\frac{n^4}{2^4}=\frac{81}{8}n^4, \text{当 } n=6t+2 \text{ 时}\\ 2k^4=\frac{1}{8}n^4, \text{当 } n=6t+6 \text{ 或 } 6t+4 \text{ 时}(t\geqslant 0)\end{cases}$$

(ⅱ) 当 $n=2k+1$ 时, $d=(2[(2k+1)(k+1)]^4, 2[3(2k+1)(3k+2)]^4$. 因 $3k+2$ 与 $2k+1, k+1$ 互质,所以 $d=2(2k+1)^4((k+1)^4, 3^4)$. 而当 $k=3t+2$ 时, $k+1=3(t+1), k\neq 3k+2$ 时, $k+1$ 与 3^4 互质,故此时有

$$d=\begin{cases}2(2k+1)\times 3^4=2n^4\times 3^4=162n^4, \text{当 } n=6t+5 \text{ 时}\\ 2(2k+1)^4=2n^4, \text{当 } n=6t+1 \text{ 或 } 6t+3 \text{ 时}\end{cases}$$

9. 证明:设 $(m,n)=1$,则有 $u,v\in Z$,使得 $un=vm+1=v(m-1)+(v+1)$,此式说明:对盒子连续加球 u 次,可使 $m-1$ 个盒子各增加了 v 个,一个增加了 $(v+1)$ 个. 这样可将多增加了一个球的盒子选择为原来球数最少的那个,于是经过 u 次加球之后,原来球数最多的盒子中的球与球数最少的盒子中的球数之差减少 1,因此,经过有限次加球后,各盒球数差为 0,达到各盒中的球数相等.

用反证法证明必要性. 若 $(m,n)=d>1$,则只要在 m 个盒中放 $m+1$ 个球,则不管加球多少次,例如,加球 k 次,则这时 m 个盒中共有球 $m+1+kn$(个);因为 $d\mid m, d\mid n, d>1$,所以 $m+1+kn$ 不可能是 d 的倍数,更不是 m 的倍数,各盒中的球决不能一样多,因此,必须 $(m,n)=1$.

10. 证明:因对一切整数 n,恒有 $6n=(n+1)^3+(-n)^3+(-n)^3+(n-1)^3$,即能被 6 整除的任何整数都可以四个整数的立方和. 又因 $6n=6n+0^3, 6n+1=6n+1^3, 6n+2=6(n-1)+2^3, 6n+3=6(n-4)+3^3, 6n+4=6(n+2)+(-2)^3, 6n+5=6(n+1)+(-1)^3$,故得证.

11. 证明:(ⅰ) 当 $n\leqslant 8$ 时, $N=2^8+2^{11}+2^n=2^n(2^{8-n}+2^{11-n}+1)$,因 $[\cdots]$ 为奇数,所以要使 N 为平方数, n 必为偶数. 逐一验证 $n=2、4、6、8$ 知, N 都不是平方数.

(ⅱ) 当 $n=9$ 时, $N=2^8+2^{11}+2^9=2^8\times 11$ 不是平方数.

(ⅲ) 当 $n\geqslant 10$ 时, $N=2^8(9+2^{n-8})$,要 N 为平方数, $9+2^{n-8}$ 应为奇数的平方,不妨假设 $9+2^{n-8}=(2k+1)^2$,则 $2^{n-10}=(k-1)\times(k+2)$. 由于 $k-1$ 和 $k+2$ 是一奇一偶,左边为 2 的幂,因而只能 $k-1=1$,于是得 $k=2$. 由 $2^{n-10}=2^2$ 知 $n=12$ 为所求.

12. 解:当 $3\leqslant n\leqslant 5$ 时, $n!$ 中有一个因数 3,当 $7\leqslant m<14$ 时, $n!$ 中有一个因数 7,所以这两种情形, $n!$ 不能表成两整数的平方和,故此时方程无解.

当 $n=2$ 时,显然有解 $a=1, b=1$

当 $n=6$ 时,因 $6!=12^2(1^2+2^2)=12^2+24^2$,故有解 $a=12, b=24$.

B组

1. 证明:当 $n=2m$ 时, $F(2m,1)=\sum\limits_{r=1}^{2m}r=m(2m+1)$

$$\begin{aligned}F(2m,k)&=\sum_{r=1}^{m}r^{2k-1}+\sum_{r=m+1}^{2m}r^{2k-1}\\&=\sum_{r=1}^{m}r^{2k-1}+\sum_{r=1}^{m}(2m+1-r)^{2k-1}\\&=\sum_{r=1}^{m}[r^{2k-1}+(2m+1-r)^{2k-1}]\end{aligned}$$

由于 $[\cdots]$ 能被 $r+(2m+1-r)=2m+1$ 整除,所以 $F(2m,k)$ 能被 $2m+1$ 整除,另一方面,

$$F(2m,k)=\sum_{r=1}^{m-1}[r^{2k-1}+(2m-r)^{2k-1}]+m^{2k-1}+(2m)^{2k-1}$$

上式中 $[\cdots]$ 能被 $r+2m-r=2m$ 整除,所以 $F(2m,k)$ 也能被 m 整除. 因 m 与 $2m+1$ 互质,所以 $F(2m,k)$ 能被 $m(2m+1)$(即 $F(2m,1)$)整除.

类似可证当 $n=2m+1$ 时, $F(2m+1,k)$ 能被 $F(2m+1,1)$ 整除.

故 $F(n,k)$ 能被 $F(n,1)$ 整除.

2. 解:$(a+b)^7-a^7-b^7=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]=7ab(a+b)(a^2+b^2+ab)^2$

根据题设要求(ⅰ)(ⅱ)知,$7^6 \mid (a^2+b^2+ab)^2$,即 $7^3 \mid a^2+b^2+ab$

令 $a^2+b^2+ab=7^3$,即 $(a+b)^2-ab=343$,取 $a+b=19$,则 $ab=19^2-343$.故可令 $a=18$,$b=1$ 即合要求.

数学归纳法在整除问题中也有广泛应用.

3. 解:存在.用数学归纳法证明它的加强命题:对任何正整数 m,存在 m 个连续的整数,使得每一个都含有重复的素因子.

当 $m=1$ 时,显然成立,这只需取一个素数的平方.

假设当 $m=k$ 时命题成立,即有 k 个连续整数 $n+1,n+2,\cdots,n+k$,它们分别含有重复的素因子 $p_1,p_2,\cdots,p_k$,任取一个与 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 都不同的素数 p_{k+1}(显然存在),当 $t=1,2,\cdots,p_{k+1}^2$ 时,$tp_1{}^2p_2{}^2\cdots p_k{}^2+n+(k+1)$ 这 p_{k+1}^2 个数中任两个数的差是形如 $ap_1^2p_2^2\cdots{}^2p_k(1\leqslant a\leqslant p_{k+1}^2-1)$ 的数,不能被 p_{k+}^2 整除,故这 p_{k+1}^2 个数除以 p_{k+1}^2 后,余数两两不同.但除以 p_{k+1}^2 后的余数只有 $0,1,\cdots,p_{k+1}^2-1$ 这 p_{k+1}^2 个,从而恰有一个数 $t_0(1\leqslant t_0\leqslant p_{k+1}^2)$,使 $t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+(k+1)$ 能够被 p_{k+1}^2 整除.这时,$(k+1)$ 个连续整数:

$t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+1,t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+2,\cdots$

$t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+k,t_0p_1^2p_2^2\cdots p_k^2+n+(k+1)$

分别能被 $p_1^2,p_2^2,\cdots,p_k^2,p_{k+1}^2$ 整除,即 $m=k+1$ 时命题成立.故命题对一切自然数 m 均成立.

4. 解:$n=1$,恒有 $Fn(a)=a$

$Fn_6(a)=1,a\in\{1,2,\cdots,A_6\}$,这里 $B_6=1,B_5=A_6$

要使 A_6 尽可能大,不能取 $n_6=1$(此时 $A_6=1$),取 $n_6=2$ 得 $A_6=2$

当 $n_6\geqslant 3$ 时,$Fn_6(2)=2>1$,所以只能取 $n_6=2$,A_6 的最大值为 2,Fn_5 将 $\{1,2,\cdots,A_6\}$ 变为 $\{1,2\}$.

易知 $A_5=4,n_5=2$ 或 3;$A_4=10,n_4=3$ 或 4

如果 $A_{k+1}=B_k=q_k+n_k-2$,那么

$$A_k\leqslant q_kn_k+n_k-2=(q_k+1)n_k-2\leqslant\left(\frac{B_k+3}{2}\right)^2-2$$
$$=\frac{B_k^2+6B_k+1}{4}$$

又 A_k 是整数,A_{k+1} 是偶数,从而有

$$A_k\leqslant\frac{A_{k+1}(A_{k+1}+6)}{4}$$

易让上述右边为偶数,且 A_k 可以取得,此时取.

$$n_k=\frac{A_{k+1}+2}{2}=q_k,r_k=\frac{A_{k+1}}{2}-1=n_k-2$$

如果 $B_k=A_{k+1}=q_k+n_k-1$,那么

$$A_k=qn_k+n_k-1=(q_k+1)n_k-1$$
$$\leqslant\left(\frac{B_k+2}{2}\right)^2-1=\frac{B_k^2+4B_k}{4}=\frac{A_{k+1}^2+4A_{k+1}}{4}$$

所以 $A_k=\dfrac{A_{k+1}(A_{k+1}+6)}{4}$

由上式易得 $A_3=40,A_2=460,A_1=53590$

5. 解:满足条件的自然数集约定称为好集合.

设有一个好集合,显然,如果 $\{a,b,c,d\}$ 是一个好集合,那么 $\left\{\frac{a}{k},\frac{b}{k},\frac{c}{k},\frac{d}{k}\right\}$ 也是一个好集合,其中 k 是 a,b,c,d 的最大公约数.因此以后设 $k=1$.

设 a,b,c,d 中之一 a 有奇质类数 p,则和 $b+c,c+d,b+d$ 也有质因数 p,因而 b,c,d 可被 p 整除(例如 $2d=(b+d)+(c+d)-(b+c)$),与 $k=1$ 矛盾.这表示 a,b,c,d 是 2 的幂.

将已知数按递增顺序排列,得 $a=2^m,b=2^n,c=2^r,d=2^s$,其中 $0=m\leqslant n\leqslant r\leqslant s$

假设 $r\neq 0$,即 $r\geqslant 1$,就有 $(a+c)^2=(1+2r)^2$ 是奇数,不能被偶数整除,矛盾,所以 $r=0$,得 $m=n=r=0$.

故结论成立.

6. 证明:用反证法.

假设结论不成立,如果 a,b,c 有公约数 d,则可转为讨论 $\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}$.所以,不失一般性,可设除了 ± 1 之外,再无其它整数可同时整除 a,b,c.由于结论不成立,故 a,b,c 中必有一数不等于 ± 1,不失一般性,可设 a 即如此.

设 p 是 a 的任一个质约数,则

$$abc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=a^2c+b^2a+c^2b$$

可被 p 整除.因此,p 整除 c^2b,故 p 整除 b 或 c.

不妨设 p 整除 b,于是,在假设之下,p 不整除 c.

设 p^r 是可整除 a 的 p 的最高方幂,p^s 是可整除 b 的 p 的最高方幂.

不妨设 $r\leqslant s$,于是,p^{r+s} 可整除 $abc\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)=a^2b+c^2a+b^2c$

又显然,p^{r+s} 可整除 a^2b.由于 $r\leqslant s$,所以 p^{r+s} 整除 b^2c.

于是,p^{r+s} 整除 c^2a.

但 p 不整除 c,所以 p^{r+s} 整除 a.

然而,p^r 却是整除 a 的 p 的最高方幂,矛盾.

故结论成立.

7. 解:容易验证 $p=2,3,5,7$ 均满足条件.

现来讨论质数 $p\geqslant 11$

若 p 满足条件,则有

(1) $p-4$ 没有大于 4 的质因数;

(2) $p-8$ 没有大于 8 的质因数;

(3) $p-9$ 没有大于 9 的质因数.

由(1)及 $p-4$ 是奇数推出 $p-4=3^a,a\geqslant 2$ ①

由上式及 $p-8$ 是奇数知,$p-8$ 不能被 2 和 3 整除,因此,由(2)可知 $p-8=5^b7^c$ ②

由①式和②式得 $5^b7^c-3^a+4=0,a\geqslant 2$ ③

③式两边被 3 除后得 $(-1)^b+1=0$,所以

$1\leqslant b=2l+1,l\geqslant 0$ ④

由于 $b\geqslant 1$,由③式推出 5 整除 3^a+1,所以

$2\geqslant a=4m+2,m\geqslant 0$ ⑤

由②式知 $p-9=5^b7^c-1$.显见 $p-9$ 不能被 3 整除;由于 $b\geqslant 1$,所以它也不能被 5 整除.

我们来证明必有 $c=0$

若不然,设 $c>0$,则 $p-9$ 也不能被 7 整除.因此,由(3)知必有

$p-9=5^b7^c-1=2^d,c>0$

由此推出 7 整除 2^d+1,而这对任意非负整数 d 都是不可能的(为什么).

由①、②两式及 $c=0$ 推出 $5^b=3^a-4=(3^{2m+1}-2)(3^{2m+1}+2)$

设 $3^{2m+1}-2$ 和 $3^{2m+1}+2$ 的最大公约数为 g,显见,g 为奇数,且 g 整除 $(3^{2m+1}+2)-(3^{2m+1}-2)=4$,所以 $g=1$.由此及 5 是质数推出 $3^{2m+1}-2=1,3^{2m+1}+2=5^b$

因而 $m = 0, b = 1, a = 2$.

所以,由 ① 式知,满足条件的质数仅有 13.

故满足本题条件的全部质数是:2,3,5,7,13.

8. 证明:设 $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_{49}\}$. 因不大于 10 的质数只有四个:2,3,5,7,分别记为 p_1, p_2, p_3, p_4,则 M 中的每个元素 $a_k (k = 1,2,\cdots,49)$ 都可以表示为

$a_k = P_1^{\alpha_k} P_2^{\beta_k} P_3^{\gamma_k} P_4^{\delta_k}$($\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ 都是非负整数).

由于每个指数都只有两种不同的奇偶性,因此数组($\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$)共有 $2^4 = 16$ 种不同的奇偶性. 这样,在 M 中任取 17 个元素,其中必有两个对应的指数组($\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$)的奇偶性相同,设为 a_{i_1}, a_{j_1}($1 \leqslant i_1, j_1 \leqslant 49$),因此 $a_{i_1} \cdot a_{j_1} = p_1^{\alpha_{i_1} + \alpha_{j_1}} p_2^{\beta_{i_1} + \beta_{j_1}} p_3^{\gamma_{i_1} + \gamma_{j_1}} p_4^{\delta_{i_1} + \delta_{j_1}} = b_1^2 (b_1 \in N)$. 在剩下的 47 个元素中,又任取 17 个元素,其中必有两个元素 a_{i_2}, b_{j_2},使 $a_{i_2} a_{j_2} = b_2^2 (b_2 \in N)$

因 $49 = 17 \times 2 + 15$,故在 M 中可选出 17 对这样的正整数对:$(a_{i_1}, a_{j_1}), (a_{i_2}, a_{j_2}), \cdots (a_{i_{17}}, a_{j_{17}})$ 使 $a_{i_k}, a_{j_k} = b_k^2$(其中 $1 \leqslant i_k, j_k \leqslant 49, b_k \in N, k = 1,2,\cdots,17$)

在 17 个正整数 b_k 中同样可选出两个整数 b_s, b_t,使得 $b_s \cdot b_t = B^2 (B \in N)$,因此,在 49 个整数中,存在四个互不相同的元素 $a_{is}, a_{js}, a_{it}, a_{jt}$ 使它们的乘积 $a_{is} \cdot a_{js} \cdot a_{ie} \cdot a_{jt} = b_s^2 \cdot b_t^2 = B^4$,故得证.

9. 解:由平方数的简单性质(1),(3),(4) 分别知,尾数只能为 1,4,5,6,9(除 0 外),最末两位数字不能是 11,55,99 和 66. 因此,最末几位数是相同的非零数只能由 4 组成. 但不能由四个 4 组成(因为,若设 $10^4 k + 4444 = (2m)^2 (k, m \in N)$,则有 $m^2 = 2500k + 1111$,即 m^2 的最末两位数字是 11. 这不可能),故一个平方数的最末几位数字是相同的非零数字,最多可达到三个 4. 又因 444 不是平方数,而 $1444 = 38^2$,故所求的最小完全平方数是 $38^2 = 1444$.

10. 略.

11. 解:假设 n 满足 $d(n)^3 = 4n$,对于每一个素数 p,设 a_p 表示 n 在质因数分解中 p 的指数,因为 $4n$ 是一个立方数,所以

$a_2 = 1 + 3\beta_2, a_p = 3\beta_p$,

其中素数 $p \geqslant 3$,且 $\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_p \cdots$ 是非负整数.

由于 $d(n) = \prod_p (1 + a_p)$,这里 p 取遍所有素数,

所以 $d(n) = (2 + 3\beta_2) \prod_{p \geqslant 3} (1 + 3\beta_p)$

因此,$d(n)$ 不能被 3 整除.

又因为 $d(n)^3 = 4n$,所以 n 也不能被 3 整除.

因此,$\beta_3 = 0$

$d(n)^3 = 4n$ 等价于

$$\frac{2 + 3\beta_2}{2^{1+\beta_2}} = \prod_{p \geqslant 5} \frac{p^{\beta_p}}{1 + 3\beta_p} \qquad ①$$

对于 $p \geqslant 5$,有 $p^{\beta_p} \geqslant 5^{\beta_p} = (1 + 4)^{\beta_p} \geqslant 1 + 4\beta_p$

所以式 ① 的右边大于等于 1,等号当且仅当对于所有素数 $p \geqslant 5, \beta_p = 0$ 时成立.

于是 $\dfrac{2 + 3\beta_2}{2^{1+\beta_2}} \geqslant 1$

即 $2 + 3\beta_2 \geqslant 2(1 + 1)^{\beta_2} \geqslant 2\left[1 + \beta_2 + \dfrac{\beta_2(\beta_2 - 1)}{2}\right] = 2 + \beta_2 + \beta_2^2$

所以,$2\beta_2 \geqslant \beta_2^2, \beta_2 \leqslant 2, \beta_2 = 0,1,2$

如果 $\beta_2 = 0$ 或 2,则 $\dfrac{2 + 3\beta_2}{2^{1+\beta_2}} = 1$,故式 ① 的两边都等于 1,再当 $p \geqslant 5$ 时,$\beta_p = 0$,所以,2 是 n 的惟一素因数. 当 $\beta_2 = 0$ 时,$n = 2, \beta_2 = 2$ 时,$n = 2^7 = 128$

如果 $\beta_2 = 1$,则$\frac{2+3\beta_2}{2^{1+\beta_2}} = \frac{5}{4}$,由式①知,$\beta_5 > 0$,若 $\beta_5 \geqslant 2$,则$\frac{5\beta_5}{1+3\beta_5} > \frac{5}{4}$,因此 $\beta_5 = 1$

将$\frac{5\beta_5}{1+3\beta_5} = \frac{5}{4}$ 代入式①,得

$\beta_p = 0$,其中素数 $p \geqslant 7$.

所以,$n = 2^4 \times 5^3 = 2000$

综上所述,$n = 2,128,2000$

12. 解:设 $n^2 + (n+1)^2 = k^2$(k 为正整数),则$(n,n+1,k)$是勾股数组,又 $\because (n,n+1) = 1$.

由已知结论知存在正整数 $s,t(s>t)$,使得

$$\begin{cases} n = 2st \\ n+1 = s^2 - t^2 \\ k = s^2 + t^2 \end{cases} \quad ①$$

或者

$$\begin{cases} n = s^2 - t^2 \\ n+1 = 2st \\ k = s^2 + t^2 \end{cases} \quad ②$$

若①式成立,则 $s^2 - 2ts - (t^2+1) = 0$,解得

$s = t + \sqrt{2t^2+1}$

$\therefore 2t^2 + 1$ 是完全平方数,

$\because n < 200, \therefore st < 100$

$\because t^2 < 100, \therefore t < 10$

经检验知 $t = 2$,此时推得 $s = 5, n = 20, n+1 = 21, k = 29$

如果②成立,则 $s^2 - 2ts - (t^2-1) = 0$,解得

$s = t + \sqrt{2t^2-1}$

$\therefore 2t^2 - 1$ 是完全平方数,

$\therefore n+1 < 201, \therefore t^2 < 100, t < 10$,经检验得 $t = 1,5$

当 $t = 1$ 时,$s = 2, n = 3, n+1 = 4, k = 5$

当 $t = 5$ 时,$s = 12, n = 119, k = 169$

综合知满足题设的 n 为20,3,119.

第三章　同余问题习题解答

A组

1. 略证:(1)由于 $f(x) = \frac{3x^5+5x^3+7x}{15}$,只需 $3x^5+5x^3+7x \equiv 0 (mod\ 15)$.由于 $15 = 3\times5$,$(3,5) = 1, 3x^5+5x^3+5x^3+7x \equiv 0(mod\ 3)(\because x^3 \equiv x(mod\ 3)), 3x^5+5x^3+7x \equiv 0(mod\ 5)(\because x^5 \equiv x(mod\ 5)$.故得证.

(2)$504 = 7\times8\times9$,7,8,9两两互质,只需证:$n^9 - n^3 \equiv 0(mod\ 7)$ 或$(mod\ 8)$或$(mod\ 9)$.因当 $n \equiv 0,\pm1,\pm2,\pm3(mod\ 7)$ 时,$n^9 \equiv 0,\pm1(mod\ 7), n^3 \equiv 0,\pm1(mod\ 7)$,故 $n^9 - n^3 \equiv 0(mod\ 7)$.同理可证其他.

(3)因 $243^{402} \equiv 3^{402} \equiv 1^{201} \equiv 49(mod\ 4), 243^{402} \equiv (-7)^{402} \equiv 49^{201} \equiv (-1)^{201} \equiv 49(mod\ 25)$,而 $(4,25) \equiv 1, \therefore 243^{402} \equiv 49(mod\ 100)$,即 243^{402} 的最末两位数字是49.

(4)因 $6^{10} \equiv 1(mod\ 11)$,故$(6^{10})^{59} = 6^{590} \equiv 1(mod\ 11), 6^{592} \equiv 6^2 \equiv 3(mod\ 11)$.即 6^{592} 除以11的

余数为 3.

(5) 当 $p=2,5$ 时,可直接验证命题成立.现设质数 $p=2k+1\neq 5$(k 为某些自然数).由于 $2^p+3^p=(2+3)(2^{2k}-2^{2k-1}\cdot 3+2^{2k-2}\cdot 3^2-\cdots+3^{2k})$,因而 2^p+3^p 含有因数 5,故要 2^p+3^p 是完全方幂,必须至少还有一个因数 5,然而由于 $3\equiv -2(mod\ 5)$,

$$
\begin{aligned}
&2^{2k}-2^{2k-1}\cdot 3+2^{2k-2}\cdot 3^2-\cdots+3^{2k}\\
&\equiv 2^{2k}-2^{2k-1}(-2)+2^{2k-2}(-2)^2-\cdots+(-2)^{2k}\\
&\equiv 2^{2k}+2^{2k}+2^{2k}+\cdots+2^{2k}\\
&\equiv (2k+1)2^{2k}\\
&\equiv p\cdot 2^{p-1}(mod\ 5)
\end{aligned}
$$

又 $p\not\equiv 0(mod\ 5)$,$2^{2p-1}\not\equiv 0(mod\ 5)$,故 $P\cdot 2^{p-1}\not\equiv 0(mod\ 5)$.于是,$2^{2k}-2^{2k-1}\cdot 3+2^{2k-2}\cdot 3^2-\cdots+3^{2k}$ 不含因数 5.故命题得证.

2. 由已知 $1978^n\equiv 1978^m(mod\ 1000)$,而 $1000=8\times 125$,所以

$1978^n\equiv 1978^m(mod\ 8)$ ①

$1978^n\equiv 1978^m(mod\ 125)$ ②

因 $n>m\geqslant 1$,且 $(1978^m,125)=1$,则由②式知

$1978^{n-m}\equiv 1(mod\ 125)$ ③

又直接验证知,1978 的各次方幂的个位数字以 8,4,2,6 循环出现的,所以只有 $n-m$ 为 4 的倍数时,③式才能成立,因而可令 $n-m=4k$,由于 $n+m=(n-m)+2m=4k+2m$,因而只需确定出 k 和 m 的最小值.

先确定 k 的最小值:因为 $1978^4=(79\times 25+3)^4\equiv 3^4\equiv 1(mod\ 5)$,$1978^4\equiv 3^4\equiv 6\not\equiv 1(mod\ 25)$,故可令 $1978^4=5t+1$,而 $5\nmid t$,从而 $0\equiv 1978^{n-m}-1=1978^{4k}-1=(5t+1)^k-1\equiv \frac{k(k-1)}{2}.(5t)^2+k\cdot 5t(mod\ 125)$,显然,使上式成立的 k 的最小值为 25.

再确定 m 的最小值,因 $1978\equiv 2(mod\ 8)$,则由①式知,

$2^n\equiv 2^m(mod\ 8)$ ④

由于 $n>m\geqslant 1$,④式显然对 $m=1,2$ 不成立,从而 m 的最小值为 3.

故合于题设条件的 $n+m$ 的最小值为 106.

3. 解:若 $a\equiv b(mod\ 3)$,则 $a^5\equiv b^5(mod\ 3)$,因此,由 $(1+k)\equiv(4+k)(mod\ 3)$ 知,$(1+k)^5\equiv(4+k)^5(mod\ 3)$,$k=0,1,2,\cdots$.这说明数列 $\{n^5\}$ 是以 3 为周期的模 3 周期数列.

因 $1^5+2^5+3^5\equiv 0(mod\ 3)$,$1990=663\times 3+1$,$1990\equiv 1(mod\ 3)$,故 $S\equiv 663\times 0+1\equiv 1(mod\ 3)$.即所求的余数为 1.

4. 证明:因 1986 的四个数码的 7 种不重复的排列:1869,1968,1689,6198,8691,1986,1896 是模 7 的一个完全剩余系,对任给的正整数 N,若 $N\equiv r(mod\ 7)(0\leqslant r\leqslant 6)$,则可在上述完全剩余系中选一个四位数 $\overline{a_0a_1a_2a_3}\equiv 7-r(mod\ 7)$,因而 $N+\overline{a_0a_1a_2a_3}\equiv 0(mod\ 7)$.故命题得证.

5. 令数集 $G=\{K\mid K=a_1+a_2\cdot 3+a_3\cdot 3^2+\cdots+a_{n+1}\cdot 3^n,a_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,n+1\}$.显然 $\max G=1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{2}\overset{记}{=\!=}H$

$\min G=-1-3-3^2-\cdots-3^n=-H$

且 G 中的元素个数有 $3^{n+1}=2H+1$ 个.又因 G 中任意两数之差的绝对值不超过 $2H$,所以 G 中的数对模 $2H+1$ 不同余.因此,G 的元素恰好是模 $2H+1$ 的一个绝对值最小的完系,于是,凡满足 $-H\leqslant K\leqslant H$ 的任意整数都属于 G,且可惟一地表示为:$a_1+a_2\cdot 3+a_3\cdot 3^2+\cdots+a_{n+1}\cdot 3^n$ 形式.

当 $n=7$ 时,$H=3280>1985$,而 $n=6$ 时,$H=1043<1985$.故 $n_1=1,n_2=3,\cdots,n_8=3^7$ 为所求.

6. 解:(1) 因 $(6,15)=3$,而 $3\nmid 10$,故(1)无解.(2) 因 $(6,15)=3$,而 $3\mid 9$,由 $9=3\times 3$ 知,方程有 3 个解.原方程化为 $2x\equiv 3(mod\ 5)$,此方程有解 $x\equiv 4(mod\ 5)$.故原方程的三个解为:$x_1\equiv 4$,$x_2\equiv 4$

$+1\times5\equiv9, x_3\equiv4+2\times5\equiv14(mod\ 5)$.

7. 解:$2x\equiv3(mod\ 5)$ 的解为 $x\equiv4(mod\ 5)$,而 $10x\equiv4(mod\ 2)$ 的解为 $x\equiv0(mod\ 2)$, $x\equiv1(mod\ 2)$. 因此原方程组同解于

$$(\text{I})\begin{cases}x\equiv4(mod\ 5)\\x\equiv0(mod\ 2)\end{cases}\text{或}(\text{II})\begin{cases}x\equiv4(mod\ 5)\\x\equiv1(mod\ 2)\end{cases}$$

(Ⅰ)显然有解　由 $x\equiv4(mod\ 5)$,知 $x\equiv4+5t(t\in Z)$,代入 $x\equiv0(mod\ 2)$ 得 $4+5t\equiv0(mod\ 2)$ 即 $5t\equiv0(mod\ 2)$. 因而 $t\equiv0(mod\ 2)$ 即 $t=2s(s\in Z)$,故 $x=4+5t=4+10s$,即 $x\equiv4(mod\ 10)$,于是可得(Ⅰ)的一个解 $x\equiv4(mod\ 10)$.

(Ⅱ)同上可得解 $x\equiv9(mod\ 10)$

综上,原方程有两解:$x_1\equiv4(mod\ 10)$, $x_2\equiv9(mod\ 10)$

8. 简解:对 n 归纳. $n=1$ 时易证. 如 $n-1$ 时结论成立,即 $a^{2^{n-1}}=1+2^{n+1}x$(x 是一个整数),两边平方,即知 $a^{2^n}=1+2^{n+2}x'$(x' 是一个整数).

9. 解:由费马小定理,条件意味着 $a\equiv b(mod\ p)$,即 $a=b+px$,故 $a^p=(b+px)^p$,由此易知 $a^p=b^p+p^2x'$(x' 是一个整数).

10. (1) $x\equiv13(mod\ 56)$

(2) $x\equiv113(mod\ 120)$

11. 简解:我们有 $2^{pq}-1=(2^{(p-1)q}-1)2^{q-1}+2^{q-1}-1$,交换 p,q 得另一个等式,可见问题中的两方面都成立.(用费马小定理).

12. 提示:设 q 是 2^p+1 的任一素因子,考虑 2 模 q 的阶 k,证明 $k=2$ 或 $2p$(参看例 6).

13. 提示:设 q 是 2^p-1 的任一素因子,考虑 a 模 q 的阶 k,证明 $k=1$ 或 p(参看例 6).

B组

1.(略)　**2.**(略)　**3.**(略)　**4.**(略)

5. 因 $(K,n)=1$,又 $0,1,\cdots,n-1$ 是模 n 的一个完系,所以 $0,K,2K,\cdots,(n-1)K$ 也是模 n 的一个完系,若设 $jK\equiv r_j(mod\ n)$(其中 $1\leqslant r_j\leqslant n-1, j=1,2,\cdots,n-1$)则 $M=\{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\}$. 下只需证 r_{j+1} 与 r_j 同色($1\leqslant j\leqslant n-2$),因为,若如此,当 r_1 的颜色确定后,M 中所有都与 r_1 同色.

由于 $(j+1)K\equiv r_{j+1}(mod\ n)$,则 $r_j+K\equiv r_{j+1}(mod\ n)$,因此,

(1) 若 $r_j+K<n$,则 $r_{j+1}=r_j+K$,于是,由条件(ⅱ)知,r_{j+1} 与 $|r_{j+1}-K|=|r_j+K-K|=r_j$ 同色;

(2) 若 $r_j+K>n$,则 $r_{j+1}=r_j+K-n$,于是,由条件(ⅰ)知,$K-r_{j+1}=n-r_j$ 与 $n-(n-r_j)=r_j$ 同色,又由条件(ⅱ)知,$K-r_{j+1}$ 与 $|K-r_{j+1}-K|=r_{j+1}$ 同色,故 r_{j+1} 与 r_j 同色.

综上知,r_{j+1} 与 r_j 同色. 故命题得证.

6. 证:如果有一组 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 及 $b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 使 $a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n$ 是模 n 的完全剩余系,则

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n&\equiv(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)\\&\equiv(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)\\&\equiv2(1+2+\cdots+n)(mod\ n)\end{aligned}$$

即 $n\mid\frac{n(n+1)}{2}$. 因 n 为偶数,这不能成立.

7. 证:设 $m=p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$ 是 m 的标准分解. 则只须证明,对任意与 m 与素的 a,有 $a^{\varphi(m)}\equiv1(mod\ p_i^{a_i})(i=1,\cdots,k)$.

由 $\varphi(m)$ 的计算公式有,只要证明,对素数 p 及整数 $a\geqslant1$,有 $a^{p^{a-1}(p-1)}\equiv1(mod\ p^a)$. 这不难对 a 归纳来论证,$a=1$ 的情形就是费马小定理.

8. 简证:由 $k!\binom{p-1}{k}=(p-1)\cdots(p-k)\equiv(-1)^kk!(mod\ p)$

并注意 $p \nmid k!$，即得结果.

9. 用同余方法是证明不定方程无解的有效途径.

事实上，

$\because (2k)^2 \equiv 0(mod\ 4).\ (2k+1)^2 \equiv 1(mod\ 4)$

$\therefore n^2+2 \equiv 2$ 或 $3(mod\ 4)$

$\therefore f(z) \equiv 2$ 或 $3(mod)$

$\therefore (-1)^y f(z) \equiv 2,3,7,8(mod\ 10)$ ①

又 $x^2 \equiv 0,1,4,5,6,9(mod\ 10)$ ②

由 ①,② 知，

$x^2+(-1)^y f(z) \not\equiv 0(mod\ 10)$

$\therefore$ 不定方程无整数解.

10. 设每个数的数字之和等于 $s=9k+n, h=0,1,\cdots,8$，则所有这些数被 9 除时有余数 n，同余式 $19n=18n+n=1999(mod\ 9)$ 成立，从而 $n \equiv 1(mod\ 9)$. 即 $n=1$

(ⅰ) 令 $k=0$，即 $s=1$，研究 5 个数字和为 1 的最小自然数，这些数是 1,10,100,1000,10000. 但是它们之和大于 1999.

(ⅱ) 令 $k=1$，即 $s=10$，研究 19 个数字和为 10 的最小自然数. 这些数是 19,28,37,46,55,64,73,82,91,109,118,127,136,145,154,163,172,181,190. 它们之和 $1990<1999$. 数字和为 10 的下一个自然数是 208，它比前面 19 个数至少大 18，所以它们之和不小于 $1990+18=2008>1999$.

(ⅲ) 令 $k \geqslant 2$，即 $s \geqslant 19$，但是，数字和不小于 19 的最小数是 199，任意 19 个这样的数之和显然大于 1999.

因此，满足条件的 19 个数不存在.

11. 由条件，显然，$a_1=0$，并且 $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n-1}a_n-2, n \geqslant 2$

令 $b_n=\dfrac{1}{n-1}a_n$，则上述递推式变为 $nb_{n+1}=(n+1)b_n-2, n \geqslant 2$

即 $n(b_{n+1}-2)=(n+1)(b_n-2)$. 故当 $n \geqslant 2$ 时，有 $b_{n+1}-2=\dfrac{n+1}{n}(b_n-2)$

所以，$b_n-2=\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}\cdots\dfrac{3}{2}(b_2-2)=\left(\dfrac{b_2}{n}-1\right)n$

从而 $a_n=(n-1)\left[\left(\dfrac{a_2}{2}-1\right)n+2\right], n \geqslant 2$

利用 $\{a_n\}$ 为整数数列，可知 $\dfrac{a_2}{2} \in Z$，设 $a_2=2k$，这样.

$a_n=(n-1)[(k-1)n+2], n \geqslant 2$

结合 $2000 \mid a_{1999}$，应有

$1998(1999k-1997) \equiv 0(mod\ 2000)$

即 $(-2)(-k+3) \equiv 0(mod\ 2000)$. 解此同余方程，知 $k \equiv 3(mod\ 1000)$，于是，$a_n=(n-1)\cdot[(1000m+2)n+2], n \geqslant 2$，这里 $m \in Z$，m 为常数.

由上述结果，可知 $2000 \mid a_n$ 的充要条件是 $1000 \mid (n-1)(n+1)$. 这要求 n 为奇数，设 $n=2t+1$，$n \in N_+$，则 $250 \mid t(t+1)$，注意到 $(t,t+1)=1$，而 $250=2\times5^3$，故 $t+1 \geqslant 125$，从而，$n \geqslant 249$. 又由前讨论可知 $2000 \mid a_{249}$.

故最小的满足条件的自然数 n 为 249.

12. 证明：实际上，因素数有无穷多个，取出 n 个互不相同的素数 $p_1,\cdots,p_n$，则 ${p_1}^2,\cdots,{p_n}^2$ 两两互素，故同余方程组

$x \equiv 1(mod\ {p_1}^2),\cdots,x \equiv -n(mod\ {p_n}^2)$ 有解 $n>0$. 取出一个正整数解 x，则 $x+1,\cdots,x+n$ 分别被 $p_1^2,\cdots,p_n^2$ 整除.

13. 证明:先用归纳法证明$2^{\varphi(5^n)}-1$被5^n整除,但不被5^{n+1}整除,由此便易于证明结论.实际上,设2模5^n的阶是k,则$k\mid\varphi(5^n)$.又2模5的阶是4,故由$2^k\equiv1(mod\ 5)$知$4\mid k$,从而$k=4\times5^{l-1}=4(5^l)$.如果$l<n$,则由$2^{\varphi(5^l)}\equiv1(mod\ 5^n)$得$2^{\varphi(5^l)}\equiv1(mod\ 5^{l+1})$.与上面的结论相违.

14. 证明:设$p_{i,j}$表示$(2n+1)^2$个互不相同的素数,$-n\leqslant i,j\leqslant n$,则同余方程组$x\equiv i(mod\ p_{i,j})$,$-n\leqslant i,j\leqslant n$.

及$y\equiv i(mod\ p_{i,j})$,$-n\leqslant i,j\leqslant n$

有解$x=a,y=b$.如有一个既约整点(x',y')与(a,b)之间距离$\leqslant n$,则可设$a-x'=i,b-y'=j$,其中$-n\leqslant i,j\leqslant n$,即$x'=a-i,y'=b-j$.但$p_{i,j}\mid a-i,p_{i,j}\mid b-j$,从而$(x',y')$不是既约整点.

15. 所给条件等价于满足$(a,n)=1$的每个整数a.$a^2\equiv1(mod\ n)$ ①

事实上,若$a\equiv b(mod\ n)$等价于$ab\equiv1(mod\ n)$.则由$ab\equiv1(mod\ n)$,当$b=a$时,即有$a^2\equiv1(mod\ n)$,反之,若$a^2\equiv1(mod\ 1)$.对任意满足$(a,n)=(b,n)=1$的整数a,b,由$a\equiv b(mod\ n)$可得$ab\equiv a^2\equiv1(mod\ n)$.由$ab\equiv1(mod\ n)$,可得$a^2\equiv1\equiv ab(mod\ n)$.从而$a\equiv b(mod\ n)$.因此,所给条件成立.

设$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots\cdots p_l^{e_l}(e_i\geqslant1)$是$n$的质因数分解,我们证明①等价于

$a^2\equiv1(mod\ p_i^{e_i})$ ②

其中　$i=1,2,\cdots,l$,且$(a,p_i)=1$

若式①成立,我们只对$i=1$给予证明.

假设$(a,p_1)=1$,若素数$p_2,p_3,\cdots,p_l$中有若干个整除a,不妨设$p_2,p_3,\cdots,p_k$整除a,$p_{k+1},\cdots,p_l$不能整除a,则$(a+p_1^{e_1}p_{k+1}\cdot p_{k+2}\cdots p_l,n)=1$

由式①有

$(a+p_1^{e_1}p_{k+1}\cdot p_{k+2}\cdots p_l)^2\equiv1(mod\ n)$

所以,$(a+p_1^{e_1}p_{k+1}p_{k+2}\cdots p_l)^2\equiv1(mod\ p_1^{e_1})$

从而可得

$a^2\equiv1(mod\ p_1^{e_1})$

反之,若式②成立,假设$(a,n)=1$,则a与每一个p_i互素,由式②可得$a^2\equiv1(mod\ p_i^{e_i})$.对于$i=1,2,\cdots,l$成立.所以,$a^2\equiv1(mod\ p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdots p_l^{e_l})$.即①式成立.

假设$n=p_1^{e_1}\cdot p_2^{e_2}\cdots p_l^{e_l}$满足条件,如果$p_i=2$,由式②,因为$(3,e^{e_i}=1$,则$3^2\equiv1(mod\ 2^{e_i})$.所以,$e_i\leqslant3$,反之,对所有奇数$a$,有$a^2\equiv1(mod\ 8)$.如果$p_j>2$,由式②,因为$(2,p_j)=1$,则$2^2\equiv1(mod\ p_j^{e_j})$.所以,$p_j=3,e_j=1$.反之,对所有与3互素的整数$a$,有$a^2\equiv1(mod\ 3)$.于是,$n$满足所给条件当且仅当$n$整除$2^3\times3$.所以,$n=2,3,4,6,8,12,24$.

第四章　不定方程

A组

1. 解:设$(x-1)x(x+1)=y^k$,x,y为正整数且$x\geqslant2$.将方程变形为$(x^2-1)x=y^k$,由于$(x,x^2-1)=1$,故x和x^2-1都是正整数的k次幂,即$x^2=(u^2)^k,x^2-1=v^k$,u、v为正整数,易证这不可能.(略)

2. 解:方程可变为$(2x+1)^2=4(y^4+y^3+y^2+y)+1$由于

$4(y^4+y^3+y^2+y)+1=(2y^2+y+1)^2-y^2+2y=(2y^2+y)^2+3y^2+4y+1$,故当$y>2$时或$y<-1$时,有$(2y^2+y)<(2x+1)^2<(2y^2+y+1)^2$.从而$y>2$或$y<-1$时方程无解.当$-1\leqslant y\leqslant2$时,易检验方程共有6组整数解.

3. 解:设三角形边长为整数 a,b,c 由海伦公式易知,问题等价于求方程

$4(a+b+c)=(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ 的所有正整数解.上式右边三个因数的奇偶性相同,左边被 2 整除,所以右边的因数都是偶数.令 $x=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $y=\frac{1}{2}(a+c-b)$, $z=\frac{1}{2}(a+b-c)$.无妨设 $a\leqslant b\leqslant c$,则 $x\geqslant y\geqslant z$,且 $x+y+z=xyz$.由此得 $yz\leqslant 3$,这样可求出 $x=3$, $y=2$, $z=1$,即 $a=3$, $b=4$, $c=5$.

4. 证明:设(x,y,z)是方程 $x^2+y^2=z^2$ ①

的一组本原解.因为 x、z 为奇数,故$\frac{z-x}{2}$, $\frac{z+x}{2}$ 都是整数,并且

$\left(\frac{z-x}{2},\frac{z+x}{2}\right)=\left(\frac{z-x}{2}+\frac{z+x}{2},2\cdot\frac{z+x}{2}\right)=(z,z+x)=(z,x)=1$

由 ① 得$\frac{z-x}{2}\cdot\frac{z+x}{2}=\left(\frac{y}{2}\right)^2$

所以$\frac{z-x}{2}$, $\frac{z+x}{2}$ 都是完全平方,即有整数 $a>b>0$, $(a,b)=1$,使得$\frac{z+x}{2}=a^2$, $\frac{z-x}{2}=b^2$, $y=2ab$,即

$x=a^2-b^2, y=2ab, z=a^2+b^2$ ②

因 x 是奇数,故 a,b 一奇一偶.

反过来,当 a,b 满足上述条件时,我们证明 ② 给出的(x,y,z)是 ① 的本原解,且 $2\mid y$.

首先,易验证 ② 给出的(x,y,z)满足 ①,又显然有 $2\mid y$.我们只需证明$(x,y)=1$.设$(x,y)=d$,则 $d\mid x$, $d\mid z$,即 $d\mid(a^2-b^2)$, $d\mid(a^2+b^2)$,故 $d\mid 2a^2$, $d\mid 2b^2$,推出 $d\mid(2a^2,2b^2)$.即 $d\mid 2(a^2,b^2)$.因$(a,b)=1$,故$(a^2,b^2)=1$,所以 $d\mid 2$.但 a,b 一奇一偶,这意味着 x 是奇数,从而 $d=1$.

5. 证明:x 必是奇数,而方程可化为 $y^2+1=(x+2)[(x-1)^2+3]$,由引理易知矛盾.

引理　设 p 是 $4k+3$ 型的素数,则 $x^2+1\equiv 0(mod\ p)$ 没有整数解.

换言之,对于素数 x, x^2+1 的素因子或者是 2 或者 $\equiv 1(mod\ 4)$

简证:假定有 x 满足$x^2+1\equiv 0(mod\ p)$,则 $x^2\equiv -1(mod\ p)$

故 $x^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}(mod\ p)$,但 $p\nmid x$,于是由费尔马小定理知,$x^{p-1}\equiv 1(mod\ p)$,进而$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1(mod\ p)$,即 $-1\equiv 1(mod\ p)$,得 $p=2$,这不可能.

6. 显然 $x^3>y^3$,得 $x>y$,则 $x\geqslant y+1$.所以 $y^3+2y^2+1=x^3\geqslant(y+1)^3$,即 $y^2+3y\leqslant 0$.故 $-3\leqslant y\leqslant 0$, $y=-3,-2,-1,0$.把 y 的值分别代入原方程即得整数组(x,y)为

$(-2,-3)(1,-2)(1,0)$

7. 由 x,y 的正负性可知需分情况讨论.

(ⅰ)当 $x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$ 时,有 $x^2+y^2=1$,则$0\leqslant x,y\leqslant 1$.若 $x<1$,且 $y<1$,所以$[x]+[y]=0$,矛盾.故 $x=1$ 或 $y=1$,从而方程组有解

$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

(ⅱ)当 $x\geqslant 0$ 且 $y<0$ 时,有 $x^2-y^2=1$

又$[x]\leqslant x$, $[y]\leqslant y$,得 $x+y\geqslant[x]+[y]=1$,则 $x-y>x+y\geqslant 1$

故 $x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)>1$,矛盾.

同理,当 $x<0$ 且 $y\geqslant 0$ 时可导出矛盾.综上所述,方程组的解为

$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$　$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

8. 若正整数对(a,b)满足 $ab^2+b+7\mid a^2b+a+b$,则

$ab^2+b+7\mid a(ab^2+b+7)-b(a^2b+a+b)=7a-b^2$

(ⅰ)当$7a-b^2=0$时,得$7\mid b$.设 $b=7k(k\in N)$.代入得 $a=7k^2$,此时有 $a^2b+a+b=k(ab^2+b+7)$.故$(7k^2,7k)$是解.

(ⅱ) 当 $7a-b^2<0$ 时,有 $b^2-7a>0$,得 $b^2-7a\geqslant ab^2+b+7$.但这是不可能的.

(ⅲ) 当 $7a-b^2>0$ 时,有 $7a-b^2\geqslant ab^2+b+7$,得 $7a>ab^2$,则 $b=1$ 或 2.

若 $b=1$,则 $a+8\mid a^2+a+1$

而 $a^2+a+1\equiv(-8)^2+(-8)+1(mod\ (a+8))$

$\equiv 57(mod\ (a+8))$

所以 $a+8=19$ 或 57,从而 $a=11$ 或 49

此时又得两解

$\begin{cases}a=11\\b=1\end{cases}$ $\begin{cases}a=49\\b=1\end{cases}$

若 $b=2$,由 $ab^2+b+7\mid 7a-b^2$,得

$4a+9\mid 7a-4$

由于 $2(4a+9)>7a-4$,故只能 $4a+9=7a-4$,但这也不可能.

综合(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)知,所有解为

$(11,1),(49,1),(7k^2,7k),(k\in N)$

9. 设 $x+1=a,y+1=b,z+1=c$,则 $a,b,c\geqslant 2$,且 $a,b,c\in N$

原式化为 $a^6+1=(a+1)^c$ ①

对 ① 式两边取 $mod(a+1)$,则有 $(-1)^b+1\equiv 0(mod\ (a+1))$,于是 b 必奇数.

实际上,若 b 为偶数,则 $a=1$ 矛盾.

① 式,即 $(a+1)(a^{b-1}-a^{b-2}+\cdots-a+1)=(a+1)^c$,即 $a^{b-1}-a^{b-2}+\cdots-a+1=(a+1)^{c-1}$ ②

对 ② 式两边取 $mod(a+1)$,则有

$1-(-1)+\cdots-(-1)+1=b\equiv 0(mod\ (a+1))$

故 $(a+1)\mid b$

因为 b 是奇数,所以 a 为偶数

由 ① 式,有

$a^b=(a+1)^c-1$

$=(a+1-1)[(a+1)^{c-1}+(a+1)^{c-2}+\cdots(a+1)+1]$

即 $a^{b-1}=(a+1)^{c-1}+(a+1)^{c-2}+\cdots+(a+1)+1$ ③

对 ③ 式两边取 $mod\ a$,有 $0\equiv 1+1+\cdots+1=c(mod\ a)$.故 $a\mid c$.

所以 c 为偶数

设 $a=2^kt(k\in N,t$ 为奇数$)$. $c=2d,(d\in N)$.

① 式变为

$2^{kb}t^b=(2^kt)^b=(2^kt+1)^{2d}-1$

$=[(2^kt+1)^d+1][(2^kt+1)^d-1]$

因为 $((2^kt+1)^d+1,(2^kt+1)^d-1)=2$,于是只有下面两种情况

(ⅰ) $(2^kt+1)^d+1=2u^b,(2^kt+1)^d-1=2^{kb-1}v^b$,其中 $2\nmid u,2\nmid v,(u,v)=1,uv=t$,此时有 $2^{kd-1}t^d+C_d^12^{k(d-1)-1}t^{d-1}+\cdots+C_d^{d-1}2^{k-1}t+1=u^b$ 所以,$u\mid 1$,即 $u=1$.

于是,$(2^kt+1)^d=1$ 不可能.

(ⅱ) $(2^kt+1)^d+1=2^{kb-1}v^b$. $(2^kt+1)^d-1=2u^b$,其中 u,v 满足的条件同(ⅰ).

此时有 $2^kt\mid 2u^b$,即 $2^kuv\mid 2u^b$,所以,$k=1,v=1$

从而,$2=2^{b-1}-2u^b$,即 $u^b+1=2^{b-2}$

故 $u=1,b=3,a=2,c=2$

综上所述,原方程有唯一一组解 $x=1,y=2,z=1$

10. 若 $x\geqslant 0$,则应有 $x^{1999}(x-1)=1999\times 2000^{1999}$,可知 $x-1>0$,从而利用 $x^{1999}\cdot(x-1)$ 为

单调增函数,可知只能是 $x = 2000$.

若 $x < 0$,令 $x = -y, y > 0$,则 $y^{1999}(y+1) = 1999 \cdot 2000^{1999}$,注意到 1999 为质数,又 y 为整数,故 $1999 \mid y$ 或 $1999 \mid y+1$,分别讨论可知,此时无解,所以,方程只有一个整数解 $x = 2000$.

B 组

1. 解:当 $m \leqslant 4$ 时,解为 $(m,n) = (1,1),(3,3)$. 当 $m \geqslant 5$ 时,模 $5: 1!+2!+3!+4! \equiv 3(mod\ 5)$,而当 $k \geqslant 5$ 时,$k! \equiv 0(mod\ 5)$. 于是 $m \geqslant 5$ 时,有 $1!+2!+\cdots+m! \equiv 3(mod\ 5)$,但 $n^2 \equiv 0, \pm 1(mod\ 5)$.

2. 不失一般性,设 $3^{2x} = t(t \in N)$. 依题意 $[30\sqrt{t}] = t + 81$,即

$t + 81 \leqslant 30\sqrt{t} < t + 82$

转化为不等式组

$$\begin{cases} t^2 - 738t + 6561 \leqslant 0 \\ t^2 - 736t + 6724 > 0 \end{cases}$$

解之,得此不等式组的解集为

$\{t \mid t = 9 \text{ 或 } 727 \leqslant t \leqslant 729, t \in N\}$

故只有 $t = 9,727,728,729$ 这 4 个值满足题设,从而原方程也只有 4 个解.

综上所述,得原方程 4 个解为:

$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = \frac{1}{2}log_3 728, x_4 = \frac{1}{2}log_3 727$

3. 解:设 $1 \leqslant x_1 < \cdots < x_n$ 满足 $x_1 \cdots x_n = x_1 + \cdots + x_n$. 我们有

$x_n \cdot (n-1)! \leqslant x_1 \cdot \cdots \cdot x_n = x_1 + \cdots + x_n < nx_n$,即 $(n-1)! < n$,故 $n = 2$ 或 $n = 3$. 由此易知解只有 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

4. 原方程等价于 $(x+2y)(x-2y) = 3^4 \times 5^2$,即等价于 $\begin{cases} x + 2y = a \\ x - 2y = b \end{cases}$ 有 $\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{4} \end{cases}$ 其中 a, $b \in Z, ab = 3^4 \times 5^2$

为使 x 与 y 是整数,必须且只需 a 与 b 除以 4 有相同的余数,数 a 可能为 $\pm 3^k \times 5^m$,其中 $k = 0,1,2,3,4, m = 0,1,2$,这时 $b = \pm 3^{4-k} \times 5^{2-m}$.

因为 k 与 $4-k$ 有相同的奇偶性,所以 $\pm(-1)^k$ 与 $\pm(-1)^{4-k}$ 相等,从而 $\pm 3^k$ 与 $\pm 3^{4-k}$ 除以 4 的余数相同.

又因为对于任一非负整数 t,5^t 除以 4 的余数都是 1,所以上述 a 与 b 除以 4 的余数相同.

因为满足 $ab = 3^4 \times 5^2$ 的整数 a, b 有 $2 \times 5 \times 3 = 30$ 对,所以符合要求的整数对 (x,y) 有 30 个

5. 证明:易知 x,y,z 中至少有一个偶数,再模 4,推出 x,y,z 都是偶数,设 $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$,代入原方程,重复上述论证,可知 x_1, y_1, z_1,都是偶数,如此进行,推出 x,y,z 均被 2 的任意正整数次幂整除,只有 $x = y = z = 0$.

6. 由 $x - 1 < [x] \leqslant x$,可得

$$a > \left(\frac{a}{2} - 1\right) + \left(\frac{a}{3} - 1\right) + \left(\frac{a}{5} - 1\right) = \frac{31}{30}a - 3$$

$$a \leqslant \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{5} = \frac{31}{30}a$$

则 $0 \leqslant a < 90$.

又 a 是非负整数,故 $a \geqslant \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{a}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{a}{5} - \frac{4}{5}\right)$. 得 $a \leqslant 59$

由题设可知,

$$\left\{\frac{a}{2}\right\} + \left\{\frac{a}{3}\right\} + \left\{\frac{a}{5}\right\} = \frac{1}{30}a$$

且$\left\{\frac{a}{2}\right\}=0,\frac{1}{2}$,$\left\{\frac{a}{3}\right\}=0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}$,$\left\{\frac{a}{5}\right\}=0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$,故共有$(2\times3\times5)=30$个.

又$15i+10j+6k(i=0,1,j=0,1,2,k=0,1,2,3,4)$

7. 证明:设$m=2^k r$,r为奇数,则同余方程有解$x=\frac{r+1}{2}$,$y=\frac{2^{2k+1}+1}{3}$

8. 我们证明:若$n>1,n\in N$,则方程$x(x+1)=y^n$无正整数解.

显然,$y\neq1$,设p是y的一个素因子,则$p^n\mid x(x+1)$

又$x=a^n$,$x+1=b^n$,a,b是自然数,显然$a<b$.

若$n>1$,$b^n-a^n=1$,则

$(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})=1$

即$b-a\geqslant1$,$b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+a^{n-1}>1$,矛盾.故结论成立.

9. 证明:设$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=q$(q是正整数),则

$$a^2+b^2=q(ab+1) \quad ①$$

将①看做a,b的二元方程,显然$a=b$将推出$q=1$.我们设$a>b$,并且在这些解中,取a达到最小的一组解(a_0,b_0).考虑x的一元二次方程

$$x^2-qb_0x+b_0^{\ 2}-q=0 \quad ②$$

它已有解$x=a_0$,另一解是$a_1=qb_0-a_0$,这是整数,若q不是平方数,则$a_0a_1=b_0^{\ 2}-q\neq0$,故$a_1\neq0$,若a_1是负数,则

$a_1^2-qb_0a_1+b_0^{\ 2}-q>-qb_0a_1-q\geqslant q-q=0$.与$x=a_1$是②的根矛盾.于是,若$q$不是平方数,则$a_1$是正整数,即$(b_0,a_1)$是①的正整数解,且

$$a_1=\frac{b_0^{\ 2}-q}{a_0}<\frac{b_0^{\ 2}-1}{b_0}<b_0$$

又$b_0<a_0$,故(b_0,a_1)是①的"更小"的解,矛盾.从而q必是平方数.

10. 令$n=1$得$a[b]=b[a]$ ①

设a,b的分数部分分别为$\{a\},\{b\}$,则

$a([b]n+[\{b\}\cdot n])=b([a]n+[\{a\}n])$

结合①式,得$a[\{b\}n]=b[\{a\}\cdot n]$ ②

设$\{a\}<\frac{1}{k}$,令$n=k$,由②式得

$a[k\{b\}]=0$ ③

若$a\neq0$,则由③式,得$\{b\}<\frac{1}{k}$,于是当a为整数(即$\{a\}=0$)时,必有b为整数.

同样,若$b\neq0$,且$\{b\}<\frac{1}{k}$,则$\{a\}<\frac{1}{k}$

因此,当a,b都不是整数时,有k,使得

$\frac{1}{k+1}\leqslant\{a\},\{b\}<\frac{1}{k}$

令$n=k+1$,则

$1\leqslant n\{b\}<\frac{k+1}{k}\leqslant2$,$1\leqslant n\{a\}<2$

从而由②式导出$a=b$

故本题的解为$(0,a),(a,0),(a,a)$,a为任意实数及(a,b),a,b均为整数.

11. 证明:用反证法.假设结论不对,我们在所有面积为平方数的勾股三角形中选取一个面积最小的,设其边长为$x<y<z$,且$\frac{1}{2}xy$是平方数.与例2类似,现在必有$(x,y)=1$.因$x^2+y^2=z^2$,故存在整数$a>b>0$,a,b一奇一偶,$(a,b)=1$,使得(无妨设为偶数)

$x = a^2 - b^2, y = 2ab, z = a^2 + b^2$

由于$\frac{1}{2}xy = (a-b)(a+b)ab$是平方数，而易知$a-b, a+b, a, b$两两互素，故它们都是平方数，即

$$a = p^2, b = q^2, a+b = u^2, a-b = v^2 \quad ③$$

所以$u^2 - v^2 = 2q^2$，即$(u-v)(u+v) = 2q^2$. 因u, v都是奇数，易知$(u-v)(u+v) = 2$. 于是$u-v$和$u+v$中有一个是$2r^2$，另一个是$(2s)^2$，而$q^2 = 4r^2s^2$. 另一方面，由③得

$$p^2 = a = \frac{1}{2}(u^2+v^2) = \frac{1}{4}[(u+v)^2 + (u-v)^2]$$

$$= \frac{1}{4}[(2r^2)^2 + (2s)^4] = r^4 + 4s^4$$

所以，以$r^2, 2s^2, p$为边的三角形是直角三角形，其面积等于$\frac{1}{2}r^2 \cdot 2s^2 = (rs)^2$是平方数，但

$$(rs)^2 = \frac{q^2}{4} = \frac{b}{4} < (a^2 - b^2)ab = \frac{1}{2}xy$$

于是我们造出了一面积更小的勾股三角形，矛盾！

12. 设$3^n = x^k + y^k$，其中x与y互素（不妨设$x > y$），$k > 1$，n是自然数，显然，x, y中的任何一个都不能被3整除.

如果k是偶数，那么x^k和y^k被3除时余数都是1.这样，x^k与y^k的和除以3时余数是2，而不是3的整数次幂. 于是，推出矛盾，所以k不是偶数.

如果k是奇数且$k > 1$，那么$3^n = (x+y)$

$(x^{k-1} - \cdots + y^{k-1})$. 这样，$x + y = 3^m, m \geqslant 1$

以下证明：$n \geqslant 2m$

因为k可被3整除，取$x_1 = x^{\frac{k}{3}}, y_1 = y^{\frac{k}{3}}$代入后，可以认为$k = 3$，这样，$x^3 + y^3 = 3^n, x + y = 3^m$.

要证明$n \geqslant 2m$，只要证明$x^3 + y^3 \geqslant (x+y)^2$，即证明$x^2 - xy + y^2 \geqslant x + y$

由于$x \geqslant y + 1$，则

$x^2 - x = x(x-1) \geqslant xy$

$(x^2 - x - xy) + (y^2 - y) \geqslant 0$

不等证$n \geqslant 2m$得证.

由恒等式$(x+y)^3 - (x^3 + y^3) = 3xy(x+y)$推出

$$3^{2m-1} - 3^{n-m-1} = xy \quad ①$$

而$2m - 1 \geqslant 1$，且$n - m - 1 \geqslant n - 2m \geqslant 0$ ②

因此，如果②式中至少有一个不等是严格不等号，那么①式中的左端可被3整除，但右端不能被3整除，推出矛盾.

如果$n - m - 1 = n - 2m = 0$，那么，$m = 1, n = 2$且$3^2 = 2^3 + 1^3$. 故$n = 2$.

第五章　存在性问题

A组

1. 提示：考虑边长为$3k, 4k, 5k$的三角形.

2. 提示：注意到$A, B - A, B$是一勾股数组，不难找出三组解，再证明不存在其他解.

3. 提示：考虑模4

4. ∵$\left[\frac{n^2}{A}\right]$是$n^2$除以$A$所得的商，即

$$n^2 = \left[\frac{n^2}{A}\right]A + r, 0 \leqslant r < A.$$

$\therefore n^2 = \left(\left[\frac{n^2}{A}\right]+1\right)A-(A-r)$ ①

显然,$A \neq n$,因为若 $A = n$,就有

$n \mid \left[\frac{n^2}{A}\right]+1 = n+1$.矛盾.

于是,以 n 为界,对 A 讨论.

(ⅰ)当 $0 < A < n$ 时,由①式及 $n \mid \left[\frac{n^2}{A}\right]+1$,知 $n \mid A-r$ ②

而 $0 < A-r < n$ ③

式②与式③矛盾,即不存在 $0 < A < n$ 的 A.

(ⅱ)当 $n < A < n^2$ 时,有 $\left[\frac{n^2}{A}\right] < \frac{n^2}{A} < n$

则 $\left[\frac{n^2}{A}\right]+1 < n+1$ ④

又 $\because n \mid \left[\frac{n^2}{A}\right]+1$,于是,可设

$\left[\frac{n^2}{A}\right]+1 = nB$ ⑤

由式④有 $nB < n+1$

$\therefore$ 仅当 $B = 1$ 时,此式成立.

由式⑤有 $\left[\frac{n^2}{A}\right]+1 = n$,代入①式有

$n^2 = nA-(A-r)$.则

$A = \frac{n^2-r}{n-1} = n+1-\frac{r-1}{n-1}$ ⑥

若 $1 \neq r < n$,则 $r-1 < n-1$,A 不是整数.

若 $r \geqslant n$,则 $\frac{r-1}{n-1} \geqslant 1$,由式⑥有 $A \leqslant n.5A > n$ 矛盾.

所以,只有 $r = 1$,从⑥得 $A = n+1$

于是,存在惟一的 $A = n+1$ 满足题目要求.

5. 要证明 $A(n) = 19 \times 8^n + 17$ 是合数,就要考虑 $A(n)$ 能被哪个素数整除.那么,对于不同的 n 应选取哪个素数为模进行讨论呢?这要从简单的数 n 试验着手.

当 $n = 0$ 时,$A(0) = 36$,显然 $2 \mid A(0)$,$3 \mid A(0)$.但当 $n \geqslant 1$ 时,$A(n)$ 是奇数,所以选择 $mod\ 2$ 不太适当,可以考虑选择 $mod\ 3$.

当 $n = 1$ 时,$A(1) = 19 \times 8 + 17 = 169$,$13 \mid A(1)$

当 $n = 2$ 时,$A(2) = 19 \times 8^2 + 17 = 1233$,$3 \mid A(2)$

当 $n = 3$ 时,$A(3) = 19 \times 8^3 + 17 = 9745$,$5 \mid A(3)$

当 $n = 4$ 时,$A(4) = 19 \times 8^4 + 17 = 77841$,$3 \mid A(4)$

当 $n = 5$ 时,$A(5) = 19 \times 8^5 + 17 = 622609$,$13 \mid A(5)$

由试验可知,其一,当 $n = 0,1,2,3,4,5$ 时,$A(n)$ 都是合数,它们依次有素因数 3,13,3,5,3,13.其次,当 n 是偶数时,$A(n)$ 能被 3 整除,当 n 为 $4k+1$ 型的数时,$A(n)$ 能被 13 整除,当 n 为 $4k+3$ 型的数时,$A(n)$ 能被 5 整除

于是,我们可以对不同的 n 选取不同的模来证明 $A(n)$ 是合数.

证明:设 $A(n) = 19 \times 8^n + 17$

(1) 当 $n = 2k(k \in \{0\} \cup N)$ 时

$$\begin{aligned} A(n) &= 19 \times 8^n + 17 = 19 \times 8^{2k} + 17 \\ &= 18 \times 8^{2k} + 64^k + 17 \\ &= 18 \times 8^{2k} + (63+1)^k + 17 \end{aligned}$$

$\equiv 0(mod\ 3)$

于是,$3 \mid A(2k)$. $A(2k)$ 是合数.

(2) 当 $n = 4k + 1(k \in \{0\} \cup N)$ 时,

$$
\begin{aligned}
A(4k+1) &= 19 \times 8^{4k+1} + 17 \\
&= 13 \times 8^{4k+1} + 6 \times 64^{2k} + 17. \\
&= 13 \times 8^{4k+1} + 39 \times 64^{2k} + 9(65-1)^{2k} + 13 + 4 \\
&\equiv 9(-1)^{2k} + 4 \\
&\equiv 0(mod\ 13)
\end{aligned}
$$

于是,$13 \mid A(4k+1)$, $A(4k+1)$ 是合数.

(3) 当 $n = 4k + 3(k \in \{0\} \cup N)$ 时,

$$
\begin{aligned}
A(4k+3) &= 19 \times 8^{4k+3} + 17 \\
&= 20 \times 8^{4k+3} - 8^{4k+3} + 17 \\
&\equiv -512 \times 64^{2k} + 17 \\
&\equiv -2(65-1)^{2k} + 15 + 2 \\
&\equiv -2(-1)^{2k} + 2 \\
&\equiv 0(mod\ 5)
\end{aligned}
$$

于是,$5 \mid A(4k+3)$, $A(4k+3)$ 是合数.

由上可知,对所有非负整数 n, $A(n)$ 是合数.

6. 只须找到 n 个连续正整数,其中每个都至少有两个不同质数约数即可,如取 n 个连续正整数.

$$a_k = [(n+1)!]^2 + k \quad (k = 2,3,\cdots,n+1)$$

显然,$k \mid a_k$,因 $a_k = k\left[\frac{[(n+1)!]^2}{k} + 1\right]$

又 $k \mid \frac{[(n+1)!]^2}{k}$,则

$$k \nmid \frac{[(n+1)!]^2}{k} + 1$$

所以,k 的质约数都不是 $\frac{[(n+1)!]^2}{k} + 1$ 的质约数.从而,a_k 至少有两个不同质约数.

B组

1. 提示:问题相当于从数列 $\{n^2+3\}$ 中选出一些项 a_i,使 a_i 的质因子整除该项前面的某一项.

2. 提示:作变换 $y = x + u, z = x + v$.

3. 此题有两个关键,其一,是 $n = 2^{k-1}$ 的问题,因为对任意一个给定的正整数 n,总会存在 k,使 $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$,本题是 $n = 2^{k-1}$. 因此,2^{k-1} 恰为满足这个不等式条件的一个整数,所以不等式 $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ 是一个出发点;其二,是 2^{n-1} 能整除 $n!$ 就表示 $n!$ 中2的因子的个数恰为 2^{n-1},这又是一个出发点.

注意到 $n!$ 中含有因子2的个数 m 为

$$m = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{2^{k-1}}\right]$$

如何估计上式呢?在高斯函数的性质中,有一个和式不等式.

$$[x] + [y] \leqslant [x + y]$$

据此,有 $m \leqslant \left[n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right]$

$$= \left[n\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\right] = \left[n - \frac{n}{2^{k-1}}\right]$$

由 $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$ 可知 $1 \leqslant \frac{n}{2^{k-1}} < 2$

从而,$m \leqslant \left[n - \frac{n}{2^{k-1}}\right] \leqslant n - 1$

如果 2^{n-1} 能除 $n!$，则由上式必有 $m = n-1$，从而，$\frac{n}{2^{k-1}} = 1$，即 $n = 2^{k-1}$

反过来，如果 $n = 2^{k-1}$，此时由 m 的表达式

$$
\begin{aligned}
m &= \left[\frac{2^{k-1}}{2}\right]+\left[\frac{2^{k-1}}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{k-1}}{2^{k-1}}\right] \\
&= 2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+2+1 \\
&= 2^{k-1}-1 \\
&= n-1
\end{aligned}
$$

即 $n!$ 中有 $n-1$ 个约数 2，故 $2^{n-1} \mid n!$.

4. 本题是证明存在无穷多组相继三自然数组，它们的素因数的个数是递增的.

解答本题的一个自然想法，即希望 $w(n)$ 尽量小，显然，n 是一个素数的自然数幂，比如 $n = 2^k, 3^k, 5^k (k \in N)$ 等等，就必然有 $w(n) = 1$. 但是，是不是对于每个素数的每个自然数幂，n 都具有题目要求的性质呢?

不妨以 2 的幂进行试验.

设 $n = 2^k, k \in N$

$k = 1$ 时，$w(2) = 1, w(3) = 1, w(4) = 1$，有 $w(2) = w(3) = w(4)$

$k = 2$ 时，$w(4) = 1, w(5) = 1, w(6) = 2$

有 $w(4) = w(5) < w(6)$

$k = 5$ 时，$w(32) = 1, w(33) = 2, w(34) = 2$

有 $w(32) < w(33) = w(34)$

$k = 6$ 时，$w(64) = 1, w(65) = 2, w(66) = 3$

有 $w(64) < w(65) < w(66)$

由以上可看出，当 $n = 2^k$ 时，对 $w(n), w(n+1), w(n+2)$ 有四种可能:

$w(n) = w(n+1) = w(n+2)$

$w(n) = w(n+1) < w(n+2)$

$w(n) < w(n+1) = w(n+2)$

$w(n) < w(n+1) < w(n+2)$

我们期望第四种情形出现，那么，具有哪些条件的 k 才能出现第四种情况呢?

若研究 $w(n)$ 与 $w(n+1)$，这时只有两种情况: $w(n) = w(n+1)$ 及 $w(n) < w(n+1)$. 为了研究这两种可能的情况，先做试验:

假设 $n = 2^k, k \in N$

$k = 1 = 2^0$ 是，$w(2) = w(3)$

$k = 2 = 2^1$ 时，$w(4) = w(5)$

$k = 3$ 时，$w(8) = w(9)$

$k = 4 = 2^2$ 时，$w(16) = w(17)$

$k = 5$ 时，$w(32) < w(33)$

$k = 6$ 时，$w(64) < w(65)$

$k = 7$ 时，$w(128) < w(129)$

$k = 8 = 2^3$ 时，$w(256) = w(257)$

$k = 9$ 时，$w(512) < w(513)$

$k = 10$ 时，$w(1024) < w(1025)$

由以上试验，我们获得什么启示呢?

当 $k = 3$ 和 $k = 2^q$ 时，$w(n) = w(n+1)$

当 $k \neq 3$ 和 $k \neq 2^q$ 时，$w(n) \neq w(n+1)$

为此，我们可换一个角度去思考，即有哪些 k，使得 $w(n) = w(n+1) = 1$?

我们需要证明:是否当且仅当 $k=3$ 及所有的 $k=2^q, q\in\{0\}\cup N$ 时, $n=2^k$ 都具有 $w(n)=w(n+1)=1$?

如果这个结论成立,那就意味着存在无穷多个 $n=2^k$(只要 k 不具有 2^q 及 $k=3$ 的形式). 满足 $w(n)<w(n+1)$.

证明:设 $n=2^k$,则 $w(n)=1$

问题化为求 k,使 $w(2^k+1)=1$

这时有 $2^k+1=p^m$

其中 p 为奇素数, m 为自然数.

对 m 进行奇偶性分析.

当 m 是偶数,即 $m=2l(l\in N)$ 时,有

$2^k=p^m-1=p^{2l}-1=(p^l-1)(p^l+1)$

由于 2 是素数,则 p^l-1 与 p^l+1 都应是 2 的幂,并且 2^l+1 与 2^l-1 相差 2,只有

$$\begin{cases}2^l-1=2\\2^l+1=4\end{cases}$$

由此解得 $p^l=3, l=1, p=3, m=2$,即

$2^k+1=p^m=3^2$

因此, $k=3$

当 m 是奇数时,若 $m>1$,则当

$$\begin{aligned}2^k&=p^m-1\\&=(p-1)(p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+p+1)\end{aligned}$$

及 $p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+p+1$ 是奇数个奇数之和,上式不可能成立.

因此,只能有 $m=1$. 此时, $2^k+1=p$

设 $k=2^q\cdot r$,其中 r 为奇数.

若 $r>1$,又有

$$\begin{aligned}p&=2^k+1=2^{2^{q\cdot r}}+1=(2^{2^q})^r+1\\&\equiv 0(mod\ (2^{2^q}+1))\end{aligned}$$

这与 p 是素数相矛盾.

所以,只有 $r=1$,即 $k=2^q$

由以上看出,当且仅当 $k=3$,或 $k=2^q$ 时, $w(2^k)=w(2^k+1)$

至此,我们已证明了:存在无穷多个 $k\in N, k\neq 3$ 或者 $k\neq 2^q(q\in\{0\}\cup N)$. 均有

$w(2^k)<w(2^k+1)$

下面的任务就是证明在满足 $w(2^k)<w(2^k+1)$ 的无穷多个 $n=2^k$ 中存在着无穷多个 n,同时也满足 $w(2^k+1)<w(2^k+2)$

用反证法

设适合 $w(2^k)<w(2^k+1)$ 的 k 中只有有限个也适合 $w(2^k+1)<w(2^k+2)$

这样,可以找到足够大的 $k_0=2^{q_0}$,使得对每个

$k=k_0+1, k_0+2, \cdots, 2k_0-1<2^{q_0+1}$

均有
$$\begin{aligned}w(2^k+1)&\geqslant w(2^k+2)\\&=w[2(2^{k-1}+1)]\\&=1+w(2^{k-1}+1)\end{aligned}$$

由此可得

$w(2^{2k_0-1}+1)\geqslant 1+w(2^{2k_0-2}+1)\geqslant\cdots\geqslant(k_0-1)+w(2^{k_0}+1)\geqslant k_0$.

因此,如果用 $p_1, p_2, \cdots, p_{k_0}(p_1<p_2<\cdots<p_{k_0})$ 表示相继 k_0 个素数,则

$$2^{2k_0-1}+1\geqslant p_1p_2\cdots p_{k_0}$$
$$=(2\times 3\times 5\times 7\times 11)\cdot(p_6\cdots p_{k_0})$$
$$>4^5\cdot 4^{k_0-5}=2^{2k_0}>2^{2k_0-1}+1$$

引出矛盾.

所以,有无限多个 k,适合

$$w(2^k+1)<w(2^k+2)$$

于是,存在无穷多个 n,使得

$$w(n)<w(n+1)<w(n+2)$$

5. 改证:存在 $y,z\in S$,使

$$x+y=2z \quad ①$$

令 $x=\sum\limits_{i\leqslant m}x_i4^i$($i$ 可取负数).$x_i\in\{0,1,2,3\}$,取 $t=\sum\limits_{i\leqslant m+1}4^i$,由于 t 比 x 多一位,则 $x+t$ 的首位不会进位,故令

$$u=x+t=\sum_{i\leqslant m+1}u_i4^i,u_i\in\{0,1,2,3\}$$

则 $x=u-t=\sum\limits_{i\leqslant m+1}(u_i-1)4^i$

设要找的数为 $y=\sum\limits_{i\leqslant m+1}y_i4^i$,$z=\sum\limits_{i\leqslant m+1}z_i4^i$ 则 ① 式等价于

$$\sum_{i\leqslant m+1}(u_i-1)4^i=\sum_{i\leqslant m+1}(2z_i-y_i)4^i$$

$$\Leftarrow 2z_i-y_i=u_i-1(对一切\ i\leqslant m+1) \quad ②$$

对每个 u_i 可依下表定义满足式 ② 的 y_i,z_i:

u_i	u_i-1	y_i	z_i	$2z_i-y_i$
0	−1	1	0	−1
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	2	0	1	2

则 $y,z\in S$ 合要求(注意 u_i-1 为负,相应 $2z_i-y_i$ 为负,不影响结论).

6. 先证引理:对任意满足 $d^2\mid(c^2+1)$ 的 $c,d\in N$.存在 $b\in N$,使

$$d^2(d^2+1)\mid(b^2+1) \quad ①$$

事实上,$\because d^2\mid(c^2+1)$

$\therefore d^2\mid((c+d^2c+d^3)^2+1)$

又 $\because(c+d^2c+d^3)^2+1=c^2(d^2+1)^2+2c(d^2+1)d^3+d^6+1$

$\therefore(d^2+1)\mid((c+d^2c+d^3)^2+1)$

令 $b=c+d^2c+d^3$,因$(d^2,d^2+1)=1$,故式 ① 成立.

令 $d_n=2^{2n}+1$,$C_n=2^{nd_n}(n=1,2,\cdots)$,则

$$C_n{}^2+1=(d_n-1)^{d_n}+1$$

再将右边用二项式定理展开,知

$$d_n{}^2\mid(C_n{}^2+1)$$

由引理,令 $b_n=C_n+d_n^2C+d_n^3$,$a_n=d_n^2$(因$\{C_n\}$及$\{d_n\}$严格递增,则$\{a_n\}$及$\{b_n\}$严格递增),有

$$a_n(a_n+1)\mid(b_n^2+1)(n=1,2,\cdots)$$

7. 法1:归纳构造合要求的无穷系列$\{2^{n_k}-3\}(k=1,2,\cdots)$

令 $n_1=3$,归纳假设 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 已取定,使 k 个数 $2^{n_j}-3(j=1,2,\cdots,k)$ 两两互质.设这 k 个数

的全部质约数为 $p_1,p_2,\cdots,p_m(p_i\neq 2)$，令

$n_{k+1}=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)+2$

为证 $2^{n_{k+1}}-3$ 与 $2^{n_j}-3(j=1,2,\cdots,k)$ 互质，只须证

$p_i\nmid(2^{n_{k+1}}-3)(i=1,2,\cdots,m)$

事实上，由 Fermat 小定理，$p_i\mid(2-1)$

$\therefore p_i\mid(2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}-1)$

而 $2^{n_{k+1}}-3$

$=4[2^{(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)}-1]+1$

$\therefore p_i\nmid(2^{n_{k+1}}-3)$

法 2. 仍 $n_1=3$，设从数列 $\{2^n-3\}$ 中已取出 k 项两两互质，记为 $u_1,u_2,\cdots,u_k$. 令

$u_{k+1}=2^{\varphi(u)+1}-3$

这里 $u=u_1u_2\cdots u_k$，$\varphi(x)$ 是欧拉函数.

$\because(2,u)=1$，故由 Eurle 定理，$2^{\varphi(u)}\equiv 1(mod\ u)$

$\therefore 2^{\varphi(u)}\equiv 1(mod\ u_i).(i=1,2,\cdots,k)$

$\therefore u_{k+1}\equiv 2-3\equiv -1(mod\ u_i)$

即 $u_{k+1}=A_iu_i(A_i\in N)$，$A_iu_i-u_{k+1}=1$

$\therefore(u_i,u_{k+1})=1$

8.(1)$\because$ 对所有 $k,l(1\leqslant k<l\leqslant p_r)$，有 $N_l-N_k=(l-k)p_1p_2\cdots p_{r-1}$

$\therefore N_l-N_k$ 的全部质因子均小 p_r.

所以，$p_r,p_{r+1},\cdots,p_n$ 均不是 $\{N_1,N_2,\cdots,N_{p_r}\}$ 任两个整数的公因数.

$\because n-r+1$ 个质数 $p_r,p_{r+1},\cdots,p_n$ 中每个数均至多是 $N_1,N_2,\cdots,N_{p_r}$ 的一个因数，且 $p_r>n-r+1$

$\therefore$ 存在 $N_j(1\leqslant j\leqslant p_r)$，使得 $p_r,p_{r+1},\cdots,p_n$ 均不整除 N_j.

由 N_j 的定义知，$p_1,p_2,\cdots,p_{r-1}$ 也均不整除 N_j. 故 $p_i+N_j=jp_1p_2\cdots p_{r-1}-1,\forall i=1,2,\cdots,n.$ ①

(2) 由式 ① 有

$p_{n+1}\leqslant jp_1p_1\cdots p_{r-1}-1<p_1p_2\cdots p_r$ ②

设 $r\leqslant 4$，则有 $7\geqslant p_r>n-r+1\geqslant n-3$

即 $n<10$，矛盾，故 $r\geqslant 5$

由归纳法，易证 $p_{r-1}\geqslant r+2,\forall r\geqslant 5$，从而有

$r\leqslant p_{r-1}-2\leqslant n-(r-1)+1-2=n-r$

因此，$p_1p_2\cdots p_r<p_{r+1}p_{r+2}\cdots p_n$ ③

由式 ②，③ 且当 $n\geqslant 10$ 时，得

$p_{n+1}^2<(p_1p_2\cdots p_r)^2<p_1p_2\cdots p_n$ ④

易验证，当 $n=4,5,\cdots,9$ 时，式 ④ 也成立，但 $n=1,2,3$ 时，式 ④ 不成立.

综上，可得对 $\forall m\geqslant 4$，有 $p_{m+1}^2<p_1p_2\cdots p_m$

第一章　集合　映射　映射法

A组

1. 解:最大体积是$\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

因三角形两边之差小于第三边,按题设数据,一边是 2 的三角形,其余两边只可能是:

(A)3,3;　　(B)5,5;　　(C)4,5;　　(D)3,4.

从而,题设四面体中,以 2 为公共边的两个侧面三角形的其余两边只可能有下列三种情形:

(1)(A)与(B),这时,在图 Ⅱ－D－6－1(左)所示平面四边形 $ABCD$ 中,把$\triangle ABC$沿AB边折摺,使得 $CD=4$,可得题设四面体;由对称性,这样的四面体只有一个.因$3^2+4^2=5^2$,故$CD\perp AC$,$CD\perp BC$,因而 CD 就是这个四面体以ABC为底面时的高,所以体积 $V_1=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot CD=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

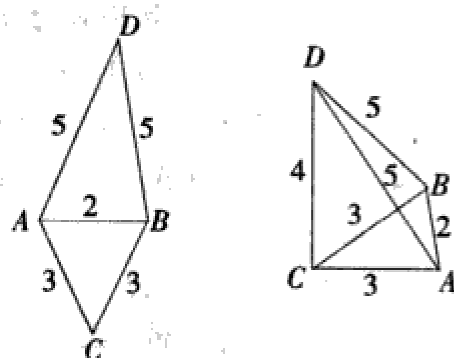


图 Ⅱ－D－6－1

(2)(A)与(C),这时由对称性,两个平面四边形 $ACBD$ 沿AB边折摺使 $CD=5$.得两个题设四面体,它们体积相等,记为 V_2.因 $2^2+4^2<5^2$,则$\angle ABD$为钝角,即 BD 与面ABC斜交,所以 $V_2<\frac{1}{3}BD\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}S_{\triangle ABC}=V_1$

(3)(B)与(C)这样的四面体也有两个,体积也相等,记为 V_3,则 $V_3\leqslant\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABD}\leqslant\frac{1}{2}AD\cdot AB=3<\frac{8}{3}\sqrt{2}=V_1$

2. 证明:过B,C分别作AC,AB的平行线交于D,则$ABCD$为一平行四边形,用两组分别平行于AC及AB的直线把它分成9个全等的小平行四边形,它们每个的面积都是$\frac{2}{9}$,设M,N是BC的三等分点,分两种情况讨论:

(1)若 P 在BM上,则 $S_{\triangle PEC}\geqslant S_{\triangle MGC}=\frac{1}{2}S_{\square MHCG}=\frac{4}{9}$

同理,若 P' 在NC上,则 $S_{\triangle P'FB}\geqslant\frac{4}{9}$

如图 Ⅱ－D－6－2(1)

(2)若P在MN内(如图 Ⅱ－D－6－2(2)),则图中带阴影的各平行四边形面积相等,即 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$,所以 $S_{\square PEAF}=S_1+S_2+S_3+\sigma_3=S_1+(S_2+\sigma_1)+S_3=\frac{4}{9}+S_3>\frac{4}{9}$

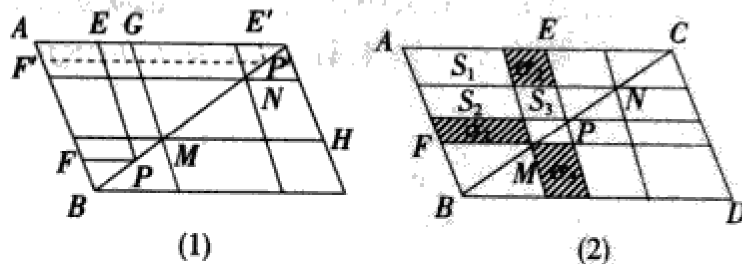


图 Ⅱ－D－6－2

3. 解:若满足题设条件的直线族存在,则由(Ⅰ)知 l_n 的方程为$y-1=k_n(x-1)$,而 $a_n=1-\frac{1}{k}$,$b_n=1-k_n$,$\therefore k_n\neq 0$.由条件(Ⅲ),$k_nk_{n+1}>0$,即诸 k_n 符号相同,由条件(Ⅱ),$k_{n+1}=a_n-b_n=k_n-\frac{1}{k_n}$

当 $k_n > 0$ 时,数列 $\{k_n\}$ 单调递减而有下界 0

当 $k_n < 0$ 时,数列 $\{k_n\}$ 单调递增而有上界 0

所以 $n \to \infty$ 时,k_n 有极限,设为 k,于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} k_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(k_n - \frac{1}{k_n})$,即 $k = k - \frac{1}{k}$,但这是不可能的,所以满足题设条件的直线族不存在.

4. 证:设坐标平面上任两不同整点 $A(a,b)$ 和 $B(c,d)$,分三类情况讨论.

(1)$a \neq c, b \neq d$,中点 $M(\frac{1}{2}(a+c), \frac{1}{2}(b+d))$,$AB$ 的中垂线方程为 $y - \frac{1}{2}(b+d) = \frac{c-a}{b-d}(x - \frac{1}{2}(a+c))$

(2)$a = c, b \neq d$,中点 $M(a, \frac{1}{2}(b+d))$,AB 的中垂线方程为 $y = \frac{1}{2}(b+d)$

(3)$a \neq c, b = d$,中点 $M(\frac{1}{2}(a+c), b)$,AB 的中垂线方程为 $x = \frac{1}{2}(a+c)$

显然,只有在上述三类直线上的点才有可能到平面上某两整点的距离相等,若取 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$,则必然不在上述三类直线上,即 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 到任意两个不同整点的距离都不相等,现将所有整点到点 P 的距离从小到大排成一列:$d_1, d_2, d_3, \cdots$,显然,以 P 为圆心,以 $d_1, d_2, d_3, \cdots$,为半径作的同心圆集合即为所求.

5. 解　令 $S = \{1,2,\cdots,14\}$,$S' = \{1,2,\cdots,10\}$

$T = \{(a_1,a_2,a_3) \mid a_1,a_2,a_3, \in S, a_2 - a_1 \geqslant 3, a_3 - a_2 \geqslant 3\}$

$T' = \{(a_1',a_2',a_3') \mid a_1',a_2',a_3', \in S', a_1' < a_2' < a_3'\}$ 作对应 $(a_1,a_2,a_3) \to (a_1',a_2',a_3')$,这里 $a_1' = a_1, a_2' = a_2 - 2, a_3' = a_3 - 4 (a_1,a_2,a_3 \in T)$

容易验证这是 T 与 T' 之间的一个一一对应,从而 $|T| = |T'|$,从而问题转化为求 $|T'|$,即为在 S' 集中选取三个不同元素的组合数 C_{10}^3.

6. 解　(Ⅰ)S_n 的子集有 2^n 个,可分为两类:① 不含元素 1 的子集(包括 $\varnothing$),② 含有元素 1 的子集,对 ① 中任一集合 $\bar{X}_1$,对应着 ② 中的集合 $X_1 = \bar{X}_1 \cup \{1\}$;反之,② 的任一元素 x_1 都是 ① 中的元素 $\bar{x}_1$ 的象,并满足 $x_1 = \bar{x}_1 \cup \{1\}$,且 ① 中不同集合也对应着 ② 中不同的集合,因此 ①,② 的集合可建立一一对应,又若 $\bar{X}_1$ 是 S_n 的偶子集,则 $\bar{X}_1 \cup \{1\}$ 是奇子集;反之,若 $\bar{X}_1$ 是奇子集,则 $\bar{X}_1 \cup \{1\}$ 是偶子集,因此 S_n 的奇偶子集均为 2^{n-1} 个.

(Ⅱ)设 $A_n(B_n)$ 表 S_n 中全体奇(偶)子集容量之和,又 $a_n(b_n)$ 表 S_n 的奇(偶)子集的个数.

(ⅰ)若 $n(n \geqslant 3)$ 为奇数,S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成:①S_{n-1} 的奇子集;②S_{n-1} 的每个偶子集与集 $\{n\}$ 的并,于是 $A_n = A_{n-1} + (B_{n-1} + n \cdot b_{n-1}) = A_{n-1} + B_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$.类似可得 $B_n = A_{n-1} + B_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$,因此 $A_n = B_n$.

(ⅱ)若 $n(n \geqslant 4)$ 为偶数,S_n 的所有奇子集可由下列两类子集组成:①S_{n-1} 的所有奇子集;②S_{n-1} 的每个奇子集与集 $\{n\}$ 的并,于是 $A_n = A_{n-1} + (A_{n-1} + n \cdot a_{n-1}) = 2A_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$.类似地可得 $B_n = 2B_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}$.由(ⅰ)知 $A_{n-1} = B_{n-1}$.所以 $A_n = B_n$,故对任何 $n \geqslant 3, A_n = B_n$.

(Ⅲ)设 X 在 S_n 的补集为 $\bar{X}$,则 X 与 $\bar{X}$ 的容量之和等于 S_n 的容量,即 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$,因此 S_n 中所有子集的容量之和是 $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = 2^{n-2} \cdot n(n+1)$,因 $An = Bn$,故 $n \geqslant 3$ 时,$A_n = 2^{n-3} \cdot n(n+1)$.

B 组

1. 解　分两种情况讨论,(1) 如果存在甲队,甲胜 A,又胜 B,则对甲、B 两队来说,由于甲胜 B,而且有 A,它胜 B 负于甲,所以由 ② 至少有一队乙,它胜甲而负于 B,取乙为 C,甲为 D 队,即获所证.

(2)若存在甲队,甲负于 A,又负于 B,则对 A、甲两队而言,仿(1) 推理,至少有一队乙,它胜 A 负于甲,取甲为 C 队,乙为 D 队即可.

(3) 如果(1),(2) 两种情形不出现,则其余 $P-2$ 个队中每一队或者胜 A 负于 B,或者胜 B 负于 A. 由于 $P-2\geqslant 3$,而且按②,胜 A 负于 B 的队数大于等于胜 B 负于 A 的队数,所以胜 A 负于 B 的队数大于等于 2,由此知,至少有两队甲、乙都胜 A 负于 B,对甲,乙来说或者甲胜乙,或者乙胜甲,若甲胜乙,取甲为 C 队,乙队为 D 队;若乙胜甲,取甲为 D 队,乙为 C 队,两者都合要求.

2. 证:设 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,$\angle B=60°$,$\angle C=30°$,点 A_1,A_2,A_3;B_1,B_2,B_3;C_1,C_2,C_3 分别是边 AB,BC,CA 的四等分点,下面作三级分类讨论:

(1) 点 A,B,C 同色时,结论显然成立.

(2) 点 A,B,C 异色时,记 A 为红色,写作 A(红),其余各点染色记号类同.

(ⅰ)A(红),B(红),C(蓝) 时,由 $\triangle ABC\backsim\triangle B_1BA\backsim\triangle C_3B_1C\backsim\triangle C_3AA_3\backsim\triangle A_2A_3B_1\backsim\triangle AA_2C_2\backsim\triangle C_2B_2C\backsim\triangle A_2AB_2$ 知,若结论不成立,则有 B_1(蓝)$\to C_3$(红)$\to A_3$(蓝)$\to A_2$(红)$\to C_2$(蓝)$\to B_2$(红)$\to A$(蓝),这与 A(红) 矛盾.

(ⅱ)A(红),B(蓝),C(红) 时,由 $\triangle ABC\backsim\triangle B_1AC\backsim\triangle A_3BB_1\backsim\triangle AC_3A_3\backsim\triangle C_2C_3B_1\backsim\triangle C_2B_2C\backsim\triangle A_2BB_2\backsim\triangle AA_2C_2$ 知,若结论不成立,则有 B_1(蓝)$\to A_3$(红)$\to C_3$(蓝)$\to C_2$(红)$\to B_2$(蓝)$\to A_2$(红)$\to A$(蓝),这与 A(红) 矛盾.

(ⅲ)A(红),B(蓝),C(蓝) 时,又分两种情形:

(a) 当 B_1(红) 时,由 $\triangle ABC\backsim\triangle B_2B_1A\backsim\triangle B_2C_2C\backsim\triangle AA_2C_2\backsim\triangle A_2BB_2$ 知,若结论不成立,则有 B_2(蓝)$\to C_2$(红)$\to A_2$(蓝)$\to B$(红),这与 B(蓝) 矛盾.

(b) 当 B_1(蓝) 时,由 $\triangle ABC\backsim\triangle C_3B_1C\backsim\triangle C_3AA_3\backsim\triangle A_3BB_1$ 知,若结论不成立,则有 C_3(红)$\to A_3$(蓝)$\to B$(红),这与 B(蓝) 矛盾.

3. 解:如图 Ⅱ-D-6-3 所示的七点间连有九条线段满足条件(ⅰ).

不让任何满足要求的连线至少要连 9 条线.

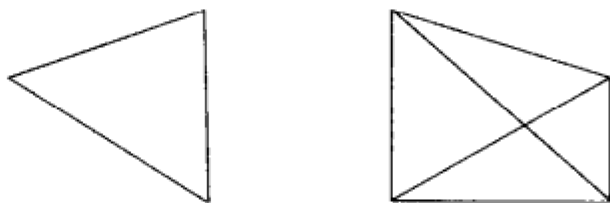


图 Ⅱ-D-6-3

(1) 设有一点 A 至少引出 4 条线,考察其余 6 点的连线,6 点间共可组成 20 个不同的三点组,按题中要求,每组三点间至少连有一条线,共 20 条线(包括重复计数),每条线段恰出现于 4 个三点组,故必有 5 条不同连线,此时至少有 9 条线.

(2) 设有线最多的一点 A 引出 3 条线,设为 AB,AC,AD,因 E,F,G 三点均与 A 无连线,故三点中的任何两点间均有连线.

(ⅰ) 若 E,F,G 中有一点与 B,C,D 均无线,则 B,C,D 三点中的任何两点都有连线.

(ⅱ) 若 E,F,G 每点都至少与 B,C,D 之一有连线,则也至少有 3 条线.

综上,符合要求的任何连线法至少连 9 条线.

4. 解　答案不能一下子看出来,可先试验.我们按从小到大分组的原则来处理.

A_1':1,2,3,4,5,7,9,11,13,48,60,72,80,84,90,

A_2':6,8,10,12,14,…,47,49,…,59,61,…,71,73,…,79,81,82,83,85,…,89,91,…95.

容易看出,无论 96 属于 A_1' 还是 A_2',都将出现三个数,其中两数之积等于第三数($2\times 48=96,8\times 12=96$),下面用反证法证 $n=96$ 为所求.

设 $\{1,2,\cdots,96\}=A_1\cup A_2,A_1\cap A_2=\varnothing$,并且 $A_i(i=1,2)$ 中任意两个数的积都不在 A_i 中.

不妨设 $2\in A_1$:

若 $3,4\in A_1$,则 $6,8,12\in A_2,48\in A_1$,96 无论在 A_1 或 A_2 中,均有等式 $2\times 48=96$ 或 $8\times 12=$

96,矛盾.

若 $3\in A_1,4\in A_2$,则 $6\in A_2,24\in A_1,48\in A_2,8\in A_2$,(因$3\times8=24$)但 $48=6\times8$ 矛盾.

若 $4\in A_1,3\in A_2$,则 $8\in A_2,24\in A_1,96\in A_2,32\in A_1$,(因$3\times32=96$),$16\in A_2,48\in A_1$,但 $48=2\times24$ 矛盾.

若 $3\in A_2,4\in A_2$,则 $12\in A_1,6\in A_2,24\in A_2$,但 $24=4\times6$ 矛盾.

所以总有一个 A_i 中有两个不同的数,它们的积仍在 A_i 中.

其次,由前面的 A_1' 及A_2' 知 95 不再具有题述性质.

5. 解 (1) 设正整数 K 能使集合Z分成满足题中要求的子集A与B,则乙中所有元素之和为偶数.即$\sum_{n=0}^{k}(1990+n)=1990(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)$ 为偶数.于是必有 $k(k+1)\equiv0(mod4)$.由此可知 $k\equiv0(mod4)$ 或 $k\equiv3(mod4)$.换句话说,$k=4m+1$ 与 $k=4m+2(m=0,1,2,\cdots)$ 都不是本题的解.

(2) 设 $k\equiv3(mod4)$,则 $4\mid(k+1)$,故只须令

$$A=\left\{1990+j;j=4m,4m+3,m=0,1,\cdots,[\frac{k}{4}]\right\}$$

$$B=\left\{1990+j;j=4m+1,4m+2,m=0,1,\cdots,[\frac{k}{4}]\right\}$$

即可,所以对所有非负整数 $m,k=4m+3$ 都满足题中要求.

(3) 设 $k\equiv0(mod4)$,令 $k=4m$,因 Z 的项数 $|Z|$ 为奇数,故 $|A|\neq|B|$,不妨设 $|A|>|B|$,于是有 $|A|\geqslant2m+1$, $|B|\leqslant2m$.这样,A 中元素之和不小于$\sum_{n=0}^{2m}(1990+n)$;B 中元素之和不大于$\sum_{n=2m+1}^{4m}(1990+n)$.由此即得$\sum_{n=0}^{2m}(1990+n)\leqslant\sum_{n=2m+1}^{4m}(1990+n)=(2m)^2+\sum_{n=1}^{2m}n$.化简得 $2m^2\geqslant995$,解得 $m\geqslant23,k\geqslant92$.

下证,当 $k\equiv0(mod4)$ 且 $k\geqslant92$ 时,Z 存在满足要求的分解(即充分性).

当 $k=92$ 时,由(2) 可令 $A_1=\{1990,1991,\cdots,1990+46\}$,$B_1=\{1990+47,1990+48,\cdots,1990+92\}$.两集元素之和分别为 $S_{A_1}=1990\times47+1081$,$S_{B_1}=1990\times46+1081+2116$,$S_{B_1}-S_{A_1}=126$.

再令 $A=A_1\cup\{2053\}-\{1990\}$,$B=B_1\cup\{1990\}-\{2053\}$,则集合 A 和B 即为满足要求的分解.

当 $k>92$ 时,我们将前 93 个数分组如上,而将后面的 $k-92=4m$ 个数每相邻四组按(2) 的办法处理即可得满足要求的分解.

综上可知,所求的 k 为$k=4m+3,m=0,1,\cdots$ 和 $k=4m,m=23,24,\cdots$.

6. 证 若不然,从圆周上任何一个黑点出发,沿任何方向的第 $n-1$ 个点都是白点,因而,对于每一个黑点,都可得到两个相应的白点,这就定义了一个由所有黑点到白点的对应,因为每个黑点对应于两个白点,故共有$2n$ 个白点(包括重复计数),又因每个白点至多是两个黑点的对应点,故至少有 n 个不同的白点.这与共有 $2n-1$ 个点矛盾,故知命题成立.

7. 解 (Ⅰ) 延长 AB 至B',AC 至C',使 $|BB'|=|CC'|=\frac{1}{n}|BC|$.作出 $\triangle AB'C'$ 的$n+1$ 格点阵(图略),边 $B'C'$ 上有$n+2$个点,依次编号为$0,1,2,\cdots n+1$.在 $\triangle ABC$ 中边长为$\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形可以按边不平行于 BC,AC 与 AB 分成三类,容易看出,这三类中菱形个数相同,边不平行于 BC 且边长为$\frac{1}{n}|BC|$ 的所有菱形集合记作 S.由正整数 $1,2,\cdots n$ 组成的所有有序数对(i,j),$i<j$ 所构成的集合记作 T,很明显 $|T|=C_n^2$,设菱形 $EFGH\in S$,延长它的两条邻边 HG 与GF,分别交 $B'C'$ 于点i 与j,$1\leqslant i<j\leqslant n$,则$(i,j)\in T$,令$(i,j)$ 是菱形 $EFGH$ 在S 到 T 的映射φ下的像,这样便建立了 S 到T 的映射 φ,容易验证,φ 是一一映射,因此 $|S|=|T|=C_n^2$.所以所求的边长为$\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数为 $3C_n^2$.

（Ⅱ）将平行四边形按边不平行于 BC、AC 与 AB 分为三类，这三类的平行四边形个数应相同．边不平行于 BC 的所有平行四边形集合记作 V．非负整数 $0,1,\cdots n+1$，构成的所有有序四元数组 (i,j,k,l)，$0\leqslant i<j<k<l\leqslant n+1$ 构成的集合记作 W，很明显 $|W|=C_{n+2}^{4}$．设 α 是 V 中平行四边形，延长它的四条边，分别交 $B'C'$ 于点 i,j,k,l，其中 $0\leqslant i<j<k\leqslant n+1$，则 $\beta=(i,j,k,l)\in W$，令 β 是 α 在 V 到 W 的映射 φ 下的像，这样便定义了 V 到 W 的一个映射 φ，容易验证，φ 是一一映射．则 $|V|=|W|=C_{n+2}^{4}$．故所求平行四边形个数为 $3C_{n+2}^{4}$．

8．证　对于 M 的任一十元子集 T，若存在 $K\in T$，使得 $f(T\setminus\{K\})=K$，就称 T 为"好集"．

作映射 f：好集 $T\to T\setminus\{K\}$，$(K\in T)$，则这个映射显然是一个从所有好集的集合到 M 的九元子集的集合单射，从而好集 T 的个数 $\leqslant C_{20}^{9}$．

又 M 的十元子集的个数为 C_{20}^{10}，且 $C_{20}^{10}>C_{20}^{9}$，所以 M 中必存在一个十元子集不是好集，也就是存在一个十元子集 T，对于任何 $K\in T$，都有 $f(T\setminus\{K\})\neq K$．

9．解　设朋友最多的人有 K 个朋友，显然，$k\geqslant m$，若 $k>m$，设 A 有 k 个朋友 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，并记 $S=\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$．

设 $B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}$ 是从 S 中任取的 $m-1$ 个元素，则 $A,B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}$ 这 m 个人有唯一的一个公共朋友，记为 C_i，因 C_i 是 A 的朋友，故 $C_i\in S$，这说明：S 中的每 $m-1$ 个元素对应着 S 中的唯一确定的一个元素．

又若 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}\neq\{B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$，且 $\{A,B_{i_1},\cdots,B_{i_{m-1}}\}$ 与 $\{A,B_{j_1},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$ 对应的唯一的公共朋友分别为 $C_i,C_j\in S$，则必有 $C_i\neq C_j$，否则 $\{B_{i_1},B_{i_2},\cdots,B_{i_{m-1}}\}\cup\{B_{j_1},B_{j_2},\cdots,B_{j_{m-1}}\}$ 至少有 m 个元素，而它们至少有两个朋友 A 和 C，此与已知矛盾，这样一来，我们上述的对应是一个单射，因此 S 中的 $m-1$ 元子集的个数 $C_k^{m-1}\leqslant K$，但 $m\geqslant3$ 时，$m-1\geqslant2$，这时 $C_k^{m-1}>C_k^1=k$．产生矛盾．这说明 $k>m$ 不能成立．

故朋友最多的人的朋友个数的最大值为 m．

第二章　"抽屉"、"容斥"与"极端"

A组

1．证明：因为取出来的有 51 个数，所以抽屉的个数要少于 51 个，并且抽屉内所装的数的性质要求其中的任何一个是另外一个数的整数倍．

因为任何一个正整数都能表示成一个奇数乘 2^n（其中 n 为 $0,1,2,\cdots$，且规定 $2^0=1$），这种表示是惟一的，所以我们可把 $1\sim100$ 的正整数分成如下 50 个抽屉：

(1) $1,1\times2,1\times2^2,1\times2^3,1\times2^4,1\times2^5,1\times2^6$；

(2) $3,3\times2,3\times2^2,3\times2^3,3\times2^4,3\times2^5$；

(3) $5,5\times2,5\times2^2,5\times2^3,5\times2^4$；

(4) $7,7\times2,7\times2^2,7\times2^3$；

(5) $9,9\times2,9\times2^2,9\times2^3$；

……

(25) $49,49\times2$；

(26) 51；

……

(50) 99．

这样，$1\sim100$ 的正整数无重复、无遗漏地放进这 50 个抽屉内了．

从这 100 个数中任取 51 个数，也即从这 51 个抽屉内任取 51 个数，根据抽屉原则，其中必定至少有两个数属于同一个抽屉，显然，在同一个抽屉内的两个数中的一个是另一个的整数倍．

2. 证明：由于任何一个实数均在两个连续整数之间，则 $k_i \leqslant ia < k_i + 1$.($k_i \in \mathbf{Z}, i = 0,1,2,\cdots,n$)，即 $0 \leqslant ia - k_i < 1$，把区间 $[0,1)$ 分成 n 等分，得到 n 个子区间 $[0,\frac{1}{n}),[\frac{1}{n},\frac{2}{n}),\cdots,[\frac{n-1}{n},1)$，于是由 $0 \leqslant ia - k_i < 1$ 得到 $0, a-k, 2a-k_2, \cdots, na-k_n$ 这 $n+1$ 个小于1的非负实数分别在这 n 个子区间中，至少有两个数 $sa-k_s$ 和 $ta-k_t$ $(0 < t < s \leqslant n)$ 属于同一子区间，即 $|(sa-k_s)-(ta-k_t)| < \frac{1}{n}$.

令 $s-t=p, k_s-k_t=q$，则有 $|pa-q| < \frac{1}{n}$

3. 解：设 A_k 是不大于 10^6 且能被 k 整除的正整数集合($k=3,5,7$)，则

$|A_3| = [\frac{10^6}{3}] = 333333$

$|A_5| = [\frac{10^6}{5}] = 2000000$

$|A_7| = [\frac{10^6}{7}] = 142857$

$|A_3 \cap A_5| = [\frac{10^6}{15}] = 66666$

$|A_3 \cap A_7| = [\frac{10^6}{21}] = 47619$

$|A_5 \cap A_7| = [\frac{10^6}{35}] = 28571$

$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = [\frac{10^6}{105}] = 9523$

由容斥公式可得不大于 10^6 且能被3,5,7之一整除的正整数的个数为

$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|$

$= 333333 + 2000000 + 142857 - 66666 - 47619 - 28571 + 9523$

$= 2342857$

4. 解：小于1000的所有正整数集合记作 A，则 $|A| = 999$，A 中被整数 k 整除的所有正整数集合记作 A_k，则 $\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7$ 是 A 中即不被5整除也不被7整除的所有正整数集合，由筛法公式

$|\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| = |A| - |A_5| - |A_7| + |A_5 \cap A_7|$

我们容易算得

$|A_5| = [\frac{999}{5}] = 199$

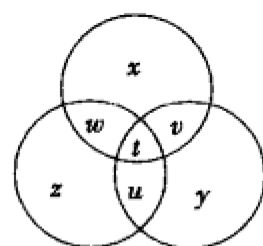
$|A_7| = [\frac{999}{7}] = 142$

$|\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| = [\frac{999}{5 \times 7}] = 28$

所以

$|\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| = 666$

5. 解：如图Ⅰ-D-3-4，可设 x 是只解出 A 题的人数；y 是只解出 B 题的人数；z 是只解出 C 题的人数；v 为只解出 A，B 二题的人数；w 为只解出 A、C 二题的人数；u 为只解出 B、C 二题的人数；t 为同时解出 A、B、C 三题的人数.



图Ⅰ-D-3-4

由题意，在没有解出 A 题的人数中，解出 B 题的人数是解出 C 题人数的2倍，即 $y+u=2(u+2)$，

即 $y = 2z + u$ ①

又 $x = v + t + w + 1$ ②

$x = y + z$ ③

把①代入③得 $x = 3z + u$ ④

由②,③,④得 $v + t + w + 1 + y + z + x = 3x = 3(3z + u)$

而 $v + t + w + y + z + x + u = 3x - 1 + u = 3(3z + u) + u - 1 = 25$

所以 $3(3z + u) + u = 26$

即 $9z + 4u = 26$

$9z \leqslant 26, z \leqslant \frac{26}{9} < \frac{27}{9} = 3$

经验证,当 $z = 0,1$ 时皆与题意不合,而 $z = 2$ 时,$u = 2, y = 6, x = 8, v + w + t = 7$,符合题目要求.

答:只解出 B 题的学生是6个人.

6. 解:设8张卡片任意排成一行的情况为 S,则 $|S| = \frac{P_8^8}{P_2^2 \cdot P_2^2}$;设两张字母 A 的卡片相邻的情况为 A_1,两张字母 B 的卡片相邻的情况为 A_2,则 $|A_1| = |A_2| = \frac{P_7^7}{P_2^2}$.

两张 A 和两张 B 分别相邻的情况为 $A_1 \cap A_2$, $|A_1 \cap A_2| = P_6^6$

相同字母都不相邻的情况为 $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$,则

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$
$$= \frac{P_8^8}{P_2^2 \cdot P_2^2} - \left(\frac{P_7^7}{P_2^2} + \frac{P_7^7}{P_2^2}\right) + P_6^6 = 5760$$

即符合题目要求的排法有5760种.

7. 解:设 A 为四封信装入四个信封的所有可能装法的集合,则 $|A| = 4!$

现把信笺与信封分别编号1,2,3,4,并设 $A_i (i = 1,2,3,4)$ 为 i 号信笺装在 i 号信封的所有可能的装法的集合,则 $|A_i| = (4 - 1)! = 3!$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3|$$
$$= |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = 2!$$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1!$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$

由筛法公式

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| = A - \sum_{i=1}^{4} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$= 4! - 4 \times 3! + 6 \times 2! - 4 \times 1! + 1 = 9$$

答:每个信笺都不在自己对号的信封中的排列为9.

8. 证:以下以英文字母表示选手,用 M_A 表示A的对手集,并假定 A 是赛过场次最多(若有并列的可任选一名)的选手.反设命题不成立,则存在 $B \in M_A$,对此 B 存在$C \notin M_A$ 使得去掉A后,B、C 的对手集都相同.(若不然,对任何 $B \in M_A, C \notin M_A$,去掉 A 后B、C 的对手集都不同,那么命题将为真,因为当 B、C 同属于M_A 或同不属于M_A 的情况去掉A 后B、C 的对手集也必不同),从而 $B \notin M$.

再考虑上述 $C \notin M_A$,又存在 D、E,$D \in M_C$,$E \notin M_C$,使去掉 C 后D、E 的对手集相同.$\because A \notin M_C$,$\therefore D$ 不是A,$\because D \in M_C$,$\therefore B \in M_D$,$\therefore B \in M_E$,但 $C \notin M_E$,而去掉 A 后B、C 的对手集相同,即然 $E \in M_B$ 而$E \notin M_C$,必然 $E = A$.

于是 $M_A = M_B = M_D / \{C\}$,即 M_A 比M_D 少一元素C,A 不是赛过场次最多的选手,此与对 A 的假设矛盾.命题得证.

9. 证:由 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 及递推公式知 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 的奇偶性只有三种:

奇、偶、奇;偶、奇、奇;奇奇偶.注意到 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 7, a_4 = 29, a_5 = 22$,都不是4的倍数,下面证明所有 a_n 都不是4的倍数(当然不能是零).

若不然,设 m 是使 $4 \mid a_m$ 的最小下标,则 $m > 5$. 由 a_m 是偶数,知 a_{m-1}, a_{m-2} 均为奇数, a_{m-3} 为偶数,于是

$$a_m = a_{m-1} - a_{m-2} = 5a_{m-2} - 3a_{m-3} - a_{m-2}$$
$$= 4a_{m-3} - 3a_{m-3}$$

可见, a_{m-3} 为 4 的倍数,此与 m 的最小性矛盾.

10. 解:由于 $C_i \leqslant 39$,故每一横排至少可坐 161 人,于是只要有 13 排至少可坐 $161 \times 13 = 2093$ 人,当然能坐下全部 1990 名学生.

下面运用极端性原则来证明只要安排 12 个横排就够了. 由于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$,只有有限个,故它们的不超过 199 的有限和也只有有限多个. 选取其中最接近 199 的有限和,记为 $C_{i1} + C_{i2} + \cdots + C_{ik}$,将这 k 个学校的学生安排在第一排就坐,然后再对其余的诸 C_i 进行同样的讨论并选取不超过 199 且最接近 199 的有限和,把这些学校的学生排在第二排,依次类推,一直排到第 10 排,并记第 10 排的空位数为 x_{10}.

如果 $x_{10} \geqslant 33$,则余下的未就坐的学校的学生数 C_j 全都不小于 34. 若余下的学校数不超过 4 个,则只要 11 排就可以了,若余下的学校不少于 5 个,则可任取 5 个学校的学生排在第 11 排,这时至少坐了 170 名学生,从而 $x_{11} \leqslant 29 \leqslant x_{10}$,此与 x_{10} 的最小性矛盾. 如果 $x_{10} \leqslant 32$,则前 10 排的空位总数至多为 320,亦即前 10 排已至少坐了 1670 人,故知未安排的学生至多还有 320 人,每排至少可坐 161 人,故只要有 12 排就够了.

最后考察只有 11 排的情形,这时只允许有 199 个空位,为了安排下全部学生,每排空位平均不能达到 19 个. 设 $n = 80$,前 79 个学校各有学生 25 人,最后一个学校派 15 人,则共有 1990 人,除了一排可以安排 $25 \times 7 + 15 = 190$ 人外,其 10 排每排至多安排 7 个学校的 175 人,故 11 排至多安排 1940 人就坐,这说明只有 11 排座位是不够的,由此可知,最少需要 12 排座位.

11. 证:我们先从已知矩形中选取具有最小水平边长的矩形 R_1,并记它的竖直边长为 m_1.

若其余矩形中,存在竖直边长不小于 m_1 的矩形 R_2,依题设知 R_1 包含在 R_2 中,否则其余的无穷多个矩形的竖直边长都小于 m_1,亦即其边长为 $1, 2, \cdots, m-1$ 之一,由抽屉原则知其中一定可以选出两个矩形 R_3, R_4,它们具有相等的竖直长度,那么 R_3 和 R_4 中水平边长较长的一个必包含另一个.

12. 解:在给定点中,选取两点 M, N,使得它们之间的距离最大. 以 M, N 为圆心, $\frac{1}{2}MN$ 为半径分别作圆 C_M, C_N.

设 P 为余下的 995 个点中任意一点,则 $MP \leqslant MN$,即 $\frac{1}{2}MP \leqslant \frac{1}{2}MN$. 于是 MP 的中点一定在 C_M 圆内或圆上. 同理, NP 的中点必在 C_N 圆内或圆上,故在 C_M, C_N 圆内或圆上分别至少有 995 个点,再加上 MN 的中点,有 $2 \cdot 995 + 1 = 1991$ 个红点,即平面上至少有 1991 个红点.

若点 $P_1, P_2, \cdots, P_{997}$ 共线,且 $P_1P_2 = P_2P_3 = \cdots = P_{996}P_{997}$,则对于 $P_{i-1}P_i (i = 2, \cdots, 997)$ 有 996 个中点,而 $P_i (i = 2, 3, \cdots, 996)$ 是 $P_{i-1}P_{i+1}$ 的中点,故又有了另外 995 个红点,于是在这种特殊情况下恰有 1991 个红点.

13. 解　显见 $a = b = c = 0$ 是方程的整数解. 若方程还有整数解,则只考虑正整数解即可.

若 a、b 均为奇,则 a^2b^2 为奇,则 $a^2 + b^2 + c^2$ 为奇,即 c 为奇. 但 $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 (mod 4)$, $a^2b^2 \equiv 1 (mod 4)$ 矛盾;若 a、b 一奇一偶,则 a^2b^2 为偶, $a^2 + b^2 + c^2$ 为偶,即有 c 为奇,但 $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 2 (mod 4)$, $a^2b^2 \equiv 0 (mod 4)$ 矛盾. 因而只能是 a、b 均为偶,此时 c 也为偶. 令 $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$ 得 ${a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2 = 4{a_1}^2{b_1}^2$.

仿上可证, a_1, b_1, c_1 均为偶数,于是重复此过程便得无穷递降的三个序列; $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}, i = 1, 2, \cdots$. 这显然是不可能,故原方程只有唯一的一组零解.

B 组

1. 证　(Ⅰ) 由于点数 $\geqslant 5$,且所有点只染两种颜色,所以至少有三点同色,结论(Ⅰ)成立.

(Ⅱ) 我们从同色三角形集合中,找到一个面积最小的三角形,如果这个三角形的每一条边上都有

一个另一颜色的点，那么我们找到了另一个同色三角形，而且更小的面积.这是不可能的，因此题设的三角形存在.

2. 证　记参加第 j 场比赛的选手为 (a_j,b_j)，并令 $S=\{(a_j,b_j)\mid j=1,2,\cdots,14\}$.

如果子集 $M\subset S$ 中所含选手对中出现的所有选手互不相同，则称 M 为 S 的"良子集".显然，这样的良子集存在且只有有限多个.设其中元素最大的之一为 M_0，它的元素个数为 r.显然只须证明 $r\geqslant 6$.

由于 M_0 是最大良子集，故在 M_0 中未出现过的 $20-2r$ 各选手之间互相没有比赛，又因为每人至少参加一场比赛，故这 $20-2r$ 名选手中每人至少同前 $2r$ 各选手比赛一场.所以，除了 M_0 中的 r 场比赛之外，至少还要进行 $20-2r$ 场比赛，即总比赛场次至少为 $20-2r+r=20-r$.如果 $r\leqslant 5$，则比赛场数至少为15.此与已知矛盾.这就证明了 $r\geqslant 6$.

3. 先证必存在优秀选手.因参赛选手有限，故必存在胜场次数最多的选手.设 A 是胜场次数最多的选手之一.若 A 胜所有其他选手，当然是优秀选手.若不然，设 A 胜 $B_1,\cdots,B_k$，而负于 $B_{k+1},\cdots,B_n$，任取 $B_j(k+1\leqslant j\leqslant n)$，则它不能全胜 $B_1,\cdots,B_k$，否则它比 A 至少多胜一场.因此必存在 $B_i(1\leqslant i\leqslant k)$，使 A 胜 B_i，B_i 胜 B_j，即 A 间接胜 B_j.由 B_j 的任意性即知 A 为优秀选手.

再证优秀选手若唯一，则它必全胜所有其他选手.设 A 是唯一优秀选手.若 A 不全胜所有其他选手，设 A 胜 $B_1,\cdots,B_k$ 而负于 $B_{k+1},\cdots,B_n$，$k<n$.由前面证明知 $B_{k+1},\cdots,B_n$ 中有局部优秀选手 B_j.对任何 $B_i(1\leqslant i\leqslant k)$，都有 B_j 胜 A，A 胜 B_i，即 B_j 间接胜 B_i，从而 B_j 也是优秀选手，矛盾.从而 A 必全胜所有其它选手.

4. 证：以同一个 a_k 为龙头的可能不止一条，我们把其中项数最少的一条龙称为以 a_k 为龙头的"最短龙".

我们指出，最短龙中的每一项都可以作为龙头：设 $a_k,a_{k+1},\cdots,a_m,a_{k+l}$ 是以 a_k 为龙头的最短龙，a_m 为其中一项且不是首项.如果 $a_m,\cdots,a_{k+l}$ 不是一条龙，则它们的算术平均值不大于1988，从而 $a_k,\cdots,a_{m-1}$ 的算术平均值大于1988，故它为一条龙，且它是比最短龙还短的一条龙，矛盾.所以 $a_m,\cdots,a_{k+l}$ 为一条龙且 a_m 为龙头.

从数列(*)中取出以第一个可以作为龙头的项为龙头的最短龙，然后再在余下的项中取出以第一个可以作为龙头的项为龙头的最短龙.依次这样做下去，因为数列(*)是有限的，故在取出有限条龙后就取完了.显然这些最短龙互不相交且这些最短龙中的项恰为(*)中所有可作为龙头的项.

因为每条最短龙中所有项的算术平均值都大于1988，所以这些最短龙中所有项的算术均值也大于1988，即所有可作为龙头的项的算术均值大于1988.

5. 证：因为集合 X 为有限集，故它的偶子集也只有有限多个，所以，必有偶子集 E 使得 $f(E)$ 必能取得最大值且由(ⅰ)知此最大值大于1990.设 P 是使 $f(E)$ 取得最大值的所有偶子集中元素数最少的一个，记 $Q=X-P$，则 P 和 Q 即为所求.

记 S 是 P 的任一非空偶子集，若 $f(s)\leqslant 1990$，则由(ⅱ)知

$f(p-s)=f(p)-f(s)+1990\geqslant f(p)$

此与 P 的选法矛盾，故必有 $f(s)>1990$

设 T 是 Q 的任一偶子集，若 $f(T)>1990$，则由(ⅱ)有 $f(P\cup T)=f(P)+f(T)-1990>f(T)$，矛盾.故必有 $f(T)\leqslant 1990$.

6. 证：考虑集 S 的所有子集及每个子集的元素和的模，这些模数是有限多个，故其中必有模数最大者，不妨设为 A.若 $S-A\neq\varnothing$，再将 $S-A$ 的所有子集中能使其元素之和的模达到最大者取为 B.若 $S-(A\cup B)\neq 0$，则令 $C=S-(A\cup B)$.则这样选取的至多3个子集便满足题中要求.

将 A,B,C 中所有元素之和分别记为 a,b,c.

(1) 对任意 $Z\in A$，若 Z 与 a 的夹角为钝角，则 $-Z$ 与 a 夹锐角，则 $|a+(-Z)|>|a|$，即子集 $A-\{Z\}$ 中所有元素之和的模大于 A 中所有元素之和 a 的模，此与 $|a|$ 的最大性矛盾.即让 A 中任一元素与 a 的夹角都不超过 $90°$，B 中任一元素与 b 的夹角都不超过 $90°$.

(2) 对任意 $\xi\in(S-A)$，ξ 与 a 的夹角都是钝角，否则又有 $|a+\xi|>|a|$，矛盾.同理，c 中的任

一元素 η 与 b 夹角都是钝角,即知 B 中所有元素均与 a 夹钝角,从而其和 b 与 a 夹钝角.同理,c 与 a,c 与 b 都夹钝角,即(ⅲ)成立.

(3)若存在 $\xi \in c$,使 ξ 与 c 夹锐角,则由(2)知,a,b,c,ξ 四数两两之间夹锐角,此不可能,所以,c 中任一元素与 c 夹角都不超过 $90°$.

7. 证　先证 $\{f(n)\}$ 严格递增,或即对任何 $K \in N$,$f(k)$ 是数列 $f(k),f(k+1),f(k+2),\cdots$ 中唯一最小项.

若不然,设 K 是使 $f(k)$ 不是上式中唯一最小自然数,于是有 $m \geqslant 1$,使 $f(k+m)$ 为前式中的一个最小项.因 $f(1) < f(2) < \cdots < f(k-1) < f(k+m)$,故有 $f(k+m) \geqslant k$.考虑 $n = k + m - 1 \geqslant k$,有 $f(n) > f(n) > f(k+m) \geqslant k$,$f(f(n)) \geqslant f(k) \geqslant f(k+m)$,亦即有 $f(k+m) \leqslant f(f(k+m-1))$,此与已知矛盾,故知 $\{f(n)\}$ 严格递增.

下证 $f(n) = n$,设 k 是使 $f(n) = n$ 不成立的最小自然数,则必有 $f(k) \geqslant k+1$.又由 f 的递增性即知 $f(f(k)) \geqslant f(k+1)$ 此与已知矛盾.证毕

8. 证　令 $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = k$,若 k 不是平方数,考虑不定方程

$$a^2 - kab + b^2 = k \qquad (*)$$

显然,这个不定方程的解 (a,b),不会使 $ab < 0$,否则,因 ab 为整数,故有 $-ab \geqslant 1$,这将会导致 $a^2 + b^2 \leqslant 0$.

设 (a_0,b_0) 是 $(*)$ 的解中适合 $a > 0, b > 0$ 且使得 $a + b$ 最小的解,由对称性知可设 $a_0 \geqslant b_0$.固定 k 与 b_0,把 $(*)$ 视为 a 的二次方程.显然,它有一根为 a_0,记它的另一根为 a'.由根与系数的关系可知

$$\begin{cases} a_0 + a' = kb_0 & (\text{Ⅰ}) \\ a_0 a' = b^2 - k & (\text{Ⅱ}) \end{cases}$$

由(Ⅰ)知 a' 为整数.由(Ⅱ)又知 $a' \neq 0$,否则 k 为平方数,与反证假设矛盾.由于 (a',b_0) 是不定方程 $(*)$ 的解,且 $b_0 > 0$,故 $a' > 0$.于是有

$$a' = \frac{{b_0}^2 - k}{a_0} \leqslant \frac{{b_0}^2 - 1}{a_0} \leqslant \frac{{a_0}^2 - 1}{a_0} < a_0$$

可见,(a',b_0) 为 $(*)$ 的解,且 $a' > 0, b_0 > 0$,但 $a' + b_0 < a_0 + b_0$,矛盾.

所以 k 必为完全平方数.

第三章　组合计数方法

A 组

1. 解:因为 $a + d = b + c$,所以,可设 $(a,b,c,d) = (a, a+x, a+y, a+x+y)$,其中 x,y 为整数,且 $0 < x < y$

$$93 = bc - ad = (a+x)(a+y) - a(a+x+y) = xy$$

所以 $(x,y) = (1,93)$ 或 $(x,y) = (3,31)$

第一种情形

$(a,b,c,d) = (a, a+1, a+93, a+94)$ 其中 $a = 1,2,\cdots,405$

第二种情形

$(a,b,c,d) = (a, a+3, a+31, a+34)$ 其中 $a = 1,2,\cdots,465$

显然这两组数组中无重复,所以,满足条件的四元整数组共有 $405 + 465 = 870$(个)

2. 解:因为圆 C_7 与 C_6 是不同的,所以 C_7 与 C_6 至多有 2 个交点,又因 C_7 恰好经过 S 的 7 个点,C_6 恰好经过 S 的 6 个点,所以 S 至少有 11 个点.

圆 C_5 分别与 C_6,C_7 至多有 2 个交点,而 C_5 恰好经过 S 的 5 个点,所以有一个点不在 C_6 与 C_7 上,

因此，至少有 12 个点.

如图 Ⅱ － D － 6 － 4 所示，给出了一个恰含 12 个点的集合 S，其中

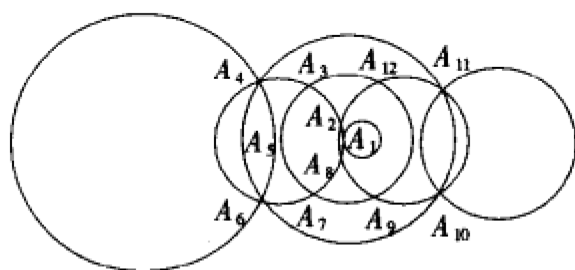


图 Ⅱ － D － 6 － 4

C_7 过点 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_6,A_7,A_8$

C_6 过点 $A_2,A_8,A_9,A_{10},A_{11},A_{12}$

C_5 过点 A_3,A_5,A_7,A_9,A_{12}

C_4 过点 A_4,A_6,A_{10},A_{11}

C_3 过点 A_4,A_5,A_6

C_2 过点 A_{10},A_{11}

C_1 过点 A_1

3. 解：延长 AB 至 B'，AC 至 C'，使 $|BB'|=|CC'|=\frac{1}{n}|BC|$. 可作出正 $\triangle AB'C'$ 的 $n+1$ 格点阵(如图 Ⅱ － D － 6 － 5 所示)，则边 $B'C'$ 上有 $n+2$ 个点，依次编号为 $0,1,2,\cdots,n+1$.

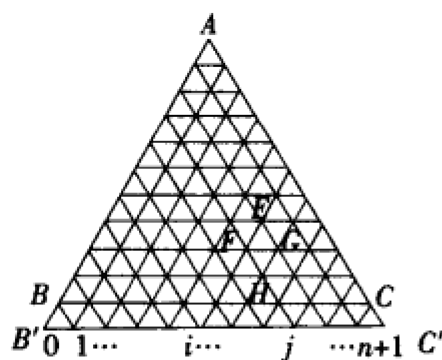


图 Ⅱ － D － 6 － 5

(1) 显然，在 $\triangle ABC$ 中边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形可以分别按边不平行于 BC,AC 与 AB 这三类计算其个数. 这三类中菱形的个数相同，记边不平行于 BC 且边长是 $\frac{1}{n}|BC|$ 的所有菱形的集合为 S，由正整数 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有 i 序数对 (i,j)，$i<j$ 所构成的集合记作 T，则 $|T|=C_n^2$.

记菱形 $EFGH\in S$，延长其两条邻边 FG 与 HG. 分别交 $B'C'$ 于点 i,j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，则 $(i,j)\in T$，如令 (i,j) 是菱形 $EFGH$ 在 S 到 T 的映射 φ 下的象，则就建立了 S 到 T 的映射 φ.

容易验证 φ 是双射.

所以，$|S|=|T|=C_n^2$，所求的边长为 $\frac{1}{n}|BC|$ 的菱形个数有 $3C_n^2$.

(2) 把平行四边形按边不平行于 BC,AC,AB 也可分为三类. 且这三类的平行四边形的个数相同. 记边不平行于 BC 的所有平行四边形集合为 V，非负整数 $0,1,2,\cdots,n+1$ 构成的所有有序四元数组 (i,j,k,l)，$0\leqslant i<j<k<l\leqslant n+1$ 构成的集合记作 W，则 $|W|=C_{n+2}^4$.

设 $a\in V$，延长它的四条边，分别交 $B'C'$ 于点 i、j、k、l，其中 $0\leqslant i<j<k<l\leqslant n+1$，则 $\beta=(i,j,k,l)\in W$，令 β 是 a 在 V 到 W 的映射 φ 下的象，则容易验证这样定义了的 V 到 W 的映射 φ 是双射，因此，$|V|=|W|=C_{n+2}^4$.

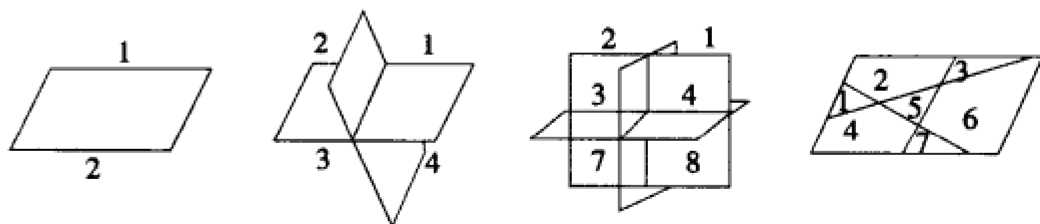
所以，所求平行四边形的个数为 $3C_{n+2}^4$.

4. 解：符合要求且以 4 或 6 为千位数字的数对千位数字来说有 2 种选法，个位数有 4 种选法(从 0，2，4，6，8 中)，对百位数字有 8 种选法，对十位数字有 7 种选法，所以共有 $2\times4\times8\times7=448$ 个这样的整数.

同理，若千位数字为 5，则个位数字有 5 种选法，百位与十位数字分别有 8 种与 7 种，共有 $1\times5\times8\times7=280$ 个符合要求的偶数.

所以，符合要求的偶数共有 $448+280=728$(个).

5. 解:为了将空间分割成最多的部分,n 个平面中的任两个平面都不应平行,任三个平面都不应共线,且所得交线中任两条交线都不应平行. 现设 n 个平面最多能把空间分割成 a_n 个部分,如图Ⅱ-D-6-6,可以看到 $a_7 = 2$,而第二个平面和第一个平面有一条交线,这条交线把第二个平面分成两个部分,每部分又把空间分成两个部分,所以空间增多了两个部分,即 $a_2 = 2 + 2 = 4$,增添第三个平面时,和原来两个平面有两条交线,两条交线把第三个平面分成四个部分,而每部分把空间分成两个部分,所以使空间增多 4 个部分,即 $a_3 = a_2 + 4 = 8$,增加第四个平面时,和原来三个平面有三条交线,三条交线把第四个平面分成 7 个部分. 所以空间增多 7 个部分,即 $a_4 = a_3 + 7 = 15$. 按此规律可得到 $a_5 = a_4 + 11 = 26$,并发现



图Ⅱ-D-6-6

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 2 = a_1 + (1 + 1)$

$a_3 = a_2 + 4 = a_1 + (3 + 1)$

$a_4 = a_3 + 7 = a_1 + (6 + 1)$

$a_5 = a_4 + 11 = a_1 + (10 + 1)$

……

$a_n = a_{n-1} + [(1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)]$

即 $a_n = a_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$

所以得到下列关系式 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

解此关系式得 $a_n = \dfrac{n^3 + 5n + 6}{6}$

6. 解:设 $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = b - a$,则

$a_4 = (b - a) - b = - a, a_5 = - a - (b - a) = - b$

$a_6 = - b - (- a) = - (b - a), a_7 = - (b - a) - b = a$

$a_8 = a - [- (b - a)] = b \cdots\cdots$

可见 $a_{n+6} = a_n$

又因为 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$= a + b + (b - a) + (- a) + (- b) + [- (b - a)]$

$= 0$

即相邻六项之和为零

由 $S_{1492} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{1492} = 1985 \quad 1492 = 6 \times 248 + 4$

得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2b - a = 1985$ ①

由 $S_{1985} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{1985} = 1492 \quad 1985 = 6 \times 330 + 5$

得 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b - a = 1492$ ②

由 ①、② 可解得 $a = - 999, b = 493$

又由 $2001 = 6 \times 333 + 3$,得 $S_{2001} = a_1 + a_2 + a_3 = 2b = 986$

7. 解:设 a_i 表示从 3 种球中允许重复地选取 i 只球的不同方式数,序列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $f(x)$.

我们用$(1+x+x^2)$中的$1,x,x^2$分别表示红球没有被选,被选1次,被选2次;

$(1+x+x^2+x^3)$中的$1,x,x^2,x^3$分别表示白球没有被选,被选1次,2次,3次;

$(1+x)$中的$1,x$表示黑球没有被选,被选1次,于是得到

$$f(x)=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x)$$
$$=1+3x+5x^2+6x^3+5x^4+3x^5+x^6$$

则展开式中x^i的系数就是3种球中每次允许重复地选取i只球的不同方式数a_i,这里x^5的系数为3,故从3种球中按题设限制条件每次允许重复地选取5只球的不同方式数为3,这三种方式是:

红红白白白,红红白白黑,红白白白黑.

8. 设$|A|=\{10$个大学生$\}$,$A_1,A_2,\cdots,A_k$依次为这10个人组成的第$1,2,\cdots k$个运动队,显然$\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$是S类,则由斯佩纳定理知符合题意的运动队最多可组成

$C_{10}^5=252$(个).

B组

9. 证明:首先可以证明,对任意5个点,其中任意三点不共线,在以它们为顶点的三角形中至少有三个非锐角三角形.

因为五点组的凸包(对于平面上有限个点所组成的平面点集,存在一个凸多边形,它包含这个点集的所有点,其顶点与这个点集中的某些点重合,这样的凸多边形称为已知点集的凸包)可能为五边形、四边形、三角形.

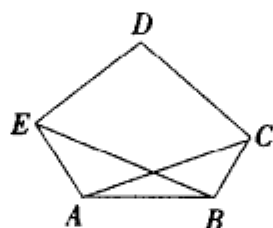
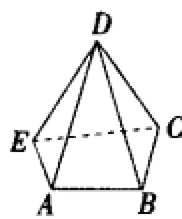


图 Ⅱ - D - 6 - 7



Ⅱ - D - 6 - 8

如凸包为五边形$ABCDE$,则其内角和为540°,其中至少有两个内角为钝角,如两钝角相邻,设为$\angle A,\angle B$,则$\triangle ABC,\triangle ABE$为钝角三角形(如图Ⅱ - D - 6 - 7),且在四边形$ACDE$(或$BCDE$)中至少有一个角为非锐角(四个内角和为360°),则可得到另一个非锐角三角形,如两钝角不相邻(如图Ⅱ - D - 6 - 8)中$\angle C,\angle E$,则$\triangle ADE$与$\triangle BCD$为钝角三角形,连接CE,则四边形$ABCE$中至少有一个非锐角三角形.

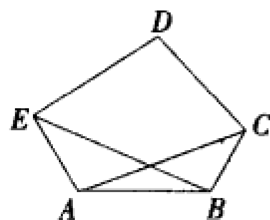
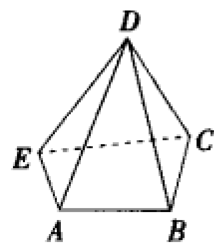


图 Ⅱ - D - 6 - 9

如凸包为四边形$ABCD$,则另一点E即在它的内部,又在它的两条对角线上(如图Ⅱ - D - 6 - 9),其中四个小三角形中至少有一个非锐角三角形,另$\triangle ACE$与$\triangle BDE$显然是钝角三角形.

如凸包为$\triangle ABC$,则另两点D,E在$\triangle ABC$内(如图Ⅰ - D - 6 - 10),对于D点,在$\triangle ABD,\triangle BCD,\triangle CAD$中定有两个非锐角,对于$E$点也可以找到两个非锐角三角形.



Ⅱ - D - 6 - 10

由于100个点,所以有C_{100}^5个五点组,从而至少有$3C_{100}^5$个非锐角三角形,每个三角形至多属于C_{97}^2个五点组,去掉重复,至少有$\dfrac{3C_{100}^5}{C_{97}^2}$个非锐角三角形,而三角形总共有$C_{100}^3$个,因此,非锐角三角形至少有$\dfrac{3C_{100}^5}{C_{97}^2C_{100}^3}=\dfrac{3}{10}$.

即锐角三角形至多有70%.

10. 解:设不具有性质P的排列的集合为A,恰有一个i,使$|x_i-x_{i+1}|=n$的排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$的集合为B.对任一元素$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})\in A$,必存在$k>2$,满足$|x_k-x_1|=n$.

令映射f为:

$(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_{2n}) \to (x_{k-1},x_{k-2},\cdots,x_2,x_1,x_k,x_{k+1},\cdots x_{2n})$

有$(x_{k-1},\cdots,x_2,x_1,x_k,\cdots x_{2n}) \in B$

容易看出,A 中不同的元素,经过映射 f 后所得的像不同,因此

$|A| \leqslant |B| <$ 具有性质 P 的排列数.

11. 解:我们分两种情况进行讨论:

第一种情况:第 9 封信在中午以前送给秘书.

这可能的顺序就是集合

$T=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$ 的可能的子集数目.

事实上,每一个子集都是可能出现的顺序,因为秘书可以把每个不在子集中的号码的信一送来就打完它,而不打别的信,T 有 8 个元素,所以有 $2^8=256$ 个子集(包括空集).

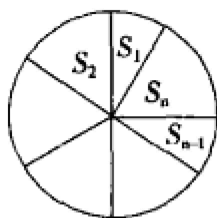
第二种情况:第 9 封信在午饭以后方送到秘书处.

现在的问题是第 9 封信会“夹”在什么地方?事实上,$v=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的每个子集中每个位子都是可能的.例如,中午剩下的信为 6,3,2,那么如果老板在秘书刚打完 6、3 后就把第 9 封信送到,则 6,3,9,2 的打字顺序将会产生.

对于 k 封信的排列有 $k+1$ 个位置可以放入 9,但是,如果 9 位于数列的最前头,也就是说,在秘书下午来之前,老板便把第 9 封信送到,这样便与第一种情况重复,除去这种情况,共有 $\sum_{k=0}^{7} kC_7^k = 7(2^7-1) = 448$.

所以,共有 $256+448=704$ 种可能的打信顺序.

12. 解:如图 Ⅱ-D-6-11 所示,把圆分成 n 个不相等的扇形,依次记这些扇形为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,设染色方法有 a_n 种$(n \geqslant 2)$,易知 $a_1=3,a_2=6,a_3=6$ 当 $n=4$ 时,先涂 S_1,有 3 种涂法;继而涂 S_2,S_3,S_4,均有 2 种涂法,由乘法原理知共有 $3\cdot 2^3$ 种涂法,这种涂法虽然可以保证 S_1 至 S_3 之间相邻扇形不同色,但 S_4 与 S_1 却可能同色,如 S_4 与 S_1 涂色相同,应把 S_4 与 S_1 合成一个扇形,这时的涂色法恰有 a_3 种,于是可得关于 a_3 与 a_4 的方程.



Ⅱ-D-6-11

$a_4 = 3\cdot 2^3 - a_3$

即 $a_4 + a_3 = 3\cdot 2^3$

同理可得 $a_k + a_{k-1} = 3\cdot 2^{k-1} (k \geqslant 3)$.

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } a_n - 2^n &= -(a_{n-1}-2^{n-1}) \\
&= (-1)^2(a_{n-2}-2^{n-1}) \\
&= \cdots\cdots \\
&= (-1)^{n-2}(a_2-2^2) \\
&= (-1)^{n-2}\cdot 2
\end{aligned}
$$

即 $a_n = 2^n + 2(-1)^{n-2} (n \geqslant 2)$.

而 $a_1 = 3$

13. 解:按题设要求,从三年级的学生中选拔 r 名学生,设有 a_r 种选法,则$\{a_r\}$ 的母函数是

$$f(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots)(x^4+x^5+\cdots+x^k+\cdots)(1+x+x^3+x^4+x^5)$$

所要求的 a_{10} 就是上式展开式中 x^{10} 的系数.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^5) \\
&= \frac{x^4}{(1-x)^2}(1+x+x^2+\cdots+x^5) \\
&= x^4(1+x+x^2+\cdots+x^5)(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots) \\
&= x^4\sum_{k=0}^{5}x^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k
\end{aligned}
$$

即只要求出$\sum_{k=0}^{5} x^k \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$中$x^6$的系数即可,显然它等于

$2+3+4+5+6+7=27$

即在题目规定的条件下有27种不同的选法.

14. 解:由题设有$A \subset X, B \subset X, A \cup B = x$,且$A$的元素和等于$B$中元素之和,则$X$的元素和$=$

$1990(k+1)+\frac{1}{2}k(k+1)=$偶数.

所以有$4 \mid k(k+1)$,即$4 \mid k$或$4 \mid (k+1)$也即$k=4m$或$k=4m+3$.

(a)当$k=4m+3$时,X的元素个数是4的倍数,这时,只要从1990开始,每四个连续整数为一组,每组的首末两数列入A,中间两数划入B,则A,B的元素之和相等.

(b)当$k=4m$,则X的元素个数有$4m+1$个,这时A,B的元素个数不等,不妨设$|A|>|B|$,则$|A| \geqslant 2m+1$, $|B| \leqslant 2m$

现估计A的元素和$\geqslant 1990+(1990+1)+\cdots+(1990+2m)$

$$=1990(2m+1)+m(2m+1)$$

$$=1990 \cdot 2m+m(2m+1)+1990 \quad ①$$

估计B的元素和$\leqslant(1990+2m+1)+\cdots+(1990+4m)$

$$=1990 \cdot 2m+2m \cdot 2m+(1+2+\cdots+2m)$$

$$=1990 \cdot 2m+m(2m+1)+4m^2 \quad ②$$

比较①,②可得$4m^2 \geqslant 1990$,即$m^2 \geqslant 497$

所以$m \geqslant 23, k \geqslant 92$.

当$k=92$时,$X=\{1990,1990+1,\cdots,1990+92\}$, $|X|=93$,这还可粗分为

$A_1=\{1990,1990+1,\cdots,1990+46\}$, $|A_1|=47$

$B_1=\{1990+47,1990+48,\cdots,1990+92\}$, $|B_1|=46$

则B_1的元素和$-A_1$的元素和$=46 \times 46-1990=2116-1990=126$.这时只要把$A_1$中的1990与$B_1$中的$1990+63$对换所得的两个集合$A,B$即符合题意.

当$k>92$时,因$k=4m$,所以$k-92$必是4的倍数,这时只要对$k-92$个元素$\{1990+93,1990+94,\cdots 1990+k\}$,换$(a)$处理即可.

综上,所求整数$k=4m+3[m=0,1,2,\cdots$或$k=4m(m \geqslant 23)]$

第四章 组合恒等式,组合不等式

A组

1. 因为$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$,所以原式$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

2. 由$C_{2n-1}^{n}+C_{2n-1}^{n+1}+C_{2n-1}^{n+2}+\cdots+C_{2n-1}^{2n-2}+C_{2n-1}^{2n-1}=C_{2n-1}^{n-1}+C_{2n-1}^{n-2}+C_{2n-1}^{n-3}+\cdots+C_{2n-1}^{1}+C_{2n-1}^{0}$,可知$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{k}=2^{2n-2}$

3. 由$C_n^k C_n^m=C_n^m C_{n-m}^{k-m}$可知,$\sum_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m x^k(1-x)^{n-k}=C_n^m \sum_{k=m}^{n} C_{n-m}^{k-m} x^k(1-x)^{n-k}$

$$=C_n^m x^m[(1-x)+x]^{n-m}=C_n^m x^m$$

4. $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$,所以$\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} C_n^k=C_{2n}^{n-1}$

5. $(1-x^2)^m=(1-x)^m(1+x)^m$, $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k C_m^k C_m^{2n-k}=(-1)^n C_m^n$

6. 由二项式定理知 $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$ 是 $(1+i)^n$ 的实部. 又 $(1+i)^n = 2^{\frac{\pi}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4})$，当 $n = 4m$ 时，其实部为 $2^{2m}\cos m\pi = (-1)^m 2^{2m}$，所以

$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots = (-1)^m 2^{2m}$

7. 设有 $m+n$ 只球，其中红球 m 只，白球 n 只，每次取 k 只球，共有 $C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + \cdots + C_m^kC_n^0$ 种方法，从而

$C_{m+n}^k = C_m^0C_n^k + C_m^1C_n^{k-1} + C_m^2C_n^{k-2} + \cdots + C_m^kC_n^0$

8. 简证：若存在 $|A_i| = 1$，则结论显然成立，下设 $|A_i| \geqslant 2$，取元素个数最少的 $A_i = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，将其余集合按与 A_1 的交分类，即设 $F = \{A\} \cup B_1 \cup \cdots \cup B_k$，则对 $\forall x \in \{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m - A_i\}$，$x$ 在 $B_j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 所含的集合中至多出现一次，于是

$$n \geqslant |\bigcup_{i=1}^{m} A_i| \geqslant \frac{\sum_{j\neq i}|A_j|}{k} + k \geqslant \sum_{j\neq i} 1 + 1 = m$$

9. 证：用 B^j 表示将集合 B 沿顺时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}$ 弧度所得的集合 $(j = 1,2,\cdots)$，显然有

$$L(A^j \cap B) = L(A \cap B^j) \qquad ①$$

设 B 由长度均等于 $\frac{\pi}{m}$ 的 n 个弧 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 组成，即 $B = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$，用 $C_i^j(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,2m)$ 表示 B 中第 i 个弧沿顺时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}$ 弧度后所得的弧，则有

$L(C_1^1 \cap A) + L(C_1^2 \cap A) + \cdots + L(C_1^{2m} \cap A) = L(A)$

$L(C_2^1 \cap A) + L(C_2^2 \cap A) + \cdots + L(C_2^{2m} \cap A) = L(A)$

……

$L(C_n^1 \cap A) + L(C_n^2 \cap A) + \cdots + L(C_n^{2m} \cap A) = L(A)$

将这几个等式相加，得

$L(B^1 \cap A) + L(B^2 \cap A) + \cdots + L(B^{2m} \cap A) = L(A)$，于是上式左端至少有一项

$L(B^k \cap A) \geqslant \frac{n}{2m}L(A)$

又因为 $L(B) = n \cdot \frac{\pi}{m}$，故上式为

$L(B^k \cap A) \geqslant \frac{1}{2\pi}L(A) \cdot L(B)$

再由 ① 式即得

$L(A^k \cap B) \geqslant \frac{1}{2\pi}L(A) \cdot L(B)$

10. 证：将已知三数相乘，由乘法的交换律可调整出新的三个数 $\cos\alpha(1+\sin\alpha)$，$\cos\beta(1+\sin\beta)$，$\cos\gamma(1+\sin\gamma)$，由平均值重叠原理 2 知，只须证明：对任意 $x \in R$ 有

$$|\cos x(1+\sin x)| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

事实上，$|\cos x(1+\sin x)| = \sqrt{\frac{1}{3}(3-3\sin x)(1+\sin x)^3}$

$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{3-3\sin x+3\sin x}{4})^4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

11. 简证：设 A 是符合题意的元素个数最多的集合，$|A| = x$，则对于每一个元素 $a \in X - A$，$A \cup \{a\}$ 中必含 S 中的一个元素(否则与假设矛盾). 设 $a \neq b$，$a, b \in X - A$，则 $A \cup \{a\}$，$A \cup \{b\}$ 包含了 S 中两不同元素，并且与之对应的 A 中两二元子集也不相同，否则，与 S 中的两元素至多有一个公共元及 $A \notin S$ 相矛盾，因此，$B = \{a \mid a \in X - A\}$ 中元素单值对应于 A 的二元子集，从而 $C_x^2 \geqslant n - x$，又 $x \in N^*$，所以 $x \geqslant [\sqrt{2n}]$.

B组

12. $C_{2^m-1}^k = \frac{2^m-1}{1} \cdot \frac{2^m-2}{2} \cdots \frac{2^m-k}{k}$，令 $j = 2^{t_j}P_{tj}(1 \leqslant j \leqslant k)$，$P_j$ 为奇数，于是 $\frac{2^m-j}{j} = \frac{2^m-2^{t_j}P_j}{2^{t_j}P_j} = \frac{2^{m-t_j}-P_j}{P_j}$，它的分子、分母都是奇数，而 $C_{2^m-1}^k$ 是整数，所以它只可能是若干个奇数的乘积，即 $C_{2^m-1}^k$ 为奇数.

13. $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{n-k}{C_{2n}^k} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{n-k}{C_{2n}^k} - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{n-i}{C_{2n}^i} = 0$

14. $\sum_{P=1}^{n}p(C_n^P)^2 = \sum_{P=1}^{n}(pC_n^P)C_n^P = \sum_{P=1}^{n}nC_{n-1}^{P-1}C_n^P = n\sum_{P=1}^{n}C_{n-1}^{P-1}C_n^P$

再比较 $(1+x)^{2n-1} = (1+x)^{n-1}\cdot(1+x)^n$ 两边展开式中 x^{n-1} 的系数可得，

$\sum_{P=1}^{n}C_{n-1}^{P-1}C_P^n = C_{2n-1}^{n-1}$，于是 $\sum_{P=1}^{n}p(C_n^P)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$

15. $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(C_n^k - C_n^{k-1})^2 = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}[(C_n^k)^2 + (C_n^{k-1})^2 - 2C_n^kC_n^{k-1}]$

当 $n = 2m$ 时，左边 $= C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = C_{2n}^n - \frac{n}{n+1}C_{2n}^n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

当 $n = 2m+1$ 时，右边 $= C_{2n}^n - C_{2n}^{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n$

16. 先证明 $\sum_{k=0}^{n}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2 = 2\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2$

令 $j = n-k$，则 $\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2 = \sum_{j=n-[\frac{n-1}{2}]}^{n}(\frac{n-2j}{n}C_n^j)^2$ ②

当 n 为奇数时，$[\frac{n-1}{2}] = \frac{n-1}{2}$，$n - [\frac{n-1}{2}] = \frac{n+1}{2}$，则 ② 式化为

$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-2k}{2}C_n^k)^2 = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2$ 于是

$\sum_{k=0}^{n}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2 = 2\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2$

当 n 为偶数时，$[\frac{n-1}{2}] = \frac{n-2}{2}$，$n - [\frac{n-1}{2}] = \frac{n+2}{n}$，则 ② 式化为

$\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2 = \sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2$

又 $k = \frac{n}{2}$ 时，$\frac{n-2k}{n}C_n^k = 0$，因此，

$\sum_{k=0}^{n}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2 = 2\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2$，$n \in N^*$

又 $\sum_{k=0}^{n}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2 = \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 - \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 + \frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k(C_n^k)^2$

比较 $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$ 两边开展开式中 x^n 的系数得 $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$，比较 $(1+x)^{2n-1} = (1+x)^n(1+x)^{n-1}$ 两边展开式中 x^{n-1} 的系数得 $\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k = C_{2n-1}^{n-1}$，所以，$-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k(C_n^k)^2 =$

$-4C_{2n-1}^{n-1}$，又$\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kC_n^k)^2=4C_{2n-1}^{n-1}$，由此推得$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(\frac{n-2k}{n}C_n^k)^2=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$

17. 略证：集合$\{1,2,\cdots,n\}$的含r个元素的子集有C_n^r个，其中最小数为k的子集有C_{n-k}^{r-1}个($k=1,2,\cdots,n-r+1$)，所以有

$$C_{n-1}^{r-1}+C_{n-2}^{r-1}+\cdots+C_{r-1}^{r-1}=C_n^r \quad ①$$

这些子集中最小数的和为

$$S=C_{n-1}^{r-1}+2C_{n-2}^{r-1}+\cdots+(n-r+1)C_{r-1}^{r-1} \quad ②$$

利用①式可推出$S=C_n^r+C_{n-1}^r+\cdots+C_r^r=C_{n+1}^{r+1}$

所以$F(n,r)=\frac{S}{C_n^r}=C_{n+1}^{r+1}/C_n^r=\frac{n+1}{r+1}$

18. 提示：注意：$(1-x)^{-(p+1)}=\sum_{k\geq0}C_{p+k}^{k}x^k$，$(1-x)^{-(q+1)}=\sum_{k\geq0}C_{q+k}^{q}x^k$，则$(1-x)^{-(p+1)}\cdot(1-x)^{-(q+1)}=\sum_{n\geq0}(\sum_{k\geq0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q})x^n$

19. 提示：将区间$[0,1]$三等分构造抽屉.

20. 证明：构造抽屉：每个抽屉里有三个相异点，共可得C_n^3个抽屉，又由于同一条边会在C_{n-2}^1个抽屉里出现，根据*Dirichlet*抽屉原理知，当$x\cdot C_{n-2}^1\geq 2C_n^3+1$时，才能确保有一个抽屉里有3条边，而这3条边恰好与其中不共线的相异3点构成一个三角形.

这就是说，确保图形中出现三角形的条件是其中边的条数$x\geq\frac{2C_n^3+1}{C_{n-2}^1}$，即$x\geq\frac{n(n-1)(n-2)+3}{3(n-2)}$

21. 解：不存在，若不然，设有非零复数a、b、c及正整数h满足题中要求.

考查复平面，不妨设复数a、b所对应的向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$之间的夹角既不等于0也不等于π，否则3个向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$都共线，问题更简单.取以$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$所在直线为坐标轴，且分别以$|a|$，$|b|$为单位长的斜角坐标系，过坐标轴上每个整点作另一条坐标轴的平行线，两组平行线彼此相交将复平面划分成网络平面，这些网络是彼此全等的平行四边形.

再考察复数c所对应的向量$\boldsymbol{c}$所在的直线，显然，对每个整数m，mc都对应这条直线上的一点，称为c—整点，易见c—整点都位于某个平行四边形中(包括周界).将每个含有c—整点的平行四边形都平移到位于第一象限且以原点为顶点的平行四边形P上并使二者重合，这时，每个c—整点也都随同所在的平行四边形移到P中，记其象点为c'—整点，不难看出，若c—整点对应的复数为mc，其所在的平行四边形的右下方顶点对应的复数为$\lambda a+\mu b$，其中λ,μ都是整数，则其象点c'—整点对应的复数为$mc'—\lambda a-\mu b$.

将所有c'—整点所在的平行四边形P用平行于其边的平行线划分成有限多个小平行四边形，使每个小平行四边形的长对角线的长度都小于h，c'—整点有无穷多个分布在有限多个小平形四边形中，由抽屉原理知必有无穷多个c'—整点落在同一个小平行四边形中，显然，这些c'—整点两两之间的距离都小于$\frac{1}{h}$.

将这样选出的无穷多个c'—整点所对应的复数记为

$$m_ic-\lambda_ia-\mu_ib,i=1,2,\cdots$$

由于第1个c'—整点与后面每点的距离都小于$\frac{1}{h}$，故有

$$|(m_1-m_i)c+(\lambda_i-\lambda_1)a+(\mu_i-\mu_1)b|<\frac{1}{n},i=1,2,\cdots \quad (1)$$

由于这表示不同点对之间的距离，故三数组$\{(\lambda_i-\lambda_1),(\mu_i-\mu_1),(m_i-m_1)\}$互不相同且有无穷多组，又因满足

$$|\lambda_i - \lambda_1| + |\mu_i - \mu_1| + |m_1 - m_i| < 1996$$
的只有有限多组,故必有一组使
$$|\lambda_{i0} - \lambda_1| + |\mu_{i0} - \mu_1| + |m_1 - m_{i_0}| \geqslant 1996$$
使式(1)成立,矛盾.

22. 解 (a) 注意到,若 d 为 n 的因子,则 $\frac{n}{d}$ 也是 n 的因子.于是

$$D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} d_i d_{i+1} = n^2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \frac{1}{d_i d_{i+1}}$$
$$\leqslant n^2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right) < \frac{n^2}{d_1} = n^2$$

故问题(a)成立.

(b) 设 P 为 n 的最小素因子,则

$$d_2 = P, d_{k-1} = \frac{n}{P}, d_k = n$$

若 $n = P$,则 $k = 2, D = P, D \mid n^2$

若 n 为合数,则 $k > 2, D > d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{P}$

如果 $D \mid n^2$,则$\frac{n^2}{D}$ 为 n^2 的因子.但

$$1 < \frac{n^2}{D} < P$$

由于 P 为 n^2 的最小素因子,上式不能成立,故若 $D \mid n^2$,则 n 为素数.

23. 解 令 $r = cn, S_o = 0, S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, k = 1,2,\cdots,n$,于是由式 ① 有

$$0 = \sum_{k=1}^{n} (k - r) a_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (k - r) S_k - \sum_{k=1}^{n} (k - r) S_{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (k - r) S_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1 - r) S_k$$
$$= (n - r) S_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = (n + 1 - r) S_n - \sum_{k=1}^{n} S_k$$

即$\sum_{k=1}^{n} S_k = (n + 1 - r) S_n$ ②

对于 $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$,有

$$js_k - ks_j = j \sum_{l=j+1}^{k} a_l - (k - j) \sum_{l=1}^{j} a_l$$
$$\geqslant j(k - j) a_j - j(k - j) a_j = 0$$

故 $S_j \leqslant \frac{j}{k} \cdot S_k$

由此可得

$$\sum_{j=1}^{k-1} S_j \leqslant \frac{S_k}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{k - 1}{2} \cdot S_k \qquad ③$$

下面我们来证明

$$\sum_{k=m}^{n} S_k \leqslant \frac{n + 1 - m}{2} (S_m + S_n) \qquad ④$$

对于 $k = 0,1,\cdots,n - m$,有

$(n - m - k)(S_{m+k} - S_m)$

$\leqslant k(n-m-k)a_{m+k} \leqslant k(S_n - S_{m+k})$

由此可得

$S_{m+k} \leqslant \frac{1}{n-m}[(n-m-k)S_m + KS_n]$

对 K 求和得到

$$\sum_{k=m}^{n} S_k = \sum_{k=0}^{n-m} S_{m+k}$$
$$\leqslant \frac{1}{n-m}[S_m \sum_{k=0}^{n-m}(n-m-k) + S_n \sum_{k=0}^{n-m} K] = \frac{n+1-m}{2}(S_m + S_n).$$

式 ④ 得证.

在式 ③ 中令 $k = m$,得到

$$\sum_{j=1}^{m-1} S_j \leqslant \frac{m-1}{2} \cdot S_m \qquad ⑤$$

将式 ②、④ 和 ⑤ 结合起来,得到

$$(n+1-r)S_n \leqslant \frac{n}{2} \cdot S_m + \frac{n+1-m}{2} \cdot S_n$$

$$S_n \leqslant \frac{n}{n+1+m-2r} \cdot S_m \leqslant \frac{n}{n-r} \cdot S_m = \frac{1}{1-c} \cdot S_m$$

可见,$M \leqslant \frac{1}{1-c}$

显然,只须证 $M \geqslant \frac{1}{1-c}$

对于 $n \geqslant \frac{1}{2c-1}$,令

$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$

$$a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n$$
$$= \frac{2cnm - m(m+1)}{(n-m)(n+m+1) - 2cn(n-m)}.$$

于是,$a_{m+1} \geqslant 1$ 且满足

$$\sum_{k=1}^{n} ka_k = \sum_{k=1}^{m} K + a_{m+1} \sum_{k=m+1}^{n} K$$
$$= cn \cdot \frac{mn}{n+m+1-2cn} = cn \sum_{k=1}^{n} a_k$$

即满足条件 ①

注意到 $cn - 1 < m \leqslant cn$,有

$$M \geqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{m} a_k} = \frac{n}{n+m+1-2cn}$$

$$\geqslant \frac{n}{n-cn+1} = \frac{1}{1-c+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n(1-c)}}$$

$$\geqslant \frac{1}{1-c}(1 - \frac{1}{n(1-c)})$$

$$= \frac{1}{1-c} - \frac{1}{n(1-c)^2}, \forall_n \gg 1$$

由此可得 $m \geqslant \frac{1}{1-c}$

第五章　设计与构造

A组

1. 解：设 B、C、D、E、F 是各小路连通公路的道口.

(1) 车站设在 D 点最好.

(2) 如果车站设在公路上的 S 点，不妨设 S 在 D、C 之间，用 $u_1,u_2,\cdots u_7$ 表示 S 到各工厂的路程，$w=u_1+u_2+\cdots+u_7$. 当 S 向 C 移动一段路程 d 时，u_1,u_2 各减少 d，但 u_3,u_4,u_5,u_6,u_7 各增加 d；所以 w 增加 $5d-2d=3d$，当 S 自 C 再向 B 移动一段路程 d' 时，w 又增加 $6d'-d'=5d'$. 如果 S 自 B 向北再移动一段路程 d'' 时，w 就再增加 $7d''$，这说明 S 在 D 点以北的任何地方都不如在 D 点好. 同样，可以证明 S 在 D 点以南的任何地方都不如在点 D 好.

2. (1) 不妨设 $T_1<T_2<\cdots<T_{10}$. 由排序原理，依 T_i 由小到大的顺序接水，所花总时间 $10T_1+9T_2+\cdots+2T_9+T_{10}$ 最少.

(2) 当有两个水龙头可用时，先将十人分配到两个水龙头上，不妨设第一个水龙头上为 $T_{11},T_{12},\cdots,T_{1n}$，第二个水龙头上为 $T_{21},T_{22},\cdots,T_{2m}$，其中 $m+n=10$，使得 $|(T_{11}+T_{12}+\cdots+T_{1n})-(T_{21}+T_{22}+\cdots+T_{2m})|$ 最小，在每个水龙头上利用(1) 的方法，可求得花费最少的时间为

$nT_{11}+(n-1)T_{12}+\cdots+T_{1n}+mT_{21}+(m-1)T_{22}+\cdots+T_{2m}$

3. 解：(1) 在平面上任取一点 A 为顶点作边长为1的等边三角形 ABC(这里长度单位为1英寸)，若 B、C 中有一点和 A 同色，或 B、C 同色，则结论已成立. 若 A、B、C 三点颜色互不相同，作点 A 关于直线 BC 的对称点 A'，若 A' 和 B、C 之一同色，则结论也成立. 否则 A' 和 A 同色，这时，AA' 的长为$\sqrt{3}$.

过 A 点可以作无穷多个边长为1的等边三角形，对这些三角形作同前面类似的讨论. 若不存在相距为1且同色的两点，则所作类似于 A' 的点的集合恰为以 A 为圆心，以$\sqrt{3}$ 长为半径的圆，而且这圆上的所有点和 A 有同一种颜色在圆上任作长为 1 的弦，则弦的两个端点相距为 1 且有相同的颜色.

(2) 答案是否定的. 用对角线长接近 1(英寸) 但不等于 1 的正方形铺满整个平面. 例如可取正方形的对角线为 0.9，若用这个长度，则每个正方形的边长为 $0.9\sqrt{2}>0.63$. 将其中一个正方形涂上 1 号颜色，与其相邻的八个正方形分别涂上 2 ~ 9 号颜色. 反复这样做，可将平面上的每个正方形都涂上颜色. 这样就可以得到涂上颜色的大正方形(由九个小正方形组成，通常情况下要考虑到正方形的边界，可将正方形的底部和左部边界涂成与正方形内部具有同样的颜色). 由此得到涂有九种颜色的平面上没有两点相距恰为1且有相同的颜色. 事实，对平面上任意一点，和这点有相同颜色的点，或者与其相距小于0.9英寸，或大于 $2\times0.63=1.26$ 英寸.

4. 解：如果我们记 1983 个车站形成的集合为 S，再设共开辟了 k 条线路的公共汽车，并且分别以 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 记作它们所经过的车站的集合，则它们都是 S 的子集，从而 $\varnothing=\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 是 S 的一个子集类(即由 S 的子集所组成的集合). 由题意可知 $\varnothing$ 具有性质：

①$A_{i_1}\cap A_{i_2}\neq\varnothing$，对任何 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant k$；

②$A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\neq\varnothing$，对任何 $1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant k$，也就是说，其中的每两个子集都相交，但每三个子集的交都是空集.

由上面的性质可以推知，每个子集所含的元素(即车站) 数目不会少于 $k-1$ 个，这是因为，由 ① 知每个子集都与其余 $k-1$ 个子集至少有一个公共元素，而由 ② 知这些公共元素两两不同(不然，就会造成某三个子集之交非空). 于是这 k 个子集所含元素之和不小于$k(k-1)$. 但在这样的计算过程中，每个元素都算了两次(因为它们都同时属于两个不同子集)，所以 $\bigcup_{j=1}^{k}A_j$ 中的元素数目不少于$\frac{1}{2}k(k-1)$ 个. 但因 $\bigcup_{j=1}^{k}A_j=S$，所以$\frac{1}{2}k(k-1)\leqslant1983$，即 $k(k-1)\leqslant3966$，满足此不等式的最大整数为 $k=63$. 所

以，按照该城市规划人员的愿望，至多可开设63条线路的公共汽车，每条线路至少应经过 $k-1=62$ 个公共汽车站.

5．解：将每一个区用一个点表示（我们称它为顶点），若两区的交通方式是汽车，就将相应的两个顶点之间所连线（我们称它为边）涂上红色；若两个区的交通方式是火车或飞机，就将相应地两个顶点之间的连线相应地涂上蓝色或白色，这样就得到一个经过涂色的图．根据题意，这个图具有以下性质：

(1) 这个图的每两个顶点之间有一条边连接，每条边都涂上红、蓝、白三种颜色中的一种；

(2) 整个图中三种颜色的边全有；

(3) 每一顶点引出的边中，至多只有两种颜色；

(4) 在这个图中不存在同色三角形，即没有一个三角形它的三条边的颜色全都相同．

现在来证明：这个图的顶点个数 n 至多为4，即这个县最多有4个区．

首先，我们证明在这张图上，从每个顶点出发的同色线至多两条，否则不妨设从 A 出发有3条（或多于3条）红线 AB,AC,AD，于是条件(4)，B、C、D 之间不能再有红色线段，且这3条线段（BC,BD,CD）必须是蓝、白色都有，但这样会使从某点（B、C、D 之一）出发有3条异色的线段，这和条件(3) 矛盾．

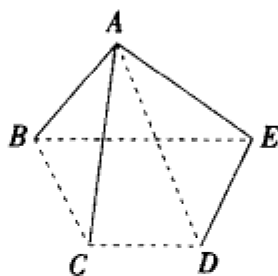


图 Ⅱ－D－3－15

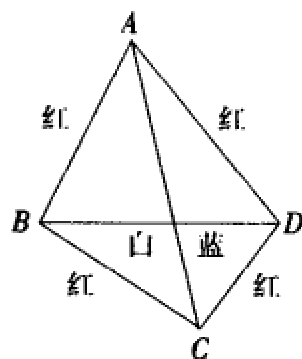


图 Ⅱ－D－3－16

由上面证得的结论及条件(3) 可知 $n\leqslant 5$.

其次我们自然会设想就5点 A、B、C、D、E 构造一张符合题意的图，由于 $n=5$，由条件(3) 知，从每点出发的 A 条线必须是两种颜色，每种颜色两条，不妨设从 A 点出发的4条线段的颜色如图Ⅰ－D－3－15所示，图中的实线及虚线各代表一种颜色（例如红、白两色），因 AB、AC 为红色，故 BC、BD、BE 中有且仅有一条为红色，因 BC 不能为红色，故不妨设 BD 为红色，由此知 DC 及 DE 为一红一白，且只能是 DE 为红，DC 为白，仿此继续讨论，推得 CB 为白，CE 为红，BE 为白．也就是说，当 $n=5$ 时，我们推得符合条件(3)、(4) 的图，只能有两种颜色的边，这与条件(2) 相违背，从而 $n\leqslant 4$.

现在构造 $n=4$ 时的图．如图Ⅰ－D－3－16，四边形 $ABCD$，四边 AB,BC,CD,DA 涂红色，对角线 AC 涂蓝色，BD 涂白色，则满足题设要求（答案不是惟一的）．

6．证明：构造证明如下

因 $1992\div 4=498$，故任何一个大于498的整数与4的乘积都大于1992，记

$A_1=\{499,500,\cdots,1992\}$，$|A_1|=1494$

$498\div 4=124\cdots 2$，记 $A_2=\{125,126,\cdots,498\}$

$|A_2|=374$，且每个元素的4倍都是 A_1 的元素

$124\div 4=31$，记 $A_3=\{32,33,\cdots,124\}$

$|A_3|=93$，且每个元素的4倍都是 A_2 的元素

$31\div 4=7\cdots 3$，记 $A_4=\{8,9,\cdots,31\}$

$|A_4|=24$，且每个元素的4倍都是 A_3 的元素

$7\div 4=1\cdots 3$，记 $A_5=\{2,3,\cdots,7\}$

$|A_5|=6$，每个元素的4倍都是 A_4 的元素

记 $A_6=1$，为单元素集，1的4倍即4为 A_5 的元素

这样一来，$(A_1,A_2,\cdots,A_6)$ 是集合 $\{1,2,\cdots,1992\}$ 的一个分划，且 $\{4a \mid a\in A_{i+1}\subset A_i, i=1,2,3,4,5$，令 $A=A_1\cup A_3\cup A_5, |A|=1593\}$，则 A 即为所求.

B组

7. 解：将 y 轴上的整点染上黑色或白色，并且黑、白各有无穷多个(例如使这两种颜色相间即可)，再将其余的整点染上红色，这样染色就满足要求.

8. 解：设 $A=\{$具有性质 P 的排列$\}$，$B=\{$不具有性质 P 的排列$\}$，我们着眼于建立从 B 到 A 的一个映射"f"，使它是单射并非满射，就能证明 $|A|>|B|$.

令 $b=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2n}\}\in B$，则 $|x_1-x_2|\neq n$，因而总能找到一个排列 $a=\{x_2,\cdots,x_{i-1},x_1,x_i,\cdots,x_{2n}\}$，使 $|x_1-x_i|=n$，这样的 i 有且仅有一个与 b 对立，显然 $a\in A$，按这样的对应法则建立映射：$B\Rightarrow b\rightarrow a\in A$

容易验证 f 是单射，下证 f 不是满射.

因对任何 $b=\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{2n}\}$，有 $|x_1-x_2|\neq n$，$|x_2-x_3|\neq n$，故 b 的像 $a=\{x_2,x_3,\cdots,x_{i-1},x_1,x_i,\cdots,x_{2n}\}$ 的前二数之差的绝对值不等于 n.

显然排列 $\{n+1,1,\cdots,n,n+2,\cdots,2n\}\in A$ 但不是 B 中任何元素的像，所以 f 不是满射，因此证得 $|A|>|B|$，证毕.

9. 证明：过 n 个点中的任意两点引直线，最多可作 C_n^2 条直线，每条直线外必有其他点，这样的点至多有 $(n-2)$ 个，因此，任一直线外的点到该直线的距离至多有 $(n-2)$ 个，考虑所有的点及所有的直线，上述距离所构成的正数集合 M 只有有限个数. 由最小数原理，M 中必有最小数 ρ_0，设 ρ_0 对应的点及直线为 A_0 与 L_0，则 L_0 就是符合题目要求的直线，下面用反证法证明此猜测.

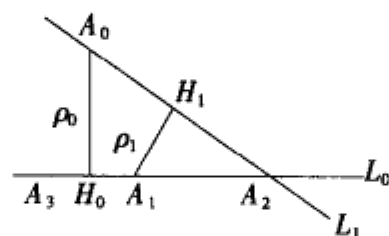


图 Ⅱ－D－6－12

如图 Ⅱ－D－6－12 所示，假设 L_0 不符合要求，不妨设有 3 个已知点 A_1,A_2,A_3 在直线 L_0 上，A_0H_0 垂直 L_0(垂足为 H_0)，$A_0H_0=\rho_0$，点 A_1,A_2,A_3 至少有两点位于 L_0 上点 H_0 的同侧(包括与 H_0 重合)，设 A_1,A_2 位于 H_0 同侧，且 $H_0A_1<H_0A_2$，过 A_0,A_2 的直线记为 L_1，A_1 到 L_1 的距离 $A_1H_1=\rho_1$，，显然 $\rho_1<\rho_0$，这与 ρ_0 的最小性矛盾. 故假设不真，所以直线 L_0 恰好通过其中两个点.

10. 证明：如果去掉某个选手，能使在余下的选手中，任意两个已赛过的对手仍然都不完全相同，那么我们就称这个选手为可去选手，本题就是要证明存在可去选手.

我们猜测已赛过最多对手的选手为可去选手，下证这个猜测是正确的.

设 A 是已赛过最多对手的选手，若不存在可去选手；则 A 不是可去选手，此时存在选手 B、C，使得去掉 A 时，与 B 赛过的对手集合和与 C 赛过的对手的集合相同，从而 B 和 C 不可能赛过，并且 B 和 C 中一定有一个(不妨设为 B)与 A 赛过，而另一个(即 C)未与 A 赛过，又因为 C 不是可去选手，故存在 D、E，其中 D 与 C 赛过，而 E 未与 C 赛过.

显然，D 不是 A，也不是 B，因为 D 与 C 赛过，所以 D 也与 B 赛过，又因为 B 与 D 赛过，所以 B 也与 E 赛过，但 E 未与 C 赛过，因而选手 E 只能是选手 A.

于是，与 A 赛过的对手数就是与 E 赛过的对手数，它比与 D 赛过的对手数少 1，此与关于 A 的假设矛盾，从而命题得证.

11. 解：(1) 设满足 $m(G)=m_0$ 的 G 由分组 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{83}$ 得到，其中 x_i 为第 i 组的点构成的集合，$i=1,2,\cdots,83$，令 $|Z_i|=x_i(i=1,2,\cdots,83)$，则有 $x_1+x_2+\cdots+x_{83}=1994$

首先猜测，取得最小值 m_0 的分组 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{83}$ 是均匀的，即任两组点数之差不超过 1，为得到证实，则可构造一种具体的分组法.

下证 $1\leqslant i\neq j\leqslant 83$ 时，有 $|x_i-x_j|\leqslant 1$

用反证法，若存在 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant 83)$，使得 $|x_i-x_j|\geqslant 2$，不妨设 $x_i>x_j$，则可得到 P 的另一分组 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{83}$ 使得：

$$|Y_i| = y_i = \begin{cases} x_k, 当 k \neq i 且 k \neq j 时 \\ x_i - 1, 当 k = i 时 \\ x_j + 1, 当 k = j 时 \end{cases}$$

设分组 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{83}$ 得到的图案为 G'

因 $m_0 = C_{x_1}^3 + C_{x_2}^3 + \cdots + C_{x_{83}}^3$

$m(G') = C_{y_1}^3 + C_{y_2}^3 + \cdots + C_{y_{83}}^3$

$$\begin{aligned}\therefore M(G') - m_0 &= C_{y_i}^3 + C_{y_j}^3 - C_{x_i}^3 - C_{x_j}^3 \\ &= C_{x_{i-1}}^3 + C_{x_{j+1}}^3 - C_{x_i}^3 - C_{x_j}^3 \\ &= C_{x_{j-1}}^3 + (C_{x_j}^3 + C_{x_j}^2) - (C_{x_{i-1}}^3 + C_{x_{j-1}}^2) - C_{x_j}^3 \\ &= C_{x_j}^2 - C_{x_{i-1}}^2\end{aligned}$$

$\because x_j < x_i - 1, \therefore C_{x_3}^2 < C_{x_{i-1}}^2$

$\therefore m(G') - m_0 < 0$,这与 m_0 最小性矛盾.

$\because 1994 = 81 \times 24 + 2 \times 25$

$\therefore m_0 = 81C_{24}^3 + 2C_{25}^2 = 168544$

(2) 设 G^* 由分组 $x_1, x_2, \cdots, x_{83}$ 得到,不妨设 $|x_1| = |x_2| = \cdots = |x_{81}| = 24$, $|x_{82}| = |x_{83}| = 25$. 下面给出 G^* 的一种染色方法,使得 G^* 用四种不同颜色染后不含三边颜色相同的三角形.

我们将集合 x_i 及所连线段构成的图形称为G^* 的第 i 块,记为 G_i^*, $i = 1,2,\cdots,83$.

先对 G_{83}^* 染色,令 $x_{83} = Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 \cup Z_5$ 使得 $Z_i \cap Z_j = \varnothing (1 \leqslant i \neq j \leqslant 5)$, $|Z_i| = 5 (1 \leqslant i \leqslant 5)$,将每个子集 $Z_i (1 \leqslant i \leqslant 5)$ 中任两点所连线段用图 Ⅱ - D - 6 - 13 所示的方法去染,将不同子集 Z_i 与$Z_j (i \neq j)$ 间所连线段用图 Ⅱ - D - 6 - 14 所示的方法去染,图中 a, b, c, d 分别代表四种不同的染色,这样染后的 G_{83}^* 显然不含三边颜色相同的三角形.

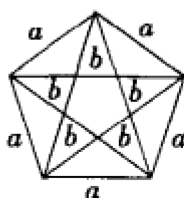


图 Ⅱ - D - 6 - 13

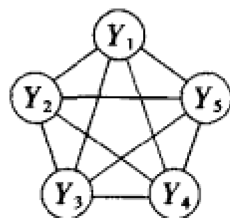


图 Ⅱ - D - 6 - 14

对于 G_{82}^* 可用染 G_{83}^* 的方法去染;至于 $G_i^* (1 \leqslant i \leqslant 81)$ 的染法,可先加一点并将设点与原来的 24 点各连一条线段,然后按 G_{83}^* 的染法染好后,再把加的一点及该点所连的线段去掉,这样染色后的 G_i^* 也不含三边颜色相同的三角形.

综上知识论成立.

12. 解:设每题的三个选择支为 a, b, c,如果参加考试的学生有 10 人,则由第二抽屉原理知,第一题答案分别为 a, b, c 的三组学生中,必有一组不超过 3 人,去掉这组学生,余下的学生中定出 7 人,则他们对第一题的答案只有两种,对于这 7 人关于第二题应用第二抽屉原理知其中必可选出 5 人,他们关于前两题的答案都只有两种可能,对于这 5 人关于第二题应用第二抽屉原理,又知可选出 4 人,他们关于前三题的答案都只有两种,最后,对于这 4 个人关于第四题应用第二抽屉原理,知必可选出 3 人,他们关于四个题目的答案都只有两种,还不满足题中的要求,可见,所求的最多人数不超过 9,另一方面,如果 9 个人的答案如下表所示,则每 3 个人都至少有一个问题的答案互不相同.

题＼人	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	a	a	b	b	b	c	c	c
2	a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	a	b	c	c	a	b	b	c	a
4	a	b	c	b	c	a	c	a	b

所以,所求的人数最多为 9.

第六章　调整操作博奕与对策

A 组

1. 证明:假设 2^n 个球最初分成了 h 堆,各堆球数是 $a_1, a_2, \cdots, a_h$,其中有些是奇数(各堆的球数或是奇数或是偶数,且奇数堆数必为偶数),则可把奇数球的堆两两配合,每这样两堆之间移动一次,这时堆数 $k \leqslant h$,各堆的球数

$a'_1, a'_2, \cdots, a'_k$　①

都是偶数.它们可能不仅都能被 2 除尽,一般总有一个正整数 $p \geqslant 1$,使得 2^p 能除尽 ① 中的一切数,而 2^{p+1} 不能,于是 ① 可以写作

$2^p b_1, 2^p b_2, \cdots, 2^p b_k$　②

它们必须满足 $2^p(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) = 2^n$. $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 之中必有奇数,如果 $p = n$,势必 $k = 1, b_1 = 1$.这即说,一切球已并入一堆.如果 $p < n$,势必 $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 2^{n-p}$,那么 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 之中的奇数必有偶数个.再把这里的奇数两两配合,每这样两堆之间移动一次,就使得各堆球数为

$2^p b_1', 2^p b_2', \cdots, 2^p b_l' (1 \leqslant k)$　③

其中 $b_1', b_2', \cdots, b_l'$ 都是偶数,又有一个正整数 $q > 1$,使得 2^q 能除尽 $b_1', b_2', \cdots, b_l'$,而 2^{q+1} 不能,那么 ③ 又可以写成

$2^{p+q} c_1, 2^{p+q} c_2, \cdots, 2^{p+q} c_l$　④

若 $p + q = n$,则 $l = 1, c_1 = 1$,问题即证.

如果 $p + q < n$,必然 $c_1 + c_2 + \cdots + c_l = 2^{n-(p+q)}$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_l$ 中的奇数有偶数个,两两配合,再作调整.

每调整一次,各堆能提出的公因数(如 $2^p, 2^{p+q}$)便加大一次,而且每次至少乘一个因数 2(p, q 都 $\geqslant 1$).这样增大下去,总有等于 2^n 的时候,那时必然只有一堆.

2. 证明:用数学归纳法.当 $n = 1$ 时,显然.假设当 $n = k$ 时,结论成立.下证 $n = k + 1$ 时结论成立,我们写出前面三行:

$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{2^{k+1}}$

$x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \cdots, x_{2^{k+1}}x_1$

$x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \cdots, x_{2^{k+1}}x_2$

容易看出,在奇数位置上的数和偶数位置上的数构成行 $x_1, x_3, \cdots, x_{2^{k+1}-1}$ 和 $x_2, x_4, \cdots, x_{2^{k+1}}$,这些行可以像条件中要求的那样进行变换,而得到第三行,由归纳假设,长度为 2^k 的行,最终可以变成由一些 1 组成的行.这样,就从原始长度为 2^{k+1} 的行得到了由一些 1 组成的行.

3. 证明:用 a_{ij} 表示第 i 行第 j 列中的数构成的基本项,可在第一行任取一数 a_{1k} 有 n 法;再在第二行取一数 $a_{2l} (l \neq k)$,有 $n-1$ 法;以此类推.所以基本项的个数是 $n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$,记全部基本项的和为 S.下面考虑所有 a_{ij} 全取 $+1$ 这一特殊状态,此时基本项皆为 1,所以 $S = n!$,又 $n \geqslant 4$,因此 $4 \mid S$.再逐个调整.先将某个 a_{ij} 改成 -1,则含这个 a_{ij} 的 $(n-1)!$ 个基本项由 $+1$ 变成 -1,每项减少 2,

共减少 $2(n-1)!$，这也是 4 的倍数，这时仍有 $4\mid S$. 再把另一个 a_{ij} 改成 -1，也是改变 $(n-1)!$ 个基本项的符号，每项减少或增加 2，偶数项共改变 4 的倍数，仍 $4\mid S$.

任何填法的表都可由 a_{ij} 全为 $+1$ 经改变有限个 a_{ij} 的符号而得到，所以总有 $4\mid S$.

4. 证明：首先考察一种特殊情形，即除端点外(已染成蓝色)，再将 $n-1$ 个分点 $C_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 全部染成蓝色，这时标准线段有 0 条，是偶数. 下面进行调整，看此量是不变的. 第一步，从左至右将 $n-1$ 个分点中的对应前述状态蓝点的某一点改染成红色，这时标准线段增加两条；第二步，将余下的 $n-2$ 个分点中的对应前述状态任一蓝点的一点染成红色，这时标准线段或不增加，或增加两条，……，如此调整下去，每次调整标准线段或增加(减少) 两条，所以总可以调整到题设要求的一般状态. 因此，标准线段的条数是 0 或 2 的整数倍，总是偶数.

5. 证明：设 P 为正 $\triangle ABC$ 内或边上任意一点，因 P 到各边距离之和 $x+y+z$ 为定值，可考虑过 P 作直线平行于 BC，交 AB,BE,AD,AC 于 U,V,M,N. 当 P 在 UN 上移动时，积 xyz 中 x 固定不变，而 $yz=PV\cdot PN\cdot\sin^2\frac{\pi}{3}$，故 yz 与 $PV\cdot PN$ 有一样的变化. 由于 $4PV\cdot PN=(PV+PN)^2-(PV\cdot PN)^2$，$PV+PN$ 为定值. 故 $|PV-PN|$ 逐渐增大，则 $PV-PN$ 逐渐减少，当 P 与 G(BC 边上高 AH 与 VN 的交点) 重合时，$PU\cdot PV$ 有极大值，而 P 离开 G 点向两侧移动时，$PU\cdot PN$ 逐渐减少，这样，我们为使 xyz 有极小值，首先应将 P 点调整到 V,M 处，即 $\triangle RQS$ 的边界上.

问题又在于 BE 并不平行于 AB,AD，也不平行于 AC，直接在 $\triangle RQS$ 的边界上继续上述调整，从 V,M 调整到 Q,S,R 处是荒谬的，因为重复上述调整的条件并不具备，但是，我们可通过如下的变换：过 R,Q,S 作 $RR'\parallel SQ'\parallel BC$，$QR'\parallel SS'\parallel AC$，$QQ'\parallel RS'\parallel AB$，围成六边形 $QQ'SS'RR'$. 这样，我们可重复上述调整，将 P 点调整到 P' 和 P'' 点，再继续至 Q(或 Q') 或 S(或 S')一处，由于对称，xyz 在 Q,Q',S,S' 处的值相同，同样 xyz 在 R,R' 处的值与在 Q 处的值相同，故 xyz 在 Q、S、R 处达到最小值.

6. 证明：由题设可知，要求 12 排座位能保证全部学生都坐下，且同一学校的学生必须坐在同一横排. 首先我们考虑这样一种情形：让第一所中学的学生从第一排第一座起依次入座，他们全部就座后，再让第二所中学的同学依次入座，……，直到第 n 所中学的学生全部就座. 这样，全部 1990 名学生，恰好坐满 10 排座位，如果这种坐法，刚好没有一所学校的学生是跨排就座的，于是命题成立.

如果如上坐法，至少有一所中学的学生跨排，则进行调整，设某校学生分别就座于第 i 排和第 $i+1$ 排($1\leqslant i\leqslant 9$)，我们就让所有跨排的学生全部退出，重新安排，因为这样的学校至多九所，设为九所时，让其中五所学校的学生坐在第十一排，由 $39\cdot 5=195<199$，则必能坐下，且不再产生跨排，再让其余四所学校的学生在第十二排就座. 当然，如果跨排就座的学生少于九所，就更容易“调整”了.

7. 解：递推过程如下(如图所示)：$(0,0)\in L\to(1,n),(n,1)\in W\to(2,2)\in L\to(4,n),(n,4)\in W\to(2,3),(3,2)\in L\to(5,n),(n,5)\in W\to(3,3)\in L\to(6,n),(n,6)\in W\to\cdots$ 猜测

$L=\{(0,0)\}\cup\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)(mod5)\}$

证明：$5k+2$ 堆只能分成 $(0,2),(1,1)$ 或 $(3,4)(mod5)$；$5k+3$ 堆只能分成 $(0,3),(1,2)$ 或 $(4,4)(mod5)$，故 L 的非终局态一步只能走到 W. 另一方面，W 的状态必有 $5k,5k+1$ 或 $5k+4$ 堆，分别可分成

$(2,3),(3,3),(2,2)(mod5)$

因为 $(33,35)\in W$，故甲必胜，策略已自明.

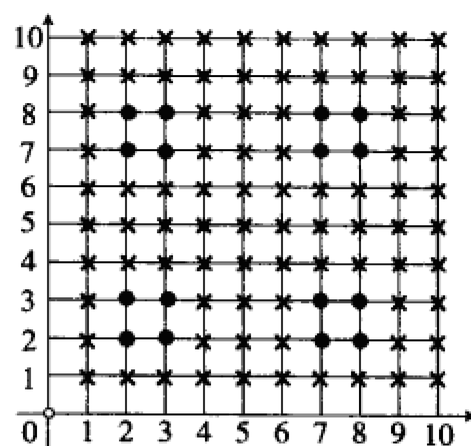


图 Ⅱ-D-6-15

8. 解：(1) 连 $\overline{ab}$ 后成闭路当且仅当未连时 a 到 b 已有通路，双方均应避免先造成这种危险态，采取对称画法可达此目的. 设 A 方每步画后的图形都是中心对称的，他就不会千万危险态：若 A 某步造成危险态，由对称性，对方上一步后已有危险态，A 只要不去连对称的危险态，而将对方造成的危险态连为闭路就已获胜. 虽然，这个游戏是有限的.

当 m 与 n 同奇偶时，纸的中心不在任一单位格子边内，故乙方必胜；

当 m 与 n 不同奇偶时,对称中心在一边内,甲第一步连这条中央线就必胜.

(2) 图上有 $(m+1)(n+1)$ 个顶点.当连线数少于 $l_0=(m+1)(n+1)-1$ 时未连通,必有二相邻顶点 a 和 b 间无通路,连 $\overline{ab}$ 是个活步.但如已连 l_0 条线而尚未出闭路,下一步无论怎么连必出闭路.

当 m、n 同为偶数时,l_0 为偶数,乙必胜;

当 m、n 至少有一奇数时甲必胜.

致胜策略是每步连接未通的相邻点.

9. 解:乙首先要让 19 与 20 同号.由于甲的干扰,不能保证其他数也同号,退而求其次,尽量弥补甲的破坏:乙将 20 个数相邻配对为

$(1,2),(3,4),\cdots,(19,20)$

每步与甲同组,在前 9 组与甲异号,最后一组与甲同号,这样必可保证 $S\geqslant 19+20-9\times 1=30$.

另一方面,甲的策略自然是抵消:设乙第 i 步后已有符号的 $2i$ 个数代数和为 S_i,甲在余下的最大数之前放与 S_i 相异的符号(如 $S_i=0$ 可任意放),假定甲最后一次使代数和变号是在他的第 k 步($1\leqslant k\leqslant 10$),即 $a_k\geqslant|S_{k-1}|$,此时

$|S_{k-1}\pm a_k|\leqslant a_k\leqslant 21-k$

而乙第 k 步放的数 $b_k\leqslant a_{k-1}\leqslant 20-k$,故

$|S_k|\leqslant 41-2k$

以后每个回合 $b_i<a_i<|S_{i-1}|$,故 $|S_i|\leqslant|S_{i-1}|-1$.于是最后 $S\leqslant 41-2k-(10-k)=31-k\leqslant 30$

故乙能保证的最大 S 是 30.

10. 解:记第一个游戏者为甲,第二个游戏者为乙.

甲首先摆 0:0,乙以 0:a 连接,这时甲接以 a:a,现在乙或者接 0:n 或者接 a:n,对第一种情况,甲接 n:a;对第二种情况,甲接 n:0,甲接完这步后,骨牌串的两端或者都是 a,或者都是 0.这步之后,设乙接上 0:m(a:m),则甲接上 m:a(m:0).形如 0:n 和 a:n($n\neq 0,a$)的骨牌是成对的,所以最后的步骤必是在甲接牌后而终止.故第一个游戏者必胜.

B组

11. 解:100 条直线若两两相交,可得 $C_{100}^2=4950$ 个交点,现考虑从这种状态出发,减少交点的个数,恰好为 1985,办法是使一些直线共点或平行.

设直线有 k 个共点的直线束,每一束中直线的条数是 $n_1,n_2,\cdots,n_k$($n_i\geqslant 3,i=1,2,\cdots,k$),有 $n_1+n_2+\cdots+n_k\leqslant 100$.

这时,每一束的交点数下降了 C_n^2-1 个,为使 $(C_{n_1}^2-1)+(C_{n_2}^2-1)+\cdots+(C_{n_k}^2-1)=C_{100}^2-1985=2965$.

可取最接近 2965 的 $C_{77}^2=2925$ 代替 $C_{n_1}^2-1$ 即 $n_1=77$,类似地取 $n_2=9,n_3=4$,则有 $C_{77}^2-1+C_9^2-1+C_4^2-1=C_{100}^2-1985=2965$

这表明,100 条直线中,有 77 条直线共 A 点,另 9 条直线共 B 点,还有 4 条直线共 C 点,此外再无“三线共点”或“平行线”,则恰有 1985 个交点.

12. 解:当把这 1989 个点分成 30 组,各组点数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 时,顶点在三个组的三角形的总数为 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k=30}n_in_jn_k$

本题即在 $n_1,n_2,\cdots,n_{30}$ 不相同且和为 1989 的条件下,问何时能使 S 取最大值.

由于把 1989 个点分成 30 组只有有限种不同分法,故必有一种方法使 S 达到最大值.不妨设此时各组点数满足 $n_1<n_2<\cdots<n_{30}$,则

(1) $n_{i+1}-n_i\leqslant 2,i=1,2,\cdots,29$.若不然,必有 i_0 使 $n_{i_0+1}-n_{i_0}\geqslant 3$,不妨设 $i_0=1$,这时有

$$S=n_1n_2\sum_{k=3}^{30}n_k+(n_1+n_2)\sum_{3\leqslant j\leqslant k\leqslant 30}n_j\cdot n_k+\sum_{3\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 30}n_in_jn_k$$

令 $n_1' = n_1 + 1, n_2' = n_2 - 1$，则 $n_1' + n_2' = n_1 + n_2, n_1' \cdot n_2' = n_1n_2 + n_2 - n_1 - 1 > n_1n_2$，可见，当用 n_1', n_2' 代替 n_1, n_2，而 $n_3, \cdots, n_{30}$ 不动时，S 值变大，矛盾.

(2) 使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值不能多于一个.若不然，可设有 $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant 29$，使 $n_{i_0+1} - n_{i0} = 2, n_{j_0+1} - n_{j0} = 2$，则类似于(1)可知，当用 $n'_{i_0} = n_{i_0} + 1, n'_{j_0+1} = n_{j_0+1} - 1$ 代替 n_{i0}, n_{j_0+1} 时使 S 值变大，这不可能.

(3) 使 $n_{i+1} - n_i = 2$ 的 i 值不能一个没有.若不然，可设 $n_1 = k - 14, n_2 = k - 13, \cdots, n_{30} = k + 15$，则易知其和为 $30k + 15 = 1989$，这也不可能.

故知 $n_1, n_2, \cdots, n_{30}$ 中，相邻两数之差恰有一个为2而其余都为1，不妨设这30个数为 $m, m+1, m + i_0 - 1, m + i_0 + 1, \cdots, m + 30 (1 \leqslant i_0 \leqslant 29)$，则其和为 $30m - i + 465 = 1989$

故 $33m - i = 1524$

解得 $m = 51, i_0 = 6$，当 S 取最大值时，30组点数依次为 $51, 52, \cdots, 56, 57, 58, 59, \cdots, 81$

13. 解：能经过有限次操作，把所有糖块集中到一个盘子里去，对糖块总数 $m (\geqslant 4)$ 进行归纳.

当 $m = 4$ 时，盛有糖块的盘子不多于4个，去掉 $n - 4$ 个空盘，在剩下4个盘子里，糖块分布有以下4种情况：$(1,1,1,1), (1,2,1,0), (2,2,0,0), (1,3,0,0)$

对于第一种情况，可进行如下操作调整，使糖块集中到一个盘子里：$(1,1,1,1) \rightarrow (3,1,0,0) \rightarrow (2,0,2,0) \rightarrow (1,0,1,2) \rightarrow (0,0,0,4)$

对于后几种情况，类似地也可集中到一个盘子里.

假设 $m = k (k \geqslant 4)$ 时，结论成立.当 $m = k + 1 (k \geqslant 4)$ 时，在盛糖块的一个盘子里固定一块糖，暂不去考虑它，对于剩下的 $k (k \geqslant 4)$ 块，利用归纳假设，这 k 块糖能集中到一个盘子里，如果这个盘子恰是盛有固定糖块的盘子，则结论已经成立.否则，恰有两个盘子盛有糖块，再取两个空盘，进行如下操作调整：$(1, k, 0, 0) \rightarrow (0, k-1, 2, 0) \rightarrow (0, k-2, 1, 2) \rightarrow (2, k-3, 0, 2) \rightarrow (1, k-1, 0, 1) \rightarrow (0, k+1, 0, 0)$.结论成立.

14. 证：由于 k 与 n 互素，对于任意 $i_0 \in M$，必可找到两个整数 p_0 与 q_0.使得 $i_0 = p_0k + q_0n$.

(1) 若 $q_0 = 0$，则 i_0 与1同色；

(2) 而 $p_0 = 0, q_0 \neq 0$；$p_0 > 0, q_0 > 0$；$p_0 < 0, q_0 < 0$ 这三种情况不可能出现，否则不能满足 $0 < i_0 < n_j$；

(3) 若 $p_0 > 0, q_0 < 0$，则逐次进行下列调整，直至 $q_j = 0$(由于 p_0, q_0 是有限数，每次调整后，想使 $p_{j+1} < p_j, q_{j+1} \geqslant q_j$，因此 $q_j = 0$ 一定能达到).

(a) 若 $(p_j - 1)k + q_jn + 1 > 0, p_{j+1} = p_j - 1, q_{j+1} = q_j, i_{j+1} = p_j + 1^k + q_{i+1}n + 1$；

(b) 若 $(p_j - 1)k + q_jn + 1 \leqslant 0, q_{j+1} = p_j - 1, q_{j+1} = q_j + 1, i_{j+1} = p_j + 1^k + q_{j+1}n + 1$；

若执行了(a)，$i_{j+1} = (p_j - 1)k + q_jn + 1 = i_j - k = | i_k - k |$，因此 i_{j+1} 与 i_j 同色；

若执行了(b)，$i_{j+1} = (p_j - 1)k + (q_j + 1)n + 1 = n - [-(p_j - 1)k - q_in - 1] = n[-i_j + k] = n - | i_j - k |$，因此 i_{j+1} 与 i_j 同色.

当达到 $q_j = 0$ 时，i_j 与 i_0 同色，而 i_j 与1同色，从而 i_0 与1也是同色的.

(4) 若 $p_0 < 0, q_0 > 0$，可用类似(3)中调整直至 $q_0 = 0$，不过此时应用 $P_{j+1} \geqslant p_j, q_{j+1} \leqslant q_j$，也可证明 i_0 与1同色.

综上所述，任何 i_0 与1同色，即 M 中所有数都染同色.

15. 解：(1) 可以.两只猫放在过老鼠的一条45°线的两端点，可始终保持共线.

(2) 由老鼠初始位置作两条45°线，必有一个直角内无猫.B 沿这个直角的平分线走必可逃离.

16. 解：乙选双方手中最大的100张可使 $S_2 - S_1 \geqslant 200 \cdot 100 = 20000$.甲第一步选[1,100]，以后每步均可回到此状态从而使 $S_2 - S_1 \leqslant 20000$.

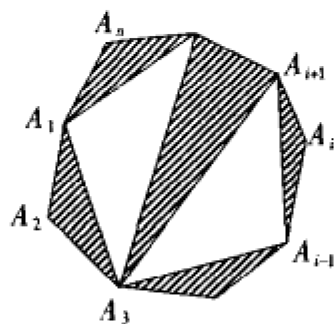
因此乙的最优值是20000.

第七章　染色与覆盖

A组

1. 证明:用数学归纳法易证:如果平面图形 F 被直线分为 r 部分,那么这部分可用两种颜色着色,使任何相邻两部分染有不同颜色.

因为凸 n 边形被一些对角线划分成 n 个部分(三角形),按上述结论,用黑白两种颜色对所划分的各三角形染色,使相邻的两个三角形不同色(如图Ⅱ-D-6-16).



图Ⅱ-D-6-16

因为从每个顶点 A_i 所引的对角线的条数都是偶数,所以,以 A_i 为一个顶点的三角形的个数必是奇数,由于相邻的三角形着色不同,因而对于每个顶点来说,第一个与最后一个三角形的着色一定相同.由此可知有一边与已知 n 边形的边相重合的三角形总是着相同的颜色,不妨设为"黑色",于是 n 边形的边数(n)+这个多边形中画出的对角线的条数(l)=着有"黑色"的三角形的边数之和 $=3\times$ 着"黑色"三角形的个数(M_1).

同时,这个多边形中画出的对角线的条数(l)=着有"白色"的三角形的边数之和 $=3\times$ 着"白色"的三角形的个数(M_2).

因此,$n+l=3M_1,l=3M_2$

得 $n=3(M_1-M_2)$

就是说,n 边形的边数是3的倍数.

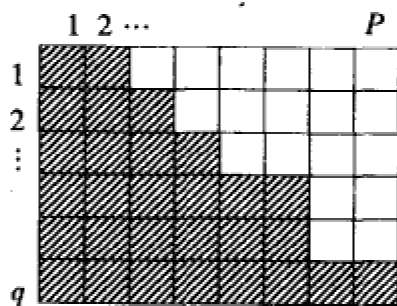
2. 证明:作一个 q 行 p 列的方格图

将第 i 行($1\leqslant i\leqslant p$)左边的 a_i 个方格染成黑色,考虑第 j 列($1\leqslant j\leqslant p$)中的白方格数,显然,白方格数是小于 j 的 a_i 的个数,即 b_j-1.于是所有黑白格总数为

$a_1+a_2+\cdots a_q+(b_1-1)+(b_2-1)+\cdots+(b_{p-1})=pq$

即 $a_1+a_2+\cdots+a_q+b_1+b_2+\cdots+b_p=pq+p=p(q+1)$

3. 证明:由已知条件可知,任何3条已知直线中必定有2条异面直线,把已知直线与顶点为 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 的图的各顶点间建立一一对应,并在任取顶点间联线,现对这15条联线以红、兰两种颜色染色:若两顶点对应的两条直线异面,则将这两之间的联线染成红色,否则,染成兰色.于是问题转化为:已知6点,把任两点间的联线染上红、兰两色之一,任何一个以这些点为顶点的三角形都有一条红边,求证:存在一个三角形,其三边都是红边.



图Ⅱ-D-6-17

若三边均为红边的三角形不存在,那么显然已知点中有两点间的联线是兰色的,设是点 A 和 A.因为每个三角形 $\triangle A_1A_2A_3,\triangle A_1A_2A_4,\triangle A_1A_2A_5,\triangle A_1A_2A_6$ 都有一条红边,但这边不是 A_1A_2,所以 A_3,A_4,A_5,A_6 这四点都分别至少与点 A_1,A_2 中一个的联线为红边.

若点 A_1,A_2 中某点至少与点 A_3,A_4,A_5,A_6 中的三点联线为红边,不妨设为 A_3,A_4,A_5 三点,那么 $\triangle A_1A_3A_4,\triangle A_1A_4A_5,\triangle A_1A_3A_5$ 各有两条红边,可知 A_3A_4,A_4A_5,A_3A_5 为兰边,因此,$\triangle A_3A_4A_5$ 任何一边均为兰边,与题设矛盾,故假设不成立.因此点 A_1,A_2 都与点 A_3,A_4,A_5,A_6 中的某两点联线为红色.不妨假设 A_1 与 A_3,A_4 的联线为红色,而 A_2 与 A_5,A_6 的联线为红色,而 A_1 与 A_5,A_6,以及 A_2 与 A_3,A_4 的联线均为兰色,考察 $\triangle A_2A_5A_6$,由于 A_2A_5,A_2A_6 为红色,由假设知,A_5A_6 必为兰色,故 $\triangle A_1A_5A_6$ 各边均为兰色,与题设矛盾.

故存在三边均为红色的三角形.

4. 解:将每一个城市用一个点表示(称为顶点),若两城市的交通方式是汽车,就将相应两个顶点之间的连线(称为边)染上红色,若两个城市的交通方式是火车或飞机,就将相应的两顶点之间的连线相应地染上兰色或白色,这样就得到一个三色图,根据题意,这个图具有以下性质:(1) 这个图的每两个顶点之间有一条边连结,每条边都染上红、兰、白三种颜色中的一种;(2) 每条颜色的边至少有一条;(3) 每一顶点引出的边中,至多只有两种颜色;(4) 在这个图中不存在同色三角形.

首先证明:从每个顶点出发的同色边至多两条.否则不妨设从 A 点出发有 3 条(或多于 3 条)红边 AB,AC,AD.于是由性质(4),B,C,D 之间不能再有红边,且 3 条边 BC,BD,CD 必是兰、白两色皆有.这样却使从某点(B,C,D 之一)出发有 3 条异色的线段,这与性质(3)矛盾.故从每个顶点出发的同色边至多两条.由此及性质(3)可知:顶点数 $n \leqslant 5$.

其次,考察 $n=5$ 是否满足题意,由于 $n=5$,由性质(3)知,从每点出发的 4 条边必是两种颜色,每种颜色两条.不妨设从 A 点出发的四条边中,AB,AC 为同一颜色(不妨设为红色),AD,AE 为同一颜色(不妨设为白色).因 AB,AC 为红色,故 BC,BD,BE 中有且仅有一条红色.因为 BC 不能为红色(由性质(4)知),故 BD,BE 中有且仅有一条红色,不妨设 BD 为红色,由此知 DC 及 DE 为一红一白,且 DE 只能为红色,DC 为白色.同理可推得 CB 为白色,CE 为红色,DE 为白色,即当 $n=5$ 时,推得符合性质(3),(4)的图,只能有两种颜色的边,这与性质(2)矛盾,从而得 $n \leqslant 4$.

最后,考察 $n=4$ 时是否可构造满足题意的图,四边形 $ABCD$,四边 AB,BC,CD,DA 染红色,对角线 AC 染兰色,BD 染白色,则满足题设要求.

由上可知:最多有四个城市.

5. 证明:将每个人对应于平面上的一个点,将是朋友的两人所对应的两点之间用线段相连,于是问题转化为:可以适当地将每个点都染成红、兰两种颜色之一,使得两端点异色的线段多于两端点同色的线段.

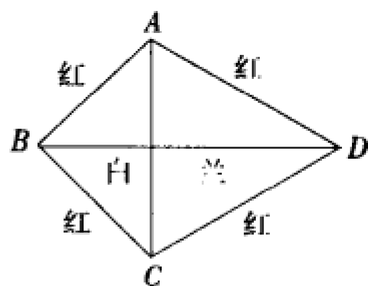


图 Ⅱ - D - 6 - 18

将点的数目记为 n,对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,可将它们染为一红一白,命题显然成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立.对于 $n=k+1$,先任取出 k 个点来(在它们之间至少连有一条线段),按照要求染色,然后再观察剩下的第 $k+1$ 个点 A.设它连向兰点的线段有 m_1 条,连向红点的线段为 m_2 条,不妨设 $m_1 \geqslant m_2$,于是再将 A 点染为红色,于是两端点同色的线段增加 m_2 条,两端点异色的线段增加 m_1 条,知此时结论仍然成立.

6. 解:直径为 1 的圆纸片盖不住边长为 1 的三角形的三个顶点.

7. 解:作单位正方形盖住有限点组 M,而单位正方形外接圆半径为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 解:这 100 个点中距离最大的两点设为 A、B,则 $AB<1$.以 AB 为直径画圆,其余 98 个点中任一点对 A、B 都构成钝角三角形顶点,所以必在所作的圆内,而所画圆的半径 $\leqslant \frac{1}{2}$.

9. 证:设两个边长为 0.99 的正三角形 $\triangle_1,\triangle_2$ 能盖住边长为 1 的正三角形 ABC,则 $\triangle_1,\triangle_2$ 中至少有一个盖住 A,B,C 中的两个点,设 $\triangle_1$ 盖住 A,B 两点,此时 $\triangle_1$ 的边长将 $\geqslant 1$,矛盾.

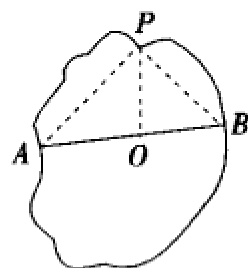


图 Ⅱ - D - 6 - 19

10. 解:如图 Ⅱ - D - 6 - 19,在线圈上取 A、B 两点,使$\overset{\frown}{AB}=l$,取 AB 中点O,设 P 为线圈上任一点,则 $OP \leqslant \frac{1}{2}(AP+BP) \leqslant \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{BP})=\frac{l}{2}$.

11. 证明:易计算四边形 $ABCD$ 为圆外切四边形,其内切圆半径(通过面积计算)为 2.25,而$\sqrt{5}<2.25<\sqrt{6}$.

12. 此题为维他利型问题,请自己写出证明.

13. 证明:如图 Ⅱ - D - 6 - 20,放置一个正方形 $SBQR$,第 2 个正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 盖住梯形 $DCQR$,关于 BD 对称地用第 3 个正方形盖住梯形 $ASRD$ 即可.

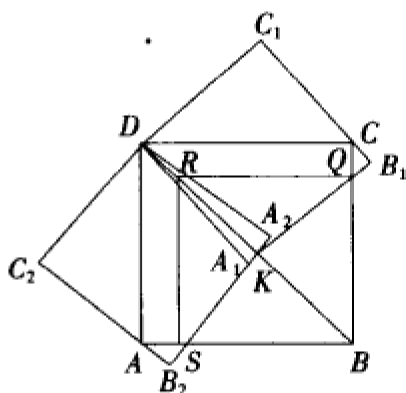


图 Ⅱ－D－6－20

B组

1. 证：对所有的对角线用归纳法可证下列命题：

在引最后一条对角线前有一个外侧涂色的多边形．如果最后一条对角线和这个多边形不相交，那么它不改变，结论成立．如果最后一条对角线分多边形为两部分，那么含不涂色的边的那部分就是外侧涂色的多边形．

2. 证明：假设某个 1×5 的图形上缺某种颜色，例如蓝色(在图 Ⅱ－D－6－21 中，把这部分图形离析出来)，那么图中用相同字母表示的两格中必有一格染蓝色，否则这些格所在的十字形形中将缺少蓝色的格，这样一来，在含有字母 a,b,c 的两个十字形中，必有一个十字形中含有两个蓝格，这与题设矛盾，所以原命题得证．

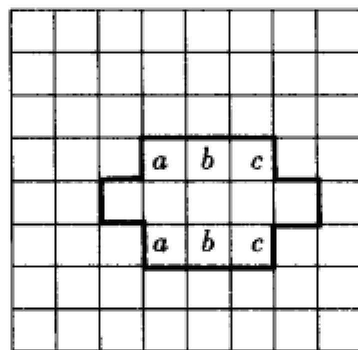


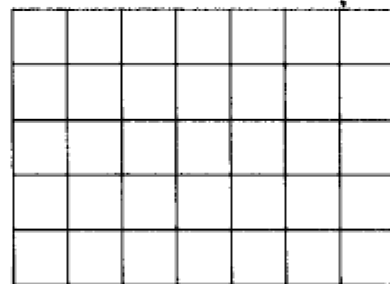
图 Ⅱ－D－6－21

3. 证明：$m\times n$ 的方格表可依题意分割的充要条件是 $m\geqslant2, n\geqslant2$，且 $8\mid mn$.

充分证只需对 8×3 的表格予以分割(这是容易做到的)．结合数学归纳法就可得到．

在必要性证明中，$m\geqslant2, n\geqslant2, 4\mid mn$ 是显然的，如果 $4\mid mn$，而 $8\nmid mn$，则表格中恰好用到了奇数个"$\boxminus\!\square\square$"形，这时，对表格依列进行黑白间隔染色(即一列黑，一列白)，则表格中的黑格数为偶数，但是每个"$\boxminus\!\square\square$"形只能盖住 1 个或 3 个黑格，奇数个"$\boxminus\!\square\square$"形只能盖住奇数个黑格，所以，此时表格不能分割为"$\boxminus\!\square\square$"形．

4. 证明：如图 Ⅱ－D－6－22，将矩形的方格涂成黑、白两色，在黑色方格中记以数字 -2，在白色方格中记以数字 1．我们发现，被任意一个"捌形"所覆盖的方格中的数字和非负．假设我们能将矩形中的方格覆盖满足问题要求的 k 层，那么被"捌形"所覆盖的所有方格中的数字的和 S 非负．


图 Ⅱ－D－6－22

如果设矩形中所有的数字和等于 S，那么

$S=ks=k(-2\times12+23\times1)=-k<0$.

此与题设矛盾．

【注】 若矩形的尺寸为 $3\times(2n+1)$ 或 5×5，则同理可证满足题设条件的覆盖不存在．

矩形的尺寸为 2×3，可被两个"捌形"覆盖 1 层，矩形的尺寸为 5×9，可被 15 个"捌形"覆盖 1 层．正方形的尺寸为 2×2，可能 4 个"捌形"覆盖 3 层．组合这三种覆盖，不难证明，对其余所有的尺寸为 $m\times n(m,n\geqslant2)$ 的矩形都可以完成满足题设条件的覆盖．

5. 证明：引理　假设 3 个棋子位于同一直线上且具有整数坐标，则其中任意两个棋子均可重叠．

引理证明：设棋子 A 和 B 之间的距离为三对棋子间距离中的最小值．将第三个棋子 C 按 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{BA}$ 移动，直到将第三个棋子 C 移到线段 AB 上，这时三对棋子间距离中最小值将减小．由于位于同一直线上两点间距离是整数，经过这样若干步之后，这个最小距离将变成 0．如果指定的两个棋子已经重叠，则引

理得证.否则,可将两个重叠的棋子中指定的那一个移动到另一个指定的棋子上,引理得证.

将所有棋子向一个坐标轴投影.可以把投影看作棋子,即如果棋子按某个向量移动,则它的投影便按这个向量的投影移动.将其余两个棋子中的一个看作第三个,就可以将指定的两个棋子的投影重叠.我们再将两个指定的棋子看作一个棋子(需要移动时可以移动两次,先移动其中一个,然后再移动另一个,这样移动后,它们的投影仍旧重叠).这"一个"棋子可以和其余两个棋子中的任何一个棋子的投影重叠.于是我们可以使这三个棋子有相同的投影,即它们位于同一直线上且具有整数坐标,并且其中有两个要求重叠的棋子.

根据引理,它们可以重叠.

6. 证明:用反证法.假设任何两行与任何两列所交成的4个方格中都有某两个同色,为方便起见,将4种颜色用1至4编号.将位于同一列中的两个异色方格称为"对子",将位于同一列或同一行中的两个同色方格称为"吻合".将"对子"按所出现的颜色分为6种类型:$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{1,4\}$,$\{2,3\}$,$\{2,4\}$,$\{3,4\}$.

观察其中任意两行,我们来证明在这两行间有不少于25个"吻合".这两行间按同列关系共有100对方格,在我们的假设之下,任何两对方格中都有同色的方格,所以在这两行间至多出现3种不同类型的"对子",不难验证,从本质上说,只可能有如下两种情况:或者所有对子中都含有1号色的方格,或者这3种类型为$\{1,2\}$,$\{1,3\}$或$\{2,3\}$.我们分别考察这两种情况.

在第一种情况下,所有的"对子"都含有1号色方格,所以"对子"的数目不多于这两行中1号色方格的总数,即不多于50.从而在两行间有不少于50个"吻合".

再看第二种情况,此时所有的"对子"只能为$\{1,2\}$,$\{1,3\}$和$\{2,3\}$这3种类型.此时这两行中的4号色方格均与4号色方格同列,因此有不少于25个"吻合".由于上面所说的"两行"是任意选出的,所以我们证得了任何两行间都至少有25个"吻合",这就表明,在方格表中至少有$2\cdot C_{100}^{2}\cdot 25=25\times 99\times 100$"对"同行或同列的同色方格,但事实上,在每一行、每一列中都恰有每种颜色的方格各25个,因此同行或同列的同色方格对数目应为$200\cdot C_{25}^{2}\cdot 4=24\times 100^{2}$,由于$25\times 99>24\times 100$,得出矛盾.所以,必有某两行,某两列所交的4个方格均两两异色,即分别被染为4种不同颜色.

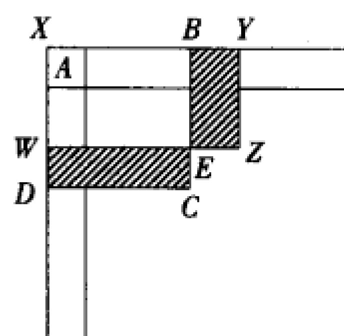
7. 解:最少需要经过98次上述操作,才能使棋盘上的格子均同色.

事实上,如果我们依次选取第2行,第4行、…、第98行操作,然后,再选取第2列、第4列、…、第98列操作,这样经过98次操作后,棋盘上的格子均同色.因而98次是足够的.

下面证明:至少需经过98次操作.

首先,对于1×98的棋盘,依常用方式染色后,我们说至少要经过49次上述操作,才能使此1×98的棋盘的方格均同色,这是因为:对这个1×98的棋盘进行的任何两个有公共方格的操作,均可在去掉公共方格后,换为两次没有公共方格的操作,而达到同样的效果,所以,可以认为任何两次操作都没有公共方格,而由于要改变颜色的49个方格是不相邻的,从而至少需要49次操作,才能使1×98的棋盘同色.

其次,对98×98的棋盘进行操作,不妨设最后棋盘上的格子均与左上角A同色.(否则将棋盘旋转90°再讨论).考虑对表格中,第一行及第一列中起作用的操作,这些操作中,有公共部分方格的两次操作结束后,公共部分的方格不改变颜色,只考虑第一行与第一列中方格的改变颜色情况时,这两次操作也可分为两次无公共方格的操作(在图Ⅱ-D-6-23中,给出的操作$XYZW$与$XBCD$等价于进行操作的$BYZE$和$WECD$,它们无公共方格,其它情形类似),当把这些操作,只取其落在第一行和第一列内的子操作时,它们应使第一行与第一列中的方格变为与A格同色.由前面的讨论,第一行要变为与A同色需49次,第一列要变为与A同色也需49次,所以共需98次操作.



图Ⅱ-D-6-23

说明:事实上,对一般的$m\times n$的棋盘,其它条件不变的情况下,同样的方法可以证明,至少需要

$[\frac{1}{2}(m+n)]$ 次操作，方能使棋盘同色.

8. 证明：把距 a 边所在直线最远的多边形顶点记为 P_a. 在平面上任取一点 O，过 O 且平行于直线 P_aQ（点 Q 边 a 上）的所有直线构成了两个对角区域，我们把这两个对顶角称为 a 的对应角（如图 Ⅱ－D－6－24）.

首先证明：不同边的对应角不重叠.

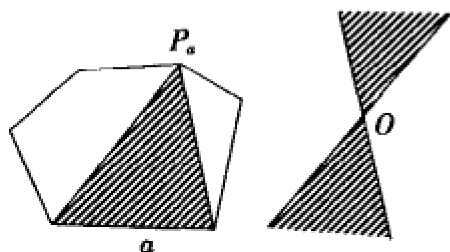


图 Ⅱ－D－6－24

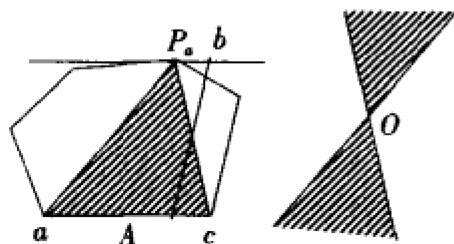


图 Ⅱ－D－6－25

设以 O 为端点的某射线 l 位于边 a 的某对应角内，则经过点 P_a 且平行于该射线的直线必交边 a 于它的某内点 A. 经过点 P_a 引边 a 所在直线 c 的平行线 b（如图 Ⅱ－D－6－25）. 由多边形是凸多边形和 P_a 所满足的条件知，多边形位于以 b，c 为边界的条形区域内，特别地，由于多边形无平行边，所以点 P_a 是该多边形位于直线 b 上的惟一点. 于是线段 P_aA 是所有 l 的平行线截多边形所得到的线段中的最长的线段，而且其他的线段的长都严格小于 P_aA 的长. 如果射线 l 同时还位于另一边 b 的对应角内，那么重复上面的讨论，我们就会得到某线段 $P_bB(B\in b)$，它是所有 l 的平行线截多边形所得到的线段中的最长的线段. 由最长线段的惟一性知，点 A 和点 B 重合. 这与 a、b 是不同的边矛盾，所以，不同边的对应角不重叠.

现在证明我们构造的角覆盖整个平面.

若非如此，则存在以 O 为顶点的某个角不被我们所构造的任何一个角覆盖. 在这个角内，取以 O 为端点的射线 m，使它不平行于多边形的任意一条边和对角线，取所有的 m 的平行线截多边形所得的线段中的最长的线段，显然，它的一个端点 P 是多边形的一个顶点，而它另一个端点 A 位于多边形的某条边 a 上，经 P 作 a 边所在直线 b 的平行线 c. 假设过顶点 P 的多边形的一条边不在以平行线 b、c 为边界的条形区域内，则必可找到一条直线，它与 m 平行且与多边形交出比 PA 长的线段（如图 Ⅱ－D－6－26），矛盾. 于是推出，多边形位于以平行线 b，c 为边界的条形区域内. 由此得出，点 P 是距边 a 所在直线 b 最远的多边形的顶点. 这说明，射线 m 位于边 a 的一个对应角内，与我们所取的射线 m 的条件矛盾.

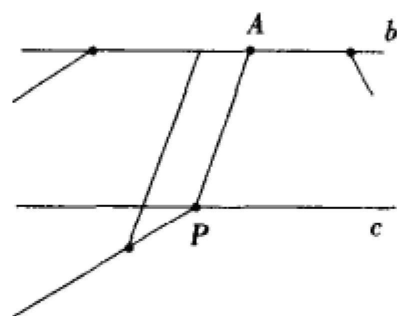


图 Ⅱ－D－6－26

这样一来，我们所构造的角即不互相重叠. 又覆盖了整个平面，故它们的和等于 360°，现在只需指出，问题中所说的角度之和恰为我们所构造的角度之和的一半.

第八章　组合几何及其应用

A组

1. 证明：考虑一般情况：试图确定 k，使得在正 n 边形的顶点中任取 k 个顶点，则必存在以这些点为顶点的梯形.

将取出的 k 个顶点两两连线. 如果其中有两条连线平行，则显然确定了一个以所取顶点为顶点的梯形，否则，我们注意到，一方面，这些连线中至多有 C_k^2 个互不平行的方向.

另一方面，将正 n 边形的 n 个顶点两两相连，恰好确定了 n 个互不平行的方向. 事实上，在直角坐标

系中,考虑内接于单位圆的正 n 边形,其顶点为 $P_k(\cos k\theta,\sin k\theta)$,这里 $\theta=\frac{2\pi}{n}$,$k=0,1,\cdots,n-1$

易知,任意两点 P_k,P_l 连线的斜率为 $\cot\frac{k+1}{n}\pi$,$(0\leqslant k,l\leqslant n-1,k\neq l)$ 由于 $\cot x$ 周期为 π,故对于 $0\leqslant k,l\leqslant n-1,k\neq l$,$\operatorname{ctg}\frac{k+l}{n}\pi$ 恰有 n 个不同值.

综上可见,只要 $C_k^2>n$,则 k 个顶点的两两连线中,必有两条平行,由于我们可取 $k=[\frac{1+\sqrt{8n+1}}{2}]+1$

当 $n=1989$ 时,相应的 k 值正好是 64.证毕.

2. 证明:设折线共有 n 节,l_i 表示第 i 节的长度,考虑它在正方形两条互相垂直边上的投影,证 l_i 的投影长度分别为 a_i 及 b_i,显然 $l_i\leqslant a_i+b_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 于是

$$
\begin{aligned}
1000&=l_1+l_2+\cdots+l_n\\
&\leqslant(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)\\
&=(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)
\end{aligned}
$$

这样,$a_1+\cdots+a_n$ 与 $b_1+\cdots+b_n$ 中必有一个 $\geqslant 500$

由于每个投影长 $\leqslant 1$,如果在长度为 1 的边上,折线各节投影长度之和 $\geqslant 500$,由重叠原理,这个边长必有一点为至少 500 个不同折线节的投影所覆盖,过该点作正方形一边的垂线,则它与折线至少有 500 个交点,由于折线不自交,故这些点互不相同.

3. 证明:设凸四边形的顶点为 B_1,B_2,B_3,B_4,其内部五个点为 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5.如果 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 已构成凸五边形的顶点,则结论成立.

若 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 不构成凸五边形的顶点,则其中必有四点不能为凸四边形的顶点,于是必有一点落在某个三角形的内部,不妨设 A_4 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 内一点(如图 Ⅱ-D-6-27),这样,在 $\angle A_1A_4A_2,\angle A_2A_4A_3,\angle A_3A_4A_1$ 中,有一个包含着 B_1,B_2,B_3,B_4 中的两个点,不妨设 $\angle A_1A_4A_2$ 包含了 B_1,B_2,则我们得到了一个凸五边形 $A_1B_1B_2A_2A_4$.

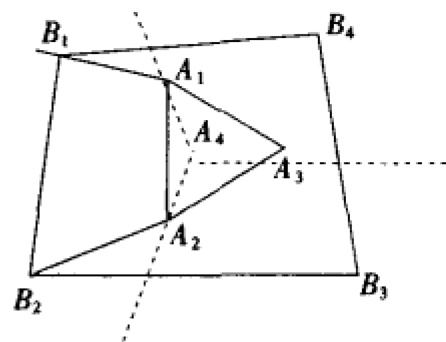


图 Ⅱ-D-6-27

4. 证明:我们用归纳法证明任意凸 n 边形可以分割成凸五边形,其中 $n\geqslant 5$,$n=5$ 时,结论显然.

当 $n=6$ 及 $n=7$ 时,可以如图 Ⅱ-D-6-28 那样分割.

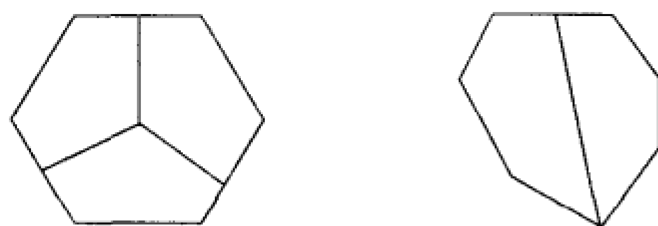


图 Ⅱ-D-6-28

当 $n=8$ 时,假设对于任意凸 m 边形都能够分割成凸五边形,这里 $5\leqslant m<n$,现在引出凸 n 边形的一条对角线,它截出 n 边形相邻五个顶点所构成的五边形,剩下一个$(n-3)$边形.由于我们的 n 边形是凸的,所以截出的五边形及$(n-3)$边形能是凸的,此外,$5\leqslant n-3\leqslant n$,故可对剩下的凸$(n-3)$边形应用归纳假设,它也可分割成若干个凸五边形.

5. 证明:用反证法,假设 $n\geqslant 5$,我们考虑多边形的顶点,易知,5 个整点中必可选出两个,其连线的中点仍是整点.而多边形是凸的,故其任两个顶点的连线的中点在其内部或边上,于是,在 $n\geqslant 5$ 时就得出了多边形内部或边上的一个不同于顶点的整点.这与已知矛盾,故 $n\leqslant 4$.

容易作出适合题设要求的三角形和凸四边形,所以 $n=3$ 或 4.

B组

1. 证明:(1) 设共线的点共有 n 个,且依次记为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,以 A_1A_2 的中垂线为折线折一次,则 A_1 与 A_2 重合,且仍有 $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 共线,重复这一过程,即可使折过的纸满足条件.

(2) 若三个黑点不共线,不妨设为 $\triangle ABC$ 的三个顶点.设 A 在 BC 边上的投影为点 D,以 AD 的中垂线为折线折一次,则 A 与 D 重合.由(1)知可使折过的纸满足条件.

2. 解:假设结论不成立,即存在一些整数这样的排列,使得对于含中点 C 的任一区间 AB,不等式 $C < \frac{a+b}{2}$ 成立,其中 a,b,c 是点 A,B,C 上的数.

令 $A,B,C,A_n,B_n(n=1,2,\cdots)$ 在数轴上对应于点 $-1,1,0,-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}$,$a,b,c,a_n,b_n$ 表示这些点上的整数.于是由假设推出 $C<\frac{a+b}{2}$,$a_1<\frac{a+c}{2}$,$a_2<\frac{a_1+c}{2}$ 等等,从而

$\max\{a,c\}>\max\{a_1,a_2\}$

即 $a_1<\frac{a+c}{2}\leqslant\frac{\max\{a,c\}+\max\{a,c\}}{2}=\max\{a,c\}$

$a_2<\frac{a_1+c}{2}\leqslant\frac{\max\{a,c\}+c}{2}\leqslant\max\{a,c\}$

类似地,$\max\{a_1,a_2\}>\max\{a_3,a_4\}>\max\{a_5,a_6\}>\cdots$

$\max\{b,c\}>\max\{b_1,b_2\}>\max\{b_3,b_4\}>\cdots$

因此 $a_{2m}<\max\{a,c\}-m$,$b_{2m}<\max\{b,c\}-m$,这表示在某一 m 下有不等式 $a_{2m}+b_{2m}\leqslant 2c$.矛盾.因为数 C 写在区间 $A_{2m}B_{2m}$ 的中点.

3. 解:对 B 中的任意一点 x,考虑集合

$Tx=\{Y\mid d(X,Y)=2,Y\in R^n\}$

这里 $d(X,Y)$ 表示 n 维空间 R^n 中两点的距离,显然,T_x 就是 R^n 中,以 X 为球心,2 为半径的球,记

$C=\{X\mid Y=(Y_1,\cdots,y_n),y_i\in\{1,-1\}\}$

依 C 的定义,可知对任意 $X\in B$,在 C 中恰有 n 个点 $Y\in T_x$(事实上,当且仅当 Y 与 X 只有一个分量不同时,$Y\in T_x$),而 c 的元素个数为 2^n,而 B 的元素个数大于 $\frac{2^n}{n}$,所以,在 C 中存在一点 Y,使得 Y 到 B 中的三个点 P,Q,R 的距离均为 2,从而 P,Q,R 都与 Y 只在一个分量上不同,所以,P,Q,R 之间两两的距离相等,即 P,Q,R 为某个正三角形的顶点.

4. 解:我们把走法分两种:依据筹码从原正方形($n\times n$ 小方格)内部与外部走出,分为内走法与外走法.

设有如下情形:不能再走下一步,且做了 k 次内走和 l 次外走.

很明显,没有任何 2 个筹码位于邻格中,而在正方形 $n\times n$ 中的空格不小于 $[\frac{n^2}{2}]$ 格.因为每次内走增加空格不小于 1,每次外走增加空格数不大于 2,所以有不等式

$$k+2l\geqslant[\frac{n^2}{2}] \qquad ①$$

现令 n 是偶数,把原正方形分成 $\frac{n^2}{4}$ 个各含 4 个小方格的小正方形,注意,在每个小正方形中,位于其中一小方格上的筹码走了不少 2 步(走一步或从棋盘上取下).因为在每次内走一步筹码经过的小正方形不多于 2 个,而每次外走一步筹码经过的小正方形不多于 1 个,所以

$$2k+l\geqslant 2\cdot\frac{n^2}{4} \qquad ②$$

由不等式 ① 与 ② 得 $k+l\geqslant\frac{n^2}{3}\geqslant[\frac{n^2}{3}]$,即本题在这种情况下成立.易见当 $n=1$ 与 $n=3$ 时本题也成立.

当 $n=2m+1$ 时,其中 $m>1$,在由上方第 3 条水平线与左方第 3 条竖直线组成的“十字形”中共

分出 $2m$ 个“小骨牌”，而原正方形剩余部分被分成 m^2 个各含 4 个小方格的小正方形. 位于 m^2+2m 个上述图形中不少于 2 个图形上的筹码每次做内走，不少于 1 个图形上的筹码每次做外走，我们有不等式

$$2k+l \geqslant 2m^2+2m \quad ③$$

因为每个小正方形中的筹码走不少于 2 步，而在“小骨牌”中的筹码至少走一步.

由 ① 式与 ③ 式得出 $3(k+l) \geqslant 4m^2+4m=n^2-1$. 如果这里 $n^2 \equiv 0(mod 3)$，那么显然 $3(k+1) \geqslant n^2, k+1 \geqslant \frac{n^2}{3}=[\frac{n^2}{3}]$，相反 $n^2 \equiv 1 mod(3), k+1 \geqslant \frac{n^2-1}{3}=[\frac{n^2}{3}]$

5. 解: 当 $n=4$ 时，若 P_1, P_2, P_3, P_4 不是凸四边形的顶点，不妨假设 P_4 在 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内部，则 $a_1=a_2=a_3=0, a_4=1$，所以 $m(S)=1$.

假设 P_1, P_2, P_3, P_4 是一个凸四边形的顶点，如果 $\angle P_1+\angle P_3>180°$，则 $\angle P_2+\angle P_4<180°$. 所以

$$a_1=a_3=1, a_2=a_4=0, m(S)=2$$

同理，如果 $\angle P_1+\angle P_3<180°$，则 $\angle P_2+\angle P_4>180°$. 所以

$$a_1=a_3=0, a_2=a_4=1, m(S)=2$$

下面考虑一般的情形.

数 $m(s)$ 是对所有满足条件的点对 $(P_t, P_iP_jP_k)$ 计数，其中 $(P_t, P_iP_jP_k)$ 表示包含 P_t 的圆 $P_iP_jP_k$ 的数目，$1 \leqslant t \leqslant n$. 对于 S 中的由四个点构成的每个集合 $\{P_i, P_j, P_k, P_t\}$ 有四种可能，即 $(P_i, P_jP_kP_t)$，$(P_j, P_kP_tP_i)$，$(P_k, P_tP_iP_j)$ 和 $(P_t, P_iP_jP_k)$ 有可能贡献一个 1 到 $m(S)$ 中，如果这四个点组成一个凸四边形，则这四个点对中恰有两个点对各贡献一个 1 到 $m(S)$ 中，否则这四个点对中只有一个点对贡献一个到 $m(S)$ 中.

如果记 $a(S)$ 和 $b(S)$ 分别为 S 中凸四边形和不能构成凸四边形的四点组的数目，那么 $m(S)=2a(S)+b(S)$.

又因 $a(S)+b(S)=C_n^4$，所以，$m(S)=C_n^4+a(S)$

下面证明 $f(n)=2C_n^4$ 满足条件.

如果 S 中的点是凸 n 边形的顶点，那么 $a(S)=C_n^4$，所以

$$m(S)=2C_n^4=f(n)$$

反之，如果 $m(S)=f(n)$，那么 $a(S)=C_n^4$. 所以，由 S 中每四个点所确定的四边形均为凸四边形. 因此，S 中的点是凸 n 边形的顶点.

6. 解: 当 $n=3,4$ 时，结论显然成立.

当 $n=5$ 时，连出 5 条对角线的正五边形中，恰有钝角三角形与锐角三角形各 5 个，当 5 只喜鹊 A、B、C、D、E 飞落前后的状态如图 Ⅱ－D－6－29 所示时，锐角三角形与钝角三角形互变，不满足题中要求，故 $n=5$ 不行.

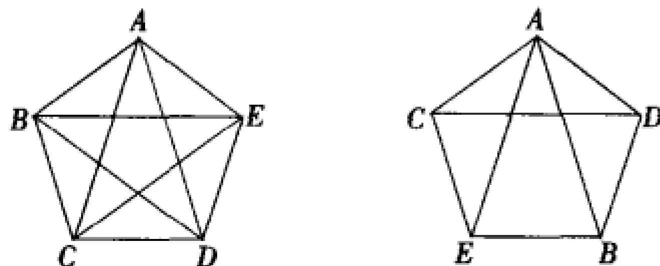


图 Ⅱ－D－6－29

当 $n=2m, m \geqslant 3, m \in N$ 时，取正 n 边形的一对相对顶点 A 和 B 并考察从这两点飞起的两只喜鹊.（仍称之为 A 和 B）的落点. 若喜鹊 A 和 B 的落点仍是一对相对顶点，则可任取另一只喜鹊 C，于是 A、B、C 三只喜鹊飞落前后所占据的顶点都构成直角三角形. 若喜鹊 A 和 B 的落点 A'、B' 不是相对顶点，则可记 A' 的相对顶点为 C'，并记返回后落在 C' 的喜鹊是从点 C 飞起的. 于是，A、B、C 三只喜鹊飞

落前后所占据的顶点都构成直角三角形.这就证明了所有不小于 4 的偶数 n 都满足要求.

设 $n = 2m + 1, m \geqslant 3, m \in N$,这时图中没有直角三角形.让我们来证明如下引理.

引理　当 $n = 2m + 1, m \geqslant 3$ 时,连出所有对角线的正 n 边形中,钝角三角形的个数多于所有三角形个数的一半.

引理证明　设正 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$.这时以对角线 A_1A_{j+1} 为最长边的钝角三角形的个数为 $j-1$,所以,钝角三角形的总数为

$$S = (2m+1)[1+2+\cdots+(m-1)] = \frac{1}{2}(2m+1)m(m-1)$$

正 n 边形中三角形总数为 $t = C_n^3 = \frac{1}{3}(2m+1)m(2m-1)$

因为

$$m - 1 > \frac{1}{3}(2m-1) \Leftrightarrow 3m - 3 > 2m - 1 \Leftrightarrow m > 3 - 1 = 2$$

后者显然成立,故知引理成立.

由引理可知,当 $n = 2m + 1, m \geqslant 3$ 时,总存在 3 只喜鹊,它们飞落前所在的 3 个顶点都构成钝角三角形.这表明不小于 7 的所有奇数都满足题中的要求.

综上可知,满足题中要求的所有自然数是 $n \geqslant 3, n \neq 5$.

第九讲　离散极值与组合优化

A组

1. 解:9 只鸟在同一圆周上,1 只鸟不在这圆周上,满足题目条件.

设有鸟最多的圆上至少有 l 只鸟,则 $4 \leqslant l \leqslant 9$.

首先证明,$l \neq 4$.由 $l \leqslant 9$,必有 4 只鸟不在同一圆周上,过其中每 3 只作一个圆,共得 4 个圆,其余 6 只鸟中的每一只与上述 4 只鸟组成 5 元组,因而这只鸟必在(上述 4 个圆中)某一个圆上,6 只鸟中必有 2 只在同一个圆上,从而这个圆上至少有 5 只鸟.

其次,如果 $5 \leqslant l \leqslant 8$,设圆 C 上有 l 只鸟,则 C 外至少有两只鸟 b_1, b_2.对圆 C 上任三只鸟,其中必有两只与 b_1, b_2 共圆,设 C 上的 b_3, b_4 与 b_1, b_2 共圆,b_5, b_6 与 b_1, b_2 共圆,C 上第 5 只鸟 b_7 及 b_3、b_5,这 3 只鸟中没有两只能与 b_1、b_2 共圆,矛盾.

所以 $l = 9$.

2. 解:设染色的线段至少有 33 条,则由于线段共 $C_9^2 = 36$ 条,不染色的线段至多 3 条.

若点 A_1 引出不染色的线段,去掉 A_1 及所引出的线段,若剩下的图中,还有点 A_2 引出不染色的线段.去掉 A_2 及所引出的线段,依此进行,由于不染色的线段至多 3 条,所以至多去掉 3 个顶点(及从它们引出的线段),即有 6 个点,每两点之间的连线染上红色及蓝色.

熟知这里存在一个同色三角形.

如图表明染色的边少于 33 条时,未必有同色三角形(不染色的边 1 - 9, 2 - 8, 3 - 7, 4 - 6 没有画出),其中 1、9 与 2、8 间的虚线表明 1 - 2, 1 - 8, 9 - 2, 9 - 8 均为虚线,5 与 4、6 间的实线表明 5 - 4, 5 - 6 均为实线等等.

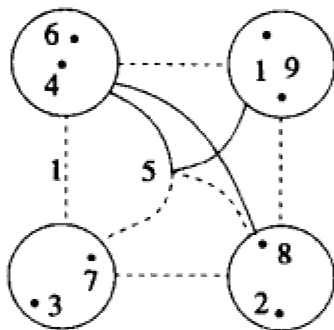


图 Ⅱ - D - 6 - 30

因此,$n = 33$.

3. 解:设最受欢迎的书有 k 人购买,每人买 3 本书,共买 30 本书,若 $k \leqslant 4$,由于 4×30,不可能每种书均被 4 人购买,设第一个人购的书为 a、b、c,并且买 a 的人 $\leqslant 3$ 个,则与第一个人的公共图书为 a 的,不超过 2 人;为 b 或 c 的,均不超过 3 人,从而总人数 $\leqslant 1 + 2 + 3 + 3 = 9$,矛盾!因此 $k \geqslant 5$.

现给出一种 $k=5$ 的购书法：

因此，被购买人数最多的一种书，最少有 5 人购买.

书＼人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	√	√	√							
B	√			√	√	√				
C	√						√	√	√	√
D		√		√	√					
E		√				√	√	√		
F			√	√	√		√	√		
G		√				√			√	√

图 Ⅱ－D－6－31

4. 证：最多发出 100000 个，事实上，若发出了 100001 个车牌，则由抽屉原则知至少有 100001 个号码首位相同，同理这 100001 个号码中至少有 1001 个号码第 2 位亦相同，…，依此类推，至少有 2 个号码前 5 位均相同，违反规定. 另一方面，可发出 100000 个车牌并符合规定：号码的后 5 位任意填写但没有两个完全相同（有 10^5 种填法），首位则为后 5 位数字之和的个位数字. 若有两个号码后 5 位数字仅有 1 位不同，则其首位也必不同. 所以这 100000 个号码符合规定.

5. 解：设有 n 个学校，第 i 个学校派出 x_i 个男选手、y_i 个女选手，$i=1,2,\cdots n$.

由题意，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right|\leqslant 1$$

单打比赛有 $\sum\limits_{i<j}(x_ix_j+y_iy_j)$ 场，混单比赛有 $\sum\limits_{i<j}(x_iy_i+x_jy_i)$ 场，由题意，有 $\left|\sum\limits_{i<j}(x_ix_j+y_iy_j-x_iy_i-x_jy_j)\right|\leqslant 1$

即 $\left|\sum\limits_{i<j}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right|\leqslant 1$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\right)^2-2\sum_{i<j}(x_i-y_i)(x_j-y_j)$$
$$\leqslant 1+2+3$$

即在 $(x_i-y_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 中至多只有三项不为零，而且这 n 项都应为 1.

这就是说，至多 3 个学校的人数 x_i+y_i 为奇数.

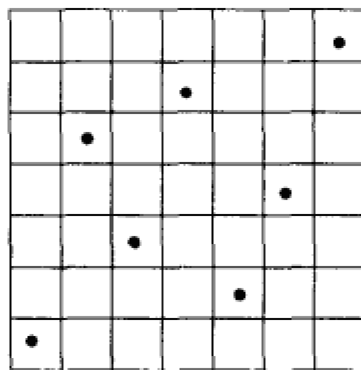
如果只有 3 个学校，其中 2 个各派 1 名男孩，另一个学校派 1 名女孩，那么题目中的条件全满足，而奇数个选手的学校恰好 3 个.

6. 解：显然，如果选出 n 个小方格满足问题的条件，那么，在每一行，每一列都恰有一个选定的小方格，右图表明 $n=7$ 时，有满足要求的选法.

设 $n>7$，称第一个方格被选定的行为 A. 若 A 是第一行，则称第二、三行为 B、C，若 A 是第 n 行，则称第 $n-1$，$n-2$ 行为 B、C，若 A 不是第一行与第 n 行，则称与 A 相邻的两行为 B，C.

设行 B 中第 b 个方格是选定的. 如果 $b\leqslant n-\left[\frac{n}{2}\right]$ 或 $b>\left[\frac{n}{2}\right]+1$（这是 $[x]$ 表示 x 的整数部分）. 那么在 A、B 两行中就可以找到一个面积不小于 n 而其中不含选定小方格的长方形，所以必定有：$n-\left[\frac{n}{2}\right]<b<\left[\frac{n}{2}\right]+2$，考虑 A、B、C 三行中，由第 $2,3,\cdots,n-\left[\frac{n}{2}\right]$ 列构成的长方形与第 $2+\left[\frac{n}{2}\right],\cdots,$

n 列构成的长方形.因为 $n > 7$.它们的面积都不小于 n,这两个长方形中都不含有 A、B 两行中选定的小方格,而 C 这行中只能有一个选定的小方格,所以这两个长方形中必定有一个是不包含有选定的小方格的.



图Ⅱ-D-6-32

因此,所求的最大值为 $n = 7$.

7. 证:$n = k$ 时结论显然.假设命题对 $n-1(\geqslant k)$ 成立.考虑由 $S_1 > S_2 >, \cdots, > S_n$ 组成的 n 元集 S.

由归纳假设,对 $S_0 = \{S_2, S_3, \cdots, S_n\}$ 存在 $k(n-1-k)+1$ 个形如 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ 的互不相等的数,其中 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 S_0 中不同元素.

显然 $$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \cdots + S_k &> S_1 + S_2 + \cdots + S_{k-1} + S_{k+1} \\ &> S_1 + S_2 + \cdots + S_{k-2} + S_k + S_{k+1} \\ &> \cdots > S_1 + S_2 + S_4 + \cdots + S_{k+1} \\ &> S_1 + S_3 + S_4 + \cdots + S_{k+1} \end{aligned}$$

并且这 k 个数中最小的大于 $S_2 + S_3 + \cdots + S_{k+1}$,即大于 S_0 中任 k 个元素的和.所以对 n 元集 S,相应的集 T 至少有 $k(n-1-k)+1+k = k(n-k)+1$ 个元素.

于是,本题结论对一切自然数 $n \geqslant k$ 成立.

8. 解:假设长方形的宽与长分别被分成 m 等分与 n 等分,则 $\frac{24}{m} = \frac{52}{m}$,因此 $\frac{m}{n} = \frac{6}{13}$,所以有正整数 k,使 $m = 6k, n = 13k$.所用的栅栏总长度是

$$\begin{aligned}(m-1)52 + (n-1)24 &= k(6 \cdot 52 + 13 \cdot 24) - (52 + 24) \\ &= 624k - 76 \leqslant 1994\end{aligned}$$

所以

$$k \leqslant \frac{1994 + 76}{624} = 3.31\cdots$$

故 k 的最大值为 3,此时正方形的总数为

$$mn = (6 \cdot 3)(13 \cdot 3) = 702$$

9. 解:将集合 S 划分为两两不相交的子集的并;$F_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{116}$,这里 F_i 是 S 中除以 117 余数为 i 的元素的集合($i = 0, 1, \cdots, 116$),F_i 的元素个数记作 $|F_i|$,则

$|F_0| = 17, |F_1| = |F_2| = |F_3| = \cdots = |F_8| = 18, |F_9| = \cdots = |F_{116}| = 17$. F_0 中的元素最多只能有一个选入 A 中,而 F_k 与 F_{117-k} 中只能有一个集合的元素全在 A 中,为使 A 中元素尽量多,故应将 $F_1, F_2, \cdots, F_8$ 全部选入 A 中.因此这个 A 中元素共有 $1 + |F_1| + |F_2| + \cdots + |F_{58}| = 995$.

故 $k_{\max} = 995$.

10. 解:8个点,只能连出 $C_8^2 = 28$ 条线,再加一个点,由它向上述8点中的两个点引线,便得到30条线,因此,所求的端点数至少是 9.

B组

1. 解:当 $S \leqslant 2n-1$ 时,在第一行与第一列中取 S 个方格,显然这 S 个方格不能组成一把钥匙.

下面证明当 $S = 2n(n \geqslant 4)$ 时,在 $n \times n$ 方格纸中任取 $2n$ 个方格都组成一把钥匙.

在 n 列中有 $2n$ 个方格($n \geqslant 4$),一定有两列存在,在这两列的每一列中,至少有两个方格(如果有 $n-1$ 列至多一个方格,那么总数至多只有 $2n-1$ 个方格).由于是等差密码表,知道一列中两个数,那么公差 d 可以求出,从而可以破译这一列.因此,首先可以破译两列,然后考虑 n 行,现在已知道每行中两个数,类似列的情况,可以破译每一行,于是这等差密码表就全部破译了,于是,所求的最小的自然数 $S = 2n$.

(2) 当 $t \leqslant n$ 时,在同一条对角线上取 t 个方格,显然无法破译密码表.

当 $t = n+1$ 时,下面证明能破译这等差密码表.

首先,这 $n+1$ 个方格位于这方格纸 n 列中,必有一列至少有两个方格,由于两条对角线与一列至多有两个公共方格,那么这列上只有两个方格.从(1)的证明可知,能破译这列,还有 $n-1$ 个方格($n-1 \geqslant$

3) 不在这列中，由于 $n-1\geqslant 3$，有两种可能的情况，第一种情况，有另一列有两方格，那么这列也可破译出.有两列可破译出，从(1)的证明可知，能破译出这张等差密码表；第二种情况，在剩下的 $n-1$ 列中，每列只有一个方格，那么考虑行，由于两条对角线与每行至多有两个公共点，那么这 $n-1(n-1\geqslant 3)$ 个方格至少位于两行上，因此，至少有两行，每行都至少有两方格数已知，一方格数是原来的，一方格数是被破译这列的，类似(1)的证明，那么这张密码表也能破译出.

综上有 S 的最小值为 $2n$，t 的最小值为 $n+1$

2.解：设在 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=n$ 时

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1 \quad ①$$

的最小值为 S_n，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 为自然数，并且将它们依大小顺序排列成 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_{10}$ 时，$b_k\geqslant k(k=1,2,\cdots,10)$.

在 $n>55$ 时，至少有一个 k 使 $b_k>k$，将这个 b_k 减少 1，S_n 至少减少 $1\times(1+2)=3$，所以

$S_n\geqslant S_{n-1}+3$

从而 $S_{1995}\geqslant S_{1994}+3\geqslant\cdots\geqslant S_{55}+3(1995-55)$

$=S_{55}+5820$

对于 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=55$，有 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}=\{1,2,\cdots,10\}$

将 10 减少为 9，和 ① 至少减少 3，再将两个 9 减为 9，和 ① 至少减少

$1+2+(1\times 2+2+3)+[(1+2)\times 2+3+4]+[(1+2+3)\times 2+4+5]=44$

而由 5 个 6 与 1,2,3,4,5 这 10 个数形成的和 ①，如果有两个 6 相邻，总可将 6 与另一个相邻的 a 对调，和 ① 减少 $6\times 6+ab-6a-6b=(6-a)(6-b)\geqslant 0$，($b$ 为与 a 相邻的另一类)所以当这 5 个 6 都不相邻时和 ① 最小，最小值为 $6\times 2\times(1+2+3+4+5)=180$.

所以 $S_{1995}\geqslant 180+44+5820=6044$.

而当 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10})=(1950,1,9,3,7,5,6,4,8,2)$ 时，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1=6044$，因此，6044 为所求的最小值.

3. 解：设第 i 题有 a_i 个人答对，于是恰有

$b_i=C_{a_i}^2$

个二人组答对该题($i=1,2,\cdots,15$)

记 $a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{15}\}$，我们考察以下和数 $\sum\limits_{i=1}^{15}b_i$，则有

$$15C_a^2\geqslant\sum_{i=1}^{15}b_i\geqslant C_{21}^2$$

即 $a(a-1)\geqslant\dfrac{420}{15}=28$，所以 $a\geqslant 6$

下面证明 $a=6$ 是不可能的.

假设 $a=6$，即每题至多有 6 人答对，如果某人仅答对三题，则因为每道题他至多只能与另外 5 人共同答对，所以他至多与另外 15 人有共同答对的题，与题设矛盾，故每人至少答对四道题.

又由于 $21\times 5=105>6\times 15=90$，因此不能每人都答对不少于五道的题目，所以至少有一人恰答对四道题.将该人编号为 1，记 S_i 为第 i 道题答对的人的集合.则 1 与其它 20 人中的每一个都有共同答对的题目，所以，他答对的四道题中每一道都有另 5 人答对，于是，分别答对这四道题的人构成除了 1 号人员而外别无共同人员的四个集合，不妨设为

$S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S_2=\{1,7,8,9,10,11\}$

$S_3=\{1,12,13,14,15,16\}$

$S_4=\{1,17,18,19,20,21\}$

另一方面，在全部 15 道题当中，至少有 12 道题有 6 人答对，否则将导致矛盾：

$$C_{21}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{15} b_i \leqslant 11C_6^2 + 4C_5^2 = 205$$

除去前述四道题,还有八道题每题有 6 人答对,考察答对这八道题中某一道的 6 个人,他们之中或者有三人以上同属一个 S_j;或者两人属某个 S_j,并有另两个人属于 $S_k(j,k \in \{1,2,3,4\}, j \neq k)$.

于是,在计算 $\sum_{i=1}^{15} b_i$ 时,这八道题中的每一道都至少产生两次重复计数,由此得到

$$C_{21}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{15} b_i - 8 \times 2 \leqslant 15C_6^2 - 16 = 209$$

矛盾,因此 $a = 6$ 是不可能的,由此 $a \geqslant 7$.

下面构造实例说明 $a = 7$ 的情形可以实现.为此,先将参加考试的人员编号 1 ~ 21,并定义以下一些人员的集合:

$P_i = \{2i-1, 2i\}, i = 1,2,\cdots,6$

$P_7 = \{13,14,15\}$

$P_8 = \{16,17,18\}$

$P_9 = \{19,20,21\}$

利用这些讯号,我们构造下面的表格,指明做对各题的人员,容易验证:在表格所显示的情形中,参加考试的 21 个人每两个人都有共同答对的题目,并且最多有 7 个人答对同一道题.

题号	答对该题的人员集合
1	$P_1 \cup P_2 \cup P_3$
2	$P_4 \cup P_5 \cup P_6$
3	$P_1 \cup P_4 \cup P_7$
4	$P_2 \cup P_5 \cup P_8$
5	$P_3 \cup P_6 \cup P_9$
6	$P_1 \cup P_5 \cup P_9$
7	$P_2 \cup P_6 \cup P_7$
8	$P_3 \cup P_4 \cup P_8$
9	$P_1 \cup P_6 \cup P_8$
10	$P_2 \cup P_4 \cup P_9$
11	$P_3 \cup P_5 \cup P_7$
12	$P_7 \cup P_8$
13	$P_8 \cup P_9$
14	$P_7 \cup P_9$
15	$\varnothing$

4. 解:注意到 $999 = 37 \times 27$,令 $A = \{3,5,\cdots,37\}, B = M - A$,于是 $|A| = 18, |B| = 981$.

下面证明,M 的子集B 不能同时满足条件(1) ~ (3),若不然,设 $S = \{S_1,S_2,S_3,S_4\}, T = \{t_1,t_2,t_3,t_4\}$ 且有 $S_1 < S_2 < S_3 < S_4, t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.因为$(S_4,t_4) = 1$,故二者中至少有一个为奇数,不妨设 S_4 为奇数,由条件(1)知,S_1,S_2,S_3 也都是奇数,从而,$S_4 \geqslant 3S_3 \geqslant 9S_2 \geqslant 27S_1 \geqslant 27 \times 39 > 1000$,矛盾.这说明所求的最小自然数 $n \geqslant 982$.

另一方面,令

$$\begin{cases} S_1 = \{3,9,27,81,243,729\} \\ T_1 = \{2,4,8,16,32,64\} \\ U_1 = \{6,12,24,48,96,192\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_2 = \{5,15,45,135,405\} \\ T_2 = \{41,82,164,328,656\} \\ U_2 = \{10,20,40,80,160\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = \{7,21,63,189,567\} \\ T_3 = \{43,86,172,344,688\} \\ U_3 = \{14,28,56,112,224\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_4 = \{11,33,99,297,891\} \\ T_4 = \{47,94,188,376,752\} \\ U_4 = \{22,44,88,176,352\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_5 = \{13,39,117,351\} \\ T_5 = \{53,106,212,424\} \\ U_5 = \{26,52,104,208\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_6 = \{17,51,153,459\} \\ T_6 = \{59,118,236,472\} \\ U_6 = \{34,68,136,272\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_7 = \{19,57,171,513\} \\ T_7 = \{61,122,244,488\} \\ U_7 = \{38,76,152,304\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_8 = \{23,69,207,621\} \\ T_8 = \{67,134,268,536\} \\ U_8 = \{46,92,184,368\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_9 = \{25,75,225,675\} \\ T_9 = \{71,142,284,568\} \\ U_9 = \{50,100,200,400\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{10} = \{29,87,261,783\} \\ T_{10} = \{73,146,292,584\} \\ U_{10} = \{58,116,232,464\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{11} = \{31,93,279,837\} \\ T_{11} = \{79,158,316,632\} \\ U_{11} = \{62,124,248,496\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{12} = \{35,105,315,945\} \\ T_{12} = \{83,166,332,664\} \\ U_{12} = \{70,140,280,560\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{13} = \{37,111,333,999\} \\ T_{13} = \{89,178,356,712\} \\ U_{13} = \{74,148,296,592\} \end{cases}$$

将 S_i, T_i, U_i 中序号相同的3个数组成一个三数组.则共可得到57个三数组.对于 M 的任一982元子集 B,只有 M 中的17个数不在 B 中,故至少有上述57个三数组中的40个含在 B 中.这40个三数组分属于上述的13组中,由抽屉原理知必至少有4个三数组属于上述13组集合对中的同一对中,将这4个三数组写成 3×4 的表,3行数分别为 S, T, U 即可满足题中所有要求.

综上可知,所求的最小自然数 $n = 982$.

5. 解:所求最小自然数为50.

当 $n \leqslant 49$ 时,由于 S 中偶数个数恰为49个,所以必存在 S 的一个 n 元子集,该子集中所有元素均为偶数,那么,子集中任意10个数都有公因数2,不满足要求.

所以 $n \geqslant 50$

下面证明 $n = 50$ 时满足题目要求.

对于 S 的任一 50 元子集 T,记 $E(T) =$ 集合 T 中偶元素的个数,则集合 T 中奇元素个数为 $50 - E(T)$,且 $\mathrm{card}T = 50$.

设 x 是集合 S 中的奇数(x 不一定在 T 中),记 $f(x)$ 为 S 中与 x 不互素的偶数个数,由于任一偶数同 x 的公因数最小为 3,所以 $f(x) \leqslant [\frac{49}{3}] = 16$. 由于 S 中奇数个数与偶数个数均为 49,故 T 中必至少有一个奇数,下面建立一个重要事实.

引理　若有奇数 $x \in T$,使得 $f(x) \leqslant E(T) - 9$,则 S 的 50 元子集必合乎要求.

证:T 中与 x 不互素的偶数个数 $= E(T) - T$ 中与 x 不互素的偶数个数 $\geqslant E(T) - S$ 中与 x 不互素的偶数个数 $= E(T) - f(x) \geqslant 9$. 取 x 及 T 中与 x 互素的 9 个偶数组成 T 的一个 10 元子集,显然,该 10 元子集满足题意.引理得证.

另外,还有一些简单却又必需的事实:S 中前几个奇素数为 3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59;S 中最小素因子为 3 的奇数共有 16 个(即所有是 3 的倍数的奇数);S 中最小素因子为 5 的奇数共有 7 个($5, 5 \times 7, 5 \times 11, 5 \times 13, 5 \times 17, 5 \times 19, 5 \times 5$);$S$ 中最小素因子为 7 的奇数有 4 个($7, 7 \times 7, 7 \times 11, 7 \times 13$);$S$ 中最小素因子大于或等于 11 的奇数最多有 1 个;S 中包含最小元素 1.

下面结合引理对 $E(T)$ 的取值情况进行讨论.

(1) 若 $E(T) \leqslant 25$,则对任意奇数 $x \in T \subset S$,似有 $f(x) \leqslant 16 = 25 - 9 \leqslant E(T) - 9$,由引理,这样的 50 元子集满足题意.

(2) 若 $24 \geqslant E(T) \geqslant 16$,则 T 中奇数个数为 $50 - E(T) \geqslant 50 - 24 = 26$. 此时 $50 - E(T) \geqslant 26 > 24 = 1 + 16 + 7$,所以 T 中必含有最小素因子大于或等于 7 的奇数 x. 于是 $f(x) \leqslant [\frac{49}{9}] = 7 \leqslant E(T) - 9$. 由引理,这样的 50 元子集满足题意.

(3) 若 $15 \geqslant E(T) \geqslant 10$,则 T 中奇数个数 $= 50 - E(T) \geqslant 50 - 15 = 35$. 此时 $50 - E(T) \geqslant 35 = 1 + 16 + 7 + 4 + 7$,所以 T 中必有最小素因子大于或等于引的奇数 x,于是,$f(x) \leqslant f(31) = [\frac{49}{31}] = 1 = 10 - 9 \leqslant E(T) - 9$. 由引理,这样的 T 符合要求.

(4) 若 $E(T) = 9$,则 T 中奇数个数为 $50 - E(T) = 41$ 个. 因为 $1 + 16 + 7 + 4 = 28 = 41 - 13 = [50 - E(T)] - 13$,所以,$T$ 中必有最小素因子大于或等于 59 的奇数 x,于是 $f(x) \leqslant f(59) = [\frac{49}{59}] = 0 = E(T) - 9$,由引理,这样的 T 符合要求.

(5) 若 $E(T) \leqslant 8$,则 T 中奇数个数 $50 - E(T) \geqslant 50 - 8 = 42$. 所以,$T$ 中必有最小素因子大于或等于 61 的奇数 x,则 x 为不小于 61 的素数. 由于 S 的不在 T 中的奇数共有 $49 - [50 - E(T)] \leqslant 49 - 42 = 7$ 个;而 S 中是 3 的倍数的奇数共有 16 个,所以 T 中是 3 的倍数的奇数至少有 $16 - 7 = 9$ 个,这 9 个奇数与 x 组成的 T 的 10 元子集中,有 9 个奇数含公因数 3,另一个奇数为不小于 61 的素数,所以,这 10 个数满足题意,故这样的 T 满足要求.

综上所述,$n = 50$ 合乎要求,所以最小自然数 $n = 50$.

6. 解:设 n 支队依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-3}, B, C_1, C_2$

因为 A 组队得分多,胜场少,而 C 组队得分少,胜场多,所以 A 组每队至少比 C 组队多平 8 场,所以 $n \geqslant 8 + 3 = 11$.

若 $n = 11$. 于是,A 组 8 队,每队至少 8 平,共 64 平,A 组 8 队之间共赛 $C_8^2 = 28$ 场,A 组队与组外队至少平 8 场,其中至少与 C 组队平 4 场,C 组队有队至少平 2 场,于是 A 组每队至少 2 胜 10 平,矛盾.

设 $n = 12$,于是,A 组 9 队,C 组每队至少 6 负,B 队 3 负,B,C 两组合计至少 15 负,A 组队每队至少胜 2 场(若 A 组队有的胜两场,有的胜 1 场,则胜 1 场的 A 组队每队必增加 3 场平局,从而 C 组队每队至少 9 负 4 胜,与 $n = 12$ 矛盾),这样,C 组队 2 胜 1 负 8 平或 2 胜 9 平,B 队 3 胜 4 平 4 负,C 组队 4 胜 7 负,总计胜场数 $18 + 3 + 8 = 29$ 场,负场数 $\leqslant 9 + 4 + 14 = 27$,矛盾.

设 $n = 13$. A 组 10 队，A 队 2 胜 1 负 9 平，B 队 3 胜 5 负 4 平，C 队 4 胜 8 负，列表如下

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	B	C_1	C_2	胜	得分
A_1		1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	3:0	3:0	2	15
A_2	1:1		1:1	0:3	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	3:0	3:0	2	15
A_3	1:1	1:1		1:1	0:3	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	3:0	3:0	2	15
A_4	1:1	3:0	1:1		1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	3:0	2	15
A_5	1:1	1:1	3:0	1:1		1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	3:0	2	15
A_6	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	1:1	1:1	1:1	3:0	0:3	3:0	2	15
A_7	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	1:1	1:1	3:0	3:0	0:3	2	15
A_8	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	1:1	3:0	3:0	0:3	2	15
A_9	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		1:1	3:0	3:0	0:3	2	15
A_{10}	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1	1:1		3:0	3:0	0:3	2	15
B	3:0	1:1	1:1	1:1	1:1	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3		3:0	3:0	3	13
C_1	0:3	0:3	0:3	3:0	3:0	3:0	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3		3:0	4	12
C_2	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3	0:3	3:0	3:0	3:0	3:0	0:3	0:3		4	12

综上所述，队数最小值为 13.

7. 解：(Ⅰ) 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_4$，并设所安排的赛程表中某参加者的赛次为 a_k.

若该参加者仅属一个对子，则另有 a_k 对与该对进行双打，因而至少另有 a_k 人，总人数不少于 $a_k + 2$.

若赛次为 a_k 的参加者属两个对子，则至少另有 $\frac{a_k}{2}$ 对与这两队进行双打，因而至少另有 $\frac{a_k}{2}$ 人，总人数不少于 $\frac{a_k}{2} + 3(< a_k + 2)$.

(Ⅱ) 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$，将证明，若有 $\frac{a_k}{2} + 3$ 名参加者，则可安排符号规则的赛程表，使得相应的赛次集恰为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，并且每名参加者都属两个对子，将对 k 作归纳完成这一结论的证明.

(1) $k = 1$ 时，将 $\frac{a_1}{2} + 3$ 人分成三人小组，每个小组中任两人结为对子，所有不同组的对子进行双打，于是，每人的赛次都为

$$2 \times \frac{a_1}{2} = a_1$$

(2) $k = 2$ 时，将 $\frac{a_2}{2} + 3$ 人分成 S 和 T 两大组，要求 $|S| = \frac{a_1}{2}$，$|T| = \frac{a_2 - a_1}{2} + 3$，将 S 和 T 各分成三人小组，每个小组中的任两人结为对子.

安排 S 大组的每个三人小组中的对子与该三人组以外所有其他对子进行双打；安排 T 大组的每个三人小组中的对子只有 S 大组中的对子进行双打，于是，S 大组中的每人的赛次为

$$2\left(\frac{a_1}{2} - 3 + \frac{a_2 - a_1}{2} + 3\right) = a_2$$

T 大组中每人的赛次为

$$2 \times \frac{a_1}{2} = a_1$$

(3) 假定对于 $k = h - 1$ 和 $k = h$ 情形所述结论成立，考察 $k = h + 1$ 情形，即

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+2}$

设有 $\frac{a_{n+1}}{2} + 3$ 名参加者，将这些参加者分成 S、T 和 U 三大组，要求

$|S|=\frac{a_1}{2}$，$|T|=\frac{a_n-a_1}{2}+3$，$|U|=\frac{a_{n+1}-a_n}{2}$

再将 S、T、U 三大组各分成三人小组，每个小组内的任两人结成对子.

安排 S 大组中每个三人组的对子与各大组中所有其他的对子进行双打.

安排 T 大组每个三人组的对子都与 S 大组中的对子进行双打，另外，还在 T 大组内安排赛次集为 $A'=\{a_2-a_1,\cdots,a_n-a_1\}$ 的 T 大组内的赛程(根据归纳假设，这样的安排可实现).

安排 U 大组中每个三人组的对子只与 S 大组中的对子进行双打.

安排这样的赛程表符合规则.

S 大组内参加者的赛次为

$$2(\frac{a_1}{2}-3+\frac{a_n-a_1}{2}+3+\frac{a_{n+1}-a_n}{2})=a_{n+1}$$

T 大组内参加者的赛次分别为以下这些数

$$2\times\frac{a_1}{2}+a_j-a_1=a_j, j=2,3,\cdots,h.$$

U 大组内参加者的赛次为

$$2\times\frac{a_1}{2}=a_1$$

因此，与所安排的赛程表相应的赛次集恰为：

$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$

至此，我们证明了如下结论：如果 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$a_1<a_2<\cdots<a_k$，并且有 $\frac{a_k}{2}+3$ 名参加者，那么，可安排符合规则的赛程表，使得相应的赛次表恰为 A，并且 $\frac{a_k}{2}+3$ 是满足上述要求的最少参加者人数.

8. 解：在序列 A 中考虑下列两个操作.

(1) 如果 $a_i>a_{i+1}$，交换这两项得到新的序列

$(a_1,a_2,\cdots,a_{i+1},a_i,\cdots,a_{2001})$.

(2) 如果 $a_{i+1}=a_i+1+d$，其中 $d>0$，将 $a_1a_2,\cdots,a_i$ 同时加上 d，得到新的序列.

$(a_1+d,a_2+d,\cdots,d_i+d,a_{i+1},\cdots,a_{2001})$.

显然，施行操作(1)，则 m 的值不减，重复操作(1)，能使序列重排为非减序列，因此，可以假设 m 有最大值的序列是非减序列. 如果 A 是非减序列，施行操作(2)，则 m 的值不减，因此，任意有最大值 m 的集合 A 具有下列形式.

$$(\underbrace{a,\cdots,a}_{t_1\text{个}},\underbrace{a+1,\cdots,a+1}_{t_2\text{个}},\cdots,\underbrace{a+s-1,\cdots,a+s-1}_{t_3\text{个}})$$

这里 $t_1,t_2,\cdots,t_s$ 是每个子序列的项数，且 $s\geqslant3$，$t_1+t_2+\cdots+t_s=2001$. 对于这样的序列 A，有 $m=t_1t_2t_3+t_2t_3t_4+\cdots+t_{s-2}t_{s-1}t_s$.

当 $s>4$ 时，可将 2001 分成 $s-1$ 个部分，而使 m 增加，即

$t_2+t_3+(t_1+t_4)+t_5+\cdots+t_s=2001$.

则 $t_2t_3(t_1+t_4)+t_3(t_1+t_4)t_5+(t_1+t_4)t_5t_6+\cdots>t_1t_2t_3+t_2t_3t_4+t_3t_4t_5+t_4t_5t_6+\cdots$.

当 $s=4$ 时，做如上的变化 $t_2+t_3+(t_1+t_4)=2001$，则 m 的值不改变.

于是，当 $s=3$ 时，m 有最大值，易知当 $t_1=t_2=t_3=\frac{2001}{3}=667$ 时，m 有最大值 $667^3=296\ 740\ 963$.

这个最大值当 $s=4$ 时也能获得. 设 $t_1=a$，$t_2=t_3=667$，$t_4=667-a$，其中 $1\leqslant a\leqslant666$，则 m 的最大值为 $667^3=296\ 740\ 963$.

封面设计：大盟文化

专家阵容最为强大

数学奥林匹克竞赛专家委员会名单

单　墫　南京师范大学数学系教授，
　　　　国际中学生数学奥林匹克竞赛中国队教练。

李尚志　中国科技大学数学系教授，中国数学会理事，
　　　　安徽省数学会秘书长，“国家级教学名师奖”获得者。

陈传理　华中师范大学数学系教授，中国数学会普及委员会副主任，
　　　　国际中学生数学奥林匹克竞赛中国队教练。

周沛耕　北京大学附属中学数学特级教师，
　　　　多届教育部理科实验班数学主讲教师，
　　　　国际中学生数学奥林匹克竞赛中国队教练，
　　　　多届全国中学生数学奥林匹克竞赛北京队主教练、领队。

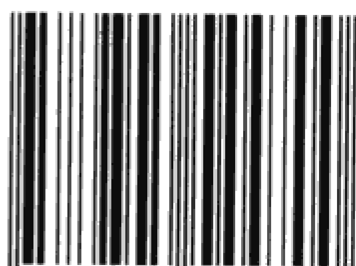
熊　斌　华东师范大学数学系教授，
　　　　国际中学生数学奥林匹克竞赛中国队教练。

刘裕文　四川省中学数学特级教师，
　　　　全国中学生数学奥林匹克竞赛四川省、
　　　　陕西省、重庆市首席教练员。

苏建一　辽宁省中学数学特级教师，
　　　　全国中学生数学奥林匹克竞赛高级教练员。

李庆胜　山东省中学数学特级教师，
　　　　全国中学生数学奥林匹克竞赛高级教练员。

ISBN 7-80554-470-0



9 787805 544700 >

ISBN 7-80554-470-0／G · 76

定价：69.00 元